Une remarque sur le théorème de Cameron–Martin

Sylvie Roelly et Hans Zessin

Introduction. Dans la note au CRAS [3] (pour un résultat plus fin, voir [4]) nous caractérisions la mesure de Wiener P sur $\mathcal{C}(0,1)$ comme la seule probabilité sur cette espace pour laquelle l'intégrale stochastique et l'opérateur de dérivation soient en dualité. C'est cette caractérisation de P que nous utilisons ici pour démontrer très simplement le premier théorème de transformation de Cameron et Martin [1] la mesure image de P par une translation déterministe sur les trajectoires est absolument continue par rapport à P, et de densité la martingale exponentielle bien connue. L'intérèt de notre méthode réside dans le fait que nous n'utilisons ni la formule d'Itô, ni une approximation du processus de translation par des processus simples, comme cela est le cas dans les preuves usuelles, mais uniquement des calculs élémentaires de dérivée de Fréchet de fonctionnelles sur $C(0,1)$.

1. Voici le théorème précis dont nous proposons une démonstration élémentaire:

Théorème. *L'image de la mesure de Wiener P sur $\Omega = \mathcal{C}(0,1)$ par la translation τ définie sur Ω par:*

$$\tau : \Omega \longrightarrow \Omega$$

$$\omega \longmapsto \tau(\omega) = \omega + \int_0^{\cdot} b(s)ds \tag{1}$$

où $b \in L^2(0,1)$, est la mesure de probabilité Q de densité $\mathcal{E}(b)$ par rapport à P, où

$$\mathcal{E}(b) = \exp\left(\int_0^1 b(s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^1 b^2(s)ds\right). \tag{2}$$

($\int_0^1 b(s)dXs$ est l'intégrale de Wiener de b par rapport au processus canonique X).

La preuve s'appuiera essentiellement sur la proposition suivante (Théorème 1.2 de [4]):

Proposition:. *La mesure de Wiener est l'unique probabilité sur Ω sous laquelle le processus canonique X_t soit intégrable pour tout t et pour laquelle l'équation*

$$E(F \cdot \int_0^1 g(s)dX_s) = E(D_g F) \tag{3}$$

soit satisfaite pour toute fonctionnelle F "régulière" sur Ω, i. e. de la forme $F = \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, ϕ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^n$, $0 \le t_1 < \dots < t_n \le 1$, et pour toute fonction étagée g sur $[0,1]$.

$D_g F$ représente la dérivée de Fréchet de F, fonctionnelle sur l'espace de Wiener, dans la direction $\int_0^\cdot g(s)ds (\in \Omega)$:

$$D_g F(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(F(\omega + \varepsilon \int_0^\cdot g(s)ds) - F(\omega)), \omega \in \Omega.$$

Quand F est régulière, égale à $\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, on a:

$$\begin{aligned} D_g F &= \sum_{i=1}^n \int_0^{t_i} g(s)ds \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}). \\ &= \int_0^1 g(s) D_s F ds \end{aligned}$$

où $D_s F = \sum_{i=1}^n 1_{[0,t_i]}(s) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

Rappelons très brièvement les idées simples intervenant dans la preuve de cette caractérisation de P:

i) Que l'équation (3) soit satisfaite sous P provient, après moultes simplifications, de la propriété suivante de la loi gaussienne centrée réduite $\sigma(dx)$ sur $\mathbf{R}$: pour toute f de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact: $\int f(x)x\sigma(dx) = \int f'(x)\sigma(dx)$.

ii) Réciproquement, l'équation (3) détermine la probabilité sous jacente sur Ω, car la fonctionnelle caractéristique associée, $g \to E(\exp(i \int g dX))$, est identifiée sur la classe des fonctions g étagées comme égale à $\exp -\frac{1}{2}\int_0^1 g^2(s)ds$, ce qui suffit pour conclure.

2 –Preuve du théorème:

Notons Q la mesure image de P par τ, $Q = P \circ \tau^{-1}$ et R, la mesure de densité $\mathcal{E}(b)^{-1}$ par rapport à Q. Puisque la fonction de dérive b est dans $L^2(0,1)$, le processus $\mathcal{E}(b)^{-1}$ est Q–intégrable, ce qui implique que R est une mesure finie sur Ω. De plus

$$E_Q(\mathcal{E}(b)^{-1}) = E_P(\exp(-\int_0^1 b(s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^1 b^2(s)ds)) = 1.$$

Donc R est une mesure de probabilité. Notre but est d'exhiber l'équation fonctionnelle similaire à (3) satisfaite sous R par une classe assez grande de fonctionnelles.

i) Appliquons (3) à la fonctionnelle $F \circ \tau$, encore régulière:

$$(4) \qquad E_P(F \circ \tau \cdot \int_0^1 g dX) = E_P(D_g(F \circ \tau))$$

Or $d(X \circ \tau) = dX + b ds$ d'où $\int g dX = \int g d(X \circ \tau) - \int gb \ ds$.

Le membre de gauche de (4) devient donc

$$E_Q(F \cdot \int_0^1 g \ dX) - E_Q(F \cdot \int_0^1 gb \ ds).$$

Calculons maintenant $D_g(F \circ \tau)$: *la fonction de dérive b étant déterministe*, l'on a commutativité des opérateurs de dérivation D et de translation τ:

$$(5) \qquad D_g(F \circ \tau) = D_g F \circ \tau$$

et (4) se transforme en:

$$(6) \qquad E_Q(F \cdot \int_0^1 g dX) = E_Q(D_g F) + E_Q(F \cdot \int_0^1 gb \ ds).$$

Nous voulons appliquer (6) aux fonctionnelles de la forme $F \cdot \mathcal{E}(b)^{-1}$. Or, si b n'est pas etagée, $\mathcal{E}(b)$ (et $\mathcal{E}(b)^{-1}$) ne sont pas des fonctionnelles élémentaires, mais il est aisé de vérifier que (3), et donc (6), se généralisent aux fonctionnelles F de $W^{1,2}(\Omega)$, sous-espace de $L^2(\Omega, P)$ contenant les élements dont la différentielle $(D_t F(\omega))_{0 \leq t \leq 1, \omega \in \Omega}$ appartient à $L^2((0,1) \times \Omega, dt \otimes dP)$(Le lecteur trouvera dans [2] par exemple une introduction claire et détaillée aux espaces de type $W^{k,p}$ et à leur rôle dans le calcul anticipatif). (6) entraîne donc, pour toute fonctionnelle régulière F,

$$E_Q(\mathcal{E}(b)^{-1} \cdot F \cdot \int_0^1 g \ dX) = E_Q(D_g(F \cdot \mathcal{E}(b)^{-1})) + E_Q(F \cdot \mathcal{E}(b)^{-1} \cdot \int_0^1 gb \ ds$$

$$\Leftrightarrow (7) \qquad E_R(F \cdot \int_0^1 g \ dX) = E_R(D_g F) + E_Q(F \cdot (D_g(\mathcal{E}(b)^{-1}) + \mathcal{E}(b)^{-1} \int gb \ ds)).$$

Calculons $D_g(\mathcal{E}(b)^{-1}) = D_g(\exp(-\int_0^1 b(s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^1 b^2(s) ds))$.

Puisque b est déterministe, ce qui est dans l'exponentielle est une fonction linéaire de ω, d'où

$$(8)\qquad D_g(\mathcal{E}(b)^{-1}) = \mathcal{E}(b)^{-1}D_g(-\int_0^1 b(s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^1 b^2(s)ds)$$
$$= \mathcal{E}(b)^{-1}D_g(-\int_0^1 b(s)X_s)$$
$$= -\mathcal{E}(b)^{-1}\int_0^1 b(s)g(s)ds.$$

Donc, dans (7), le dernier terme disparait, ce qui implique que, pour toute fonctionelle régulière F sur Ω et pour toute fonction g étagée sur [0,1]:

$$(9)\qquad E_R(F\cdot\int_0^1 gdX) = E_R(D_gF).$$

Pour pouvoir appliquer notre proposition à R, il suffit de montrer que l'hypothèse $E_R(|X_t|) < +\infty$ est satisfaite pour tout t de $[0,1]$. Mais

$$E_R(|X_t|) < +\infty \Leftrightarrow E_Q(|X_t|) < +\infty$$

(car $\mathcal{E}(b) > 0$ p. s.) et

$$E_Q(|X_t|) = E_P(|X_t + \int_0^t b(s)ds|)$$
$$\leq E_P(|X_t| + \int_0^t |b(s)|ds)$$
$$< +\infty.$$

Donc (9) entraine que $R = P$, soit encore

$$P\circ\tau^{-1} = \mathcal{E}(b)\cdot P, \quad c.q.f.d..$$

REMARQUE. *On peut généraliser sans difficultés la démonstration ci-dessus au cas ou la translation τ n'est plus déterministe mais définie par un processus $b(s,\omega)$ satisfaisant:*

$$\forall s\in(0,1)\ \ b(s,\omega)\ \ est\ \ \mathcal{F}_0 - mesurable.$$

En effet, dans ce cas, D_rb_s est nul pour tout $(r,s)\in(0,1)^2$, et donc les égalités (5) et (8), clefs de la preuve, restent valables. Quad b est plus général, par exemple simplement adapté, (5) et (8) ne sont plus vraies, et notre méthode n'est plus efficace.

Références

[1] *R.H. Cameron et W.T. Martin, Transformations of Wiener integrals under translations,* Annals of Math., **45** N^0 **2**, *(1944), 386–396.*

[2] *D. Nualart, Noncausal stochastic integrals and calculus, LN Math.* **1516** *(1988), 80–129.*

[3] *S. Roelly et H. Zessin, Une caractérisation des diffusions par le calcul des variations stochastiques, C.R. Acad. Sci. Paris t.* **313 Série I** *(1991), 309–312.*

[4] *S. Roelly et H. Zessin, Une caractérisation des mesures de Gibbs sur* $C(0,1)^{\mathbf{Z}^d}$ *par le calcul des variations stochastiques, Preprint No 488/91, BIBOS, Université de Bielefeld (1991).*

Sylvie Roelly, Lab. de Probabilités; U.A. 0224; Université Paris 6, Tour 56, 4, place Jussieu, F 75252 Paris Cedex 05, Adresse actuelle: BIBOS, Fak. für Physik, Universität Bielefeld, Postfach 8640, D–4800 Bielefeld 1

Hans Zessin, Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Postfach 8640, D–4800 Bielefeld 1