Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Sylvie Méléard
Sylvie Roelly-Coppoletta

Systèmes de particules et mesures-martingales: un théorème de propagation du chaos

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 438-448.
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__438_0>

SYSTEME DE PARTICULES ET MESURES-MARTINGALES : UN THEOREME DE PROPAGATION DU CHAOS

S. MELEARD ET **S. ROELLY-COPPOLETTA**

Université du Maine,
Faculté des Sciences Route de Laval
72017 LE MANS Cedex

Laboratoire de Probabilités
Université de Paris 6, Tour 56
4, place Jussieu 75230 PARIS Cedex

0 INTRODUCTION

L'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{a_{ij}(x,u_t)u_t\right\} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{b_i(x,u_t)u_t\right\}$$

où $x\in\mathbb{R}^d$ et u_t est une probabilité sur $\mathbb{R}^d$, a fait l'objet de nombreuses études (Mc Kean, Funaki, Sznitman etc...).

Pour trouver des solutions à cette équation par des méthodes probabilistes, on considère d'habitude le problème de martingales associé, défini comme suit: soit L^m le générateur sur $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ donné par :

$$L^m f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x,m) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x,m)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad .$$

Sur l'espace canonique $\Omega = C([0,T];\ \mathbb{R}^d)$, on cherche une probabilité P telle que, si X_t est le processus coodonnées, pour tout $f\in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,

$$(P) \qquad f(X_t) - f(X_o) - \int_o^t L^{P_s} f(X_s)\, ds \ \text{ est une P-martingale , où } P_s = P\circ X_s \quad .$$

L'existence et l'unicité des solutions à ce problème de martingales ont été démontrées dans le cas où la matrice $a(x,m)$ est de la forme $\sigma(x,m)\sigma^*(x,m)$, cas introduit par Mc Kean [MK], et aussi dans le cas où $a(x,m)=\int\sigma(x,y)\sigma^*(x,y)m(dy)$ (cf [Fu2]).

Dans le premier cas, des théorèmes limites ont été prouvés, notamment des résultats de propagation du chaos(cf[MK], [Sz1], [Ta],[Lé]): il existe un système de n particules avec interaction tel que la loi des κ premières particules, κ fixé, tend, quand n tend vers l'infini, vers la loi de κ particules indépendantes équidistribuées suivant la solution du problème de martingales (*P*).

Dans cet article, nous allons montrer un résultat analogue dans le cas où la matrice a(x,m) se met sous la forme $a(x,m)=\int\sigma(x,y)\sigma^*(x,y)m(dy)$.

Rentre dans ce cadre, par exemple, l'équation de Landau spatialement homogène de dimension 3, définie par :

$$a(x,m) = \int a(x,y)m(dy) \quad \text{où} \quad a_{ij}(x,y) = \left\{\delta_{ij}|x-y|^2-(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right\}k(x,y)$$

$$\text{et} \quad b(x,m) = \int b(x,y)m(dy) \quad \text{où} \quad b(x,y) = 2(x-y)k(x,y),$$

avec k(x,y) fonction positive sur $\mathbb{R}^6$.
Elle intervient dans les problèmes d'approximation par des diffusions de l'équation de Boltzmann (cf. [Ful]).

L'originalité de notre démarche dans ce travail est d'utiliser sur un exemple naturel (celui décrit plus haut) des résultats encore peu connus sur les mesures-martingales.

Plus précisément, nous montrons un théorème de propagation du chaos pour le système de n particules définies par le générateur $\mathcal{L}^n$ suivant :

$$\mathcal{L}^n f(x^1,\dots,x^n) = \sum_{k=1}^{n} L_{(k)}^{\mu_x^n} f(x^1,\dots,x^n) \quad \text{où} \quad L_{(k)}^{\mu_x^n} f(x^1,\dots,x^n) = L_{(k)}^{\mu_x^n} f_{(k)}(x^k)$$

avec $f_{(k)}(y) = f(x^1,\dots,x^{k-1},y,x^k,\dots,x^n)$ (les variables $x^i \neq x^k$ étant "gelées")

$$\text{et} \qquad \mu_x^n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{x^k}\ ,\ x = (x^1,\dots,x^n)\ .$$

Soit (P^n) le problème de martingales associé : pour $f \in C_b^2(\mathbb{R}^{dn})$,

$$(P^n) \quad f(X_t^1,\dots,X_t^n) - f(X_o^1,\dots,X_o^n) - \int_o^t \mathcal{L}^n f(X_s^1,\dots,X_s^n)ds \quad \text{est une } P^n\text{-martingale}\ .$$

Nous représentons trajectoriellement les solutions de (P^n) comme semi-martingales définies à l'aide de mesures-martingales. Nous pourrons ainsi utiliser des techniques de calcul stochastique pour obtenir la convergence sur l'espace des trajectoires (cf[Sz1]).

Dans une première partie, on montrera l'équivalence de (P^n) et d'un système d'équations différentielles stochastiques avec mesures-martingales. L'existence et l'unicité d'un tel système seront prouvées.

Nous montrerons ensuite la compacité des lois des mesures empiriques μ^n et concluerons enfin avec le théorème de propagation du chaos.

NOTATIONS ET HYPOTHESES

* Sur l'espace $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ X_r est la projection canonique en l'instant r et si m est une probabilité sur $C([0,T];\mathbb{R}^d)$, m_r est la probabilité image de m par X_r, soit : $m_r = m\circ X_r$.

* K est une constante réelle positive pouvant varier d'une ligne à l'autre

* $\mathcal{P}(E)$ est l'espace des probabilités sur l'espace E

* On notera $|\ |$ la norme dans $\mathbb{R}^d$ ou dans l'espace $\mathcal{M}_{k,l}$ des matrices k×l.

*(H_1) Soit $b : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction lipschitzienne, i.e.:

$$\exists\ K\in\mathbb{R}^+, \qquad |b(x,\mu)-b(y,\nu)| \le K(|x-y|+\rho_2(\mu,\nu)) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^d,\ \forall\mu,\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$$

où ρ_2 est la distance de Vasershtein sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ définie par :

$$\rho_2(\mu,\nu) = \inf\left\{\left[\int_{\mathbb{R}^{2d}} |x-y|^2\Pi(dx,dy)\right]^{1/2};\ \Pi\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d}),\text{de première projection } \mu \text{ et de deuxième projection } \nu\right\}$$

*(H_2) Soit $\sigma : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{M}_{d,d}$ une fonction lipschitzienne :

$$\exists\ K\in\mathbb{R}^+, \qquad |\sigma(x,y)-\sigma(x',y')| \le K(|x-x'|+|y-y'|) \quad \forall x,x',y,y'\in\mathbb{R}^d$$

$$\text{et} \qquad a(x,y) = (\sigma\sigma^*)(x,y) \quad .$$

* On notera Tr(a) la trace de la matrice a.

* On utilisera la notion de mesures-martingales, introduite par Walsh [Wa]. Un certain nombre de propriétés de ces mesures-martingales (en particulier des théorèmes de représentation) ont été récemmment obtenues par N. El Karoui et S. Méléard [Ek-Mé].

I LE SYSTEME DE PARTICULES APPROXIMANT

Soit $\mathcal{L}^n$ le générateur sur $C_b^2(\mathbb{R}^{dn})$ défini, comme dans l'introduction, par :

$$\mathcal{L}^n f(x^1,\dots,x^n) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} a_{ij}(x^k,y)\mu_x^n(dy)\right)\frac{\partial^2 f_{(k)}}{\partial x_i\partial x_j}(x^k) + \sum_{i=1}^d b_i(x^k,\mu_x^n)\frac{\partial f_{(k)}}{\partial x_i}(x^k)\right]$$

où μ_x^n est la mesure empirique : $\mu_x^n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{x^k}$,et a et b satisfont les hypothèses H_1 et H_2.

<u>Proposition I.1</u> : Il existe une et une seule solution au problème de martingales (P^n).

Démonstration : Nous montrons que les hypothèses H_1 et H_2 se traduisent pour les coefficients de $\partial f/\partial x_i$ et $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ en de bonnes hypothèses sous lesquelles le problème de martingales associé à $\mathcal{L}^n$ est un problème classique, pour lequel il y a existence et unicité des solutions.

Le coefficient correspondant au drift est donné par:

$$\tilde{b} : \mathbb{R}^{dn} \longrightarrow \mathbb{R}^{dn}$$

$$\tilde{b}(x^1,\dots,x^n) = (b(x^1,\mu_x^n),\dots,b(x^n,\mu_x^n)) \quad .$$

Vérifions sa régularité : soit $x,y \in \mathbb{R}^{dn}$;

$$|\tilde{b}(x)-\tilde{b}(y)| = \sum_{i=1}^{n} |b(x^i,\mu_x^n) - b(y^i,\mu_y^n)| \leq K \left[\sum_{i=1}^{n} |x^i-y^i| + \rho_2(\mu_x^n,\mu_y^n)\right]$$

$$\leq K \left[\sum_{i=1}^{n} |x^i-y^i| + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i-y^i|^2\right)^{1/2}\right] \leq K(n)\ |x-y|$$

où $K(n)$ est une constante qui dépend uniquement de n et de d.

$\tilde{b}$ est donc uniformément lipschitzien sur $\mathbb{R}^{dn}$.

Le coefficient $\tilde{\sigma}$ correspondant au terme de diffusion est une matrice $dn{\times}dn^2$, formée de blocs $d{\times}d$ donnés par :

$$(\tilde{\sigma}(x^1,\dots,x^n))_{ij} = \sigma(x^i,x^k)/\sqrt{n} \qquad \text{si } j=n(i-1)+k,\ k\in\{1,\dots,n\}$$
$$= 0 \qquad \text{si } j\notin\{n(i-1)+1,\dots,ni\}$$

$\tilde{\sigma}$, définie de la sorte, est donc diagonale par blocs et aussi lipschitzienne sur $\mathbb{R}^{dn}$.

Nous pouvons donc assurer l'existence et l'unicité fortes et faibles de solutions au problème de martingales associé au générateur $\mathcal{L}^n$ de coefficients $\tilde{b}$ et $\tilde{\sigma}$ sur $\mathbb{R}^{dn}$; (cf [Gi-Sk] p.40 par exemple.) ∎

Pour montrer le théorème de propagation du chaos, nous utiliserons la représentation suivante de la solution de (P^n) comme loi d'une solution forte d'un système d'équations différentielles stochastiques dont la partie martingale est l'intégrale stochastique par rapport à une mesure-martingale. En effet, les processus

$$M_t^{i,n} = X_t^{i,n} - X_0^{i,n} - \int_0^t b(X_s^{i,n},\mu_s^n)\, ds \quad , \quad 1\leq i\leq n, \text{ où } \mu_s^n = \mu_{X_s}^n ,$$

sont des martingales locales de carré intégrable et de processus croissants :

$$\langle M^{i,n}, M^{j,n}\rangle_t = \delta_{ij} \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} a(X_s^{i,n},y)\ \mu_s^n(dy)\, ds \quad .$$

L'idée originale de ce travail est alors d'interpréter la mesure aléatoire continue $\mu_s^n(dy)ds$ définie sur $\mathbb{R}^+ x\mathbb{R}^d$ comme l'intensité d'une mesure-martingale et d'utiliser les travaux de [Ek-Mé] pour représenter les martingales $M^{i,n}$ de la façon suivante:

Proposition I.2 : Il existe des mesures-martingales $M_n^i(dy,ds)$, fortement orthogonales et d'intensité $\mu_s^n(dy)ds$, telles que les semi-martingales définies pour tout $i\in\{1,,n\}$ par :

$$(1) \qquad X_t^{i,n} = X_o^{i,n} + \int_o^t b(X_s^{i,n},\mu_s^n)\, ds + \int_o^t\int_{\mathbb{R}^d} \sigma(X_s^{i,n},y).M_n^i(dy,ds)$$

où $$\mu_.^n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{X^{k,n}}$$

aient pour loi conjointe une solution du problème de martingales (P^n).

Rappelons la définition d'une mesure-martingale :

Définition I.3 : Soit $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ un espace de probabilité filtré satisfaisant aux conditions habituelles. M est une $\mathcal{F}_t$-mesure-martingale sur un espace lusinien $(E,\mathcal{E})$ si et seulement si :

- **$M_o(A) = 0 \quad \forall A\in\mathcal{E}$**
- **$\{ M_t(A),\ t\geq 0 \}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale, $\forall A\in\mathcal{E}$**
- **$\forall t>0$, $M_t(.)$ est une mesure σ-finie à valeurs $L^2(\Omega)$.**

On notera $M_t(A) = \iint 1_{\{0\leq s\leq t\}}\, 1_A(x)\, M(dx,ds)$.

Cette représentation va nous permettre d'utiliser les critères classiques pour montrer la tension des lois des mesures empiriques $\mu_.^n$.

II UN RÉSULTAT DE COMPACITÉ

Soient $\mu_.^n$ les variables aléatoires à valeurs $\mathcal{P}(C([0,T];\ \mathbb{R}^d))$ définies dans la proposition 1.2. Nous démontrons maintenant la relative compacité de la suite $(\Pi^n)_n$ des lois des $\mu_.^n$.

Proposition II.1 : La suite $(\Pi^n)_n \in\mathcal{P}(\mathcal{P}(C([0,T];\ \mathbb{R}^d)))$ est tendue.

Démonstration : Nous ramènerons ce problème à la tension des lois des semi-martingales $(X^{1,n})_n$ grâce au lemme suivant (cf [Sz2]):

Lemme 2.2 : Soit X un espace polonais et $(m^n)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{P}(X)$. La suite des lois des $(m^n)_n$ est tendue si et seulement si la suite des intensités $I(m^n)$, probabilités sur X définies par

$$(I(m^n),f) = E((m^n,f)) \qquad \text{est elle-même tendue.}$$

Dans notre modèle, le générateur $\mathcal{L}^n$ est symétrique et les variables $X^{1,n},\dots,X^{n,n}$ sont équidistribuées. $I(\mu^n)$ est donc la loi de la semi-martingale $X^{1,n}$. On utilise alors, pour démontrer la tension de la suite $(X^{1,n})_n$ un lemme d'estimation dans L^2 et les critères d'Aldous-Rebolledo.

Lemme II.3 : Soit $\xi^n \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ uniformément en n. Alors la semi-martingale $X^{1,n}$ définie par (1) et telle que $P(X_o^{1,n} = \xi^n) = 1$ satisfait :

$$\sup_n E(\sup_{t\le T} |X_t^{1,n}|^2) < +\infty \quad .$$

Démonstration : Cherchons une estimation du maximum de $|X_t^{1,n}|^2$:

Soit $\tilde{M}_t^n$ la partie martingale de $X_t^{1,n}$;

$$X_t^{1,n} = \xi^n + \int_o^t b(X_s^{1,n},\mu_s^n)\, ds + \tilde{M}_t^n$$

donc $$|X_t^{1,n}|^2 \le 4\left[|\xi^n|^2 + T\int_o^t |b(X_s^{1,n},\mu_s^n)|^2 ds + |\tilde{M}_t^n|^2\right] \quad .$$

b étant globalement lipschitzienne, elle vérifie la condition de sous-linéarité suivante :

$$|b(x,m)|^2 \le K(1 + |x|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |y|^2 m(dy)) \ , \ \forall x\in\mathbb{R}^d, \ \forall \mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \quad ,$$

d'où $$|X_t^{1,n}|^2 \le K\left[|\xi^n|^2 + T\int_o^t (1+|X_s^{1,n}|^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_s^{i,n}|^2) ds + \sup_{s\le t}|\tilde{M}_s^n|^2\right].$$

Le terme de droite étant une fonction croissante de t, il majore aussi

$$x^1(t) \equiv \sup_{s\le t} |X_s^{1,n}|^2 \ .$$

D'où : $$E(x^1(t)) \le K\left[1 + \sup_n E|\xi^n|^2 + \int_o^t E(x^1(s))ds + E(\sup_{s\le t} |\tilde{M}_s^n|^2)\right]$$

car les $(X^{i,n})$ et donc les $(x^i(t))_{i=1,\dots,n}$ sont équidistribuées.

Mais, par l'inégalité de Doob :

$$E(\sup_{s\le t}|\tilde{M}_s^n|^2) \le 2 \sup_{s\le t} E|\tilde{M}_s^n|^2$$

$$\le 2 \sup_{s\le t} E(\int_o^t\int_{\mathbb{R}^d} Tr(a)(X_s^{1,n},y)\ \mu_s^n(dy)\ ds)$$

σ étant globalement lipschitzienne, la croissance de a est contrôlée à l'infini par : $Tr(a)(x,y) \le K(1 + |x|^2 + |y|^2)$.

D'où $$E(\sup_{s\le t}|\tilde{M}_s^n|^2) \le K(1 + \int_o^t E(x^1(s))ds) \ ;$$

et $$E(x^1(t)) \le K(1 + \sup_n E|\xi^n|^2 + \int_o^t E(x^1(s))ds\ ) \ ;$$

grâce à l'inégalité de Gronwall,

$$E(x^1(t)) \le K \exp KT < +\infty$$

où K est indépendant de n, donc si la condition initiale est dans $L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ uniformément en n , le maximum de $|X_s^{1,n}|^2$ est aussi dans $L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ uniformément en n . ∎

La tension des lois des semi-martingales $X^{1,n}$ découle alors du lemme suivant explicitant les critères d'Aldous-Rebolledo ,[Al1],[Re] :

<u>Lemme</u> II.4 : **Soit $(X^n)_n$ des semi-martingales localement de carré intégrable sur un espace (Ω,P), de partie à variation finie V^n et telles que $\langle M^n\rangle$ est le processus croissant associé à la partie martingale M^n. Alors, si $P^n=P\circ X^n$, la suite (P^n) est tendue si et seulement si :**

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\varepsilon,\eta\in\mathbb{R}^{+*}$, $\exists\delta>0$, $\forall\tau$ **temps d'arrêt**, $\tau\le T$,

(i) $$\overline{\lim_n}\ \sup_{0\le\theta\le\delta} P(|V^n_{\tau+\theta}-V^n_\tau|\ge\eta)\le\varepsilon$$

(ii) $$\overline{\lim_n}\ \sup_{0\le\theta\le\delta} P(|\langle M^n\rangle_{\tau+\theta}-\langle M^n\rangle_\tau|\ge\eta)\le\varepsilon\quad .$$

Le lemme II.3 permet d'obtenir facilement la vérification des critères ci-dessus ; dans notre modèle :

$$V^n_t=\int_0^t b(X_s^{1,n},\mu_s^n)\,ds\qquad\text{et}\qquad \langle M^n\rangle_t=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Tr}(a)(X_s^{1,n},y)\mu_s^n(dy).$$

On démontre alors (i) facilement :

$$\begin{aligned}E(|V^n_{\tau+\theta}-V^n_\tau|^2)&\le\delta\ E\left[\int_\tau^{\tau+\theta}|b(X_s^{1,n},\mu_s^n)|^2ds\right]\\&\le K\ \delta\ E\left[\int_\tau^{\tau+\theta}(1+\sup_{s\le T+\delta}|X_s^{1,n}|^2)\ ds\right]\\&\le K\delta^2\ E(1+\sup_{s\le T+\delta}|X_s^{1,n}|^2)\quad ;\end{aligned}$$

pour tout n, on peut donc trouver δ tel que le membre de droite de la dernière inégalité tende vers zéro quand n tend vers l'infini. Alors, par l'inégalité de Tchebyshev, (i) est vérifié.

On procéderait de la même façon pour (ii), ce qui conclut la démonstration de la proposition II.1. ∎

<u>Remarque</u> : Si les variables aléatoires initiales ξ^n sont dans $L^4(\Omega,\mathbb{R}^d)$ uniformément en n, on peut montrer qu'il en est de même de $\sup_{s\le T}|X_s^{1,n}|$, et alors la tension des $(X^{1,n})_n$ s'obtient par le critère de Kolmogorov, car :

$$E\left[|X_t^{1,n}-X_s^{1,n}|^4\right]\le K\ (t-s)^2\quad .$$

III La Propagation du Chaos

Dans cette partie nous démontrerons le

Théorème III.1 : **Soit $(X^{1,n},..,X^{n,n})$ le n-uplet de particules vérifiant le système avec interactions (1), à valeurs dans $(C([0,T;\ \mathbb{R}^d))^n$, de loi P^n. Alors, si les lois initiales u^n, lois de $(X_o^{1,n},..,X_o^{n,n})$, sont u^o-chaotiques, $u^o\ \in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, le chaos se propage et P^n est P-chaotique, où P est l'unique solution de (1) ayant pour condition initiale $P\circ X_o=u^o$.**

Démonstration : Rappelons la définition de la chaoticité :

Soit E un espace métrique séparable et ν une probabilité sur E. Une suite de probabilités (ν^n) sur E^n est dite ν-chaotique si, pour tout κ et pour toutes les fonctions $f_1,..,f_\kappa$ continues bornées sur E,

$$\lim_n\ (\nu^n,f_1\otimes...\otimes f_\kappa\otimes 1\otimes..\otimes 1) = \prod_{i=1}^{\kappa}\ (\nu,f_i)\qquad .$$

On retrouve bien la définition intuitive donnée dans l'introduction pour la chaoticité du système de particules avec interaction, à savoir que la loi de κ particules, κ fixé, tend vers la loi de κ particules indépendantes et de loi P.

Aldous [Al2] et Tanaka [Ta] donnent la formulation équivalente suivante à la P-chaoticité des P^n : les probabilités empiriques μ^n convergent en loi vers la probabilité (non aléatoire) P.

Nous allons maintenant prouver cette convergence.

La relative compacité des lois Π^n des μ^n a été montrée dans la deuxième partie. Il existe donc une sous-suite (Π^{n_k}) qui converge vers Π^∞. On notera simplement (Π^n) pour (Π^{n_k}) . Explicitons maintenant le support de Π^∞:

Lemme IV.2 : **Soit F : $\mathcal{P}(C([0,T];\ \mathbb{R}^d))\longrightarrow\mathbb{R}$, définie par :**

$$F(m) = \left[m,\left[f(X_t)-f(X_s)-\int_s^t L^{m_r}\ f(X_r)\ dr\right]g(X_{s_1},..,X_{s_p})\right]$$

où $f\in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $g\in C_b(\mathbb{R}^{dp})$ et $0\le s_1<..<s_p\le s<t\le T$;

Alors $$\int F(m)^2\ \Pi^\infty(dm) = 0\quad .$$

Démonstration : Par construction, F(m) est une fonction continue de m

donc : $$\int F(m)^2\ \Pi^\infty(dm) = \lim_n \int F(m)^2\ \Pi^n(dm)$$

$$\text{Or} \quad \int F(m)^2\, \Pi^n(dm) = E\left[\left[\mu^n, (f(X_t)-f(X_s)-\int_s^t L^{\mu_r^n} f(X_r)\,dr)g(X_{s_1},\dots,X_{s_p})\right]^2\right]$$
$$\le KE\left[\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^n f(X_t^{i,n})-f(X_s^{i,n})-\int_s^t L^{\mu_r^n} f(X_r^{i,n})dr\right]^2\right]$$
$$\le \frac{K}{n^2}\, E\left[\left[\sum_{i=1}^n \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f^*(X_r^{i,n}).\sigma(X_r^{i,n}).M_n^i(dy,dr)\right]^2\right]$$
$$\le \frac{K}{n}\, E\left[\int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f^*(X_r^{1,n}).a(X_r^{1,n},y).\nabla f(X_r^{1,n})\mu_r^n\,(dy)dr\right]$$

(car $\mu_r^n(dy)dr$ est l'intensité de $M_n^i(dy,dr)$)

$$\le \frac{K}{n} \int_s^t E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Tr(a)(X_r^{1,n},X_r^{i,n})\right)dr \quad \le \quad \frac{K}{n} \qquad \blacksquare$$

Ceci prouve que, Π^∞-p.s., m est solution du problème de martingales (P).

Or, $$\Pi^\infty \circ X_o = \lim_n \Pi^n \circ X_o = \delta_{u^o}$$

puisque, par hypothèse, $(u^n)_n$ est u^o-chaotique.

Il suffit donc d'avoir l'unicité des solutions au problème de martingales (P) pour conclure que, Π^∞-p.s., m est égale à cette solution P vérifiant la condition initiale $P\circ X_o = u^o$.

Cette unicité a été démontrée par Funaki [Fu2] qui montre tout d'abord l'existence et l'unicité des solutions au problème de martingales (P_m) défini par : pour tout $f\in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,

$$(P_m) \qquad f(X_t) - f(X_o) - \int_o^t L^m f(X_s)\,ds \quad \text{est une P-martingale .}$$

Pour ce faire, il représente les solutions de ce problème sous la forme

$$X_t = \int_o^t \sigma(X_s,y)\, B(ds,dy) + \int_o^t b(X_s,m)\,ds$$

où B(ds,dy) est un bruit blanc (mesure-martingale d'intensité déterministe) d'intensité m(dy)ds.

Les conditions de lipschitzianité de σ et de b entrainent classiquement l'existence et l'unicité trajectorielle de telles solutions. De manière analogue au cas habituel (cf[I-W]) on en déduit l'unicité des solutions de (P_m).

Pour montrer l'unicité des solutions de (P), il suffit alors de considérer l'application : $m \longrightarrow P_m \longrightarrow P_m \circ X_s$ et de montrer qu'elle a un point fixe, ce qui découle du lemme de Gronwall. $\blacksquare$

Remarque : Pour l'équation de Landau, on se trouve dans le cas examiné ici :

$$\sigma(x,y) = \begin{bmatrix} x_2-y_2 & 0 & 0 & x_3-y_3 \\ x_1-y_1 & 0 & x_3-y_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_2-y_2 & x_1-y_1 \end{bmatrix} \sqrt{k(x,y)}\ ,$$

et si les fonctions $(x_i-y_i)\sqrt{k(x,y)}$ et $(x_i-y_i)k(x,y)$ sont uniformément lipschitziennes, on peut utiliser les résultats démontrés ici.

L'équation est alors celle de la loi limite d'un système de particules en interaction faible, aussi bien dans le terme de dérive que dans le terme de diffusion.

BIBLIOGRAPHIE

[Al1] D.J. ALDOUS : Stopping times and tightness, Ann. Prob. 6, 1978

[Al2] D.J. ALDOUS : Exchangeability and related topics, Ecole d'Eté de Saint-Flour XIII, Lectures Notes n°1117, Springer Verlag, 1983

[Fu1] T. FUNAKI : The diffusion approximation of the Boltzmann equation of Maxwellian molecules ; Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 19, p.841-886, 1983

[Fu2] T. FUNAKI : A certain class of diffusion processes associated with non linear parabolic equations; Z.Warsch. Verw. Gebiete 67,p.331-348, 1984

[Gi-Sk] I.I. GIHMAN and A.V. SKOROHOD : Stochastic Differential Equations, Springer Verlag, 1972

[Lé] C. LEONARD : Une loi des grands nombres pour des systèmes de diffusion avec interactions et à coefficients non bornés, An. Institut H.Poincaré Vol.22 n°2, p.237-262, 1986

[Ek-Mé] N. EL KAROUI and S. MELEARD : Martingale-measures and stochastic calculus ; to appear ;

[MK] H.P. MC KEAN : Propagation of chaos for a class of non linear parabolic equations, Lectures Series in Differential Equ., Catholic Univ.,p.41-57, 1967

[Ré] R. REBOLLEDO : Sur l'existence de solutions à certains problèmes de semi-martingales, C. R. Acad. Sci., Paris 290, 1980

[St-Va] D.W. STROOCK and S.R.S. VARADHAN : Multidimensional Diffusion Processes ,Springer Verlag, 1979

[Sz1] A.S. SZNITMAN : An example of a non linear diffusion process with normal reflecting boundary conditions and some related limit theorems, Preprint 1983

[Sz2] A.S. SZNITMAN : Equations de type Boltzmann spatialement homogènes, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 66, 1984

[Ta-Hi] H.TANAKA and M. HITSUDA : Central limit theorem for a simple diffusion model of interacting particles, Hiroshima Math. J. 11, p.415-423, 1981

[Ta] H. TANAKA : Limit theorems for certain diffusion processes with interaction, Taniguchi Symp. on Stochastic Analysis, p.469-488, Katata 1982

[Wa] J.B. WALSH : An introduction to stochastic partial differential equations. Ecole d'Eté de Saint Flour XIV, Springer Verlag , 1984