Stochastic Processes and their Applications 38 (1991) 239-266
North-Holland

Propriétés de martingales, explosion et représentation de Lévy-Khintchine d'une classe de processus de branchement à valeurs mesures

Nicole El Karoui and Sylvie Roelly
Laboratoire de calcul des Probabilités, URA CNRS 224, Université de Paris 6, 75252 Paris 05, France

Received 18 April 1990
Revised 7 September 1990

We study here by stochastic calculus methods some martingale properties of a general class of measure-valued branching processes. The form of the cumulant semigroup determines their local characteristics and the explosion time. Finally, by the infinite divisibility property of these processes, we obtain a Lévy-Khintchine representation on the paths space and we propose an interpretation of the canonical measures in terms of entrance laws.

branching process * martingale problem * Lévy-system * explosion time * Poissonian representation * canonical measure

On étudie par des méthodes de type calcul stochastique les propriétés de martingales d'une classe très générale de processus de branchement à valeurs mesures. Leurs caractéristiques locales et temps d'explosion sont explicités en fonction de la forme de leur cumulant. Enfin, grâce à l'infinie divisibilité de ces processus, on obtient une représentation de Lévy-Khintchine sur l'espace des trajectoires qui permet d'interpréter leurs mesures canoniques comme des lois d'entrées.

1. Introduction, notations et cadre du problème

Les processus de branchement à valeurs mesures (notés dorénavant PBM) ont été introduits par Watanabe (1968) et sont une extension naturelle des processus de branchement à valeurs réelles positives (cf. Kawazu et Watanabe, 1971) où à valeurs $(\mathbb{R}_+)^d$ (cf. Jirina, 1958; Ryzhov et Skorokhod, 1970; Watanabe, 1969). Ils modèlisent l'évolution de la répartition de masse dans un espace E d'un système dans lequel interviennent simultanément un phénomène de diffusion spatiale et un phénomène de branchement. On les utilise en étude de la dynamique des populations, en immunologie, etc.

Nous nous sommes intéressées à l'étude des propriétés de type martingale et d'infinie divisibilité d'une classe $(\mathscr{C})$ de PBM X définie succintement de la façon suivante, comme dans Watanabe (1968): X est un processus de Markov, homogène dans le temps, à valeurs dans l'espace des mesures finies sur E jusqu'à un temps de mort ζ (éventuellement infini), de fonctionnelle de Laplace L_{P_t}, (P_t est la loi de X_t), satisfaisant

$$L_{P_t}(f) \equiv E(1_{\{t<\zeta\}} \exp -\langle X_t, f\rangle) = \exp -\langle X_0, U_t f\rangle$$

où X_0 est la mesure initiale et U_t est un semi-groupe non linéaire, appelé *cumulant* de X, associé à l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial t} = AU + R(U), \qquad U_0 = f,$$

avec: A, générateur infinitésimal d'un processus de Markov sur E, lié au phénomène de diffusion du processus; R, une fonctionnelle non linéaire, induite par le phénomène de branchement sous-jacent.

Le cas particulier où R est quadratique, et $-A$ est une puissance fractionnaire de l'opérateur $-\Delta$, a été d'abord étudié par Dawson (1975, 1978) (cf. aussi Dawson et Ivanoff, 1978). Récemment, il y eut un regain d'intérêt pour les propriétés fines des PBM. Nous citerons entre autres, dans l'ordre chronologique, l'existence de résultats sur leurs temps d'occupation, leurs temps locaux, leur construction en tant que processus de Markov à valeurs mesures, les propriétés de leurs supports, la régularité de leurs trajectoires, des équations stochastiques généralisées dont ils sont solutions, leur comportement en temps infini que l'on peut lire respectivement dans Iscoe (1986), El Karoui (1984), Ethier et Kurtz (1986), Perkins (1988), Dynkin (1988), Fitzsimmons (1989), Le Gall (1989), Le Jan (1989), Méléard et Roelly (1988), Dawson et Fleischmann (1985), Gorostiza, Roelly et Wakolbinger (1990), ainsi que dans les références incluses dans tous ces travaux.

Nous présentons ici une version condensée, actualisée et corrigée de El Karoui et Roelly (1987). En utilisant des techniques de type calcul stochastique, nous examinons le cas d'une fonctionnelle R générale, donnée dans la définition 6 ci-dessous. Nous voudrions souligner les deux principales difficultés:

D'une part, quand la fonctionnelle R n'est pas lipschitzienne, la masse $\langle X_t, 1\rangle$ de la mesure aléatoire X_t peut exploser au bout d'un temps fini. De plus, si le terme constant a de la fonctionnelle R est non nul, le temps de mort a une composante totalement inaccessible d'intensité $\langle X_t, a\rangle$.

D'autre part, sauf si R est quadratique, les trajectoires du PBM ne sont pas continues. Dans la partie 2 nous explicitons le système de Lévy du PBM; en particulier, les sauts de X sont positifs et étroitement liés aux sauts de la masse.

L'article s'articule de la façon suivante:

On précise, en fin d'introduction, la classe ($\mathscr{C}$) de PBM étudiés et leur espace d'état, puis l'on rappelle rapidement quelques théorèmes d'existence déjà existant dans la littérature.

Dans la deuxième partie, nous présentons dans le cadre le plus général un théorème d'équivalence qui permet d'obtenir, à partir d'une martingale exponentielle, les caractéristiques locales de la semi-martingale X_t ou encore la loi de X comme solution d'un problème de martingales.

Cette formulation permet de déduire, en troisième partie, des propriétés fondamentales de la classe ($\mathscr{C}$), dont un théorème de type Girsanov.

Enfin, en quatrième partie, nous obtenons une représentation de Lévy-Khintchine et son interprétation en termes poissonniens pour le PBM X, grâce à son caractère infiniment divisible; Dawson (1978) l'avait donnée pour X_t, t fixé, dans le cas continu. Nous l'étendons aux processus de la classe ($\mathscr{C}$) et notre décomposition est sur l'espace des trajectoires du processus (voir aussi Dawson et Perkins, 1991).

1.1. Notations

L'espace de base E sur lequel agit le PBM est supposé compact métrique.

On pourrait le supposer seulement localement compact sans altérer les résultats de cet article; cela alourdirait cependant beaucoup le formalisme utilisé: il faudrait notamment plonger E dans son compactifié d'Alexandrov $E°$, et considérer comme fonctions continues sur E seulement celles qui sont prolongeables par continuité à $E°$; les mesures sur E s'identifient aux mesures sur $E°$ qui ne chargent pas le 'point à l'infini'.

Par souci de clarté, nous avons préféré ne pas détailler ce cas.

Les espaces de fonctions et de mesures utilisés sont:

- $B(E)=\{f; f$ borélienne bornée réelle sur $E\}$.
- $C(E)=\{f; f$ continue réelle sur $E\}$.
- D'une manière générale, pour tout espace de fonctions réelles $F(E)$, $F^+(E)$ sera le sous-espace de $F(E)$ formé des fonctions positives et $F^{++}(E)$ sera le sous-espace de $F^+(E)$ formé des fonctions minorées inférieurement par un réel strictement positif.

D'autre part:

- $\mathcal{M}(E)=\{\nu; \nu$ mesure de Radon signée sur $E\}$.
- $M(E)=\{m; m$ mesure positive finie sur $E\}$.
- $\mathscr{P}(E)=\{p; p$ mesure de probabilité sur $E\}$.
- L'image par une application f d'une mesure m est notée $m\circ f^{-1}$.
- Le crochet de dualité entre $M(E)$ et $C(E)$ est notée par $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- La norme d'une fonction de $B(E)$, notée $\|\ \|$, est égale à sa borne supérieure en valeur absolue.
- La norme d'une mesure $m\in M(E)$, notée $\|m\|$, est égale à sa masse $\langle m, 1\rangle$.

1.2. L'espace d'état du PBM

$M(E)$, muni de la topologie de la convergence étroite, est localement compact. On lui adjoint un point Δ pour le compactifier, et l'on note $M_\Delta(E)\equiv M(E)\cup\{\Delta\}$. Δ, comme d'habitude, sert de point cimetière aux processus à valeurs dans $M(E)$.

Nous définissons sur $M_\Delta(E)$ la topologie introduite par Watanabe (1968) rendant l'application ρ suivante continue:

$$\rho:[0,+\infty]\times\mathcal{P}(E)\to M_\Delta(E),$$
$$(\lambda,p)\to\begin{cases}\lambda\cdot p & \text{si } \lambda<+\infty,\\ \Delta & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour cette topologie, une suite $(m_n)\in M(E)$ converge vers Δ si et seulement si $\langle m_n, 1\rangle\to+\infty$. Ainsi, la convergence vers Δ peut se faire selon une infinité de directions, l'ensemble des directions étant isomorphe à $\mathcal{P}(E)$, et Δ est identifié à $\{+\infty\}\times\mathcal{P}(E)$. En particulier, si $f\in B^{++}(E)$, $\langle\Delta,f\rangle=+\infty$.

Dans l'espace des trajectoires $\Omega\equiv\mathbb{D}([0,+\infty[;\, M_\Delta(E))$ on considère le sous-espace $\mathbb{D}_\dagger$ formé des trajectoires càd-làg 'tuées' et envoyées en Δ à leur instant de mort ζ.

$\mathbb{D}_\dagger$ est muni de la famille de tribus canoniques $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$.

ζ est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)$, de même que la suite (τ_n) de temps de 'localisation' définis sur $\mathbb{D}_\dagger$ par

$$\tau_n(m)=\begin{cases}\inf\{t\leq n,\ \|m(t)\|\geq n\} & \text{si cet ensemble est non vide,}\\ n & \text{sinon.}\end{cases}$$

Le temps de mort ζ des trajectoires des PBM que nous étudions est le minimum de 2 temps d'arrêt τ_e et τ_i.

Le temps τ_e, temps d'explosion, est caractérisé par

$$\tau_e=\begin{cases}\zeta & \text{si } \|m(\zeta(m)^-)\|=+\infty,\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

Il est prévisible par construction puisque c'est la limite des τ_n sur l'ensemble où ceux-ci sont strictement croissants.

Le temps τ_i, temps de 'mort subite', est défini par

$$\tau_i=\begin{cases}\zeta & \text{si } \|m(\zeta(m)^-)\|<+\infty,\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ce sera la partie totalement inaccessible de ζ.

Toute sous-probabilité Q sur $M(E)$ peut être étendue en une probabilité sur $M_\Delta(E)$, en posant $Q(\{\Delta\})=1-Q(M(E))$. On plonge ainsi de façon naturelle $M_1(M(E))$, l'ensemble des sous-probabilités sur $M(E)$, dans $\mathcal{P}(M_\Delta(E))$.

1.3. *Définition d'un PBM*

Un PBM est un processus de Markov homogène dans le temps, à trajectoires càd-làg dans $M(E)$, ayant Δ comme trappe et satisfaisant la *propriété de branchement*, i.e. l'additivité par rapport à la condition initiale:

La loi d'un PBM de mesure initiale m_1+m_2 est égale à la loi de la somme de deux PBM indépendants de même probabilité de transition que le premier mais initialisés respectivement en m_1 et en m_2.

Nous utilisons la caractérisation suivante, en terme de fonctionnelle de Laplace:

Proposition 1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}_t, X_t, \zeta, P_m)$ *une réalisation càd-làg d'un processus de Markov à valeurs* $M(E)$, *où* ζ *est le temps de mort; si, pour tout* $m \in M_\Delta(E)$,

(PB0) $\quad E_{P_m}(\exp -\langle X_t, f\rangle) = \exp -\langle m, U_t f\rangle \quad$ *pour* $f \in B^{++}(E)$,

où U_t *est un semi-groupe* non linéaire *appelé* cumulant *tel que* $U_t(B^{++}(E)) \subset B^{++}(E)$, *alors* X *est un PBM et vérifie de plus*:

(PB1) $\quad E_{P_m}(1_{\{t<\zeta\}} \exp -\langle X_t, f\rangle) = \exp -\langle m, U_t f\rangle \quad$ *pour* $f \in B^{++}(E)$, $m \in M(E)$.

Preuve. Grâce à la propriété de Markov, il suffit de vérifier la propriété de branchement sur la loi du processus pris à tout temps t fixé. Mais alors, l'additivité par rapport à la condition initiale est équivalente à la propriété de multiplicativité des fonctionnelles de Laplace par rapport à la mesure initiale. Un processus satisfaisant (PB0) vérifie cette propriété puisque

$$\exp -\langle m_1 + m_2, U_t f\rangle = \exp -\langle m_1, U_t f\rangle \exp -\langle m_2, U_t f\rangle.$$

D'autre part, l'hypothèse de stabilité de $B^{++}(E)$ par U_t entraine que Δ est bien une trappe car Δ intègre les fonctions f de $B^{++}(E)$ en donnant $\langle \Delta, f\rangle = +\infty$; ainsi (BP1) peut se déduire facilement de (BP0). $\square$

1.4. Exemples

(I) Dans le cas particulier où E est réduit à un point, c'est à dire où le générateur infinitésimal de la diffusion sous-jacente est nul, X_t est alors un processus de branchement à valuers dans $\mathbb{R}_+$. Jirina (1958), Kawazu et Watanabe (1971) ont prouvé par le théorème suivant que la propriété de branchement, et un peu de régularité à priori sur les trajectoires, caractérisaient complètement la loi du processus:

Théorème 2. *Soit* $\mathcal{Y} = (\Omega, \mathcal{F}_t, Y_t, P_y, \zeta)$ *un processus de Hunt positif de temps de mort* $\zeta = \inf\{t, Y_t = +\infty\}$. $\mathcal{Y}$ *est un processus de branchement si et seulement si son semi-groupe cumulant* u_t *défini par*

$$E_y(\exp - kY_t) = \exp -(y u_t(k)), \quad y \geqslant 0, \ k > 0,$$

satisfait l'équation non linéaire

E(*R*) $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\, t(z) = R(u_t(z)) = R(u_t(z)), \quad u_0(z) = z,$$

où

$$R(z) = a + bz - \tfrac{1}{2}cz^2 - \int_{]0,\infty[} (\mathrm{e}^{-z\lambda} - 1 + z\lambda 1_{\{0<\lambda\leqslant 1\}})\nu(\mathrm{d}\lambda), \quad z \geqslant 0,$$

avec $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ *et* $\int_{]0,\infty[} (\lambda^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}\lambda) < +\infty$.

La fonction R *détermine de façon unique les coefficients* a, b, c *et la mesure* ν. $\square$

Exemple 3. $R(z)=-\frac{1}{2}cz^2$. La solution de E(R) est la fonction $u_t(z)=z/(1+\frac{1}{2}czt)$.

Le processus Y_t est conservatif; c'est le carré d'un processus de Bessel de dimension 0 et il satisfait donc l'équation stochastique

$$\mathrm{d}Y_t=\sqrt{\tfrac{1}{2}cY_t}\,\mathrm{d}B_t,\quad Y_0=y,$$

où B est un mouvement Brownien construit éventuellement sur un grossissement de l'espace.

Exemple 4. $R(z)=-z^{1+\beta}$, $0<\beta<1$. $R(z)$ s'écrit aussi

$$\kappa\int_0^{+\infty}-(\mathrm{e}^{-z\lambda}-1+z\lambda)\lambda^{-(\beta+2)}\,\mathrm{d}\lambda,$$

d'où

$$-z^{1+\beta}=\kappa\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-z\lambda}-1+z\lambda\,1_{\{0\le\lambda\le1\}})\lambda^{-(\beta+2)}\,\mathrm{d}\lambda-\kappa z/\beta$$

ce qui donne:

$$a=c=0,\qquad \nu(\mathrm{d}\lambda)=\frac{\beta(\beta+1)}{\Gamma(1-\beta)}\lambda^{-(\beta+2)}\,\mathrm{d}\lambda\quad\text{et}\quad b=-(1+\beta)/\Gamma(1-\beta)<0,$$

puisque

$$\kappa^{-1}=\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-\lambda}-1+\lambda)\lambda^{-(\beta+2)}\,\mathrm{d}\lambda=\Gamma(1-\beta)/\beta(\beta+1).$$

Dans ce cas, le processus de branchement associé admet des moments finis d'ordre α si et seulement si $\alpha<1+\beta$. En particulier son espérance est finie mais sa variance infinie.

Exemple 5. $R(z)=z^\beta$, $0<\beta<1$. Alors

$$\begin{aligned}R(z)&=-\gamma\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-z\lambda}-1)\lambda^{-(\beta+1)}\,\mathrm{d}\lambda\\&=-\gamma\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-z\lambda}-1+z\lambda\,1_{\{0\le\lambda\le1\}}\lambda^{-(\beta+1)})\,\mathrm{d}\lambda+\gamma z/(1-\beta),\end{aligned}$$

d'où

$$a=c=0,\qquad \gamma^{-1}=\int_0^{\infty}(1-\mathrm{e}^{-\lambda})\lambda^{-(\beta+1)}\,\mathrm{d}\lambda=\Gamma(1-\beta)/\beta,$$

$$\nu(\mathrm{d}\lambda)=\frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)}\lambda^{-(\beta+1)}\,\mathrm{d}\lambda\quad\text{et}\quad b=\beta/(1-\beta)\Gamma(1-\beta)>0.$$

Le processus de branchement associé n'admet des moments finis que d'ordre strictement inférieur à β; en particulier, son espérance est infinie.

(II) Quand E est un espace fini de cardinal d, un PBM est en fait un processus de branchement à valeurs $(\mathbb{R}_+)^d$. Ryzhov et Skorokhod (1970) ont explicité la forme nécessaire du cumulant associé.

(III) Dans le cas d'un espace E non fini, l'on ne connait pas la forme nécessaire du semi-groupe U_t pour qu'il soit cumulant d'un PBM. Dans le paragraphe suivant, nous définissons la large classe de PBM considérés, qui généralise celle introduite par Watanabe (1968, p. 153).

1.5. La classe ($\mathscr{C}$)

Définition 6. Soit A le générateur infinitésimal faible d'un processus droit sur E, de semi-groupe associé S_t sur $B(E)$, et de domaine $\mathscr{D}(A)$.

Soit, de plus, $R(x,\cdot)$ une famille de générateurs de cumulants de processus de branchement réels, définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$R(x,z)=a(x)+b(x)z-\tfrac{1}{2}c(x)z^2-\int_{]0,\infty[}(e^{-z\lambda}-1+z\lambda 1_{\{0<\lambda\leq 1\}})\nu(x,d\lambda).$$

Nous supposerons que:
- les fonctions a, b, c appartiennent à $B(E)$;
- les fonctions a et c sont positives;
- la mesure ν satisfait

$$\sup_x \int_{]0,\infty[}(\lambda^2\wedge 1)\nu(x,d\lambda)<+\infty,$$

et est suffisamment régulière pour que $x\to R(x,z)$ soit borélienne bornée, et $z\to R(x,z)$ soit continue, uniformément par rapport à x.

On suppose qu'il existe une unique solution U_t à l'équation intégrale

$$\mathrm{E}(A,R)\qquad U_tf=S_tf+\int_0^t S_{t-s}R(U_sf)\,ds,\qquad U_0=f\in B^{++}(E),$$

où $R(f)\equiv R(\cdot,f(\cdot))$, ayant la régularité: $\forall f\in B^+(E)$, $(t,x)\to U_tf(x)$ est bimesurable, $U_t(B^{++}(E))\subseteq B^{++}(E)$ et, pour $f\in B^{++}(E)$, $\sup_{t\leq T}\|U_tf\|<+\infty$.

La classe ($\mathscr{C}$) est la classe des PBM dont le semi-groupe cumulant est solution d'une équation de type $\mathrm{E}(A,R)$.

Remarques. – Si l'on veut donner un sens à $\mathrm{E}(A,R)$ pour des fonctions f de signe quelconque, il suffit de prolonger $z\to R(x,z)$ par 0 sur $\mathbb{R}_-$.

– Les hypothèses de régularité sont données sur la fonction R directement et non pas sur la mesure ν car, dans la pratique, c'est R qui apparait et non sa décomposition.

– L'équation $\mathrm{E}(A,R)$ peut s'écrire formellement sous la forme

$$\frac{\partial U_tf}{\partial t}=AU_tf+R(U_tf),\quad U_0f=f.$$

L'objet principal de cet article n'est pas de prouver des théorèmes d'existence de PBM très généraux mais de mettre en évidence des propriétés de martingales satisfaites par une très large classe de PBM. Pour leurs constructions, nous renvoyons le lecteur à Watanabe (1968), Dynkin (1988) ou Fitzsimmons (1989, Théorème II.11), dans les cas suivants:

Watanabe utilise la structure topologique de l'espace E en se plaçant sous des hypothèses de Feller pour A et de continuité pour les coefficients a, b, c de la fonctionnelle R. Il considère les mesures ν de la forme $\nu(x, \mathrm{d}\lambda) \equiv \sigma(x)\nu(\mathrm{d}\lambda)$, où $\sigma \in C(E)$. Nous verrons dans la partie 2 que ces hypothèses de régularité du processus de Markov sous-jacent au PBM (i.e. associé à A) ne seront pas nécessaires.

C'est ce qu'avait remarqué Dynkin puis Fitzsimmons en affaiblissant les hypothèses sur A, c'est-à-dire en le prenant générateur d'un processus droit sur un espace E lusinien quelconque. Cependant, ils ne considèrent que le cas où la fonctionnelle R est localement lipschitzienne, i.e. quand le PBM n'explose pas, ce qui correspond à imposer à la mesure ν la condition supplémentaire d'intégrabilité suivante:

$$\sup_x \int_{]0,\infty[} (\lambda^2 \wedge \lambda)\nu(x, \mathrm{d}\lambda) < +\infty.$$

Récemment Le Gall (1989) et Le Jan (1989) ont exhibé des constructions trajectorielles de certains PBM, et Dynkin (1990) généralise sa construction précédente au cas de processus spatialement inhomogènes.

2. Une martingale exponentielle et ses équivalents

L'on constate, d'après la forme de la fonctionnelle de Laplace d'un PBM, que son semi-groupe laisse globalement invariant l'ensemble des fonctions exponentielles: $m \to \exp -\langle m, f\rangle$, $f \in B^{++}(E)$. Ces fonctions définies sur l'espace $M(E)$ sont d'une importance primordiale. Ainsi, dans le théorème fondamental 7, nous démontrons qu'un PBM de la classe $(\mathscr{C})$ est caractérisé par une martingale exponentielle, dont nous déduisons toutes les informations sur la régularité de ses trajectoires; de plus, de façon équivalente, le PBM est exhibé comme solution d'un problème de martingales.

Certaines de ces techniques de calcul stochastique ont déjà été utilisées dans Roelly (1986) pour traiter le cas simple continu; la formulation martingale exponentielle apparait dans Ethier et Kurtz (1986) pour des PBM sans explosion.

La difficulté liée à l'explosion éventuelle en temps fini du PBM est résolue en définissant le processus sur un ensemble aléatoire I_ζ, limite des fermés aléatoires $[0, \tau_n]$ où τ_n sont les temps d'arrêt de localisation.

Précisément, en reprenant les définitions données dans l'introduction, l'intervalle I_ζ, noté $[[0, \zeta||$, est ouvert sur l'ensemble où la suite τ_n croit strictement vers le temps d'explosion τ_e, et est fermé sur l'ensemble où τ_n est stationnaire et égal, à partir d'un certain rang, au temps imprévisible τ_i.

En suivant la définition de Jacod (1979, p. 158), nous dirons qu'un processus Z_t est de type $\mathscr{T}$ sur l'ensemble aléatoire I_ζ si, pour tout n, $Z_{t\wedge\tau_n}$ est de type $\mathscr{T}$. Ainsi, par exemple, les objets qui étaient des martingales dans les modèles sans explosion, sont, dans notre contexte, des martingales sur l'ensemble aléatoire I_ζ.

2.1. Le théorème principal

Le théorème qui suit sera démontré sous les hypothèses minimales sur A, à savoir que c'est le générateur faible du semigroupe S_t (si $f \in \mathscr{D}(A)$, $(S_t f - f)/t$ converge ponctuellement vers Af quand t tend vers 0, tout en restant borné). On supposera, de plus, que $\mathscr{D}(A)$ est une algèbre.

Théorème 7. *Soit X un processus càd-làg sur $(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ à valeurs $M(E)$ ayant Δ pour trappe et ζ pour temps de mort. Soit aussi U_t solution sur $[0, T]$, $T>0$, de l'équation $E(A, R)$.*

Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes:

(1) $\forall f \in B^{++}(E)$, $1_{\{t<\zeta\}} \exp -\langle X_t, U_{T-t} f\rangle$ *est une martingale sur* $[0, T]$.

(2) $\forall f \in \mathscr{D}(A)^{++}$,

$$H_t(f) = \exp -\left(\langle X_t, f\rangle - \int_0^t \langle X_s, Af + R(f)\rangle \, \mathrm{d}s\right)$$

est une martingale sur l'ensemble aléatoire $[[0, \zeta\|$.

(3) (i) $1_{\{\langle X_{\zeta}^-, 1\rangle + \infty\}} 1_{\{\zeta \leq t\}} - \int_0^{t\wedge\zeta} \langle X_s, a\rangle \, \mathrm{d}s$ *est une martingale.*

(ii) *Soit $\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}v)$ le système de Lévy du processus X, i.e. une mesure prévisible sur $\mathbb{R}_+ \times \mathscr{M}(E)$ telle que $\sum 1_{\{\Delta X_s \neq 0\}} 1_{\{s<\zeta\}} \delta_{(s, \Delta X_s)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}v) - \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}v)$ soit une mesure martingale.*

Alors le support de $\tilde{N}$ est contenu dans $\mathbb{R}^+ \times M(E)$ et pour tout $\phi \geq 0$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathscr{M}(E)} \phi(s, v) \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}v) = \int_0^\zeta \mathrm{d}s \int_E X_s(\mathrm{d}x) \int_{]0, \infty[} \nu(x, \mathrm{d}\lambda) \phi(s, \lambda\delta_x),$$

d'où $\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}v) = \mathrm{d}s \, N(X_s, \mathrm{d}v)$ *où*

$$\int \phi(v) N(m, \mathrm{d}v) = \int\int_{Ex]0,\infty[} \phi(\lambda\delta_x) m(\mathrm{d}x) \nu(x, \mathrm{d}\lambda).$$

(iii) *Pour tout* $f \in \mathscr{D}(A)^+$,

$$1_{\{t<\zeta\}}\langle X_t, f\rangle = \langle X_0, f\rangle + \sum_{s\leq t} 1_{\{s<\zeta\}} 1_{\{\|\Delta X_s\| \geq 1\}} \langle \Delta X_s, f\rangle + M_t^{\mathrm{c}}(f) + M_t^{\mathrm{d}}(f)$$
$$+ \int_0^{t\wedge\zeta} (\langle X_s, Af + bf\rangle - \langle X_{s^-}, f\rangle\langle X_s, a\rangle) \, \mathrm{d}s$$

où $M_t^{\mathrm{c}}(f)$ est une martingale locale continue de processus croissant $\int_0^{t\wedge\zeta} \langle X_s, cf^2\rangle \, \mathrm{d}s$ et $M_t^{\mathrm{d}}(f)$ est une martingale locale purement discontinue.

(4) *Soit G une fonction réelle $\mathscr{C}^\infty$ à support compact et $f \in \mathscr{D}(A)^+$,*

$$1_{\{t<\zeta\}} G(\langle X_t, f\rangle) - \int_0^{t\wedge\zeta} (G'(\langle X_s, f\rangle)\langle X_s, Af + bf\rangle$$
$$+ \tfrac{1}{2} G''(\langle X_s, f\rangle)\langle X_s, cf^2\rangle - G(\langle X_s, f\rangle)\langle X_s, a\rangle) \, \mathrm{d}s$$

$$-\int_0^{t\wedge\zeta}\left\langle X_{s^-}, \int_{]0,\infty]} \nu(\cdot,\mathrm{d}\lambda)(G(\langle X_{s-},f\rangle+\lambda f(\cdot))-G(\langle X_{s^-},f\rangle)\right.$$
$$\left.-G'(\langle X_{s^-},f\rangle)\lambda f(\cdot)1_{\{0<\lambda\leq 1\}})\right\rangle \mathrm{d}s$$

est une martingale locale.

Preuve. (1)$\Rightarrow$(2) Prouvons d'abord que pour toute fonction f de $\mathscr{D}(A)^{++}$,

$$Y_t = 1_{\{t<\zeta\}}\exp-\langle X_t,f\rangle + \int_0^{t\wedge\zeta}\langle X_s, Af+R(f)\rangle\exp-\langle X_s,f\rangle\,\mathrm{d}s$$

est une P-martingale.

Cela revient à prouver que l'expression

$$E(1_B 1_{\{t<\zeta\}}\exp-\langle X_t,f\rangle),\quad B\in\mathscr{F}_s,\ s\leq t,$$

est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ en t, et de dérivée continue bornée

$$-E(1_B 1_{\{t<\zeta\}}\langle X_t, A_R f\rangle\exp-\langle X_t,f\rangle)\quad (\text{on note } A_R\equiv A+R).$$

Montrons dans un premier temps la dérivabilité à droite de

$$t\to E(1_B 1_{\{t<\zeta\}}\exp-\langle X_t,f\rangle):$$

D'après la propriété de martingale (1),

$$\varepsilon^{-1}E(1_B(1_{\{t+\varepsilon<\zeta\}}\exp\ -\langle X_{t+\varepsilon},f\rangle - 1_{\{t<\zeta\}}\exp-\langle X_t,f\rangle))$$
$$=\varepsilon^{-1}E(1_B 1_{\{t<\zeta\}}(\exp-\langle X_t, U_\varepsilon f\rangle-\exp-\langle X_t,f\rangle)). \tag{$*$}$$

Pour utiliser un théorème de Lebesgue dominé et passer à la limite sous l'espérance, nous montrons que l'expression $D^\varepsilon(m)$ définie pour $m\in M(E)$ par

$$D^\varepsilon(m)\equiv\varepsilon^{-1}(\exp-\langle m, U_\varepsilon f\rangle-\exp-\langle m,f\rangle)$$

est uniformément bornée en m. Or

$$D^\varepsilon(m)=\varepsilon^{-1}\exp-\langle m,f\rangle(\exp-\langle m, U_\varepsilon f-f\rangle-1).$$

Puisque $f\in\mathscr{D}(A)$,

$$U_t f-f=\int_0^t S_{t-r}(Af+R(U_r f))\,\mathrm{d}r,$$

donc

$$\|U_t f-f\|\leq t\left(\|Af\|+\sup_{r<T}\|R(U_r f)\|\right)$$
$$\leq K_T(f)t\quad (K_T(f),\ \text{constante dépendant de } f).$$

Cette dernière inégalité provient des hypothèses de bornitudes de U, explicitées en fin d'introduction.

Mais f appartient aussi à $B^{++}(E)$, donc est minorée par $\kappa>0$, ce qui implique, pour ε assez petit:

$$|D^\varepsilon(m)|\leq\exp-\kappa\langle m,1\rangle\varepsilon^{-1}(\exp K_T(f)\varepsilon\langle m,1\rangle-1).$$

Cette dernière expression, en tant que fonction de $\langle m, 1\rangle$, est effectivement bornée sur $\mathbb{R}_+$ uniformément en ε. D'où l'on déduit que $(*)$ admet une limite quand ε tend vers 0 par valeurs supérieures. Un raisonnement similaire serait valable quand ε tend vers 0 par valeurs inférieures, ce qui prouve que $t \to E(1_B 1_{\{t<\zeta\}} \exp -\langle X_t, f\rangle)$ est dérivable.

Il reste à expliciter la dérivée à droite:

$$\begin{aligned} D^\varepsilon(m) &= \varepsilon^{-1} \exp-\langle m, f\rangle(\exp-\langle m, U_\varepsilon f - f\rangle - 1) \\ &= \varepsilon^{-1} \exp-\langle m, f\rangle \exp-\left\langle m, \int_0^\varepsilon S_{\varepsilon-r}(R(U_r f) - R(f))\,\mathrm{d}r\right\rangle \\ &\quad \times\left(\exp-\left\langle m, \int_0^\varepsilon S_{\varepsilon-r} A_R f\,\mathrm{d}r\right\rangle - 1\right) \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \exp-\langle m, f\rangle\left(\exp-\left\langle m, \int_0^\varepsilon S_{\varepsilon-r}(R(U_r f) - R(f))\,\mathrm{d}r\right\rangle - 1\right). \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite converge, quand ε tend vers 0, vers

$$-\exp-\langle m, f\rangle\langle m, A_R f\rangle = -\exp-\langle m, f\rangle\langle m, Af + R(f)\rangle$$

et le deuxième membre tend vers 0 grâce à l'hypothèse faite sur le module de continuité de la fonction $z \to R(x, z)$, uniforme en x.

On conclut par le théorème de Lebesgue dominé

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} E(1_B(1_{\{t+\varepsilon<\zeta\}} \exp-\langle X_{t+\varepsilon}, f\rangle - 1_{\{t<\zeta\}} \exp -\langle X_t, f\rangle) \\ &\quad = -E(1_B 1_{\{t<\zeta\}}\langle X_t, A_R f\rangle \exp-\langle X_t, f\rangle). \end{aligned}$$

On notera que la fonction sous l'espérance est bornée, et que la dérivée ainsi trouvée est continue en temps.

Le processus $V_t \equiv \exp \int_0^t 1_{\{s<\zeta\}}\langle X_s, A_R f\rangle\,\mathrm{d}s$ est un processus à variation finie sur l'ensemble aléatoire $[[0, \zeta\|$, car

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} \langle X_s, 1\rangle\,\mathrm{d}s \leq nt \quad \text{et} \quad V_{t\wedge\tau_n} \leq \mathrm{e}^{Knt}.$$

On peut alors appliquer la formule d'Ito à la semimartingale $Z_t \equiv 1_{\{t<\zeta\}} \exp-\langle X_t, f\rangle$ et au processus V_t sur les intervalles $[0, \tau_n]$:

$$Z_{t\wedge\tau_n} V_{t\wedge\tau_n} = Z_0 V_0 + \int_0^{t\wedge\tau_n} Z_s\,\mathrm{d}V_s + \int_0^{t\wedge\tau_n} V_s\,\mathrm{d}Z_s.$$

Puisque

$$\mathrm{d}V_s = V_s\langle X_s, A_R f\rangle 1_{\{s<\zeta\}}\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \mathrm{d}Z_s = -Z_s\langle X_s, A_R f\rangle 1_{\{s<\zeta\}}\,\mathrm{d}s + \mathrm{d}N_s^z$$

où N^z est une martingale locale, alors $Z_t V_t$ est une martingale locale sur l'ensemble aléatoire $[[0, \zeta\|$.

(2)⇒(3) Montrons d'abord que $H_t(0)$ est aussi une martingale sur l'ensemble aléatoire $[[0, \zeta\|$:

Soit κ un réel strictment positif et $B \in \mathscr{F}_s$,

$$E(1_B \exp -\langle X_{t\wedge\tau_n}, \kappa\rangle) = E(1_B \exp -\langle X_{s\wedge\tau_n}, \kappa\rangle) - E\left(\int_{s\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_n} 1_B\langle X_u, A_R\kappa\rangle \exp -\langle X_u, \kappa\rangle\, \mathrm{d}u\right). \qquad (**)$$

$A_R\kappa$ étant une fonction bornée, et la masse de la mesure X_u étant bornée par n sur $[0, \tau_n[$, on peut faire tendre κ vers 0 dans le deuxième terme.

D'une part, $\exp -\langle X_{t\wedge\tau_n}, \kappa\rangle$ croît vers $1_{\{\langle X_{t\wedge\tau_n}, 1\rangle<+\infty\}}$. Mais

$$1_{\{\langle X_{t\wedge\tau_n},1\rangle=+\infty\}} = 1_{\{t\wedge\tau_n\geq\zeta\}}.$$

D'autre part, R étant continue en 0 uniformément en x,

$$|\langle m, A_R\kappa - A_R0\rangle \exp -\langle m, \kappa\rangle| = |\langle m, R(\kappa) - R(0)\rangle \exp -\langle m, \kappa\rangle| \leq \langle m, 1\rangle \exp -\langle m, \kappa\rangle\varepsilon(\kappa)$$

avec

$$\lim_{\kappa\to 0} \varepsilon(\kappa) = 0,$$

d'où

$$\lim_{\kappa\to 0} \sup_{\{m,\|m\|\leq n\}} |\langle m, A_R\kappa - A_R0\rangle \exp -\langle m, \kappa\rangle| = 0.$$

Donc l'égalité (**) ci-dessus devient

$$E(1_{\{s\wedge\tau_n<\zeta\leq t\wedge\tau_n\}}1_B) = E\left(1_B \int_{s\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_n} \langle X_u, A_R0\rangle\, \mathrm{d}u\right).$$

Il reste à passer à la limite en n; or

$$\bigcup_n \{s\wedge\tau_n < \zeta \leq t\wedge\tau_n\} = \{s<\zeta\leq t\} \cap \bigcup_n \{\tau_n \geq \zeta\} = \{s<\zeta\leq t\} \cap \{\zeta = \tau_{\mathrm{i}}\},$$

où τ_{i} est le temps de mort totalement inaccessible défini dans l'introduction.

(Rappelons que $\{\zeta = \tau_{\mathrm{i}}\} = \{\langle X_{\zeta^-}, 1\rangle < +\infty\}$.) D'où

$$E(1_{\{s<\zeta\leq t\}}1_{(\zeta=\tau_{\mathrm{i}})}1_B) = E\left(1_B \int_{s\wedge\zeta}^{t\wedge\zeta} \langle X_u, A_R0\rangle\, \mathrm{d}u\right) = E\left(1_B \int_{s\wedge\zeta}^{t\wedge\zeta} \langle X_u, a\rangle\, \mathrm{d}u\right).$$

Cela prouve que la projection duale prévisible associée au processus croissant intégrable $1_{\{\zeta\leq t\}}1_{\{\zeta=\tau_{\mathrm{i}}\}}$ est $\int_0^{t\wedge\zeta} \langle X_u, a\rangle\, \mathrm{d}u$.

Prouvons maintenant (ii): Pour $f \in B^{++}(E)$, soit $\mathscr{X}_t$ définie par

$$\langle \mathscr{X}_t, f\rangle = \begin{cases} \langle X_t, f\rangle & \text{si } t<\zeta, \\ \langle X_{\zeta^-}, f\rangle & \text{si } t\geq\zeta. \end{cases}$$

Dans le cas $t \geq \zeta$, on a deux possibilités: $\zeta = \tau_i$ et $\langle \mathscr{X}_t, f\rangle < +\infty$ ou bien $\zeta = \tau_e$ et $\langle \mathscr{X}_t, f\rangle = +\infty$. Cela entraine que les mesures $\mathscr{X}_{t\wedge\tau_n}$ sont des mesures finies pour tout n et t.

Donc

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_t(f) &\equiv \exp - \langle \mathscr{X}_t, f\rangle \\ &= 1_{\{t<\zeta\}} \exp - \langle X_t, f\rangle + 1_{\{t \geq \zeta\}} \exp - \langle X_{\zeta^-}, f\rangle\end{aligned}$$

est une semimartingale sur l'ensemble aléatoire $[[0, \zeta\|$, continue à gauche en ζ, de décomposition

$$\mathrm{d}\mathscr{Z}_t(f) = -1_{\{t<\zeta\}} \mathscr{Z}_t(f) \langle X_t, A_R f - a\rangle \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t^{\mathscr{Z}}$$

où $M_t^{\mathscr{Z}}$ est une martingale locale.

L'on peut obtenir aussi une autre décomposition de $\mathscr{Z}_t(f)$ en appliquant la formule d'Ito à la semimartingale $\langle X_t, f\rangle$ sur l'ensemble aléatoire $[[0, \zeta\|$:

$$\mathrm{d}\langle \mathscr{X}_t, f\rangle = \mathrm{d}V_t(f) + \mathrm{d}\delta_t \langle \Delta\mathscr{X}_t, f\rangle 1_{\{|\langle \Delta X_t, f\rangle| \geq \|f\|\}} + \mathrm{d}M_t^{\mathrm{c}}(f) + \mathrm{d}M_t^{\mathrm{d}}(f)$$

où δ_t est la mesure de Dirac en t, $M_t^{\mathrm{c}}(f)$ est une martingale locale continue de processus croissant noté $C_t(f)$ et $M_t^{\mathrm{d}}(f)$ est une martingale locale purement discontinue sur l'ensemble aléatoire $[[0, \zeta\|$.

Par la formule d'Ito sur l'ensemble $[[0, \zeta\|$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathscr{Z}_t(f) &= -\mathscr{Z}_{t^-}(f)\,\mathrm{d}\langle \mathscr{X}_t, f\rangle + \tfrac{1}{2}\mathscr{Z}_{t^-}(f)\,\mathrm{d}C_t(f) \\ &\qquad + \mathscr{Z}_{t^-}(f)(\exp - \langle \Delta\mathscr{X}_t, f\rangle - 1 + \langle \Delta\mathscr{X}_t, f\rangle)\,\mathrm{d}\delta_t \\ &= \mathscr{Z}_{t^-}(f)(-\mathrm{d}V_t(f) + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}C_t(f) \\ &\qquad + \mathrm{d}\delta_t(\exp - \langle \Delta\mathscr{X}_t, f\rangle - 1 + \langle \Delta\mathscr{X}_t, f\rangle 1_{\{|\langle \Delta X_t, f\rangle| < \|f\|\}})) \\ &\quad - \mathscr{Z}_{t^-}(f)(\mathrm{d}M_t^{\mathrm{c}}(f) + \mathrm{d}M_t^{\mathrm{d}}(f)).\end{aligned}$$

Le processus

$$\tilde{Z}_t(f) \equiv \mathscr{Z}_{t^-}(f)(\exp - \langle \Delta\mathscr{X}_t, f\rangle - \langle \Delta\mathscr{X}_t, f\rangle 1_{\{|\langle \Delta X_t, f\rangle| < \|f\|\}})$$

est localement intégrable sur $t < \tau_n$. Le compensateur prévisible de $\sum_{s \leq t\wedge\tau_n} \tilde{Z}_s 1_{\{\Delta X_s \neq 0\}}$ s'exprime à l'aide de la mesure de Lévy de sauts du processus X_t, par

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} 1_{\{s\leq\zeta\}} \mathscr{Z}_{s^-}(f) \int_{\mathscr{M}-\{0\}} (\exp - \langle v, f\rangle - 1 + \langle v, f\rangle 1_{\{|\langle v, f\rangle| < \|f\|\}}) \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}v).$$

Nous pouvons maintenant identifier dans les deux décompositions

$$\begin{aligned}&-1_{\{t<\tau_n\}} \mathscr{Z}_t(f)(X_t, A_R f - a)\,\mathrm{d}t \\ &\quad = 1_{\{t<\tau_n\}} \mathscr{Z}_t - (f)\left(-\mathrm{d}V_t(f) + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}C(f) + \int_{\mathscr{M}-\{0\}} k(v, f)\tilde{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}v)\right)\end{aligned}$$

où $k(v, f) = \exp - \langle v, f\rangle - 1 + \langle v, f\rangle 1_{\{|\langle v, f\rangle| < \|f\|\}}$.

De plus, le processus $\langle X_s, A_R f - a\rangle$ est intégrable en s sur l'intervalle $[0, t\wedge \tau_n]$ et

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} \langle X_s, A_R f - a\rangle\,\mathrm{d}s = V_{t\wedge\tau_n}(f) - \tfrac{1}{2}C_{t\wedge\tau_n}(f) - \int_0^{t\wedge\tau_n}\int k(v,f)\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}v).$$

Considérons maintenant les fonctions κf, $\kappa\in\mathbb{R}_+$. $\kappa \to \int_0^{t\wedge\tau_n}\langle X_s, A_R(\kappa f) - a\rangle\,\mathrm{d}s$ a la forme d'un générateur de cumulant de processus de branchement réels au sens du Théorème 2. Le résultat d'unicité nous permet d'identifier les coefficients et les mesures de Lévy dans les décompositions ci-dessus

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t\wedge\tau_n} \langle X_s, A_R(\kappa f) - a\rangle\,\mathrm{d}s\\
&\quad= \kappa\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle X_s, Af + bf\rangle\,\mathrm{d}s - \tfrac{1}{2}\kappa^2\int_0^{t\wedge\tau_n}\langle X_s, cf^2\rangle\,\mathrm{d}s\\
&\qquad - \int_0^{t\wedge\tau_n}\mathrm{d}s\int_E X_s(\mathrm{d}x)\int_{]0,\infty[}\nu(x,\mathrm{d}\lambda)\\
&\qquad\qquad\times(\exp - \kappa f(x)\lambda - 1 + 1_{\{0<\lambda<\|f\|/f(x)\}}\kappa f(x)\lambda)\\
&\quad= \kappa V_{t\wedge\tau_n}(f) - \tfrac{1}{2}\kappa^2 C_{t\wedge\tau_n}(f) - \int_0^{t\wedge\tau_n}\int_{\mathcal{M}(E)-\{0\}}\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}v)\\
&\qquad\qquad\times(\exp - \kappa\langle v,f\rangle - 1 + \kappa\langle v,f\rangle 1_{\{|\langle v,f\rangle|<\|f\|\}})
\end{aligned}$$

pour tout $\kappa\in\mathbb{R}_+$, entraine que

$$C_{t\wedge\tau_n}(f) = \int_0^{t\wedge\tau_n}\langle X_s, cf^2\rangle\,\mathrm{d}s,\qquad V_{t\wedge\tau_n}(f) = \int_0^{t\wedge\tau_n}\langle X_s, Af + bf\rangle\,\mathrm{d}s$$

et, pour Φ fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t\wedge\tau_n}\mathrm{d}s\int_E X_s(\mathrm{d}x)\int_{]0,\infty[}\nu(x,\mathrm{d}\lambda)\Phi(s,\lambda\delta_x(f))\\
&\quad= \int_0^{t\wedge\tau_n}\int_{\mathcal{M}(E)-\{0\}}\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}v)\Phi(s,\langle v,f\rangle),
\end{aligned}$$

d'où, $\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}v) = \mathrm{d}s\, N(X_s,\mathrm{d}v)$ où

$$\int \varphi(v)N(m,\mathrm{d}v) = \int_E\int_{]0,\infty[}\varphi(\lambda\delta_x)m(\mathrm{d}x)\nu(x,\mathrm{d}\lambda).$$

Cela signifie que les sauts de X d'une part appartiennent p.s. à $M(E)$, c'est-à-dire sont des mesures positives, d'autre part, se 'scindent' entre sauts de la masse et sauts du support, ceci se lisant sur la forme de la mesure N.

De plus, nous en déduisons qu'un saut du processus X_t est obligatoirement un saut du processus de sa masse $\langle X_t, 1\rangle$ car

$$\int 1_{\{\langle v,1\rangle=0\}} N(m, \mathrm{d}v)=0$$
$$\Rightarrow \iint 1_{\{\|\Delta v\|=0\}} \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}v)=\iiint_{E\times]0,\infty[} 1_{\{\lambda=0\}} m(\mathrm{d}x)\nu(x, \mathrm{d}\lambda)=0.$$

Donc l'ensemble des temps où la masse du saut de X est plus grande que 1 est un ensemble fini qui peut servir comme référence, indépendant de la fonction test f, dans la décomposition des semimartingales $\langle X_t, f\rangle$. C'est désormais celle-ci qui sera utilisée.

Finissons la preuve de (iii); par définition de $\mathscr{X}_t$,

$$\begin{aligned}1_{\{t\wedge\tau_n<\zeta\}}\langle X_{t\wedge\tau_n}, f\rangle &= \langle \mathscr{X}_{t\wedge\tau_n}, f\rangle - \langle X_{\zeta^-}, f\rangle 1_{\{\tau_i\leq t\wedge\tau_n\}}\\ &= \langle \mathscr{X}_{t\wedge\tau_n}, f\rangle - \int_0^{t\wedge\tau_n} \langle X_s, a\rangle\langle X_s, f\rangle\,\mathrm{d}s + \text{une martingale.}\end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu la décomposition de $\langle \mathscr{X}_t, f\rangle$.

Pour s'affranchir de l'hypothèse que f est minorée par un réel strictement positif, il suffit de remarquer, en comparant les crochets de $1_{\{t<\zeta\}}\langle X_t, f+g\rangle$ avec ceux de $\langle X_t, f\rangle$ et $\langle X_t, g\rangle$, $f, g\in C^{++}(E)$, que

$$\langle\!\langle \mathrm{d}M_t^c(f), \mathrm{d}M_t^c(g)\rangle\!\rangle = 1_{]0,\zeta[}\langle X_t, cfg\rangle\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit aisément que

$$1_{\{t\wedge\tau_n<\zeta\}}(\langle X_{t\wedge\tau_n}, f\rangle - \langle X_{t\wedge\tau_n}, g\rangle) = 1_{\{t\wedge\tau_n<\zeta\}}\langle X_{t\wedge\tau_n}, f-g\rangle$$

vérifie (iii).

(3)$\Rightarrow$(4) Soit G une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle à l'infini, et $f\in\mathscr{D}(A)^{++}$. Par la formule de Ito appliquée à $\mathscr{X}_t$ sur l'ensemble aléatoire $[[0,\zeta\|$,

$$\begin{aligned}G(\langle \mathscr{X}_t, f\rangle) &= G(\langle X_0, f\rangle) + \int_0^{t\wedge\zeta} G'(\langle \mathscr{X}_{s^-}, f\rangle)\,\mathrm{d}\langle \mathscr{X}_s, f\rangle\\ &\quad + \tfrac{1}{2}\int_0^{t\wedge\zeta} G''(\langle \mathscr{X}_s, f\rangle)\,\mathrm{d}\langle\!\langle X_s, f\rangle\!\rangle\\ &\quad + \sum_{0<s\leq t} 1_{\{s<\zeta\}}(G(\langle \mathscr{X}_s, f\rangle) - G(\langle \mathscr{X}_{s^-}, f\rangle) - G'(\langle \mathscr{X}_{s^-}, f\rangle)\langle \Delta\mathscr{X}_s, f\rangle).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}1_{\{t<\zeta\}} G(\langle X_t, f\rangle) &= G(\langle \mathscr{X}_t, f\rangle) - G(\langle X_{\zeta^-}, f\rangle) 1_{\{\tau_i\leq t\}}\\ &= G(\langle \mathscr{X}_t, f\rangle) - \int_0^{t\wedge\zeta} G(\langle X_{s^-}, f\rangle)\langle X_s, a\rangle\,\mathrm{d}s\\ &\quad + \text{une martingale locale sur l'ensemble aléatoire } [[0,\zeta\|.\end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat souhaité:

$$1_{\{t<\zeta\}}G(\langle X_t,f\rangle)-\int_0^{t\wedge\zeta}(G'(\langle X_s,f\rangle)\langle X_s,Af+bf\rangle$$
$$+\tfrac{1}{2}G''(\langle X_s,f\rangle)\langle X_s,cf^2\rangle-G(\langle X_s,f\rangle)\langle X_s,a\rangle)\,\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^{t\wedge\zeta}\Big\langle X_s,\int_{]0,\infty[}\nu(\cdot,\mathrm{d}\lambda)(G(\langle X_{s^-},f\rangle+\lambda f(\cdot))-G(\langle X_{s^-},f\rangle)$$
$$-G'(\langle X_{s^-},f\rangle)\lambda f(\cdot)1_{\{0<\lambda\le 1\}})\Big\rangle\,\mathrm{d}s$$

est une martingale locale sur $[[0,\zeta\|$.

(4)$\Rightarrow$(1) Nous utilisons le lemme suivant d'Ethier et Kurtz (1986, p. 176).

Lemme 8. *Soit $\tilde{f}(t,x)$ une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+\times E$ telle que, pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times E$, $\tilde{f}(t,\cdot)\in\mathscr{D}(A)^{++}$ et $t\to A\tilde{f}(t,x)$ soit continue, $\tilde{f}(\cdot,x)\in C_b^1(\mathbb{R}_+)$ et $x\to(\partial\tilde{f}/\partial t)(t,x)$ soit dans $\mathscr{D}(A)$. Alors, pour toute fonction G réelle $\mathscr{C}^\infty$,*

$$1_{\{t<\zeta\}}G(\langle X_t,\tilde{f}\rangle)-\int_0^{t\wedge\zeta}\Big(G'(\langle X_s,\tilde{f}\rangle)\Big\langle X_s,\frac{\partial\tilde{f}}{\partial s}+A\tilde{f}+b\tilde{f}\Big\rangle$$
$$+\tfrac{1}{2}G''(\langle X_s,\tilde{f}\rangle)\langle X_s,c\tilde{f}^2\rangle-G(\langle X_s,\tilde{f}\rangle)\langle X_s,a\rangle\Big)\,\mathrm{d}s$$
$$-\int_0^{t\wedge\zeta}\Big\langle X_s,\int_{]0,\infty[}\nu(\cdot,\mathrm{d}\lambda)\Big(G(\langle X_{s^-},\tilde{f}\rangle+\lambda\tilde{f}(\cdot))-G(\langle X_{s^-},\tilde{f}\rangle)$$
$$-G'(\langle X_{s^-},\tilde{f}\rangle)\lambda\tilde{f}(\cdot)1_{\{0<\lambda\le 1\}}\Big)\Big\rangle\,\mathrm{d}s$$

est une martingale locale. □

Preuve du Théorème 7 (continuation de (4)$\Rightarrow$(1)). Introduisons la notation $\tilde{A}=\partial/\partial t+A$; alors, si $f\in\mathscr{D}(A)^{++}$ et U_tf est solution de l'équation E(A, R),

$$\tilde{A}(U_{T-t}f)+R(U_{T-t}f)=0.$$

Pour appliquer le Lemme 8 aux fonctions $\tilde{f}(t,x)=U_{T-t}f(x)$ et $G(x)=\exp-x$, on remarque qu'il est facile de s'affranchir de l'hypothèse: $x\to(\partial\tilde{f}/\partial t)(t,x)\in\mathscr{D}(A)$. Le lemme reste vrai si $(\partial\tilde{f}/\partial t)(t,\cdot)$ est juste mesurable.

Ceci prouve (1) pour $f\in\mathscr{D}(A)^{++}$. Il reste à généraliser la propriété de martingale exponentielle à toutes les fonctions boréliennes positives. Pour cela, l'on constate que l'ensemble des fonctions sur E telles que, pour tout temps d'arrêt $\vartheta<T$, $\exp-\langle X_\vartheta,U_{T-\vartheta}f\rangle$ est une version mesurable de $E(1_{\{T<\zeta\}}\exp-\langle X_T,f\rangle\,|\,\mathscr{F}_\vartheta)$, est un ensemble stable par limite monotone, par produit ($\mathscr{D}(A)$ est une algèbre) et qui contient $\mathscr{D}(A)^{++}$. Par le théorème de classe monotone, toute fonction borélienne positive appartient donc aussi à cet ensemble.

On conclut en remarquant que $t \to (X_t, U_{T-t}f)$, pour $f \in B^{++}(E)$, est optionnel et donc $\exp -\langle X_t, U_{T-t}f\rangle$ est la version continue à droite de la martingale exponentielle. □

3. Quelques applications de la formule exponentielle

Les deux corollaires suivants se déduisent immédiatement du Théorème 7:

Corollaire 9. *Le processus X admet des trajectoires continues dans $M(E)$ si et seulement si la mesure $\nu(\cdot, \mathrm{d}\lambda)$ est identiquement nulle.* □

Corollaire 10. *Le processus X admet un temps d'explosion prévisible ($\zeta = \tau_e$) si et seulement si la fonction a est identiquement nulle.* □

La formulation martingale exponentielle (1) permet d'obtenir simplement l'unicité des solutions du problème de martingales (4):

Théorème 11. *Il existe au plus une probabilité P sur l'espace canonique $\Omega = \mathbb{D}(\mathbb{R}_+, M_\Delta(E))$ telle que, pour $m \in M(E)$ et $f \in B^{++}(E)$, $P(X_0 = m) = 1$ et $1_{\{t<\zeta\}} \exp -\langle X_t, U_{T-t}f\rangle$ soit une P-martingale sur $[0, T]$.*

Preuve. Il suffit de montrer que les fonctionnelles de Laplace des distributions finies sont déterminées de façon univoque. Or, pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $f_1, \ldots, f_n \in B^{++}(E)$,

$$E_P(\exp -(X_{t_1}, f_1) - \cdots - (X_{t_n}, f_n) 1_{\{t_n<\zeta\}}) = \exp -(m, U_{t_1}f)$$

où

$$f = f_1 + U_{t_2-t_1}(f_2 + U_{t_3-t_2}(\cdots + U_{t_n-t_{n-1}}f_n)). \qquad \square$$

Remarque 12. La formulation problème de martingales décrite dans l'énoncé (4) du Théorème 7 sert à construire les PBM comme limites de processus ponctuels appelés branchements spatiaux, eux-mêmes solutions de problèmes de martingales; cf. Roelly (1986) dans le cas R quadratique, Ethier et Kurtz (1986) quand R est lipschitzienne.

Remarque 13. Quand l'espace E est localement compact, l'on peut construire des PBM à valeurs mesures σ-finies en explicitant une correspondance bijective entre PBM à valeurs $M(E)$ (pour lesquels la fonction 1 est intégrable) et PBM à valeurs dans un espace de mesures avec poids (pour lesquels une fonction ϕ, poids de référence, joue le même rôle que la fonction 1 précédemment). Cela se base sur le fait que le semi-groupe $\tilde{U}_t f$ défini par $\tilde{U}_t f = \phi^{-1} U_t(f\phi)$ est encore un cumulant, et utilise la caractérisation (2) du Théorème 7.

Ainsi, quand l'on veut travailler avec un PBM ayant pour valeur initiale la mesure de Lebesgue sur $E \equiv \mathbb{R}^d$, on peut prendre $\phi = \phi_p$ définie par $\phi_p(x) = 1/(1+|x|^2)^{p/2}$, $x \in \mathbb{R}^d$, avec $p > d$. Le PBM construit est alors à valeurs dans l'espace de mesures $M_p \equiv \{m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d),\ m(\mathrm{d}x)/(1+|x|^p) \in M(\mathbb{R}^d)\}$. Iscoe (1986) s'est le premier intéressé à cet espace et a construit, par d'autres techniques, des PBM particuliers à valeurs dans M_p. En particulier, il prouve l'estimation clef: $\phi_p^{-1} U_t \phi_p \in B^{++}(\mathbb{R}^d)$. Voir aussi Dynkin (1988) ou Perkins (1988).

3.1. Un théorème de Girsanov

Dawson (1978) décrit une classe de processus obtenus grâce à un théorème de type Girsanov à partir des PBM continus. Ce sont des processus de branchement à valeurs mesures comprenant un terme interprété comme de l'immigration.

Nous montrons ici que la classe $(\mathscr{C})$ est stable quand l'on multiplie la probabilité de référence par une densité de type martingale exponentielle.

Proposition 14. *Soit P_m la loi d'un PBM associé à l'équation* $\mathrm{E}(A, R)$, *satisfaisant à la Définition* 6. *Si $\bar{a} \in B^+(E)$, et C_t est définie sur l'ensemble aléatoire* $[[0, \zeta\|$ *par* $C_t = \int_0^t \langle X_s, \bar{a}\rangle\, \mathrm{d}s$, *alors la probabilité Q_m définie sur les tribus $\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}$ par*

$$Q_m = H_{t\wedge\tau_n}(g) \exp - C_{t\wedge\tau_n} \cdot P_m, \quad g \in \mathscr{D}^{++}(A),$$

où $H_t(g)$ a été définie dans le Théorème 7, *est la loi d'un PBM associé à l'équation* $\mathrm{E}(A, \tilde{R})$, *où $\tilde{R}$ a pour coefficients*

$$\tilde{a}(x) = \bar{a}(x),$$

$$\tilde{b}(x) = b(x) - c(x)g(x) + \int_{]0,1[} \lambda(\mathrm{e}^{-\lambda g(x)} - 1)\nu(x, \mathrm{d}\lambda),$$

$$\tilde{c}(x) = c(x),$$

$$\tilde{\nu}(x, \mathrm{d}\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda g(x)}\, \nu(x, \mathrm{d}\lambda).$$

Preuve. Par la formulation (2) du Théorème 7 il est clair que $H_t(f+g)$ est une martingale sur l'ensemble aléatoire $[[0, \zeta\|$, pour $f \in \mathscr{D}(A)^{++}$. Mais

$$H_t(f+g) = \exp - \left(\langle X_t, f\rangle - \int_0^t \langle X_s, Bf\rangle\, \mathrm{d}s \right) H_t(g) \exp - C_t$$

où

$$Bf = (A+R)(f+g) - (A+R)g + \bar{a} = (A+\tilde{R})f.$$

Il reste alors à vérifier que $\tilde{R}(x, z) = R(x, z+g(x)) - R(x, g(x)) + \bar{a}$, ce qui est clair. $\square$

Corollaire 15. *Le temps de séjour jusqu'à l'instant t du PBM X, défini par* $\int_0^t X_s \, \mathrm{d}s$, *a pour fonctionnelle de Laplace*:

$$E_{P_m}\left(1_{\{t<\zeta\}} \exp - \int_0^t \langle X_s, \bar{a}\rangle \, \mathrm{d}s\right) = \exp - \langle m, \tilde{U}_t 0\rangle,$$

où $\tilde{U}_t 0 \equiv \tilde{u}_t$ *est solution de*

$$\tilde{u}_t = \int_0^t S_{t-s}(R(\tilde{u}_s) + \bar{a} - a) \, \mathrm{d}s.$$

Preuve. La Proposition 14 reste valide quand $g \equiv 0$. On a alors

$$\tilde{R}(x, z) = R(x, z) + \bar{a}(x) - a(x).$$

En utilisant la caractérisation (1) du Théorème 7 de la loi Q_m d'un PBM, on obtient

$$\begin{aligned} E_{Q_m}(1_{\{t<\zeta\}} \exp - \langle X_t, f\rangle) &= E_{P_m}(1_{\{t<\zeta\}} \exp - \langle X_t, f\rangle \exp - C_t H_t(0)) \\ &= \exp - \langle m, \tilde{U}_t f\rangle. \end{aligned}$$

En particulier,

$$E_{P_m}\left(1_{\{t<\zeta\}} \exp - \int_0^t \langle X_s, \bar{a}\rangle \, \mathrm{d}s\right) = \exp - \langle m, \tilde{U}_t 0\rangle,$$

où $\tilde{U}_t 0 \equiv \tilde{u}_t$ est solution de

$$\tilde{u}_t = \int_0^t S_{t-s}(R(\tilde{u}_s) + \bar{a} - a) \, \mathrm{d}s. \qquad \square$$

Pitman et Yor (1982a) ont étudié exhaustivement le cas des processus de branchement à valeurs $\mathbb{R}_+$, carrés de processus de Bessel, et en particulier l'utilité de ces théorèmes de type Girsanov.

Plus généralement, la proposition 14 permet de calculer facilement des lois de fonctionnelles linéaires de PBM comme le temps d'occupation ou les 'temps locaux', et les équations d'évolution non linéaires associées; cf. le Théorème 6 de El Karoui (1984) démontré par ces méthodes; voir aussi Iscoe (1986), Dynkin (1988) ou Adler et Lewin (1989) dans des cas particuliers.

4. Une représentation de Lévy–Khintchine des PBM

Il découle directement de leur définition que les PBM sont, à temps fixé, des mesures aléatoires infiniment divisibles. Leur décomposition de Lévy-Khintchine fournit des informations sur leur structure globale (par ex. comportement asymptotique en temps, Wakolbinger, 1989) ou locale (par ex. décomposition en amas, utile dans le calcul de la dimension de Hausdorff du support).

L'Exemple 3 montre que l'on peut calculer explicitement la mesure canonique de la projection à temps fixé de certains processus de branchement à valeurs $\mathbb{R}_+$.

Dawson (1978) donne la représentation canonique, à temps fixe, du PBM dont la diffusion sous-jacente est brownienne et la fonctionnelle R est quadratique. Nous la rappellerons ci-dessous en précisant son interprétation poissonnienne.

Notre propos est de généraliser ces résultats à la classe $(\mathscr{C})$ et, de plus, en remarquant que les PBM sont aussi des lois de processus infiniment divisibles sur l'espace des trajectoires à valeurs mesures, d'obtenir une représentation poissonnienne non seulement pour les mesures aléatoires à temps t fixé, mais aussi pour les PBM en tant que processus.

Les résultats récents de Dawson et Perkins (1991) permettraient d'obtenir, par projection, le (i) du Théorème 17 qui suit. Rappelons ici les outils qui nous servirons.

Si Q est un élément infiniment divisible de $M_1(M(E))-\{0\}$, sa fonctionnnelle de Laplace L_Q admet une unique décomposition de De Finetti de la forme

$$L_Q(f)=\exp-\left\{K+\langle\alpha,f\rangle+\int_{M(E)-\{0\}}(1-\mathrm{e}^{-\langle m,f\rangle})N(\mathrm{d}m)\right\},\quad f\in C^{++}(E),$$

où $\exp-K=Q(M(E))$, α appartient à $M(E)$ et $N(\mathrm{d}m)$ est une mesure de Radon positive sur $M(E)-\{0\}$ telle que, pour tout $f\in C^{++}(E)$,

$$\int_{M(E)-\{0\}}(1-\mathrm{e}^{-\langle m,f\rangle})N(\mathrm{d}m)<+\infty.$$

La décomposition de De Finetti de L_Q a encore un sens quand f n'est que mesurable bornée positive (en utilisant un argument de type classe monotone); dans ce cas, le cumulant associé à la fonctionnelle de Laplace L_Q et défini par $V(f)\equiv -\log L_Q(f)$ satisfait

$$V(f)=K+\langle\alpha,f\rangle+\int_{M(E)-\{0\}}(1-\mathrm{e}^{-\langle m,f\rangle})N(\mathrm{d}m),\quad f\in B^{++}(E).$$

La constante K peut être incorporée dans la mesure N, comme masse du point Δ.

Dans le cas des PBM, on a donc

$$\forall f\in B^{++}(E),\quad U_tf(x)=\langle\alpha_t^x,f\rangle+\int_{M_\Delta(E)-\{0\}}(1-\exp-\langle v,f\rangle)Q_t(x,\mathrm{d}v),\qquad \alpha_t^x\in M(E),$$

dont l'interprétation est la suivante:

Soit η_t^x une mesure de Poisson d'intensité $Q_t(x,\cdot)$ sur $M_\Delta(E)-\{0\}$. Alors le PBM de mesure initiale δ_x et de cumulant U_t a même loi que la somme de la mesure déterministe α_t^x et de la moyenne de η_t^x,

$$X_t\overset{(P_{\delta_x})}{=}\alpha_t^x+\int_{M_\Delta(E)-\{0\}}v\eta_t^x(\mathrm{d}v).$$

Examinons le PBM associé au cumulant U_t solution de l'équation $\mathrm{E}(A, R(x, z) \equiv -\gamma z^2)$. D'après l'Exemple 3, U_t testé sur les fonctions constantes $z \in \mathbb{R}_+$, vérifie

$$\forall x \in E, \quad U_t z(x) = u_t(z) \equiv z/(1+\gamma z t);$$

la mesure canonique associée q_t, image de la mesure $Q_t(x, \cdot)$ par l'application de $M(E)$ dans $\mathbb{R}_+$: $v \to \langle v, 1\rangle$, satisfait

$$q_t(\mathrm{d}\lambda) = (\gamma t)^{-2}\,\mathrm{e}^{-\lambda/\gamma t}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Donc $Q_t(x, M(E) - \{0\}) = q_t(\mathbb{R}_+) = 1/\gamma t$ est fini et il est aisé de montrer que l'on obtient la représentation

$$\eta_t^m \overset{(P_m)}{=} \sum_{i=1}^{\nu} \delta_{C_t^{Z_i, i}} \quad \text{et} \quad X_t \overset{(P_m)}{=} \sum_{i=1}^{\nu} C_t^{Z_i, i}$$

où ν est un nombre poissonien de paramètre $\langle m, 1\rangle/\gamma t$, $C_t^{x,i}$ sont des mesures aléatoires indépendantes de loi $Q_t(x, \mathrm{d}v)/Q_t(M(E)-\{0\}) = \gamma t Q_t(x, \mathrm{d}v)$, et Z_i sont des variables aléatoires à valeurs dans E équidistribuées suivant la loi $m/\langle m, 1\rangle$, toutes ces variables étant indépendantes entre elles.

Remarquons ci-dessus le rôle spécifique de la masse $\langle m, 1\rangle$ de la mesure initiale m. En effet, si l'on décompose m en: $m = \langle m, 1\rangle m°$, $m° \in \mathscr{P}(E)$, la variable poissonnienne ν peut s'écrire aussi N_κ, où $\kappa = \langle m, 1\rangle$ et N est un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ de paramètre $1/\gamma t$; nous obtenons alors:

$$X_t \overset{(P_{\kappa m°})}{=} \sum_{i=1}^{N_\kappa} C_t^{Z_i, i}.$$

Nous généralisons maintenant ces résultats en montrant dans le Théorème 17 que X a même loi que la moyenne d'un processus de Poisson η^m sur l'espace des trajectoires $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, M_\Delta(E) - \{0\})$. Nous mettrons en évidence l'hypothèse sous laquelle la mesure déterministe α^m s'annule.

4.1. *Représentation en amas d'un PBM*

Dans la proposition suivante nous montrons que les mesures canoniques $(Q_t(x, \cdot))_{t>0} \in \mathscr{M}^+(M_\Delta(E) - \{0\})$ associées à un PBM de la classe $(\mathscr{C})$ sont une famille de lois d'entrée pour le processus de branchement tué quand sa masse s'annule.

Proposition 16. *Soit X un PBM de la classe $(\mathscr{C})$ de cumulant U_t associé à* $\mathrm{E}(A, R)$; *on suppose que, pour tout $t > 0$, $x \in E$, $\lim_{z \to +\infty} U_t z(x) < +\infty$. Alors*:

(i) *Il existe une famille de mesures finies sur $M_\Delta(E) - \{0\}$, $(Q_t(x, \mathrm{d}v))_{t>0, x \in E}$, qui intègrent la fonction ψ définie sur $M_\Delta(E)$ par*

$$\psi(v) = 1 - \exp -\langle v, 1\rangle,$$

et telles que

$$U_t f(x) = \int_{M_\Delta(E) - \{0\}} (1 - \exp -\langle v, f\rangle) Q_t(x, \mathrm{d}v).$$

(ii) *Le noyau $Q_t(x, \mathrm{d}v)$ peut être obtenu sur $M(E)$ comme la limite, pour la topologie vague, quand ε tend vers 0, de la suite de mesures $(1/\varepsilon)\ \Pi_t^\circ(\varepsilon\delta_x, \mathrm{d}v)$, où Π_t° est le semi-groupe du processus X tué à T°, premier temps d'atteinte de 0, défini par*

$$\Pi_t^\circ \phi(m) = E_{P_m}(\phi(X_t)1_{\{t<T^\circ\}}1_{\{t<\zeta\}}).$$

(iii) $(Q_t(x, \mathrm{d}v))_{t>0}$ *est une famille de lois d'entrée pour Π_t°, i.e.*

$$Q_t \circ \Pi_s^\circ = Q_{t+s} \quad \forall t>0,\ s \geqslant 0.$$

Remarques. L'hypothèse $\lim_{z\to+\infty} U_t z(x) < +\infty$ pour tout $t>0$ est fondamentale. En fait

$$\lim_{z\to+\infty} \exp - U_t z(x) = E_{\delta_x}(1_{X_t=0}1_{t<\zeta}).$$

Donc

$$\lim_{z\to+\infty} U_t z(x) < +\infty \quad \text{entraine} \quad P_{\delta_x}(X_t = 0) > 0.$$

Puisque la mesure 0 est un état absorbant pour tout PBM, il est intéressant d'étudier le comportement du processus X quand la masse de sa mesure initiale tend vers 0 et que X a une probabilité non nulle de s'éteindre.

Nous noterons dans ce qui suit E_m pour E_{P_m}.

Preuve de la Proposition 16. (i) Par la représentation de Lévy-Khintchine appliquée à la fonction constante $z \in \mathbb{R}_+$,

$$U_t z(x) = \langle \alpha_t^x, z\rangle + \int_{M_\Delta(E)-\{0\}} (1 - \exp - \langle v, z\rangle) Q_t(x, \mathrm{d}v).$$

Passons à la limite quand z tend vers l'infini; puisque, par définition, Q_t ne charge pas la mesure 0,

$$\lim_{z\to+\infty} U_t z(x) = \lim_{z\to+\infty} (\alpha_t^x, z) + Q_t(x, M_\Delta(E) - \{0\}).$$

Quand le membre de gauche est fini, cela implique non seulement que la mesure α_t^x est égale à 0, mais aussi que Q_t est une mesure de masse totale finie.

(ii) Soit ϕ une fonction mesurable positive bornée sur $M(E)$;

$$\begin{aligned}\Pi_t \Phi(m) &= E_m(\Phi(X_t)1_{t<\zeta}1_{t<T^\circ}) + E_m(\Phi(X_t)1_{t<\zeta}1_{t\geqslant T^\circ})\\ &= \Pi_t^\circ \Phi(m) + \Phi(0) P_m(T^\circ \leqslant t < \zeta), \quad \text{car } \{0\} \text{ est absorbant.}\end{aligned}$$

En prenant $\Phi = \psi \cdot \phi$, $\phi \in B^+(M(E))$, (on rapelle que $\psi(v) = 1 - \exp - \langle v, 1\rangle$) puisque $\psi(0) = 0$,

$$\Pi_t(\psi \cdot \phi) = \Pi_t^\circ(\psi \cdot \phi).$$

D'autre part, $U_t(f+1)(x)-U_tf(x)$ est la fonctionnelle de Laplace de la mesure de densité $\psi(\cdot)=1-\exp-\langle\cdot,1\rangle$ par rapport à $Q_t(x,\mathrm{d}v)$, et donc

$$\begin{aligned}
&U_t(f+1)(x)-U_tf(x)\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-1}(\exp-\varepsilon U_tf(x)-\exp-\varepsilon U_t(f+1)(x))\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-1}E_{\varepsilon\delta_x}(\psi(X_t)\cdot 1_{t<\zeta}\exp-\langle X_t,f\rangle)\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-1}\int\psi(v)\cdot\exp-\langle v,f\rangle\Pi_t(\varepsilon\delta_x,\mathrm{d}v)\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-1}\int\psi(v)\cdot\exp-\langle v,f\rangle\Pi_t^\circ(\varepsilon\delta_x,\mathrm{d}v).
\end{aligned}$$

Cela entraine que les mesure $\psi\cdot\nu_\varepsilon$ définies sur $M(E)$ par

$$\psi(v)\cdot\nu_\varepsilon(\mathrm{d}v)\equiv\varepsilon^{-1}\psi(v)\Pi_t^\circ(\varepsilon\delta_x,\mathrm{d}v)$$

convergent vaguement, quand ε tend vers 0, vers la mesure $\psi(v)\cdot Q_t(x,\mathrm{d}v)$ restreinte à $M(E)$. Pour finir la démonstration, il ne reste qu'à prouver que

$$\lim_{\eta\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\nu_\varepsilon\{v;\langle v,1\rangle\leq\eta\}=0. \tag{$*$}$$

Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to0}\nu_\varepsilon(M(E)-\{0\})&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{\lambda\to\infty}\varepsilon^{-1}E_{\varepsilon\delta_x}((1-\exp-\lambda\langle X_t,1\rangle)1_{\{t<\zeta\}})\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-1}(1-\exp-\varepsilon Q_t(x,M(E)-\{0\}))\\
&=Q_t(x,M(E)-\{0\}).
\end{aligned}\tag{$**$}$$

Si $\eta>0$ satisfait $Q_t(x,\{v;\langle v,1\rangle=\eta\})=0$, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to0}\nu_\varepsilon\{v;\langle v,1\rangle>\eta\}&=\int\psi(v)\psi(v)^{-1}1_{\langle v,1\rangle>\eta}Q_t(x,\mathrm{d}v)\\
&=Q_t(x,\{v;\langle v,1\rangle>\eta\});
\end{aligned}\tag{$***$}$$

($**$) et ($***$) entrainent que:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\nu_\varepsilon\{v;0<\langle v,1\rangle\leq\eta\}=Q_t(x,\{v;\langle v,1\rangle\leq\eta\})$$

tend vers 0 avec η.

(iii) $Q_t(\cdot,\Pi_s^\circ(\psi\cdot\phi))=Q_t(\cdot,\Pi_s(\psi\cdot\phi))$. Mais, par (ii),

$$\begin{aligned}
Q_t(x,\Pi_s(\psi\cdot\phi))&=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-1}\Pi_t(\varepsilon\delta_x,\Pi_s(\psi\cdot\phi))\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-1}\Pi_{s+t}(\varepsilon\delta_x,\psi\cdot\phi)\\
&=Q_{t+s}(x,\psi\cdot\phi).\qquad\square
\end{aligned}$$

Nous démontrons maintenant que, pour tout $t>0$, la loi Q_t est la projection au temps t d'une mesure σ-finie Q^m sur $\tilde{\Omega}$, le sous-espace de $\mathbb{D}(]0,\infty[;\ M_\Delta(E)-\{0\})$ formé des trajectoires tuées au temps d'arrêt $\tilde{\zeta}=\zeta\wedge T^\circ$ (i.e. quand le processus s'annule ou devient infini). Le processus des coordonnées est noté $(\tilde{X}_t)$, et $\tilde{\Omega}$ est muni de la filtration naturelle $\tilde{\mathscr{F}}_t^\circ$ générée par $(\tilde{X}_s;\ s\leq t)$.

Théorème 17. *Sous les hypothèses de la Proposition* 16:

(i) *Il existe une famille* $(Q^m)_{m\in M(E)}$ *de noyaux σ-finis sur $\tilde{\Omega}$ tels que, pour tout* $m\in M(E)$, $(\tilde{\Omega},(\tilde{\mathscr{F}}_t^\circ)_t,(\tilde{X}_t)_t,Q^m)$ *est markovien de semi-groupe* Π_t°, *et satisfait*

$$Q^m\circ\tilde{X}_t^{-1}=Q_t^m=\int_E Q_t(x,\cdot)m(\mathrm{d}x); \tag{4.1}$$

de plus, pour toute fonctionnelle de X de la forme

$$X_\mu\equiv\int_{\mathbb{R}_{+*}}X_s\mu(\mathrm{d}s),\quad \mu\in M(\mathbb{R}_{+*}),$$

on a

$$E_m(\exp-\langle X_\mu,f\rangle)=\exp-\int(1-\exp-\langle\tilde{X}_\mu,f\rangle)\,\mathrm{d}Q^m, \tag{4.2}$$

où $f\in B^{++}(\mathbb{R}_+\times E)$ *et* $\langle X_\mu,f\rangle=\int\langle X_s,f_s\rangle\mu(\mathrm{d}s)$.

(ii) *Soit P_m° la loi sur $\tilde{\Omega}$ du PBM de semi-groupe Π_t° et de mesure initiale m. Alors* Q^{δ_x} *peut être obtenue comme la limite vague, quand ε tend vers* 0, *de la suite de mesures* $(1/\varepsilon)P_{\varepsilon\delta_x}^\circ$.

(iii) *Soit η^m une mesure de Poisson sur $\tilde{\Omega}$ d'intensité Q^m. Alors*

$$X\overset{(P_m)}{=}\int_{\tilde{\Omega}}v\eta^m(\mathrm{d}v).$$

Remarque 18. Comme dans la décomposition de X_t à temps t fixé, l'on voit que la masse $\langle m,1\rangle$ de la mesure initiale joue un rôle spécifique, et c'est pour cela que la topologie de Watanabe est particulièrement bien adaptée puisque elle scinde une mesure en le produit de sa masse par une probabilité. Soit donc $m=\langle m,1\rangle m^\circ$, $m^\circ\in\mathscr{P}(E)$, et $\bar{\eta}^{m^\circ}$ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+\times\tilde{\Omega}$ d'intensité $\mathrm{d}\lambda\times Q^{m^\circ}(\mathrm{d}v)$ ($\mathrm{d}\lambda$, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$). Alors, si $\kappa=\langle m,1\rangle$, $P_m=P_{\kappa m^\circ}$,

$$X\overset{(P_{\kappa m^\circ})}{=}\int_0^\kappa\int_{\tilde{\Omega}}v\bar{\eta}^{m^\circ}(\mathrm{d}\lambda,\mathrm{d}v)\quad\text{et}\quad\eta^{\kappa m^\circ}(\mathrm{d}v)=\int_0^\kappa\bar{\eta}^{m^\circ}(\mathrm{d}\lambda,\mathrm{d}v).$$

Preuve du Théorème 17. (i) L'existence de la mesure Q^m est établie à partir des propriétés des lois d'entrée comme dans Maisonneuve et Meyer (1974, Ch. II,

p. 209). La propriété (4.2) découle, quand $\mu(\mathrm{d}t)=\sum \delta_{t_i}$, $0<t_1<\cdots<t_n$, de la propriété de Markov et de la Proposition 16; si l'on note f_i la fonction $f(t_i,\cdot)$, on a

$$E_m\left(\exp-\sum_{i=1}^{n}\langle X_{t_i},f_i\rangle 1_{\{t_n<\zeta\}}\right)$$

$$=E_m(\exp-\langle X_{t_1},f_1+U_{t_2-t_1}(f_2+\cdots+U_{t_n-t_{n-1}}f_n)\rangle 1_{\{t_n<\zeta\}})$$

$$=\exp-\int(1-\exp-\langle\tilde X_{t_1},f_1+U_{t_2-t_1}(f_2+\cdots+U_{t_n-t_{n-1}}f_n)\rangle)\,\mathrm{d}Q^m$$

$$=\exp-\left(\int(1-\exp-\langle\tilde X_{t_1},f_1\rangle)\,\mathrm{d}Q^m\right.$$

$$\left.+\int\exp-\langle\tilde X_{t_1},f_1\rangle(1-\exp-\langle\tilde X_{t_1},U_{t_2-t_1}g\rangle)\,\mathrm{d}Q^m\right)$$

où $g=f_2+\cdots+U_{t_n-t_{n-1}}f_n$. Mais

$$1-\exp-\langle m,U_{t_2-t_1}g\rangle=1-\Pi_{t_2-t_1}(\exp-\langle\cdot,g\rangle)(m)$$
$$=\Pi^{\circ}_{t_2-t_1}(1-\exp-\langle\cdot,g\rangle)(m).$$

Puisque Q_t est une loi d'entrée pour Π°_t, nous obtenons

$$\int(1-\exp-(\langle\tilde X_{t_1},f_1\rangle+\langle\tilde X_{t_1},U_{t_2-t_1}g\rangle))\,\mathrm{d}Q^m$$

$$=\int(1-\exp-\langle\tilde X_{t_1},f_1\rangle\,\mathrm{d}Q^m+\int\exp-\langle\tilde X_{t_1},f_1\rangle(1-\exp-\langle\tilde X_{t_2},g\rangle)\,\mathrm{d}Q^m$$

$$=\int(1-\exp-(\langle\tilde X_{t_1},f_1\rangle+\langle\tilde X_{t_2},g\rangle))\,\mathrm{d}Q^m.$$

On conclut par itération, quand $\mu(\mathrm{d}t)=\sum\delta_{t_i}$, ou plus généralement quand $\mu(\mathrm{d}t)=\sum\alpha_i\delta_{t_i}$, $\alpha_i\in\mathbb{R}_+$. Quand f est continue, les deux membres de (4.2) dépendent continuement de μ, puisque X n'a pas de temps de discontinuité fixe. La formule (4.2) peut donc être étendue par continuité à une mesure finie μ quelconque sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) La preuve est similaire à celle de la Proposition 16(ii).

(iii) Il suffit de prouver que les variables X et $\int_{\tilde\Omega} v\eta^m(\mathrm{d}v)$ ont mêmes distributions fini-dimensionelles, ou encore que

$$\langle X_{t_1},f_1\rangle+\langle X_{t_2},f_2\rangle+\cdots+\langle X_{t_n},f_n\rangle\quad\text{et}\quad\int((\langle v_{t_1},f_1\rangle+\cdots+\langle v_{t_n},f_n\rangle)\eta^m(\mathrm{d}v)$$

ont mêmes transformées de Laplace.

En se restreignant au cas $n=2$ pour simplifier,

$$E_m(\exp-(\langle X_{t_1},f_1\rangle+\langle X_{t_2},f_2\rangle)1_{\{t_2<\zeta\}})=\exp-\langle m,U_{t_1}(f_1+U_{t_2-t_1}f_2)\rangle.$$

D'autre part,

$$E_m\left(\exp - \int (\langle v_{t_1}, f_1\rangle + \langle v_{t_2}, f_2\rangle)\, \eta^m(\mathrm{d}v)\right)$$

$$= \exp - \int (1 - \exp - (\langle X_{t_1}, f_1\rangle + \langle X_{t_2}, f_2\rangle))\, \mathrm{d}Q^m$$

puisque l'intensité de la mesure de Poisson η^m est Q^m. Nous concluons grâce à (4.1). □

4.2. *Les mesures Q^m*

La construction de la mesure Q^m et ses propriétés élémentaires ont quelques similitudes avec les lois d'excursion de processus de diffusion.

Quand l'espace E est réduit à un point, Pitman et Yor (1982b) ont étudié de manière exhaustive le processus de branchement réel positif dont le cumulant est solution de $E(R)$ avec R définie par

$$R(z) = bz - \tfrac{1}{2}cz^2$$

(la diffusion associée a pour générateur: $Lf(x) = \frac{1}{2}cxf''(x) + bxf'(x)$). Dans ce cas, le point frontière 0 est un temps de sortie mais pas d'entrée dans la classification d'Itô-McKean. Donc la mesure Q ne peut pas être interprétée comme une loi d'excursion à partir de 0. Cela provient de ce que la variable aléatoire $1 - \exp - T^\circ$ n'est pas intégrable par rapport à Q: d'après le Théorème 4.1 de Pitman et Yor (1982a),

$$\int (1 - \exp - T^\circ)\, \mathrm{d}Q = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, q_t\, \mathrm{d}t,$$

où q_t est égal à $Q(X_t \in \mathbb{R} - \{0\}) = \lim_{z\to\infty} u_t(z)$; or si $b = 0$, $q_t = 2/ct$, et si $b \neq 0$, $q_t = -2b/c(1 - \mathrm{e}^{bt})$, ce qui justifie l'assertion ci-dessus.

Dans le cas des PBM, la mesure 0 est un point frontière de l'espace d'état $M(E)$ mais nous nous souvenons que, pour la topologie de Watanabe, on peut converger vers 0 suivant une infinité de directions identifiées à des probabilités; ainsi, par exemple, en reprenant les notations ci-dessus, la suite $m_\varepsilon \equiv \varepsilon m^\circ$, $m^\circ \in \mathcal{P}(E)$, tend vers 0 dans la direction m° quand ε tend vers 0.

Nous déduisons des résultats de Pitman et Yor qu'un PBM dont le cumulant est solution de $E(A, R)$ avec R définie comme précédemment par

$$R(z) = bz - \tfrac{1}{2}cz^2,$$

n'admet pas de loi d'excursion, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'extension du processus après T°, le temps d'atteinte de 0, qui rentre de nouveau dans $M(E) - \{0\}$.

Les Exemples 4 et 5 illustrent d'autres situations où l'intégrabilité de $1-\exp-T^{\circ}$ n'est pas satisfaite: dans l'Exemple 4,

$$q_t=(\alpha t)^{-1/\alpha},\quad 0<\alpha<1,$$

et, dans l'Exemple 5, q_t n'est pas définie car Q_t est de masse infinie.

Bibliographie

R.J. Adler et M. Lewin, Superprocesses on L^p-spaces with applications to Tanaka formulae for local times, Preprint (1989).

K.J. Athreya et P. Ney, Branching processes (Springer, Berlin, 1972).

P. Billingsley, Convergence of Probability measures (Wiley, New York, 1968).

D.A. Dawson, Stochastic evolution equations and related measure processes, J. Multivariate Anal. 5 (1975) 1-52.

D.A. Dawson, Limit theorems for interaction free geostochastic systems, Col. Math. Soc. J. Bolyai (1978) 27-47.

D.A. Dawson, Geostochastic calculus, Canad. J. Statist. 6(2) (1978) 143-168.

D.A. Dawson et K. Fleischmann, Critical dimension for a model of branching in a random medium, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 70 (1985) 315-334.

D.A. Dawson et G. Ivanoff, Branching diffusions and random measures, Adv. in Probab. 5 (1978) 61-103.

D.A. Dawson et E. Perkins, Historical processes, à paraître dans: Mem. Amer. Math. Soc. (1991).

F.B. Dynkin, Branching particle systems and superprocesses, Preprint (1990).

F.B. Dynkin, Superprocesses and their linear additive functionals, Trans. Amer. Math. Soc. (1988).

N. El Karoui, Non linear evolution equations and functionals of measure valued branching processes, Stochastic Differential Systems, Proceedings IFIP-WG, 7/1, Luminy, France, 1984, Lecture Notes in Control and Information Sci. No. 69 (Springer, Berlin, 1985) pp. 25-34.

N. El Karoui et S. Roelly, Study of a general class of measure-valued branching processes; a Levy-Khintchine representation, Preprint (1987).

S. Ethier et T. Kurtz, Markov processes, Characterization and Convergence (Wiley, New York, 1986).

P.J. Fitzsimmons, Construction and regularity of measure-valued Markov branching processes, Israel J. Math. 64 (1989) 337-361.

L. Gorostiza, S. Roelly et A. Wakolbinger, Sur la persistance du processus de Dawson-Watanabe stable; l'intervertion de la limite en temps et de la renormalisation, Séminaire Probab. XXIV, Lecture Notes in Math. (Springer, Berlin, 1990).

I. Iscoe, A weighted occupation time for a class of measure-valued branching processes, Probab. Theory Rel. Fields 71(1) (1986) 85-116.

J. Jacod, Calcul stochastique et problèmes de martingales, Lecture Notes Math. No. 704 (Springer, New York, 1979).

P. Jagers, Aspects of random measures and point processes, Adv. in Probab. 3 (1974) 179-238.

M. Jirina, Stochastic branching processes with continuous state space, Czechoslovak Math. J. 8 (1958) 292-313.

K. Kawazu et S. Watanabe, Branching processes with immigration and related limit theorems, Theory Probab. Appl. 16 (1971) 36-54.

J.-F. Le Gall, Une construction trajectorielle de certains processus de Markov à valeurs mesures, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I, 308 (1989) 533-538.

Y. Le Jan, Limites projectives de processus de branchement Markoviens, C.R. Acad. Sci Paris Sér. I, 309 (1989) 377-381.

B. Maisonneuve et P.A. Meyer, Ensembles aléatoires markoviens homogènes, Séminaire de Probabilités VIII, Lecture Notes in Math. (Springer, Berlin, 1974) pp. 172-262.

S. Méléard et S. Roelly, A generalized equation for a continuous measure branching process, Stochastic Partial Differential Equations and Applications II, Lecture Notes in Math. No. 1390, Proceedings Trento (Springer, Berlin, 1988) pp. 171-186.

E. Perkins, A space-time property of a class of measure-valued branching diffusions, Trans. Math. Amer. Soc. 305(2) (1988) 743-795.

J. Pitman et M. Yor, A decomposition of Bessel Bridges, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 59 (1982a) 425-459.

J. Pitman et M. Yor, Sur une décomposition des ponts de Bessel, Functional Analysis in Markov Processes, Lectures Notes in Math. No. 923 (Springer, Berlin, 1982b) pp. 276-285.

Yu.M. Ryzhov et A.V. Skorokhod, Homogeneous branching processes with a finite number of types and continuously varying mass, Teor. Verojatnost. i. Primenen. 15 (1970) 722-726.

S. Roelly, A criterion of convergence of measure-valued processes: Application to measure branching processes, Stochastics 17 (1986) 43-65.

T. Shiga et S. Watanabe, Bessel diffusions as a one-parameter family of diffusion processes, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 27 (1973) 37-46.

A. Wakolbinger, Interchange of a large time and scaling limits in stable Dawson-Watanabe processes: a probabilistic proof, Bericht N° 390, Inst. Math., Univ. Linz (1989).

S. Watanabe, A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes, J. Math. Kyoto Univ. 8 (1968) 141-167.

S. Watanabe, On two dimensional Markov processes with branching property, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969) 447-466.