Probab. Theory Relat. Fields 104, 147–179 (1996)

**Probability Theory** and Related Fields


# Une approche Gibbsienne des diffusions Browniennes infini-dimensionnelles

**P. Cattiaux**[1], **S. Roelly**[2], **H. Zessin**[3]

[1] Ecole Polytechnique, C.M.A.P, U.R.A C.N.R.S. 756, F-91128 Palaiseau Cedex, France et Université Paris X Nanterre, Equipe MODAL'X, U.F.R. SEGMI, 200 av. de la République, F-92001 Nanterre Cedex, France
[2] Laboratoire de Géométrie, Analyse et Topologie, U.R.A. C.N.R.S. 751, U.F.R. de Mathématiques, Université Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
[3] Laboratoire de Statistiques et Probabilité, U.F.R. de Mathématiques, Université Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Received: 15 March 1993/ In revised form: 5 November 1994

**Summary.** We establish a one-to-one correspondence between the laws of smooth infinite dimensional brownian diffusions and the Gibbs states on the path space $\Omega = C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$. Applications to phase transition, time reversal and reversible measures are then discussed. The main tool is a characterization of Gibbs states via an infinite dimensional version of the Malliavin calculus integration by parts formula.

**Résumé.** Nous montrons qu'il y a correspondance biunivoque entre les lois de diffusions browniennes infini-dimensionnelles et les états de Gibbs sur l'espace des trajectoires $\Omega = C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$. Ce résultat est ensuite appliqué aux problèmes de transition de phases, du retournement du temps et à l'étude des mesures réversibles. Le principal outil est une caractérisation des états de Gibbs par une version infini-dimensionnelle de la formule d'intégration par parties du calcul de Malliavin.

*Mathematics Subject Classification*: 60H07, 60J60, 60K35, 82C22

## 1 Introduction

En 1966, Dobrushin pose le problème d'obtenir une description complète des champs de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ associés à une interaction quelconque, à l'aide de champs gaussiens.

Il le résoud pour des interactions de type quadratique en 1979–80 (ainsi que Künsch, indépendamment) de la façon suivante: tout champ gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ s'interprète comme un champ gibbsien associé à une certaine interaction quadratique, et réciproquement, les champs gibbsiens sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$

associés à ces interactions sont des convolutions de champs gaussiens stationnaires avec d'autres champs (cf. [Do]).

Dans ce travail nous reprenons la problématique de Dobrushin mais pour des champs de Gibbs sur l'espace produit des trajectoires $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$.
Plus précisément, considérons tout d'abord le système gradient stochastique suivant dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$

$$(*) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}^d, t \in [0,1], \quad dX_i(t) = dW_i(t) - \tfrac{1}{2}\nabla_i h_i(X(t))\,dt, \quad X(0) \overset{(\mathscr{L})}{=} \nu,$$

où $h = (h_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est un potentiel hamiltonien donné sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, $\nu$ est une probabilité sur ce même espace et $(W_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est une famille de mouvements browniens indépendants. Nous montrons que le système $(*)$, défini par la fonction $h$ représentant l'interaction entre les spins de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ à chaque instant $t$ et qui part au temps 0 d'un état gibbsien quelconque $\nu$ de hamiltonien $\tilde{h}$, crée au cours de sa vie une *interaction globale entre ses trajectoires* de telle sorte que sa loi est un état de Gibbs sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$ pour une certaine interaction $\tilde{\Phi}$. Le hamiltonien associé à $\tilde{\Phi}$ s'écrit comme la somme du hamiltonien initial $\tilde{h}(X(0))$ et de $H = (H_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ donné par

$$(**) \qquad H_i(X) = \tfrac{1}{2}h_i(X(1)) - \tfrac{1}{2}h_i(X(0))$$
$$- \int_0^1 \left(\frac{1}{2}Ah_i(X(t)) + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{8}(\nabla_j h_i)^2(X(t))\right) dt$$

(A est le générateur infinitésimal associé au système $(*)$).

C'est Deuschel [De1] qui le premier a reconnu la nature gibbsienne de la loi du système $(*)$. Nous généralisons ici (Théorèmes 3.7 et 4.8) ses résultats en considérant des interactions non bornées (et de gradients non bornés) à portée infinie, et en présentons des démonstrations tout à fait différentes. D'autre part, nous démontrons que, réciproquement, tout champ de Gibbs $Q$ sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$ dont le hamiltonien $H$ à la forme $(**)$, est la loi d'un système gradient stochastique donné par $(*)$ (Théorèmes 3.7 et 4.9). Cela signifie que $Q$ réalise typiquement l'évolution à travers le temps d'une configuration de spins distribués initialement suivant la projection au temps 0 de $Q$ et placés sous l'action de la dynamique induite par le générateur infinitésimal $A$. Il y a donc correspondance biunivoque entre les états de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et certains états de Gibbs sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$. Ce résultat résoud le problème de l'unicité des états de Gibbs sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$ pour certains potentiels (Théorème 3.22).

Voici une brève description du contenu de ce travail.

Dans la seconde partie nous étudions de façon générale les mesures de Gibbs sur l'espace des phases et sur l'espace des trajectoires. Pour ce dernier une difficulté nouvelle apparait: il faut contrôler l'influence de l'interaction entre les trajectoires sur la loi initiale. Nous montrons (Proposition 2.5) comment la propriété de Gibbs se projette au temps 0, puis (Proposition 2.6) comment elle se recompose (i.e. un mélange gibbsien de mesures de Gibbs sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$

est il gibbsien ?). Nous étendons ensuite (Théorème 2.11) la caractérisation variationnelle récente ([R-Z2]) des mesures de Gibbs sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$ par une condition d'équilibre (équation (2.13)) qui est l'analogue infini-dimensionnel de la "formule d'intégration par parties" du calcul des variations stochastiques. Cette équation d'equilibre, associée aux techniques classiques du calcul stochastique, semble offrir une méthode riche pour l'analyse des problèmes évoqués dans ce travail.

Les troisième et quatrième parties sont consacrées à la caractérisation des lois des systèmes $(*)$ comme mesures de Gibbs. La troisième partie traite du cas d'interactions bornées à portée finie afin de limiter les difficultés techniques et de présenter la méthode. Dans la quatrième partie nous étendons les résultats précédents à de larges classes d'interactions usuelles en Mécanique Statistique.

Enfin dans la cinquième partie nous étudions la nature stochastique des états de Gibbs sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$ associés à des potentiels $H$ supposés seulement réguliers (et non de la forme spéciale $(**)$): ce sont des diffusions browniennes infini-dimensionnelles dont la dérive est explicitée en fonction du hamiltonien (Théorème 5.1). On peut alors caractériser les états réversibles comme solutions de $(*)$ pour une loi initiale bien choisie (Proposition 5.7 et Théorème 5.15). Rappelons que depuis le travail pionnier de Glauber [G1], les systèmes $(*)$ ont été introduit afin d'étudier leurs mesures réversibles. Nous concluons par une brève discussion du problème général du retournement du temps (cf. [F-W] et [M-N-S]).

La caractérisation de diffusions en tant que mesures gibbsiennes offre une nouvelle approche pour l'étude des propriétés limites de tels systèmes. Deux d'entre nous l'ont déjà utilisée de façon fructueuse pour analyser les grandes déviations spatiales de systèmes gradients stochastiques [R-Z3]. Nous pensons qu'elle permet également d'étudier les mesures invariantes (et non plus réversibles) de $(*)$. Il est en effet conjecturé depuis longtemps que celles ci sont les mesures de Gibbs associées à $h$. Cette conjecture n'a été prouvée que pour $d = 1$ ou 2 à ce jour (cf. [Fr] ou [H-S]).

Enfin bien que nous travaillions ici sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des résultats présentés ici se transporte sans difficultés majeures au cas d'une variété riemanienne compacte ou non.

## Notations

Pour alléger la tâche du lecteur, nous avons conservé le plus possible les notations introduites dans [R-Z2].

*Les espaces d'états, leurs probabilités et leurs projections*

– $\mathbb{Z}^d$ est l'espace des sites dont l'élément générique sera noté $i$.
– $X$, l'espace d'état, (l'espace des spins de la mécanique statistique), est mesurable. Ce sera tour à tour $\mathbb{R}$ ou l'espace polonais $C(0,1)$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de sa filtration canonique.

– L'espace produit $X^{\mathbb{Z}^d}$ est muni de sa filtration canonique $(\mathscr{F}_\Lambda)$, où $\Lambda$ décrit l'ensemble $\mathscr{S}$ des parties finies de $\mathbb{Z}^d$. $\mathscr{F}_\Lambda$ est engendrée par les projections spatiales canoniques $(\mathit{pr}_i)_{i\in\Lambda}$ où:

$$\mathit{pr}_i : X^{\mathbb{Z}^d} \to X\,, \qquad x \to x_i\,. \tag{1.1}$$

Plus généralement, nous noterons $\mathit{pr}_\Lambda$ la projection canonique spatiale suivante

$$\mathit{pr}_\Lambda : \mathbb{X}^{\mathbb{Z}^d} \to X^\Lambda\,, \qquad x \to x_\Lambda = (x_i)_{i\in\Lambda}\,. \tag{1.2}$$

Pour $\xi \in X^\Lambda$ et $\eta \in X^{\Lambda^c}$, nous noterons simplement $\xi\eta$ la configuration de $X^{\mathbb{Z}^d}$ qui coincide avec $\xi$ sur $\Lambda$ et avec $\eta$ sur $\Lambda^c$. Par exemple $x = x_\Lambda x_{\Lambda^c}$.

– On notera $\Omega$ l'espace produit $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$. On peut y définir une autre famille de projections canoniques, à savoir les projections temporelles $\mathit{pr}_t$, $t \in [0,1]$, par:

$$\mathit{pr}_t : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \qquad \omega \to \omega(t)\,. \tag{1.3}$$

Pour simplifier, on utilisera la même notation $\mathit{pr}_t$ pour la projection au temps $t$ de $C(0,1)$ sur $\mathbb{R}$ qui à $\omega_i$ associe $\omega_i(t)$, ainsi que $\mathscr{F}_t$ pour la filtration correspondante.

– $\mathscr{M}(X)$ [resp. $\mathscr{P}(X)$] est l'ensemble des mesures positives [resp. probabilités] sur $X$.

– Si $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est une suite de mesures positives $\sigma$-finies sur $\mathbb{R}$, on notera $\pi^{\mu_i}$ la mesure de Wiener sur $C(0,1)$ de condition initiale $\mu_i$ (i.e. satisfaisant $\pi^{\mu_i} \circ \mathit{pr}_0^{-1} = \mu_i$). Quand $\mu_i$ est la mesure de Dirac $\delta_{y_i}$ où $y_i \in \mathbb{R}$, on notera simplement $\pi^{y_i}$. On a donc

$$\pi^{\mu_i} = \int \pi^{y_i} \mu_i(dy_i)\,. \tag{1.4}$$

On note $P^\mu$ la mesure suivante sur $\Omega$:

$$P^\mu = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}^d} \pi^{\mu_i}\,, \tag{1.5}$$

et, par suite,

$$P^y = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}^d} \pi^{y_i}\,.$$

Plus généralement, si $Q \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$,

$$Q^y = Q(\ /\mathit{pr}_0 = y)\,. \tag{1.6}$$

– Si $Q \in \mathscr{M}(X^{\mathbb{Z}^d})$, on note $Q_\Lambda$ la mesure sur $X^\Lambda$ image de $Q$ par $\mathit{pr}_\Lambda$:

$$Q_\Lambda = Q \circ \mathit{pr}_\Lambda^{-1}\,. \tag{1.7}$$

*Les espaces de fonctionnelles*

A dimension finie

Les mesures de référence seront les $\pi^{\mu_i}$.

$W^{1,2}(C(0,1))$ est l'ensemble des fonctionnelles $F$ de $L^2(C(0,1))$ qui sont $L^2$-différentiables au sens suivant (cf. [Fö1]):

il existe $(D_t F(\omega))_{0 \leqq t \leqq 1, \omega \in C(0,1)}$ dans $L^2((0,1) \times C(0,1))$ tel que pour tout $g \in L^2(0,1)$ on ait l'égalité suivante dans $L^2(C(0,1))$

$$(1.8) \qquad D_g F(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \left( F(\omega + \varepsilon \int_0^{\cdot} g(t)\, dt) - F(\omega) \right)$$
$$= \int_0^1 g(t) D_t F(\omega)\, dt \,,$$

la limite étant prise au sens fort. $W^{1,\infty}(C(0,1))$ est le sous-ensemble de $W^{1,2}(C(0,1))$ formé des fonctionnelles bornées $F$ pour lesquelles

$$(D_t F(\omega))_{\omega, t} \in L^\infty(C(0,1); L^2(0,1)) \,.$$

Ces espaces sont engendrés par $\mathscr{W}(C(0,1))$, l'ensemble des fonctionnelles régulières de la forme $F(\omega) = \phi(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n))$ oú $\phi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ á support compact et $0 \leqq t_1 < \ldots < t_n \leqq 1$.

Pour ces fonctionnelles, la $L^2$-différentielle n'est autre que la Gâteaux différentielle dans les directions de l'espace de Cameron–Martin.

B Dimension infinie

Les mesures de référence seront les $P^\mu$.

Si $g_i \in L^2(0,1)$, on note pour simplifier $\omega + \varepsilon \int_0^{\cdot} g_i(t)\, dt$ l'élément $\omega'$ de $\Omega$ tel que $\omega'_j = \omega_j$ pour $j \neq i$ et $\omega'_i = \omega_i + \varepsilon \int_0^{\cdot} g_i(t)\, dt$.

$W^{1,2}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctionnelles $F$ de $L^2(\Omega)$ pour lesquelles il existe une suite $(D_t^i F(\omega))_{i \in \mathbb{Z}^d, 0 \leqq t \leqq 1, \omega \in \Omega}$ de $(L^2((0,1) \times \Omega))^{\mathbb{Z}^d}$ satisfaisant, pour toute suite $g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ de $(L^2(0,1))^{\mathbb{Z}^d}$. l'égalité suivante dans $L^2(\Omega)$:

$$(1.9) \qquad D_g^i F(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \left( F\left( \omega + \varepsilon \int_0^{\cdot} g_i(t)\, dt \right) - F(\omega) \right)$$
$$= \int_0^1 g_i(t) D_t^i F(\omega)\, dt \,,$$

la limite étant prise au sens fort. On remarque que $D_g^i$ ne dépend que de $g_i$. Pour toute partie finie $\Lambda$ de $\mathbb{Z}^d$ et tout $g \in (L^2(0,1))^{\mathbb{Z}^d}$ on pose

$$(1.10) \qquad D_g^\Lambda F(\omega) \equiv \sum_{i \in \Lambda} D_g^i F(\omega) \,.$$

On constate immédiatement que $D_g^\Lambda F$ est la limite $L^2$ forte de (1.9) en remplaçant $g_i$ par $\Sigma_{i \in \Lambda} g_i$ · $W^{1,\infty}(\Omega)$ est défini comme plus haut.

Nous appelons fonctionnelles locales sur $\Omega$ les fonctionnelles ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées :

$\exists \Lambda \in \mathscr{S}$, telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $F(\omega) = F(\omega_\Lambda)$

(dans ce cas, $F$ est dite $\Lambda$-locale).

Les espaces locaux correspondants sont notés $W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ et $W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$. Ils sont engendrés par $\mathscr{W}_{\text{loc}}(\Omega)$, l'ensemble des fonctionnelles régulières du type $f(\omega_1(t_{11}), \ldots, \omega_1(t_{1n}), \ldots, \omega_n(t_{nn}))$ oú f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact et $0 \leqq t_{11} < \ldots < t_{1n} \leqq 1, \ldots, 0 \leqq t_{n1} < \ldots < t_{nn} \leqq 1$.

Dans cet espace $L^2$ et Gateaux différentielles (dans les directions des espaces de Cameron–Martin locaux) sont identiques. En particulier si les espaces ainsi définis dépendent de $\mu_i$ (resp. $P^\mu$), $\mathscr{W}_{\text{loc}}(\Omega)$, lui, n'en dépend pas.

## 2 Mesures de Gibbs sur $R^{\mathbb{Z}^d}$ et sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$

### *2.1 Définitions*

Nous rappelons dans ce paragraphe la notion fondamentale de mesure de Gibbs sur un espace abstrait $X^{\mathbb{Z}^d}$, légèrement modifiée par rapport à celle de Georgii [Ge].

Soit $\lambda = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}^d} \lambda_i$ le produit tensoriel infini de mesures positives $\sigma$-finies $\lambda_i$, dites de référence sur l'espace mesuré $X$.

**Définition 2.1** Soit $\alpha$ une probabilité sur $X^{\mathbb{Z}^d}$.

1) Une $(\alpha, \lambda)$-modification est une famille $(\rho_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ de fonctions mesurables positives sur $X^{\mathbb{Z}^d}$ vérifiant

i) $\int \rho_\Lambda \, d(\lambda_\Lambda \otimes \delta_{x_{\Lambda^c}}) = 1$, pour $\alpha_{\Lambda^c}$ presque tout $x_{\Lambda^c}$ ,

ii) $\rho_\Delta = \rho_\Lambda \int \rho_\Delta \, d\lambda_\Lambda$, $\lambda_\Delta \otimes \delta_{x_{\Delta^c}}$p.s., pour tous $\Lambda$ et $\Delta$ de $\mathscr{S}$ avec $\Lambda \subseteq \Delta$ et pour $\alpha_{\Lambda^c}$ presque tout $x_{\Lambda^c}$.

2) Une interaction $\Psi$ sur $X$ est une famille $(\Psi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathscr{S}}$ de fonctions réelles sur $X^{\mathbb{Z}^d}$ telles que, pour tout $\Lambda \in \mathscr{S}$,

i) $\Psi_\Lambda$ est $\mathscr{F}_\Lambda$-mesurable,

ii) la série $\Sigma_{\Lambda \cap \Lambda' \neq \emptyset} \Psi_{\Lambda'}$ converge en tout point de $X^{\mathbb{Z}^d}$.

Cette série définit alors une fonction $H^\Psi_\Lambda$ appelée potentiel hamiltonien sur $\Lambda$ associé à $\Psi$. De plus, si on suppose que

$$Z^\Psi_\Lambda(x_{\Lambda^c}) = \int \exp -H^\Psi_\Lambda(x_\Lambda x_{\Lambda^c}) d(\lambda_\Lambda \otimes \delta_{x_{\Lambda^c}})$$

est fini pour tout $\Lambda \in \mathscr{S}$ et pour $\alpha_{\Lambda^c}$ presque tout $x_{\Lambda^c}$, la famille

$$\rho_\Lambda(x) = (Z^\Psi_\Lambda(x_{\Lambda^c}))^{-1} \exp -H^\Psi_\Lambda(x)$$

est une $(\alpha, \lambda)$-modification. Les $Z^\Psi_\Lambda$ sont appelés les fonctions de partition.

**Définition 2.2** Une probabilité $\alpha$ sur $X^{\mathbb{Z}^d}$ est appelée une $(\rho, \lambda)$-*mesure* Gibbsienne pour la $(\alpha, \lambda)$-modification $\rho$ si, pour toute partie finie $\Lambda$ de $\mathbb{Z}^d$,

$$\alpha(dx_\Lambda / x_{\Lambda^c}) = \rho_\Lambda(x) \; \lambda_\Lambda(dx_\Lambda), \quad \alpha_{\Lambda^c} \text{ p.s.}, \tag{2.3}$$

oú $\alpha(\cdot/x_{\Lambda^c})$ est une version régulière de la probabilité conditionnelle de $\alpha$ sachant $\mathscr{F}_{\Lambda^c}$. Lorsque $\rho$ provient d'un potentiel hamiltonien associé à une interaction $\Psi$, on dira que $\alpha$ est une $(\Psi, \lambda)$-*mesure* de Gibbs.

*Remarque 2.4* 1) D'aprés [Ge, Theorem 1.33, p. 23] pour qu'une mesure soit une $(\rho, \lambda)$-mesure Gibbsienne, il suffit que l'égalité (2.3) soit satisfaite pour les parties $\Lambda$ égales aux singletons $\{i\}$, $i \in \mathbb{Z}^d$. Il est important de noter que ceci n'est vrai que parce que $\rho$ est une $(\alpha, \lambda)$-modification.
Si on se donne une famille $(\rho_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de fonctions mesurables positives vérifiant (2.1.1.i) (mais qui n'est pas a priori une modification) et $\alpha$ vérifiant (2.3) pour $\Lambda = \{i\}$, on dira que $\alpha$ est $(\rho, \lambda)$-pseudo Gibbsienne.

2) La définition 2.1 est justifiée par la remarque suivante: on vérifie facilement par le calcul que toute famille $(\rho_\Lambda)_{\Lambda\in\mathscr{S}}$ vérifiant (2.3) est une $(\alpha, \lambda)$-modification.

A partir de maintenant, nous noterons pour simplifier $\Psi_i, H_i, Z_i, \mathscr{F}_i$ etc., au lieu de $\Psi_{\{i\}}, H_{\{i\}}, Z_{\{i\}}, \mathscr{F}_{\{i\}} \cdots$

## 2.2 *Exemples*

Particularisons les définitions précédentes aux espaces d'états qui nous intéressent dans ce travail.

i) $X = \mathbb{R}$. L'interaction et le potentiel hamiltonien sont des fonctions sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ · $\mu = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}^d}\mu_i$ sera la mesure de référence. On verra dans la troisième partie que le choix de la mesure de Lebesgue $\mu_i = dy_i$ est particulièrement intéressant et naturel.

ii) $X = C(0,1)$. L'interaction, le potentiel hamiltonien ou les modifications sont des fonctionnelles sur l'espace $\Omega$, espace produit de trajectoires. La mesure de référence est une mesure sur $\Omega$, choisie parmi les $P^\mu$ (cf. définition (1.5)).

Dans la proposition suivante – dont nous ne donnons pas la preuve car elle est très simple – nous vérifions la cohérence de notre définition de mesure de Gibbs sur $C(0,1)$ avec celle donnée dans [R-Z2], formule (2.3). Cette dernière ne concernait que les probabilités $Q$ sur $\Omega$ de condition initiale déterministe (i.e. telles qu'il existe $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ tel que $Q^Y = Q$), restriction que nous n'avons plus ici.

**Proposition 2.5** *Soit $Q \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $v = Q \circ \not{\!\!\pi}_0^{-1} \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ sa condition initiale. Si $Q$ est une $(\Phi, P^\mu)$-mesure de Gibbs, associée à l'interaction $\Phi$, alors*

i) *$v$ est une $(\rho, \mu)$-mesure Gibbsienne pour*

$$\rho_\Lambda(y_\Lambda y_{\Lambda^c}) = \int (Z_\Lambda^\Phi(\omega_{\Lambda^c}))^{-1} \int \exp -H_\Lambda^\Phi(\omega) \left(\bigotimes_{i\in\Lambda} \pi_i^y\right)(d\omega_\Lambda) Q_{\Lambda^c}^{y_{\Lambda^c}}(d\omega_{\Lambda^c})$$

ii) *pour $v$-presque tout $y, Q^y$ est une $(\Phi, P^y)$-mesure de Gibbs.*

*Remarques* 1) Si on suppose $E_Q[\exp H_\Lambda^\Phi]$ finie pour tout $\Lambda$, on peut définir

$$m_\Lambda^\Phi(y) = \log E_Q[\exp H_\Lambda^\Phi/\omega(0) = y] .$$

Mais $(Z_\Lambda^\Phi(\omega_{\Lambda^c}))^{-1}$ est également $Q_{\Lambda^c}$ intégrable. On peut donc définir

$$z_\Lambda^\Phi(y_{\Lambda^c}) = E_{Q_{\Lambda^c}}[(Z_\Lambda^\Phi(\omega_{\Lambda^c}))^{-1}/\omega_{\Lambda^c}(0) = y_{\Lambda^c}] .$$

Il vient alors immédiatement que $v$ est une $(\rho, \mu)$-mesure Gibbsienne pour

$$\rho_\Lambda(y) = z_\Lambda^\Phi(y_{\Lambda^c}) \exp -m_\Lambda^\Phi(y) .$$

En effet

$$E_Q(f(\omega_\Lambda(0))g(\omega_{\Lambda^c}(0)) \exp H_\Lambda^\Phi(\omega)) = \int g(\omega_{\Lambda^c}(0))(Z_\Lambda^\Phi(\omega_{\Lambda^c}))^{-1} \times \int f(\omega_\Lambda(0))P_\Lambda^\mu\,(d\omega_\Lambda)Q_{\Lambda^c}(d\omega)$$

et il suffit de conditionner au temps 0 des deux côtés.

Il n'est pas clair que $\rho$ provienne d'un potentiel hamiltonien. Pour l'étude de ce problème nous renvoyons à [Ko].

La remarque précédente nous guide pour énoncer une réciproque à (2.5). En effet pour reconstruire une mesure Gibbsienne à partir de ses désintégrées, il faut prendre en compte l'interaction au temps 0 générée par le hamiltonien sur les trajectoires et donc modifier celui ci. Précisément:

**Proposition 2.6** *Soient $v$ une $(\varphi, \mu)$-mesure de Gibbs, $(Q^y, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ une famille mesurable de $(\Phi, P^y)$-mesure de Gibbs et $Q = \int Q^y v(dy)$.*
*On suppose que pour tout $\Lambda \in \mathscr{S}$, $E_Q[\exp H_\Lambda^\Phi] < \infty$ et on pose*

$$m_\Lambda^\Phi(y) = \log E_Q[\exp H_\Lambda^\Phi/\omega(0) = y] = \log E_Q y[\exp H_\Lambda^\Phi] .$$

*Alors $Q$ est une $(\rho, P^\mu)$-mesure Gibbsienne pour $\rho$ donné par*

$$\rho_\Lambda(\omega) = (Z_\Lambda(\omega_{\Lambda^c}))^{-1} \exp -(H_\Lambda^\Phi(\omega) - m_\Lambda^\Phi(\omega(0)) + h_\Lambda^\varphi(\omega(0)))$$

*si et seulement si $\omega_\Lambda(0)$ et $\omega_{\Lambda^c}$ sont indépendantes pour la mesure $S_\Lambda$ définie par $dS_\Lambda = z_\Lambda^\varphi(\omega_{\Lambda^c}(0)) \exp(H_\Lambda^\Phi(\omega) - m_\Lambda^\Phi(\omega(0)) + h_\Lambda^\varphi(\omega(0)))\, dQ$.*

*Preuve.* Il est clair que la famille des $Q^y$ représente la désintégration au temps 0 de $Q$.
D'après les hypothèses, on peut définir

$$(Z_\Lambda(y_\Lambda \omega_{\Lambda^c}))^{-1} = \left(\int \exp -(H_\Lambda^\Phi - m_\Lambda^\Phi)(\omega)P_\Lambda^y(d\omega_\Lambda) \otimes \delta_{\omega_{\Lambda^c}}\right)^{-1}$$

quantités valant 0 si l'intégrale est divergente.

Remarquons qu'on ne perd pas de généralité en supposant que les $\mu_i$ sont des probabilités. En effet, on peut toujours multiplier $\mu_i$ par $\exp(f_i(y_i))$ d'intégrale 1 et presque partout positive et finie (car $\mu_i$ est $\sigma$-finite) et modifier $\varphi$ en lui retirant la "self-interaction" $f_i$. $S_\Lambda$ est alors une probabilité équivalente à $Q$.

Soit $f$ (resp. $G$) positive et mesurable sur $\mathbb{R}^{\Lambda}$ (resp. positive et $\mathscr{F}_{\Lambda^c}$ mesurable sur $\Omega$). L'hypothèse d'indépendance permet d'écrire

$$\begin{aligned}
E_{S_\Lambda}[G(\omega_{\Lambda^c})f(\omega_\Lambda(0))] &= \int f(y_\Lambda)E_{Q^y}[(Z_\Lambda(y_\Lambda\omega_{\Lambda^c}))^{-1}G(\omega_{\Lambda^c})]z_\Lambda^\varphi(y_{\Lambda^c}) \\
&\quad \times \exp h_\Lambda^\varphi(y)\nu(dy) \\
&= E_{S_\Lambda}[G(\omega_{\Lambda^c})]E_{S_\Lambda}[f(\omega_\Lambda(0))] \\
&= \int f(y_\Lambda)E_{S_\Lambda}[G(\omega_{\Lambda^c})]z_\Lambda^\varphi(y_{\Lambda^c})\exp h_\Lambda^\varphi(y)\nu(dy)\,, \\
&= \int f(y_\Lambda)E_Q[G(\omega_{\Lambda^c})\theta_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})]z_\Lambda^\varphi(y_{\Lambda^c})\exp h_\Lambda^\varphi(y)\nu(dy),
\end{aligned}$$

où $\theta_\Lambda(\omega_{\Lambda^c}) = E_Q[z_\Lambda^\varphi(\omega_{\Lambda^c}(0))\exp(H_\Lambda^\Phi(\omega) - m_\Lambda^\Phi(\omega(0)) + h_\Lambda^\varphi(\omega(0)))/\omega_{\Lambda^c}]$.
Soit $F(\omega_\Lambda - \omega_\Lambda(0))$ une fonction mesurable positive. On a alors

$$\begin{aligned}
&E_{S_\Lambda}[G(\omega_{\Lambda^c})f(\omega_\Lambda(0))\ F(\omega_\Lambda - \omega_\Lambda(0))] \\
&\quad = \int f(y_\Lambda)E_{Q^y}[(Z_\Lambda(y_\Lambda\omega_{\Lambda^c}))^{-1}G(\omega_{\Lambda^c}) \\
&\quad \times \int F(\omega_\Lambda - y_\Lambda)dP_\Lambda^y]z_\Lambda^\varphi(y_{\Lambda^c})\exp h_\Lambda^\varphi(y)\nu(dy) \\
&\quad = \int f(y_\Lambda)E_{Q^y}[Z_\Lambda(y_\Lambda\omega_{\Lambda^c}))^{-1}G(\omega_{\Lambda^c}) \\
&\quad \times \int F(\omega_\Lambda)\,dP_\Lambda^0]z_\Lambda^\varphi(y_{\Lambda^c})\exp h_\Lambda^\varphi(y)\nu(dy) \\
&\quad = (\int F(\omega_\Lambda)\,dP_\Lambda^0)\int f(y_\Lambda)E_{Q^y}[(Z_\Lambda(y_\Lambda\omega_{\Lambda^c}))^{-1} \\
&\quad \times G(\omega_{\Lambda^c})]z_\Lambda^\varphi(y_{\Lambda^c})\exp h_\Lambda^\varphi(y)\nu(dy) \\
&\quad = (\int F(\omega_\Lambda)\,dP_\Lambda^0)\int f(y_\Lambda)E_Q[G(\omega_{\Lambda^c})\theta_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})]z_\Lambda^\varphi(y_{\Lambda^c})\exp h_\Lambda^\varphi(y)\nu(dy) \\
&\quad = E_Q[G(\omega_{\Lambda^c})\theta_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})\int F(\omega_\Lambda - \omega_\Lambda(0))f(\omega_\Lambda(0))\,dP_\Lambda^\mu]\,.
\end{aligned}$$

On en déduit par un argument de classes monotones que

$$\begin{aligned}
&E_Q[K(\omega_\Lambda)G(\omega_{\Lambda^c})z_\Lambda^\varphi(\omega_{\Lambda^c}(0))\exp(H_\Lambda^\Phi(\omega) - m_\Lambda^\Phi(\omega(0)) + h_\Lambda^\varphi(\omega(0)))] \\
&\quad = E_Q[\theta_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})G(\omega_{\Lambda^c})\int K(\omega_\Lambda)\,dP_\Lambda^\mu]\,,
\end{aligned}$$

puis que $Q$ est une $(\rho, P^\mu)$-mesure Gibbsienne.
Réciproquement, si $Q$ est une telle mesure Gibbsienne, il est immédiat de vérifier la condition d'indépendance de $\omega_{\Lambda^c}$ et $\omega_\Lambda(0)$. □
Une clé du résultat précédent est bien sûr que $P^y$ est la loi image de $P^0$ lorsqu' on translate de $y$ la configuration initiale 0.

On remarquera que, dans le cas important où $m_\Lambda^\Phi$ est constante, $Q$ est simplement une $(\Phi + \varphi \circ \not{\kappa}_0, P^\mu)$-mesure de Gibbs. Cela signifie que l'interaction sur les trajectoires n'induit pas d'interaction supplémentaire au temps 0.

### 2.3 *Caractérisations variationnelles*

Nous mettons en évidence dans la Proposition 2.7 suivante une équation intégrale très simple (2.8), de type formule d'intégration par parties infini-dimensionnelle, caractérisant les $(\phi, dy)$-mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, où $\phi$ est une interaction donnée et dy est le produit infini des mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Dans le Théorème 2.11, cette idée est généralisée au cadre trajectoriel. Nous exhibons alors une caractérisation des mesures de Gibbs sur $\Omega$ comme solutions de l'équation fonctionnelle d'équilibre (2.14), semblable á la formule dite d'intégration par parties du calcul de Malliavin.

Ces caractérisations nous serviront au cours de l'article á identifier comme gibbsiennes les mesures que nous étudierons.

**Proposition 2.7** *Soient $v$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et $h$ le potentiel hamiltonien provenant d'une interaction $\varphi$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et tel que, pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$, $h_i$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée. Si pour toute fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ à support compact,*

$$\int \nabla_i f(y) v(dy) = \int f(y) \nabla_i h_i(y) v(dy), \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \tag{2.8}$$

*où $\nabla_i$ représente l'opérateur gradient par rapport à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée, alors $v$ est une $(\varphi, dy)$-mesure de Gibbs.*

*Preuve.* Prenons des fonctions tests de la forme $f(y_i)g(y_{i^c})$ où $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ à support compact. Alors l'équation (2.8) devient

$$\int g(y_{i^c}) \int \nabla f(y_i) v(dy_i/y_{i^c}) v(dy) = \int g(y_{i^c}) \int f(y_i) \nabla_i h_i(y) v(dy_i/y_{i^c}) v(dy),$$

qui se réduit à l'équation unidimensionnelle suivante

$$v\text{-p.s.} \int \nabla f(y_i) v(dy_i/y_{i^c}) = \int f(y_i) \nabla_i h_i(y) v(dy_i/y_{i^c}). \tag{2.9}$$

Soit $\eta \in \mathbb{R}^{\{i\}^c}$ fixé et $\tilde{v}_i$ la mesure sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{v}_i(dy_i) = \exp(h_i(y_i\eta)) v(dy_i/\eta).$$

En appliquant (2.9) à la fonction test $f(y_i)\exp(h_i(y_i\eta))$, $\tilde{v}_i$ satisfait

$$\int \nabla f(y_i) \tilde{v}_i(dy_i) = 0$$

pour toute fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ à support compact. Donc $\tilde{v}_i$ est invariante par translation, ce qui implique qu'elle est proportionnelle à la mesure de Lebesgue $dy_i$, soit encore:

$$v(dy_i/y_{i^c}) = z_i \exp - h_i(y) dy_i, \quad v\text{-p.s.},$$

où $z_i$ est la constante de renormalisation. □

*Remarque 2.10* 1) Si dans l'égalité (2.9) on considère $v(/y_{i^c})$ comme une distribution, on obtient immédiatement d'après Schwartz [Sch Théorème II, p. 53] que $v(/y_{i^c})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue; cf. aussi [Be1], qui, sous des hypothèses un peu plus fortes, obtient des informations sur la règularité de la densité.

2) L'invariance par translation qui caractérise -à une constante près- la mesure de Lebesgue joue un rôle fondamental. On peut ainsi deviner, derrière l'égalité (2.8), la propriété de quasi-invariance par translation de $v$. On rejoint

alors le résultat de Royer [Ro] assurant que les mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ sont exactement les probabilités quasi-invariantes. Pour des extensions aux mesures sur des espaces de Banach; cf. [Be2].

3) On trouve dans [A-A] une généralisation de (2.8) à la caractérisation de mesures de Gibbs sur un produit infini de sous-variétés.

4) On obtient très facilement la réciproque de la Proposition 2.7, certifiant que toute $(\varphi, dy)$-mesure de Gibbs $\nu$ satisfait l'équation (2.8) dès que chacun des termes a bien un sens.

Dans la Proposition 2.4 et le Théorème 2.9 de [R-Z2] une caractérisation des mesures de Gibbs sur $\Omega$ associées à une interaction bornèe et de condition initiale déterministe était donnée. Or, dans la suite de ce travail, nous voulons appliquer un tel critère à une classe plus générale d'interactions, dont notamment celles de type ferromagnétique qui ne sont ni bornées ni de gradients bornés, et à des probabilités sur $\Omega$ de condition initiale aléatoire. Le Théorème 2.11 suivant améliore donc les résultats de [R-Z2] en en affaiblissant les hypothèses.

**Théorème 2.11** *Soit $H$ le potentiel hamiltonien associé à une interaction $\Phi$ sur $(\Omega, P^\mu)$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$ et $\eta \in C(0,1)^{\{i\}^c}$, $H_i(\,\cdot\,\eta)$ est $L^2$-différentiable et $D^i_r H_i$ admet une version mesurable. Soit $Q$ une probabilité sur $\Omega$ satisfaisant:*

$$(2.12) \qquad \forall t \in [0,1], \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad E_Q(|\omega_i(t)|) < +\infty\,.$$

*Si $Q$ est une $(\Phi, P^\mu)$-mesure de Gibbs sur $\Omega$, telle que $E_Q(\int_0^1 |D^i_r H_i|dr) < +\infty$,*

$$(2.13) \qquad \forall F \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad \forall g_i \text{ fonction étagée}\,,$$
$$E_Q\left(F \textstyle\int_0^1 g_i(s)\, d\omega_i(s)\right) = E_Q(D^i_g F) - E_Q(F D^i_g H_i)\,.$$

*Réciproquement, si $Q$ de condition initiale $\nu$, une $(\varphi, \mu)$-mesure de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, satisfait l'équation (2.13′),*

$$(2.13') \qquad \forall F \in \mathscr{W}_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \ \forall g_i \text{ fonction étagée}\,,$$
$$E_Q\left(e^{H_i} F \textstyle\int_0^1 g_i(s)\, d\omega_i(s)\right) = E_Q(e^{H_i} D^i_g F)\,,$$

*en supposant que*

$$(2.14) \qquad E_Q(e^{H_i}) < +\infty \text{ pour tout } i\,,$$

*alors $Q$ est une $(\rho, P^\mu)$-pseudo mesure Gibbsienne pour $\rho$ donné par*

$$(2.15) \qquad \rho_i(\omega) = (Z_i(\omega_{i^c}))^{-1} \exp - (H_i(\omega) - m_i(\omega(0)) + h^\varphi_i(\omega(0)))\,,$$

*où $m_i(y) = \log E_Q[\exp H_i / \omega(0) = y]$, si et seulement si $\omega_i(0)$ et $\omega_{i^c}$ sont indépendantes pour la mesure $S_i$ dèfinie par*

$$(2.16) \qquad dS_i = z^\varphi_i(\omega_{i^c}(0)) \exp(H_i(\omega) - m_i(\omega(0)) + h^\varphi_i(\omega(0)))\, dQ\,.$$

*En particulier si $m_i$ est une constante et sous la condition d'indépendance, $Q$ est une $(\Phi + \varphi \circ \mathscr{M}_0, P^\mu)$-mesure de Gibbs sur $\Omega$.*

*Remarque 2.17* Si $H_i$ est borné, ou plus généralement si $E_Q(e^{H_i}|D_g^i H_i|) < \infty$, (2.13) entraine (2.13′) dès que $E_Q(\int_0^1 |D_r^i H_i|\, dr) < +\infty$.

En effet si $H_i$ est borné, $e^{H_i} \in L^2(P^\mu)$, et est dans $W^{1,2}(\Omega)$. On applique alors (2.13) à $G = F e^{H_i}$. Sinon il faut utiliser des troncatures $\psi(e^{H_i})$ avec $\psi$ lisse et passer à la limite, ce qui est possible si $E_Q(e^{H_i}|D_g^i H_i|) < \infty$ par exemple.

*Preuve du Théorème 2.11* Tout d' abord l'hypothèse (2.12) permet d' affirmer que tous les termes de l'équation (2.13) sont bien définis.

*Première assertion.* La preuve est similaire à celle de la Proposition 2.4 de [R-Z2]. Esquissons-la rapidement; en décomposant l'espérance sous $Q$ dans le membre de gauche de (2.13), on introduit l'espérance conditionnelle $Q(/\mathscr{F}_{i^c})$. Par hypothése, puisque $Q$ est gibbsienne, cette espérance conditionnelle est absolument continue par rapport à la mesure de Wiener $\pi^{\mu_i}$. A cette derniére, nous appliquons l'équation de dualité (cf. (1.3) de [R-Z2]):

$$E_{\pi^{\mu_i}}\left(Fe^{-H_i}\int_0^1 g_i(s)\, d\omega_i(s)\right) = E_{\pi^{\mu_i}}(D_g^i(Fe^{-H_i})), \tag{2.18}$$

(valable quelle que soit la condition initiale $\mu_i$ de la mesure de Wiener, et pour $F \in \mathscr{W}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$). Il faut ici encore faire attention aux problèmes d' intégrabilité, et donc en général commencer par tronquer $e^{-H_i}$. Mais par la propriété de Gibbs $e^{-H_i}$ est $\pi^{\mu_i} \bigotimes \delta_{\omega_{i^c}}$ intégrable pour Q presque tout $\omega_{i^c}$ et les passages à la limite ne posent pas de problème. Nous obtenons alors directement l'égalité désirée (en utilisant la densité de $\mathscr{W}_{\mathrm{loc}}$):

$$E_Q\left(F\int_0^1 g_i(s)\, d\omega_i(s)\right) = E_Q(D_g^i F) - E_Q(F\, D_g^i H_i).$$

*Réciproque.* Supposons (2.14) et (2.13′) satisfaites. Par un argument de séparabilité ici encore, elle se désintègre (pour $v$ presque tout $y$) en

$$E_{Q^y}\left(e^{H_i}F\int_0^1 g_i(s)\, d\omega_i(s)\right) = E_{Q^y}\left(e^{H_i}D_g^i F\right).$$

En particulier pour $F(\omega) = K(\omega_{i^c})\exp(\imath\int_0^1 \lambda g_i(s)\, d\omega_i(s))$, si l'on note $R^i$-la probabilité de densité $\frac{1}{k_i}e^{H_i}$ par rapport à $Q^y$, où $k_i = E_{Q^y}[e^{H_i}]$ (cf. 2.14)

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}&E_{R^i}\left(K(\omega_{i^c})\exp\left(\imath\int_0^1 \lambda g_i(s)\, d\omega_i(s)\right)\right)\\ &= E_{R^i}\left(K(\omega_{i^c})\imath\int_0^1 g_i(s)\, d\omega_i(s)\exp\left(\imath\int_0^1 \lambda g_i(s)\, d\omega_i(s)\right)\right)\end{aligned}$$

$$= i E_{R^i}\left(K(\omega_{i^c}) D_g^i \left(\exp\left(i\int_0^1 \lambda g_i(s)\, d\omega_i(s)\right)\right)\right)$$

$$= -\lambda \int_0^1 g_i^2(s)\, ds\, E_{R^i}\left(K(\omega_{i^c}) \exp\left(i\int_0^1 \lambda g_i(s)\, d\omega_i(s)\right)\right) .$$

D' où, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $g_i$ fonction étagée et $K \in \mathscr{W}_{\text{loc}}(C(0,1)^{\{i\}^c})$:

$$E_{R^i}\left(K(\omega_{i^c}) \exp\left(i\int_0^1 \lambda g_i(s)\, d\omega_i(s)\right)\right) = e^{-\lambda^2/2 \int_0^1 g_i^2(s)\, ds} E_{R^i}\left(K(\omega_{i^c})\right) .$$

Cela implique que, sous $R^i$, le processus de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée $\omega_i(\,\cdot\,) - \omega_i(0)$ est, d'une part un processus de Wiener, d'autre part, qu'il est *indépendant* des autres coordonnées. Donc pour $R^i$-presque tout $\omega_{i^c}$

(2.19) $$R^i(/\omega_{i^c}) = \pi^{y_i}(d\omega_i) \otimes \delta_{\omega_{i^c}} .$$

Ceci vaut également pour $Q$ presque tout $\omega_{i^c}$, puisque $Q$ et $R^i$ sont équivalentes. ($H_i$ est fini). On applique ensuite la Proposition 2.6 valable tout aussi bien pour les pseudo-mesures de Gibbs. □

L'énoncé de la réciproque dans 2.11 peut paraitre compliqué. Outre le fait qu'on ne peut se passer d'aucune des hypothèses, nous verrons que celles ci sont en pratique très souvent vèrifiées.

*Remarque 2.20* En dimension d finie, le problème que soulève la condition initiale $v$ se résoud de lui-même car les propriétés gibbsienne et d'absolue continuité *globale* sont équivalentes:
si $Q \in \mathscr{P}(C(0,1)^d)$ satisfait (2.13) pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, il en est de même pour $v$-presque tout $Q^y$, qui est donc gibbsienne par rapport à la mesure de référence $\bigotimes_{i=1}^d \pi^{y_i}$; on a donc l'absolue continuité (globale!): $Q^y \ll \bigotimes_{i=1}^d \pi^{y_i}$, $v$-presque sûrement, ce qui entraine que $Q = \int Q^y v(dy)$ est absolument continue par rapport à $\pi^{d,v} \equiv \int \bigotimes_{i=1}^d \pi^{y_i} v(dy)$, i.e. $Q$ est gibbsienne.

Soulignons de plus que la propriété $Q \ll \pi^{d,v}$ permet d'identifier $Q$, par le théorème de Girsanov, comme la loi d'un mouvement brownien avec dérive.

Il est donc naturel d'analyser, en dimension infinie, le lien entre diffusions browniennes et mesures de Gibbs sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$. Ceci fait l'objet des troisième, quatrième et cinquième parties.

## 3 Lois de systèmes gradients stochastiques comme mesures Gibbsiennes: cas borné

L' objectif de ce paragraphe est d'étudier les liens entre lois de systèmes infinis de diffusions et mesures de Gibbs sur les espaces de trajectoires, dans le cas le plus simple possible (interactions bornées à portée finie). Ceci permet de simplifier un certain nombre de problèmes techniques indépendants de la nature du problème. Au paragraphe suivant nous étendrons ces résultats à des classes beaucoup plus générales d'interactions.

Nous nous fixons dans cette partie une interaction $\phi$ par paires sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, c'est à dire telle que $\phi_\Lambda \equiv 0$ si le cardinal de $\Lambda$ est strictement supérieur à 2. Nous notons $\phi_i$ pour $\phi_{\{i\}}$ et $\phi_{ij}$ pour $\phi_{\{i,j\}}$ (donc $\phi_{ij} = \phi_{ji}$). De plus, nous supposons

(3.1) – $\phi_i$ et $\phi_{ij}$ de classe $\mathscr{C}^3$ bornées et à dérivées bornées *uniformément* en $i$ et en $i, j$,
– $\phi_{ij}$ symétrique $(\phi_{ij}(y_i, y_j) = \phi_{ij}(y_j, y_i) \forall y_i, y_j \in \mathbb{R})$,
– l'interaction à portée finie, i.e. il existe $N(0)$, voisinage symétrique fini de 0 dans $\mathbb{Z}^d$, tel que, pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$ et $j \notin N(i) = i + N(0)$, $\phi_{ij} \equiv 0$.

*Remarque.* 1) Nous pourrions sans difficultés techniques majeures considérer une interaction plus générale où $\phi_\Lambda \equiv 0$ si le cardinal de $\Lambda$ est assez grand (comme dans [De2]). Pour simplifier la présentation de cette partie nous nous restreignons ici à une interaction par paires.

2) L'hypothèse de symétrie de $\phi_{ij}$ est très naturelle (la particule $i$ agit sur la particule $j$ comme $j$ sur $i$). Cela servira à simplifier beaucoup la forme du hamiltonien $H$ défini au Théorème 3.7. Signalons que, contrairement à Doss et Royer [D-R], nous ne supposons pas que $\phi_{ij}$ est invariante par translation (c' est-à-dire de la forme $\phi_{|i-j|}$).

Le potentiel hamiltonien $h$ associé à $\phi$ est donc donné par

$$(3.2) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \ \ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \ \ h_i(y) = \phi_i(y_i) + \sum_{j \in N(i)} \phi_{ij}(y_i, y_j),$$

en prenant par convention $\phi_{ii} \equiv 0$.

Nous pouvons alors définir un système à infinité de particules associé à l'interaction $\phi$ par le système d'équations différentielles stochastiques suivant sur $\Omega$:

$$(3.3) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad dX_i(t) = dW_i(t) - \frac{1}{2} \nabla_i h_i(X(t))\, dt, \ \ X(0) \overset{(\mathscr{L})}{=} v,$$

où $(W_i)_i$ est une famille de mouvements browniens réels indépendants partant de l'origine (donc la loi de $(W_i)_i$ sur $\Omega$ est $P^0$), et $X(0)$ est indépendante de $(W_i)_i$. Soit $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)$, le dual des suites tempérées sur $\mathbb{Z}^d$, c'est à dire des suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_{i \in \mathbb{Z}^d}(1 + |i|^{2n})|y_i|^2 < +\infty$. On a alors

**Proposition 3.4** ([S-S Theorem 4.1; ou D-R Théorème 3.3]) *Sous l'hypothèse* (3.1) *et l'hypothèse* (3.5) *suivante*
(3.5) $(\int y_i^{2\not{k}} v(dy))_i \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)$, *en particulier* $v$ *est portée par* $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)$,
*il existe sur* $\Omega$ *une et une seule solution en loi* $X(t)$ *au système* (3.3) *à valeurs dans* $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)$.

*Remarque.* Les hypothèses faites permettent d'obtenir des estimations (absentes dans [S-S]) de la norme $L^{2\not{k}}$ des solutions de (3.3): en suivant la démarche de Föllmer et Wakolbinger dans [F-W] Theorem 4.6, on applique la formule d'Itô à $\Sigma_{i \in \mathbb{Z}^d}(1 + |i|^{-2n})|X_i(t)|^{2\not{k}}$, puis le lemme de Gronwall, et l'on obtient que

$$\sup_{0 \leqq t \leqq 1} E(|X_i(t)|^{2p})_i \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d). \tag{3.6}$$

Donc la solution de (3.3) est non seulement p.s. à valeurs dans $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)$, mais aussi en norme $L^{2p}$.

Notre but, dans cette partie, est de comparer les deux propriétés suivantes vérifiées par une probabilité $Q \in \mathscr{P}(\Omega)$: être une mesure de Gibbs et être solution du système gradient stochastique (3.3); puis d'en déduire les premières conséquences. Le Théorème 3.7 qui suit présente le résultat fondamental, dont la preuve s'appuie sur l'équation d'équilibre (2.13). Dans le cadre de cette partie Deuschel [De2] est le premier (et le seul à notre connaissance) à avoir mis en évidence le caractère gibbsien de diffusions infini-dimensionelles. Nous retrouvons (de manière différente) ce résultat et montrons de plus une réciproque dont l'intérêt sera mis en valeur en particulier dans l'étude des transitions de phases.

Dans toute la suite de ce paragraphe nous supposons que les hypothèses (3.1) et (3.5) sont satisfaites.

**Théorème 3.7** *Soit $Q \in \mathscr{P}(\Omega)$ de condition initiale $v$. Alors $Q$ est solution du système* (3.3), *où $v$ est une $(\varphi, \mu)$-mesure de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, si et seulement si $Q$ est une $(\Phi + \varphi \circ pr_0, P^\mu)$-mesure de Gibbs sur $\Omega$, où le hamiltonien $H_i$ associé à $\Phi$ est donné par :*

(3.8)

$$H_i(\omega) = \frac{1}{2} h_i(\omega(1)) - \frac{1}{2} h_i(\omega(0)) - \int_0^1 \left( \frac{1}{2} A h_i(\omega(s)) + \sum_{j \in N(i)} \frac{1}{8} (\nabla_j h_i)^2(\omega(s)) \right) ds,$$

*et $A$ est le générateur infinitésimal associé au système* (3.3):

$$A = \sum_j \frac{1}{2} \Delta_j - \frac{1}{2} \nabla_j h_j \nabla_j .$$

*Preuve.* Condition nécessaire Nous passons par l'étape intermédiaire

**Proposition 3.9** *Soit $Q \in \mathscr{P}(\Omega)$ la loi de la solution ($\in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)$) du système* (3.3). *Alors $Q$ satisfait à l'équation d'équilibre* (2.13), *où la fonctionnelle $H_i$ est donnée par* (3.8).

*Preuve.* Nous cherchons une fonctionnelle $H_i$ telle que l'équation (2.13) soit satisfaite sous $Q$.

*Calcul de $E_Q(D^i_g F)$* ($F \in \mathscr{W}_{\text{loc}}(\Omega), g_i$ étagée sur [0,1], $i \in \mathbb{Z}^d$ fixé):

$$E_Q(D^i_g F) = E_Q\left( \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \left( F\left( X + \varepsilon \int_0^{\bullet} g_i(s)\, ds \right) - F(X) \right) \right) \qquad \text{(cf.1.9)}.$$

Comme $D_g F$ est (partout) bornée par hypothèse, on peut échanger la limite en $\varepsilon$ (qui existe partout car $F \in \mathscr{W}_{\text{loc}}$) et l'intégration par rapport à $Q$:

$$E_Q(D^i_g F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} E_Q \left( F\left( X + \varepsilon \int_0^{\bullet} g_i(s)\, ds \right) - F(X) \right) .$$

Soit $Q^{i,\varepsilon}$ la mesure image de $Q$ par la translation $\tau^{i,\varepsilon}$ sur $\Omega$ définie par:

$$\omega \to \left(\omega_j + \varepsilon\delta_{ij} \int_0^{\cdot} g_i(s)\,ds\right)_{j\in\mathbb{Z}^d}.$$

Montrons que la mesure $Q^{i,\varepsilon}$ est absolument continue par rapport à $Q$. Sous $Q^{i,\varepsilon}$ le processus des coordonnées $X_j(t)$ vérifie que

$$\left(X_j(t) - X_0(t) - \varepsilon\delta_{ij}\int_0^t g_i(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \nabla_j h_j\left[X(s) - \varepsilon\int_0^s g_i(r)\,dr\right] ds\right)_{j\in\mathbb{Z}^d}$$

a pour loi $P^0$. D'après [Ja, Theorem 12.50] (on peut en effet supposer I infini dénombrable dans les hypothèses 12.31 de [Ja]), l'unicité de la solution de (3.3) et la bornitude des coefficients entrainent que $Q^{i,\varepsilon} \ll Q$ et la densité exponentielle $M^{i,\varepsilon}$ vaut

$$\begin{aligned} M^{i,\varepsilon} = \exp \sum_{j\in N(i)} \Bigg(\int_0^1 \Bigg(-\frac{1}{2}\nabla_j h_j\left(X(s) - \varepsilon\int_0^s g_i(r)\,dr\right) \\ + \frac{1}{2}\nabla_j h_j(X(s)) + \varepsilon\delta_{ij} g_i(s)\Bigg)\, dW_j(s) \\ - \frac{1}{2}\int_0^1 \Bigg(-\frac{1}{2}\nabla_j h_j\left(X(s) - \varepsilon\int_0^s g_i(r)\,dr\right) \\ + \frac{1}{2}\nabla_j h_j(X(s)) + \varepsilon\delta_{ij} g_i(s)\Bigg)^2 ds\Bigg). \end{aligned}$$

On déduit du résultat précédent que $E_Q(D_g^i F) = \lim E_Q\left(\varepsilon^{-1}(M^{i,\varepsilon} - 1)F\right)$. Or:

**Lemme 3.10** *$Q$ p.s. et dans $L^2(Q)$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}(M^{i,\varepsilon} - 1) = \sum_{j\in N(i)} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} D_g^i(\nabla_j h_j(X(s)) + \delta_{ij} g_i(s)\right) dW_j(s).$$

*Preuve.* D'après la formule de Taylor–Lagrange

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\nabla_j h_j\left(X(s) - \varepsilon\int_0^s g_i(r)\,dr\right) + \frac{1}{2}\nabla_j h_j(X(s)) + \varepsilon\delta_{ij} g_i(s)\right) dW_j(s) \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\nabla_j h_j\left(X(s) - \varepsilon\int_0^s g_i(r)\,dr\right) + \frac{1}{2}\nabla_j h_j(X(s)) + \varepsilon\delta_{ij} g_i(s)\right)^2 ds\Bigg) \\ &= \varepsilon\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\nabla_j\nabla_i h_j(X(s) - \varepsilon(s)\int_0^s g_i(r)\,dr)\left(\int_0^s g_1(r)\,dr\right) + \delta_{ij} g_i(s)\right) dW_j(s) \\ &\quad - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\nabla_j\nabla_i h_j\left(X(s) - \varepsilon(s)\int_0^s g_i(r)\,dr\right)\left((\int_0^s g_i(r)\,dr) + \delta_{ij} g_i(s)\right)^2 ds\right), \end{aligned}$$

avec $0 < \varepsilon(s) < \varepsilon$. On utilise ensuite la même formule de Taylor pour l' exponentielle $e^x = 1 + x + (x^2/2)e^{\theta x}$, qui donne

$$\varepsilon^{-1}(M^{i,\varepsilon} - 1) = \sum_{j \in N(i)} \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \nabla_j \nabla_i h_j \left( X(s) - \varepsilon(s) \int_0^s g_i(r)\, dr \right) \left( \int_0^s g_i(r)\, dr \right) + \delta_{ij} g_i(s) \right) dW_j(s) + \varepsilon N^{i,\varepsilon} ,$$

où $N^{i,\varepsilon}$ est bornée dans tous les $L^p$ (car $M^{i,\varepsilon}$ est bornée dans tous les $L^p$). On conclut à l'aide du théorème de convergence dominée pour l'intégrale stochastique et pour son crochet. $\square$

Du Lemme 3.10 on déduit

(3.11)

$$\begin{aligned} E_Q(D_g^i F) &= \lim E_Q(\varepsilon^{-1}(M^{i,\varepsilon} - 1)F) = E_Q(\lim \varepsilon^{-1}(M^{i,\varepsilon} - 1)F) \\ &= E_Q\left( F \sum_{j \in N(i)} \int_0^1 \left( \frac{1}{2} D_g^i(\nabla_j h_j(X(s)) + \delta_{ij} g_i(s) \right) dW_j(s) \right) . \end{aligned}$$

Transformons (3.11),

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in N(i)} \int_0^1 \left( \frac{1}{2} D_g^i(\nabla_j h_j(X(s)) + \delta_{ij} g_i(s) \right) dW_j(s) \\ &= \sum_{j \in N(i)} \left( \int_0^1 \left( \frac{1}{2} D_g^i(\nabla_j h_j(X(s))) + \delta_{ij} g_i(s) \right) dX_j(s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{2} D_g^i(\nabla_j h_j(X(s))) + \delta_{ij} g_i(s) \right) \nabla_j h_j(X(s))\, ds \right) \\ &= \sum_{j \in N(i)} D_g^i \left( \int_0^1 \frac{1}{2} \nabla_j h_j(X(s))\, dX_j(s) + \frac{1}{8} \int_0^1 (\nabla_j h_j)^2(X(s))\, ds \right) + \int_0^1 g_i(s)\, dX_i(s) . \end{aligned}$$

Rappelons que nous cherchons à identifier une fonctionnelle $H_i$ pour laquelle l'égalité (2.13) est vérifiée. Or nous venons de prouver que:

$$\begin{aligned} &E_Q(D_g^i F) \\ &\quad = E_Q\left( F D_g^i \sum_{j \in N(i)} \left( \int_0^1 \frac{1}{2} \nabla_j h_j(X(s))\, dX_j(s) + \frac{1}{8} \int_0^1 (\nabla_j h_j)^2(X(s))\, ds \right) \right) \\ &\quad\quad + E_Q\left( F \int_0^1 g_i(s)\, dX_i(s) \right) . \end{aligned}$$

$H_i$ devra donc satisfaire sous $Q$:
(3.12)

$$D_g^i H_i = D_g^i \sum_{j \in N(i)} \left( \int_0^1 \frac{1}{2} \nabla_j h_j(X(s))\, dX_j(s) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \nabla_j h_j \right)^2 (X(s))\, ds \right) .$$

L'expression (3.12) n'est pas satisfaisante car elle contient une intégrale stochastique n'ayant pas de signification intrinsèque. Mais nous pouvons la transformer par la formule d'Itô, après avoir remarqué le fait suivant:

**Lemme 3.13** *Soit $h_i$ le potentiel hamiltonien sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ défini en* (3.2).

$$\forall i,j \in \mathbb{Z}^d \quad \nabla_i \nabla_j h_j = \nabla_i \nabla_j h_i \, .$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j h_j &= \nabla_i \left( \nabla_j \phi_j + \sum_k \nabla_j \phi_{jk} \right) \\
&= \delta_{ij} \nabla_i \nabla_j \phi_j + \sum_k \delta_{ij} \nabla_i \nabla_j \phi_{jk} + \nabla_i \nabla_j \phi_{ji} \\
&= \nabla_i \left( \nabla_j \phi_i + \sum_k \nabla_j \phi_{ik} \right) = \nabla_i (\nabla_j h_i) \, . \qquad \square
\end{aligned}$$

Donc, dans (3.12),

$$D_g^i \sum_{j \in N(i)} \int_0^1 \frac{1}{2} \nabla_j h_j(X(s))\, dX_j(s) = D_g^i \sum_{j \in N(i)} \int_0^1 \frac{1}{2} \nabla_j h_i(X(s))\, dX_j(s) \, , \tag{3.14}$$

qui, par la formule d'Itô appliquée à $\frac{1}{2}h_i$, vaut:

$$D_g^i \left( \frac{1}{2} h_i(X(1)) - \frac{1}{2} h_i(X(0)) - \frac{1}{4} \int_0^1 \sum_{j \in N(i)} \Delta_j h_i(X(s))\, ds \right) . \tag{3.15}$$

L'égalité (3.12) devient alors

(3.16)
$$\begin{aligned}
D_g^i H_i(\omega) = D_g^i \Bigg( & \frac{1}{2} h_i(\omega(1)) - \frac{1}{2} h_i(\omega(0)) - \int_0^1 \sum_{j \in N(i)} \Bigg( \frac{1}{4} \Delta_j h_i(\omega(s)) \\
& - \frac{1}{8} (\nabla_j h_j)^2 (\omega(s)) \Bigg) \, ds \Bigg) .
\end{aligned}$$

Nous continuons à transformer le membre de droite de (3.16) afin de faire apparaitre le générateur infinitésimal A associé au systéme.

(3.17)
$$D_g^i \left( \sum_{j \in N(i)} \left( \frac{1}{4} \Delta_j h_i(\omega(s)) - \frac{1}{8} (\nabla_j h_j)^2 (\omega(s)) \right) \right)$$

$$= D_g^i\left(\frac{1}{2}Ah_i(\omega(s))\right.$$
$$\left.+\sum_{j\in N(i)}\left(\frac{1}{4}\nabla_j h_j(\omega(s))\nabla_j h_i(\omega(s))-\frac{1}{8}(\nabla_j h_j)^2(\omega(s))\right)\right)$$
$$= D_g^i\left(\frac{1}{2}Ah_i(\omega(s))+\sum_{j\in N(i)}\frac{1}{8}(\nabla_j h_i)^2(\omega(s))\right)$$

après simplifications dûes au Lemme 3.13. En combinant les expressions (3.16) et (3.17), nous choisissons pour $H_i$ la fonctionnelle définie par l'égalité (3.8), ce qui achève la preuve de la Proposition 3.9. □

Pour terminer la preuve de la condition nécessaire du Théorème 3.7 il nous suffit d'appliquer le Théorème 2.11. Vérifions que ses hypothèses sont bien satisfaites.

Tout d'abord les $H_i$ sont les potentiels hamiltoniens sur $\{i\}$ associés à une interaction $\Phi$ sur $\Omega$ donnée par les égalités ci-dessous:

(3.18)

$$\Phi_i(\omega_i)=\frac{1}{2}\phi_i(\omega_i(1))-\frac{1}{2}\phi_i(\omega_i(0))-\int_0^1\left(\frac{1}{4}\Delta_i\phi_i(\omega_i(s))-\frac{1}{8}(\nabla_i\phi_i)^2(\omega_i(s))\right)ds$$

$$\begin{aligned}\Phi_{ij}(\omega_i,\omega_j)=&\frac{1}{2}\phi_{ij}((\omega_i,\omega_j)(1))-\frac{1}{2}\phi_{ij}((\omega_i,\omega_j)(0))\\&-\int_0^1\left(\frac{1}{4}(\Delta_i+\Delta_j)\phi_{ij}((\omega_i,\omega_j)(s))\right.\\&\quad-\frac{1}{4}\Big(\nabla_j\phi_j(\omega_j(s))\nabla_j\phi_{ij}((\omega_1,\omega_j)(s))\\&\quad+\nabla_i\phi_i(\omega_i(s))\nabla_i\phi_{ij}((\omega_i,\omega_j)(s))\Big)\\&\quad+\frac{1}{8}\Big((\nabla_i\phi_{ij})^2(\omega_i,\omega_j)(s))\\&\quad\left.+(\nabla_j\phi_{ij})^2((\omega_i,\omega_j)(s))\Big)\right)ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{ijk}(\omega_i,\omega_j,\omega_k)=-\frac{1}{4}\int_0^1\Big(&\nabla_i\phi_{ij}((\omega_i,\omega_j)(s))\nabla_i\phi_{ik}((\omega_i,\omega_k)(s))\\&+\nabla_k\phi_{ik}((\omega_i,\omega_j)(s))\nabla_k\phi_{jk}((\omega_j,\omega_k)(s))\\&+\nabla_j\phi_{ij}((\omega_i,\omega_j)(s))\nabla_j\phi_{jk}((\omega_j,\omega_k)(s))\Big)\,ds\,.\end{aligned}$$

On remarquera que ce n'est plus une interaction par paires mais par triplets i.e. $\Phi_\Lambda\equiv 0$ si card$(\Lambda)>3$. Les hypothèses de $L^2$-différentiabilité et de mesurabilité ainsi que (2.12) sont vérifiées.

Ensuite $e^{H_i}$ n'est autre que la $Q$ (resp. $Q^Y$) surmartingale exponentielle formée à partir de $\Sigma_j\int_0^{\cdot}\frac{1}{2}\nabla_j h_i\,dW_j$ et prise au temps 1, donc $E_{Q^Y}(e^{H_i})\leqq 1$, ce qui entraine (2.14). Mais on peut appliquer ici le critère de Novikov (grâce à la bornitude des coefficients et au fait que la somme est finie), qui assure que $e^{H_i}$ est une martingale.

Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, m_i(y) = \log E_Q[\exp H_i/\omega(0) = y] = 0$.
De plus $H_i$ est borné donc d'après (2.17), (2.13′) est satisfaite.

Enfin sous $e^{H_i}Q, X$ est une semi-martingale dont la décomposition s'obtient a partir de celle sous $Q$ en $y$ ajoutant la dérive $(\frac{1}{2}\nabla_j h_i)_{j\in\mathbb{Z}^d}$. Donc, sous $e^{H_i}Q$, pour $j \neq 1$.

$$X_j(t) = X_j(0) + W_j(t) + \int_0^t \frac{1}{2}\nabla_j(h_i - h_j)(X(s))\,ds\,,$$

où $W_j$ est un brownien indépendant de $X_i$ et la dérive est fonction uniquement de $X_{i^c}$ d'après le Lemme 3.13. Ainsi sous $S_i$ (cf. 2.16), $X_{i^c}$ et $X_i(0)$ sont indépendantes dès lors que $X_{i^c}(0)$ et $X_i(0)$ le sont, ce qui est le cas puisque $v$ est une $(\varphi, \mu)$-mesure de Gibbs. □

*Condition suffisante.*

Soit $Q \in \mathscr{P}(\Omega)$ une $(\Phi + \varphi \circ pr_0, P^\mu)$-mesure de Gibbs. Montrons d'abord le

**Lemme 3.19** *Pour toute $\Lambda \in \mathscr{S}$, $Q$ est absolument continue par rapport à*

$$\left(\bigotimes_{i\in\Lambda} \pi^{\mu_i}\right) \otimes Q_{\Lambda^c}\,.$$

*Preuve.* C'est évident puisque $Q = \int Q(/\omega_{\Lambda^c}) Q_{\Lambda^c}(d\omega_{\Lambda^c})$

$$\text{et } Q(/\omega_{\Lambda^c}) \ll \left(\bigotimes_{i\in\Lambda} \pi^{\mu_i}\right) \otimes \delta_{\omega_{\Lambda^c}}\,. \qquad \square$$

En particulier, puisque pour $i$ fixé dans $\mathbb{Z}^d$, le processus canonique des coordonnées du $i^{\text{ème}}$ spin $X_i$ est un mouvement brownien sous $\pi^{\mu_i} \otimes Q_{\{i\}^c}$, alors il existe un unique processus adapté $\beta_i$ tel que, sous $Q$,
$(X_i(t) - X_i(0) - \int_0^t \beta_i(s)\,ds)$ soit un mouvement brownien $W_i(t)$ partant de 0. Puisque $H_i$ est borné ainsi que sa différentielle, (2.12) est vérifiée et $\beta_i$ est $Q$ intégrable. Pour identifier le drift $\beta_i$, nous allons exhiber une condition nécessaire et suffisante pour que $(X_i(t) - X_i(0) - \int_0^t \beta_i(s)\,ds)$ soit une $Q$-martingale, quelque soit $i \in \mathbb{Z}^d$ (noter qu'alors $\beta_i$ sera bien la dérive cherchée, par unicité de la décomposition des semi-martingales continues). Cette propriété de martingale est équivalente à:

$$\forall F_s \in \mathscr{W}_{\text{loc}} \text{ et } \mathscr{F}_s\text{-mesurable sur } \Omega, \quad \forall 0 \leqq s \leqq t \leqq 1\,,$$

$$E_Q\left(F_s(X_i(t) - X_i(s) - \int_s^t \beta_i(r)\,dr\right) = 0\,,$$

ou encore

$$E_Q\left(F_s \int_0^1 1_{]s,t]}(r)\,dX_i(r)\right) = E_Q\left(F_s \int_s^t \beta_i(r)\,dr\right)\,.$$

D'après le Théorème 2.11, puisque $Q$ est gibbsienne, elle vérifie l'équation d'équilibre (2.13). On peut donc transformer l'équation précédente en:

$$E_Q\left(D^i_{1_{]s,t]}}F_s\right) - E_Q\left(F_s D^i_{1_{]s,t]}}H_i\right) = E_Q\left(F_s \int_s^t \beta_i(r)\,dr\right)$$

soit encore

$$E_Q\left(F_s\left(\int_s^t \beta_i(r)\,dr + D^i_{1_{]s,t]}}H_i\right)\right) = 0 \tag{3.20}$$

car $D^i_r F_s = 0$ pour $r > s$ par localité temporelle de l'opérateur différentiel $D$. Calculons $D^i H_i$ à partir de sa valeur donnée en (3.16) (plus simple ici que sous la forme (3.8)).

$$\begin{aligned}
&D^i_{1_{]s,t]}}H_i(X)\\
&= D^i_{1_{]s,t]}}\left(\frac{1}{2}h_i(X(1)) - \int_0^1 \sum_{j\in N(i)}\left(\frac{1}{4}\Delta_j h_i(X(r)) - \frac{1}{8}(\nabla_j h_j)^2(X(r))\right)dr\right)\\
&= \frac{1}{2}\nabla_i h_i(X(1))(t-s)\\
&\quad - \int_s^1 \sum_{j\in N(i)}\left(\frac{1}{4}\nabla_i\Delta_j h_i(X(r)) - \frac{1}{8}\nabla_i(\nabla_j h_j)^2(X(r))\right)((r-s)\wedge(t-s))\,dr\,.
\end{aligned}$$

Puisque sous $Q$ les processus des cordonnées $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}^d}$ sont des semi-martingales browniennes de dérives $(\beta_j)$, on peut transformer sous $Q$ l'expression ci-dessus grâce aux formules d'Itô suivantes:

$$\begin{aligned}
f(X(1))(1-s) &= \int_s^1 \sum_{j\in N(i)}\left(\beta_j(r)\nabla_j f(X(r)) + \frac{1}{2}\Delta_j f(X(r))\right)(r-s)\,dr\\
&\quad + \int_s^1 f(X(r))\,dr + (M_1 - M_s)
\end{aligned}$$

où $M_t$ est une $Q$-martingale continue, et

$$\begin{aligned}
f(X(1))(1-t) &= \int_t^1 \sum_{j\in N(i)}\left(\beta_j(r)\nabla_j f(X(r)) + \frac{1}{2}\Delta_j f(X(r))\right)(r-t)\,dr\\
&\quad + \int_t^1 f(X(r))\,dr + (M_1 - M_t)\,.
\end{aligned}$$

D'où, en prenant $f = \frac{1}{2}\nabla_i h_i$ et en soustrayant les deux égalités ci-dessus,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\nabla_i h_i(X(1))(t-s) - \int_s^1 \sum_{j\in N(i)}\left(\frac{1}{4}\Delta_j\nabla_i h_i(X(r))((r-s)\wedge(t-s))\right)dr\\
&= \int_s^1 \sum_{j\in N(i)}\frac{1}{2}\beta_j(r)\nabla_j\nabla_i h_i(X(r))((r-s)\wedge(t-s))\,dr\\
&\quad + \int_s^t \frac{1}{2}\nabla_i h_i(X(r))\,dr + (M_t - M_s)\,.
\end{aligned}$$

Donc, sous $Q$,

$$
\begin{aligned}
D^i_{1_{]s,t]}} H_i(X) &= \int_s^1 \sum_{j\in N(i)} \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_i h_i(X(r))\left(\beta_j(r) + \frac{1}{2}\nabla_j h_j(X(r))\right)((r-s)\wedge(t-s))\,dr \\
&\quad + \int_s^t \frac{1}{2}\nabla_i h_i(X(r))\,dr + (M_t - M_s)\,.
\end{aligned}
$$

Puisque $M$ est une martingale sous $Q$, $E_Q(F_s(M_t - M_s)) = 0$ et (3.20) devient:

$$
\begin{aligned}
&- E_Q\left(F_s \int_s^1 \sum_{j\in N(i)} \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_i h_i(X(r))\left(\beta_j(r) + \frac{1}{2}\nabla_j h_j(X(r))\right)((r-s)\wedge(t-s))\,dr\right) \\
&= E_Q\left(F_s \int_s^t (\beta_i(r) + \frac{1}{2}\nabla_i h_i(X(r)))\,dr\right)\,.
\end{aligned}
$$

Cette équation est satisfaite en particulier pour la suite de processus $\beta_j = -\frac{1}{2}\nabla_j h_j(X(\,\cdot\,))$, qui, par conséquent, est la suite de dérives cherchée. Il nous faut maintenant montrer que les mouvements browniens $(W_j)_j$ sont indépendants. Soit $\Lambda$ une partie finie de $\mathbb{Z}^d$. D'après les calculs ci-dessus, $Q_\Lambda$ est la loi de $(X_j(0) + W_j + \int_0^{\cdot} \beta_j(r)\,dr)_{j\in\Lambda}$. Mais d'après le Lemme 3.19 et le théorème de Girsanov, la loi de $X_\Lambda$ sous $Q$ est la loi d'un vecteur brownien de dimension card $\Lambda$ additionné d'une dérive. Par unicité de la décomposition des semi-martingales, cela prouve que le vecteur $(W_j)_{j\in\Lambda}$ est brownien et donc que ses coordonnées sont indépendantes.

La dernière étape de la preuve consiste à identifier la condition initiale $\nu$ de $Q$ comme mesure gibbsienne d'interaction $\varphi$. Ceci provient immédiatement de la Proposition 2.5 et des remarques qui la suivent, une fois constaté, comme dans la condition nécéssaire, que $\exp H_i$ est une $Q$ martingale. □

**Corollaire 3.21** *Dans le cas fini-dimensionnel on peut compléter la Remarque* 2.20 *qui constatait qu'une loi* $Q \in \mathscr{P}(C(0,1)^d)$ *satisfaisant l'équation* (2.13) *est une diffusion brownienne quelle que soit sa condition initiale. Si la fonctionnelle* $H$ *(de* (2.13)) *est de la forme* (3.8), *on peut appliquer le Théorème* 3.7 *et l'on obtient une description explicite de la dérive de* $Q$. *Ceci améliore donc le Théorème* 5 *de* $[R - Z1]$, *où une caractérisation des mesures de Wiener fini-dimensionnelles avec dérives était donnée, mais au sein d'une classe de lois plus petite que celle considérée ici.*

Le Théorème 3.7 montre qu'il $y$ a une bijection entre l'ensemble des $(\Phi + \varphi \circ \not{\!\pi}_0, P^\mu)$-états de Gibbs sur $\Omega$ et l'ensemble des $(\varphi, \mu)$-états de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. On en déduit immédiatement le résultat suivant, quand ces deux ensembles se réduisent à un élément;

**Théorème 3.22** *Pour les systèmes gradients stochastiques* (3.3), *l'absence de transition de phases au temps* 0 *est équivalente à l'absence de transition de phases globale, au niveau des trajectoires.*

L'objectif du paragraphe suivant sera de supprimer tout ou une partie des hypothèses (3.1) et (3.5). Pour étendre la preuve du Théorème 3.7, on voit qu'un certain nombre de problèmes techniques se posent:
- montrer que la mesure $Q^{i,\varepsilon}$ est absolument continue par rapport à $Q$,
- justifier les calculus du Lemme 3.10,
- montrer que $e^{H_i}$ est une $Q$ martingale.

Ce dernier point est en fait le point crucial, non seulement pour des raisons techniques, mais aussi parce qu'il conditionne la réversibilité du système stochastique que nous étudierons au paragraphe 5.

## 4 Lois de systemes gradients stochastiques comme mesures Gibbsiennes: cas general

Nous reprenons les notations du paragraphe précédent, et allons étendre le Théorème 3.7.

L'interaction $\phi$ est maintenant générale, satisfaisant

$$(4.1) \qquad \phi_i \text{ et } \phi_{ij} \text{ de classe } \mathscr{C}^3 ,$$
$$\phi_{ij} \text{ symétrique } (\phi_{ij}(y_i, y_j) = \phi_{ij}(y_j, y_i) \quad \forall y_i, y_j \in \mathbb{R}) ,$$

et telle que le hamiltonien

$$(4.2) \qquad h_i(y) = \phi_i(y_i) + \sum_j \phi_{ij}(y_i, y_j) ,$$

soit défini pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$ et $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Elle n'est donc plus ni bornée ni à portée finie. Nous reprenons le système gradient stochastique

$$(3.3) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad dX_i(t) = dW_i(t) - \frac{1}{2}\nabla_i h_i(X(t))\,dt, \quad X(0) \overset{(\mathscr{L})}{=} \nu ,$$

pour lequel nous supposerons

(4.3) *le système (3.3) admet une unique solution en loi Q. et 0 satisfait (2.12).*

La première difficulté est que les hamiltoniens $H_i$ définis en (3.8) ne sont pas partout définis. Rappelons que sous $Q$

$$H_i(\omega) = \frac{1}{2}h_i(\omega(1)) - \frac{1}{2}h_i(\omega(0)) - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}Ah_i(\omega_s) + \sum_j \frac{1}{8}(\nabla_j h_i)^2(\omega(s))\right) ds ,$$
$$= \sum_j \int_0^1 \frac{1}{2}(\nabla_j h_i)(\omega(s))\,dW_j(s) - \frac{1}{8}\int_0^1 (\nabla_j h_i)^2(\omega(s))\,ds ,$$

quantité qui vaut $-\infty$ ($Q$ p.s.) si

$$\sum_j \int_0^1 (\nabla_j h_i)^2(\omega(s))\,ds = +\infty ,$$

d'après (par exemple) le Lemme 12.45 de [Ja].

Nous supposerons donc

$$(4.4)\qquad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad \sum_j \int_0^1 (\nabla_j h_i)^2(\omega(s))\,ds < +\infty, \quad Q \text{ p.s.}$$

Par convention on pose alors $H_i$ (i.e. $\Phi_i, \Phi_{ij}, \Phi_{ijk}$ cf (3.18)) égal à 0 sur la réunion dénombrable des négligeables définis par (4.4).

Le potentiel $H_i$ ainsi défini est alors Gâteaux-différentiable (dans les directions de l'espace de Cameron-Martin) le long de $Q$ presque toutes les trajectoires.

Considérons ensuite une $(\Phi + \varphi \circ pr_0, P^\mu)$-mesure de Gibbs $Q'$ ($\Phi$ étant donnée par (3.18)), pour laquelle on suppose que $Q' \circ pr_0$ est une $(\varphi, \mu)$-mesure de Gibbs $\nu$, et qui satisfait (2.12). Les calculs de la seconde partie montrent alors que $E_{Q'}[e^{H_i}/\omega(0)]$ est $Q'$ p.s. constant. Le cas le plus simple est bien sûr celui où cette constante vaut 1.

Pour étudier $Q$ la loi de (3.3) en termes gibbsiens, la première chose à faire est donc d'étudier quand $e^{H_i}$ est une martingale.

**Proposition 4.5** *On suppose que pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$ le système stochastique*

$$(4.6)\qquad \forall j \in \mathbb{Z}^d, \quad dX_j(t) = dW_j(t) - \frac{1}{2}\nabla_j(h_j - h_i)(X(t))\,dt, \quad X(0) \overset{(\mathscr{L})}{=} \nu,$$

*admet une solution $Q^i$ vérifiant*

$$(4.7)\qquad \sum_j \int_0^1 |\nabla_j h_i(X(t))|^2\,dt < \infty \quad Q^i\, p.s\,.$$

*alors, si* (4.3) *est vérifié $e^{H_i}$ est une $Q$ martingale et $Q^i = e^{H_i}\,Q$.*

*Si de plus $Q^i$ est l'unique solution de* (4.6) *et si* (4.4) *est satisfaite, $Q$ et $Q^i$ sont équivalentes.*

*Preuve.* Il suffit d'appliquer les Théorèmes 12.57 et 12.73 de [Ja]. □

On pourrait ainsi directement appliquer la fin de la preuve de la condition nécessaire du Théorème 3.7, dès lors que $Q$ satisfait (2.13′), et que les hypothèses précédentes song également satisfaites.
Mais plûtot que de vérifier que la Proposition 3.9 est encore valable, on peut tout comme dans [De2], constater que le système (4.6) découple les dynamiques du spin i et de l'ensemble des autres. En particulier si la condition initiale est déterministe égale à $y$, $Q^i = P^{y_i} \otimes T^i$ où $T^i$ est une probabilité sur $\mathscr{F}_{i^c}$. Si $Q$ et $Q^i$ sont équivalentes, on en déduit immédiatement que $Q$ est une $(\varphi, P^y)$-mesure de Gibbs. On remarque en particulier que $e^{-H_i}$ est intégrable pour $P^{y_i} \otimes \delta_{\omega_{i^c}}$ pour $Q^i$ (donc $Q$) presque tout $\omega_{i^c}$, car il l'est sous $Q^i$. On peut ensuite appliquer la Proposition 2.6 pour obtenir

**Théorème 4.8** *On suppose que* (4.3), (4.4) *et* (4.7) *sont satisfaites et que $Q^i$ (défini par* (4.6)*) et $Q$ sont équivalentes pour tout i. Si la loi initiale $\nu$ est une $(\varphi, \mu)$-mesure de Gibbs, $Q$ est une $(\Phi + \varphi \circ pr_0, P^\mu)$-mesure de Gibbs pour l'interaction $\Phi$ décrite en* (3.18).

**Théorème 4.9** *Soit $Q$ une $(\Phi + \varphi \circ pr_0, P^\mu)$-mesure de Gibbs. Si $Q$ satisfait* (2.12), $E_Q(\int_0^1 |D_r^i H_i|\, dr) < +\infty$, *et*

$$E_Q\left(\sum_j \int_0^1 |\nabla_j \nabla_i h_i(X(t))|^2\, dt\right) < \infty \tag{4.10}$$

*alors $Q$ est une solution de* (3.3). *Si de plus $e^{H_i}$ est une $Q$ martingale pour tout $i$, $Q \circ pr_0$ est une $(\varphi, \mu)$ mesure de Gibbs. Cette dernière condition est satisfaite si pour $\nu$ presque toute condition initiale $y$, il existe une unique solution à* (3.3) *et à* (4.6) *partant de $y$ et vérifiant* (4.4) *et* (4.7).

*Preuve.* Il suffit de reprendre mot à mot la preuve de la condition suffisante du Théorème 3.7. Il faut en effet noter que les hypothèses Gibbs entrainent par définition que $H_i$ est $Q$ p.s. fini. *L*'hypothèse (4.10) est elle suffisante pour assurer que la martingale locale $M_t$ qui apparait en appliquant la formule d'Ito à $\nabla_i h_i$ est une vraie martingale. $\square$

*Exemples*

*4.11 Interactions à portée finie*

Soit $\nu$ portée par $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)$.
Supposons que (3.3) et (4.6) ont une unique solution en loi. Puisque $\nabla_j h_i$ est continu et que les sommes qui apparaissent sont finies, les hypothèses (4.4) et (4.7) sont toujours vérifiées. La solution du système (3.3) est donc une $(\Phi, P^\mu)$-mesure de Gibbs.

Tout ceci est vérifié sous les hypothèses $[C']$ de Shiga et Shimizu

$$\alpha)\ \exists K \in >0,\ \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} |\phi_i'(0)| \leqq K \text{ et } \phi_i'' \geqq -K$$

$$\beta)\ \forall i \in \mathbb{Z}^d,\ \phi_i' \text{ est à croissance au plus polynomiale de degré} \not{p}$$

$$\gamma)\ \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_{ij}(0,0)\right| < +\infty\,, \tag{4.12}$$

$$\delta)\ \sup_{i,j \in \mathbb{Z}^d} \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi_{ij}\right| < \infty, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\phi_{ij} \geqq -q_{ij}, \quad \text{où } q_{ij} \geqq 0\,,$$

cf. ([S-S] Théorème 4.2, également [D-R] Théorème 3.3) où l'existence et l'unicité forte pour (3.3) sont démontrées, mais qui fournit également existence et unicité forte pour $Q^i$, puisqu'il suffit alors de remplacer $\phi_i$ et $\phi_{ij}$ par 0.
Pour la réciproque, il nous faut étudier

(4.13)

- le caractère $L^2(P^\mu)$ de $H_i$ et $D_s^i H_i$ ,
- le fait que $E_Q\left(\int_0^1 |D_r^i H_i|\, dr\right) < +\infty$ ,
- la condition (4.10) .

Ceci nécessite des contrôles sur les dérivées troisièmes des $\phi_i$ et $\phi_{ij}$. L'hypothèse la plus simple, même si elle n'est pas optimale, est d'imposer un contrôle polynomial

(4.14) pour tout $(i,j)$ il existe $C_i, C_{ij}, \not{p}_i$ et $\not{p}_{ij}$ tels que

$$\alpha)\ |\phi_i'''(x_i)| \leqq C_i(1 + |x_i|^{\not{p}_i})$$

$$\beta)\ \left|\frac{\partial^3}{\partial x_a \partial x_b \partial x_c}\phi_{ij}(x_i, x_j)\right| \leqq C_{ij}(1 + |x_i|^{\not{p}_{ij}} + |x_j|^{\not{p}_{ij}}),$$

$a, b, c$ étant indifféremment égaux *à* $i$ ou $j$ .

En effet, d'après la remarque qui suit la Proposition 3.4, $Q, Q^i$ et $P^\mu$ vérifient (3.6) que nous rappelons

$$(3.6) \qquad \sup_{0 \leqq t \leqq 1} E(|X_i(t)|^{2\not{p}})_i \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)\,.$$

Comme les interactions et leurs dérivées sont à croissance au plus polynomiale, (4.13) est vérifié. On a donc obtenu

**Théorème 4.15** *On suppose que l'interaction est à portée finie, que* $v$ *est une* $(\varphi, \mu)$*-mesure de Gibbs portée par* $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)$ *et que* (4.12) *et* (4.14) *sont satisfaites. Alors il y a identité entre* $(\Phi + \varphi \circ pr_0, P^\mu)$*-mesure de Gibbs et solution du système gradient stochastique* (3.3)*. De plus,* $Q$ *est l'unique* $(\Phi + \varphi \circ pr_0, P^\mu)$*-mesure de Gibbs si et seulement si* $v$ *est l'unique* $(\varphi, \mu)$*-mesure de Gibbs* (*tempérée*).

*4.16 Interactions à portée infinie*

Il nous faut raffiner les hypothèses pour prendre en compte le caractère infini des sommes qui apparaissent. On peut reprendre les hypothèses [C′] de Shiga–Shimizu (ou celles de [L-R]) dans le contexte à portée infinie

$$\alpha)\ \exists K \in > 0, \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} |\phi_i'(0)| \leqq K \text{ et } \phi_i'' \geqq -K$$

$$(4.17) \quad \beta)\ \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_j \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_{ij}(0,0)\right| < \infty, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\phi_{ij} \geqq -q_{ij} \text{ où } \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_j q_{ij} < \infty\,,$$

$$\gamma)\ \sup_{i,j \in \mathbb{Z}^d} \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi_{ij}\right| < c_{i-j}, \text{ où } (c_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^d)\,,$$

en $y$ ajoutant

(4.18) pour tout $(i,j)$ il existe $C_i, C_{ij}$ et $p_i$ tels que

$\alpha$) $|\phi_i'''(x_i)| \leqq C_i(1+|x_i|^{p_i})$

$\beta$) $\left|\frac{\partial^3}{\partial x_a \partial x_b \partial x_c}\phi_{ij}(x_i,x_j)\right| \leqq C_{ij}(1+|x_i|^{p_i}+|x_j|^{p_i})$, $a$, $b$, $c$ étant

indifféremment égaux à $i$ ou $j$ ,

$\gamma$) $(C_{ij})_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^d)$ .

Alors (4.18) entraine la condition de convergence uniforme sur les compacts (4.31) de [S-S] pour tous les $y \in \mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)$, et de plus, grâce à (3.6) encore valable ici, les conditions (4.3), (4.4), (4.7), (4.10) et (4.13) sont satisfaites. On a donc

**Théorème 4.19** *Les conclusions du Théorème* 4.15. *sont encore vraies pour une interaction à portée infinie, si on remplace* (4.12) *et* (4.14) *par* (4.17) *et* (4.18).

L'exemple de base que nous avons en tête est, bien sûr, celui de l'interaction ferromagnétique,

(4.20) $\alpha$) $\phi_i$ est un polynôme de degré pair, positif à l'infini ,

$\beta$) $\phi_{ij}(x_i,x_j) = J_{ij}x_ix_j$, où $\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_j |J_{ij}| < \infty$ .

D'après [L-R], il existe une unique solution à (3.3) et (4.6).

Les conditions (4.17) et (4.18) sont satisfaites si $|J_{ij}| < c_{i-j}$ où $c_n$ est à décroissance rapide. On peut néanmoins améliorer dans ce cas ces conditions, en remplaçant le couple $(\mathscr{S},\mathscr{S}')$ par $(L^2(\gamma), L^2(\gamma))$ pour une suite $\gamma$ convenable (cf. [L-R]) et montrer que (4.3), (4.4), (4.7), (4.10) et (4.13) sont encore satisfaites.

Ceci peut du reste être fait de façon plus générale, mais nous ne voulons par ces exemples qu'illustrer notre propos.

Enfin le critère d'absence de transition de phases que nous obtenons étend celui de [De3], sans (ou presque) d'hypothèses sur la grandeur de l'interaction $\phi$ (contrairement à [De3] où les interactions doivent être suffisamment petites pour assurer que le critère de Dobrushin est satisfait). En revanche ce critère n'est pas quantitatif, et ne permet pas de retrouver les propriétés d'hypercontractivité du semi-groupe que donne Deuschel.

## 5 Mesures de Gibbs sur les trajectoires et diffusions Browniennes. Applications au retournement du temps et reversibilite

Pour commencer nous donnons une description des mesures de Gibbs sur $\Omega$ associées à des potentiels $H$ supposés seulement réguliers (et non de la forme spéciale (3.8)): ce sont des diffusions browniennes dont la dérive est explicitée. Dans le théorème qui suit l'interaction $\Phi$ est quelconque et non plus donnée par (3.18).

**Théorème 5.1** *Soit $Q \in \mathscr{P}(\Omega)$ une $(\Phi, P^\mu)$-mesure de Gibbs (de potentiel hamiltonien noté $H^\Phi$) satisfaisant aux hypothèses du Théorème* 2.11 *ainsi que* (2.12) *et $E_Q(\int_0^1 |D_r^i H_i^\Phi|\ dr) < +\infty$. Alors $Q$ est solution du système stochastique suivant*:

$$(5.2) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}^d,\ dX_i(t) = dW_i(t) + \beta_i(t)\ dt\,,$$

*où $(W_i)_i$ est une famille de mouvements browniens indépendants et $(\beta_i)_i$ est une suite de dérives adaptées qui vérifient*:

$$(5.3) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}^d,\ \beta_i(t) = -E_Q(D_t^i H_i^\Phi / \mathscr{F}_t) \quad Q\text{-p.s. pour presque tout } t\,.$$

*Preuve.* On suit la démarche de la preuve de la condition suffisante du Théorème 3.7. D'après le Lemme 3.19, puisque $Q$ est une $(\Phi, P^\mu)$-mesure de Gibbs, $Q$ est absolument continue par rapport à $\pi^{\mu_i} \otimes Q_{\{i\}^c}$, donc $X_i - X_i(0)$ est égal sous $Q$ à un mouvement brownien $W_i$ avec dérive $\beta_i$ adaptée. On montre comme avant que d'une part les $(W_i)_i$ sont indépendants, et que d'autre part les dérives $\beta_i$ sont caractérisées comme les solutions adaptées de l'équation (3.20):

$$\forall 0 < s < t < 1,\ F_s \in \mathscr{W}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\ \mathscr{F}_s\text{-mesurable},$$
$$E_Q\left(F_s \int_s^t (\beta_i(r) + D_r^i H_i^\Phi)\ dr\right) = 0\,.$$

Ceci entraine que pour presque tout $r \geqq s$ et *tout* $F_s$ d'une partie *dénombrable* dense de $\mathscr{W}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathscr{F}_s)$

$$(5.4) \qquad E_Q(F_s\,(\beta_i(r) + D_r^i H_i^\Phi)) = 0\,.$$

On en déduit qu'il existe un Lebesgue négligeable $\mathscr{N}$, tel que pour tout $r \notin \mathscr{N}$, tout $s \in \mathbb{Q}$, tout $n \in \mathbb{N}$, toute $f$ d'une partie dénombrable dense de $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^{n^2})$ (fonctions continues à support compact) et tous $(t_{11}, \ldots, t_{1n}, \ldots, t_{n1}, \ldots, t_{nn})$ rationnels

$$(5.5) \qquad E_Q(1_{s \leqq r}(\beta_i(r) + D_r^i H_i^\Phi) f(\omega_1(t_{11} \wedge s), \ldots, \omega_n(t_{nn} \wedge s))) = 0\,.$$

Grâce à nos hypothèses on peut appliquer le théorème de convergence dominée en faisant tendre $s$ vers $r$, et obtenir finalement

$$\beta_i(r) = -E_Q(D_r^i H_i^\Phi / \mathscr{F}_r) \quad Q\text{-p.s. pour presque tout } r\,. \qquad \square$$

*Remarques 5.6.* 1) Dans [F-W] Theorem 2.4, les auteurs introduisent une condition "d'entropie locale finie" sous laquelle les probabilitiés $Q$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ sont solutions de systèmes différentiels stochastiques. Cette condition est d'une autre nature que les nôtres. D'une part, le problème de la condition initiale n'apparait pas dans [F-W] (le conditionnement par "l'extérieur" inclut la totalité de $X(0)$), d'autre part la condition d'entropie finie signifie que $H_i^\Phi + \log\ Z_i^\Phi$ est $Q$-intégrable, tandis que nous exigeons de notre potentiel essentiellement de la régularité (différentiabilité et intégrabilité de la différentielle).

2) Si dans [F-W] on choisit la condition initiale pseudo-Gibbs, alors $Q$ est elle-même pseudo-Gibbs et les auteurs explicitent dans leurs formules (2.16)

à (2.18) la $P^\mu$ modification correspondante sous forme de martingale exponentielle. Il faut là encore noter que leur description diffère de celle que nous avons donné au paragraphe 4, mais le lecteur pourra vérifier sans peine que les différentielles des hamiltoniens (3.8) ou de [F-W] coïncident dès lors qu'elles existent. On peut du reste remarquer que si on remplace (4.4) par l'hypothèse plus forte $E_Q[\Sigma_j \int_0^1 (\nabla_j h_i)^2(\omega(s))\, ds] < \infty$, $Q$ est d'entropie relative finie par rapport à $Q^i$, et que cette hypothèse est vérifiée dans tous les exemples que nous avons cités.

3) Nous pourrions nous intéresser à une réciproque de (5.1), à savoir, quand la loi de la solution d'un système stochastique infini (non gradient) est-elle une mesure de Gibbs ? D'après ce qui précède, on doit avoir

$$\beta_i(s) = -E_Q(D_s^i H_i^\Phi / \mathscr{F}_s) \quad Q\text{-p.s. pour presque tout } s\,,$$

pour un certain hamiltonien $H_i^\Phi$. Mais la démarche du Théorème 3.7 ou du Théorème 4.8 n'est pas adaptable: l'expression similaire à. (3.12) ne peut se transformer en une expression intrinsèque si la dérive n'est pas de type gradient.

La Proposition suivante fournit une autre raison pour ne pas aller plus avant dans la généralité. Les dynamiques intéressantes du point de vue physique sont celles qui sont réversibles. Mais alors la dérive $\beta$ a une forme bien particulière.

**Proposition 5.7** *Soit $Q \in \mathscr{P}(\Omega)$ une $(\Phi, P^\mu)$ mesure de Gibbs satisfaisant aux hypothèses du Théorème* 5.1. *Si $Q$ est la loi d'un processus réversible alors la condition initiale $\nu$ est une $(\psi, dy)$-mesure de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ dont le potentiel hamiltonien $h^\psi$ satisfait*

$$(5.8) \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d,\ \nabla_i h_i^\psi(y) = 2E_Q(D_s^i H_i^\Phi / X(s) = y),\ \nu \text{ p.s., pour p.s. tout } s\,.$$

*De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$, la dérive $\beta_i$ du processus des coordonnées du $i^{\text{ème}}$ spin a ses projections sur $\sigma(X(s))$ stationnaires, i.e.,*

$$(5.8') \qquad Q \text{ p.s. pour presque tout } s,\ E_Q(\beta_i(s)/X(s)) = -\frac{1}{2}\nabla_i h_i^\psi(X(s))\,.$$

*Preuve.* D'après le Théorème 2.11, $Q$ satisfait l'équation d'équilibre (2.13). En particulier pour des fonctions tests de la forme $F(\omega) = f(\omega(t))$, $\Lambda$-locale ($f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{|\Lambda|})$ à support compact) et $g_i = 1_{[s,t]}$, on a

$$(5.9) \qquad E_Q(f(X(t))(X_i(t) - X_i(s))) = (t-s)E_Q(\nabla_i f(X(t))) - E_Q\left(f(X(t))D^i_{1_{[s,t]}} H_i^\Phi\right)\,.$$

De même pour $F(\omega) = f(\omega(s))$ on obtient

$$(5.10) \qquad E_Q(f(X(s))(X_i(t) - X_i(s))) = -E_Q\left(f(X(s))D^i_{1_{[s,t]}} H_i^\Phi\right)\,.$$

Par réversibilité de la dynamique, les deux membres de gauche dans (5.9) et (5.10) sont opposés, donc

$$(5.11) \qquad E_Q(\nabla_i f(X)(t))) = \frac{1}{t-s} E_Q\left((f(X(t)) + f(X(s)))D^i_{1_{[s,t]}} H_i^\Phi\right)\,.$$

Mais $Q$ est stationnaire, donc le membre de gauche de (5.11) ne dépend pas de $t$ et vaut $\int \nabla_i f \, dv$. Nous faisons maintenant tendre $t$ vers $s$. D'après [Fö2] proposition 2.5, $\frac{1}{t-s} D^i_{1_{[s,t]}} H_i^\Phi$ converge $Q$ p.s. et dans $L^1(Q)$ vers $D^i_s H_i^\Phi$ pour presque tout $s$. Le membre de droite de (5.11) converge donc pour presque tout $s$ vers

$$E_Q(2f(X(s)) D^i_s H_i^\Phi) . \tag{5.12}$$

En appliquant tout ce qui précède et le Théorème 5.1, on obtient que pour presque tout $s$

(5.13)
$$\begin{aligned} E_Q(2f(X(s))D^i_s H_i^\Phi) &= E_Q(2f(X(s)) E_Q(D^i_s H_i^\Phi / X(s))) , \\ &= \int 2f(y) E_Q(D^i_s H_i^\Phi / X(s) = y) \; \nu(dy) , \\ &= \int \nabla_i f(y) \; \nu(dy) , \\ &= -E_Q(2f(X(s)) \; \beta^i_s) , \\ &= -\int 2f(y) E_Q(\beta_i(s)/X(s) = y) \; \nu(dy), \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d . \end{aligned}$$

En utilisant une fois encore un argument de séparabilité, on en déduit que pour presque tout $s$, $E_Q(D^i_s H_i^\Phi / X(s) = y) = -E_Q(\beta_i(s)/X(s) = y)$ ne dépend pas de $s$. Comme ces fonctions sont $\nu$ p.s. gradients (dans la direction $i$) de leur primitive $h_i^\psi$, on peut appliquer la Proposition 2.7 qui identifie $\nu$ comme mesure de Gibbs, en remarquant que la preuve de cette proposition se généralise au cas où $\nabla_i h_i$ existe $\nu$ presque partout et est dans $L^1(\nu)$, ce qui entraine le résultat souhaité. □

*Remarque 5.14* Dans la preuve précédente il suffit que $Q$ satisfasse l'équation d'équilibre (2.13), condition plus faible que d'être Gibbsienne.

On trouve dans [D-M, pp. 165–182] une étude détaillée de l'égalite $Q$ p.s. pour presque tout temps de deux processus, propriété que ces auteurs nomment presque-équivalence (ou presque-modification) et qui conduit à l'étude des pseudo-trajectoires. Ce cadre est certainement le bon pour l'étude des diffusions (infini-dimensionnelles) non markoviennes.

Dans le cas markovien, la Proposition 5.7 montre qu'une diffusion ne peut être réversible que si c'est la loi d'un système gradient stochastique et si la mesure initiale est une mesure de Gibbs bien choisie. Il reste à voir si dans ce cas $Q$ est effectivement réversible.

L'étude de la réversibilité du système gradient stochastique (3.3) a déjà été faite dans [D-R], Théorème 4.10, par un passage à la limite à partir de la dimension finie. Notre approche est différente et très simple: nous utilisons le hamiltonien $H$ pour $y$ lire directement la structure de la loi *du* processus retourné.

**Théorème 5.15** *Soit $Q$ la solution supposée unique de* (3.3). *On suppose que* (4.6) *admet une unique solution $Q^i$, que* (4.3), (4.4), (4.7), (4.10) *sont vérifiées et que $E_Q(\int_0^1 |D^i_r H_i| \, dr) < +\infty$ où $H_i$ est le hamiltonien défini en* (3.8).

*Alors $\nu$ est réversible pour le système* (3.3) (*i.e. les processus* $X(1-t)$ *et* $X(t)$, $t \in [0,1]$, *ont même loi*) *si et seulement si $\nu$ est une* $(\phi, dy)$*-mesure de Gibbs sur* $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.

*Preuve.* Si $\nu$ est une $(\phi, dy)$-mesure de Gibbs, d'aprés le Théorème 4.8, la loi $Q$ solution de (3.3) avec $X(0) \overset{(\mathscr{L})}{=} \nu$ est une $(\tilde{\Phi}, P^{dy})$-mesure de Gibbs sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$ associée au potentiel $\tilde{\Phi}$ d'hamiltonien $\tilde{H}$ donné par

$$\begin{aligned}\tilde{H}_i(\omega) &= H_i(\omega) + h_i(\omega(0)) \\ &= \frac{1}{2} h_i(\omega(1)) + \frac{1}{2} h_i(\omega(0)) \\ &\quad - \int_0^1 \left( \frac{1}{2} A h_i(\omega(s)) + \sum_j \frac{1}{8} (\nabla_j h_j)^2(\omega(s)) \right) ds \,.\end{aligned}$$

$\tilde{H}$ est clairement invariant par retournement du temps. La loi $Q^-$ du processus retourné est donc une mesure de Gibbs de hamiltonien $\tilde{H}$ par rapport à la mesure de référence $P^{dy}$ retournée. Mais celle-ci est aussi invariante par retournement du temps. Donc $Q^-$ est une $(\tilde{\Phi}, P^{dy})$-mesure de Gibbs, comme $Q$. D'après le Théorème 4.9, c'est la loi solution du même système (3.3) avec pour loi initiale $\nu_1$, où $\nu_1$ est la loi de $X(1)$ sous $Q$. Montrons que $\nu = \nu_1$. $X(1/2)$ a même loi $\nu_{1/2}$ sous $Q$ et sous $Q^-$. Mais $Q$ (resp. $Q^-$) étant markovienne, $\nu_1$ (resp. $\nu$) est la loi au temps 1/2 de la solution de (3.3) issue de $\nu_{1/2}$. Donc $\nu = \nu_1$ et l'égalité $Q = Q^-$ provient alors de l'unicité en loi des solutions de (3.3).

Réciproquement soit $\nu$ une mesure réversible. Pour $\nu$ presque tout $y$, $Q^y$ est une $(\Phi, P^y)$-mesure de Gibbs d'après le Théorème 4.8. Donc $Q^y$ satisfait l'équation d'équilibre (2.13) (Théorème 2.11), ce qui entraine que $Q$ satisfait également (2.13). D'aprés la remarque 5.14, on en conclut que $\nu$ est Gibbs associée à une interaction donnée par (5.8). Un calcul que nous avons déjà fait montre que cette interaction n'est autre que $\phi$. □

On peut aller plus loin en décrivant complètement le retournement du temps dans le cas non stationnaire. Pour simplifier la discussion qui suit nous nous contenterons de regarder le cas où $\mu$ est la mesure de Lebesgue.

(5.16) On note $R$ l'opérateur de retournement $\omega \to R(\omega)$ où $R(\omega)(t) = \omega(1-t)$. Soit $Q$ une $(\Phi, P^{dy})$-mesure de Gibbs satisfaisant les hypothèses du Théorème 5.1, $Q^- = Q \circ R^{-1}$ la mesure image de $Q$ par $R$.

Il est immediat que $Q^-$ est une $(\Phi \circ R, P^{dy})$-mesure de Gibbs. Donc si $H^\Phi \circ R$ est $L^2$ différentiable, $Q^-$ est solution d'un système

(5.17)
$$\forall i \in \mathbb{Z}^d,\ dX_i(t) = dW_i(t) + \beta_i^-(t)\, dt \,,$$
$$\text{avec } \beta_i^-(t) = -E_Q(D_t^i(H_i^\Phi \circ R)/\mathscr{F}_t), \quad Q\text{-p.s. pour presque tout } t \,.$$

Reprenons alors l'équation (5.9)

$$E_Q(f(X(t))(X_i(t)-X_i(s))) = (t-s)E_Q(\nabla_i f(X(t))) \tag{5.9}$$
$$- E_Q\left(f(X(t))D^i_{1_{[s,t]}}H_i^{\Phi}\right),$$

qui donne

$$E_{Q^-}(f(X(1-t))(X_i(1-t)-X_i(1-s))) = (t-s)E_Q(\nabla_i f(X(t)))$$
$$- E_Q\left(f(X(t))D^i_{1_{[s,t]}}H_i^{\Phi}\right).$$

On peut diviser par $t-s$ et faire tendre $s$ vers $t$, ce qui donne pour presque tout $t$

(5.18)
$$-E_{Q^-}(f(X(1-t))\beta_i^-(1-t)) = E_Q(\nabla_i f(X(t))) + E_Q(f(X(t))\beta_i(t)),$$

soit encore

$$-E_Q(\nabla_i f(X(t))) = E_Q(f(X(t))E_Q[(\beta_i^-(1-t))\circ R + \beta_i(t)/X(t)]). \tag{5.19}$$

Donc, pour presque tout $t, v_t$, la $Q$ loi de $X(t)$, est une $(\varphi(t), dy)$ mesure de Gibbs, pour un $\varphi(t)$ convenable, par un argument similaire à ceux de la Proposition 5.7, et ses densités conditionnelles $\rho_t^i(x_i/x_{i^c})$ vérifient

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\rho_t^i(x_i/x_{i^c}) = E_Q[(\beta_i^-(1-t))\circ R + \beta_i(t)/X(t) = x] \quad Q \text{ p.s.} \tag{5.20}$$

En dimension finie, on retrouve le résultat de dualité de Kolmogorov (cf. également [Fö2]). En dimension infinie on retrouve ainsi une partie des résultats de [F-W] (cf. [M-N-S] pour des résultats plus généraux dans le cas markovien). Il est également possible d'étendre ces résultats au cas oú $\mu$ n'est plus la mesure de Lebesgue, la mesure retournée $(P^\mu)^-$ étant alors un pont brownien. Dans ce cas (5.20) est inchangé, mais la description du drift backward dans (5.17) doit être modifiée.

*Acknowledgement.* Ce travail a reçu le soutien financier de la convention européenne "Analyse stochastique et Applications". Nous en remercions ici les responsables. S.R. remercie la fondation Alexander von Humboldt de lui avoir octroyé une bourse grâce à laquelle ce travail a pu être mené à bien.

## References

[A-A] Antonjuk A. Val., Antonjuk A. Vict.: Smoothing properties of semigroups for Dirichlet operators of Gibbs measures. Preprint 93.22, Académie des Sciences d'Ukraine, Kiev

[Be1] Bell, D.: On the relationship between differentiability and absolute continuity of measures in $\mathbb{R}^n$. Probab. Theory Rel. Fields **72,** 417–424 (1986)

[Be2] Bell, D.: A quasi-invariance theorem for measures on Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **290,** 851–855 (1985)

[De1] Deuschel, J.D.: Lissage de diffusions à dimension infinie et leurs propriétés en tant que mesures de Gibbs, Thèse ETH Zürich 7823 (1985)
[De2] Deuschel, J.D.: Non-linear smoothing of infinite-dimensional diffusion processes. Stochastics **19**, 237–261 (1986)
[De3] Deuschel, J.D.: Infinite-dimensional diffusion processes as Gibbs measures on $C[0,1]^{\mathbb{Z}^d}$. Probab. Theory Rel. Fields **76**, 325–340 (1987)
[D-M] Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilités et Potentiels, Chaps. I–IV. Paris: Hermann 1975
[Do] Dobrushin, R.L.: Gaussian random fields. Gibbsian point of view. In: Multicomponent random systems. Dobrushin R.L. and Sinai Y.G. (eds.) (Adv. Prob. and related topics vol. 6, pp. 119–151) 1980
[D-R] Doss, H., Royer, G.: Processus de diffusion associé aux mesures de Gibbs. Z. Warsch. Verw. Geb. **46**, 125–158 (1978)
[Fö1] Föllmer, H.: Random fields and diffusion processes. In: Ecole d'été de Probabilités de St Flour XV–XVII 1985–87 (Lect. Notes Math., vol. 1362, pp. 101–204) Berlin Heidelberg New York: Springer 1988
[Fö2] Föllmer, H.: Time reversal on Wiener space. In: Stochastic processes Mathematics and Physics. (Lect. Notes. Math., vol. 1158, pp. 119–129) Berlin Heidelberg New York: Springer 1986
[Fr] Fritz, J.: Stationnary measures of stochastic gradient systems, Infinite lattice models. Z. Warsch. Verw. Geb. **59**, 479– 490 (1982)
[F-W] Föllmer, H., Wakolbinger, A.: Time reversal of infinite dimensional diffusion processes. Stoch. Proc. Appl. **22**, 59–78 (1986)
[Gl] Glauber, R.J.: Time-dependent statistics of the Ising model. J. Math. Phys. **4**, 294–307 (1963)
[Ge] Georgii, H.O.: Gibbs measures and phase transitions. (Studies in Mathematics 9) Berlin New York: De Gruyter 1988
[H-S] Holley, R., Stroock, D.W.: Diffusion on an infinite dimensional torus. J. Func. Anal. **42**, 29–63 (1981)
[Ja] Jacod, J.: Calcul stochastique et Problèmes de martingales (Lect. Notes Math., vol. 714) Berlin Heidelberg New York: Springer 1979
[Ko] Kozlov, O.K.: Gibbs description of a system of random variables. Prob. Inform. Transm. **10**, 258–265 (1974)
[L-R] Leha, G., Ritter, G.: On solutions to stochastic differential equations with discontinuous drift in Hilbert space. Math. Ann. **270**, 109–123 (1985)
[M-N-S] Millet, A., Nualart, D., Sanz, M.: Time reversal for infinite-dimensional diffusions. Probab. Theory Rel. Fields **82**, 315–347 (1989)
[Ro] Royer, G.: Etude des champs euclidiens sur un réseau. J. Math. Pure Appl. **56**, 455–478 (1977)
[R-Z1] Roelly, S., Zessin, H.: Une caractérisation des diffusions par le calcul des variations stochastiques. C.R.A.S. **313**, 309–312 (1991)
[R-Z2] Roelly, S., Zessin, H.: Une caractérisation des mesures de Gibbs sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$ par le calcul des variations stochastiques. Ann. Inst. Henri Poincaré **29**, 327–338 (1993)
[R-Z3] Roelly, S., Zessin, H.: Grandes déviations spatiales pour un système gradient stochastique infini-dimensionnel, Prépublication BiBoS No 583/7/1993
[Sch] Schwartz, L.: Théorie des distributions. Paris: Hermann 1966
[Sp] Spitzer, F.L.: Markov random fields and Gibbs ensembles. Am. Math. Monthly **78**, 142–154 (1971)
[S-S] Shiga, T., Shimizu, A.: Infinite dimensional stochastic differential equations and their applications. J. Math. Kyoto Univ. **20**, 395–416 (1980)