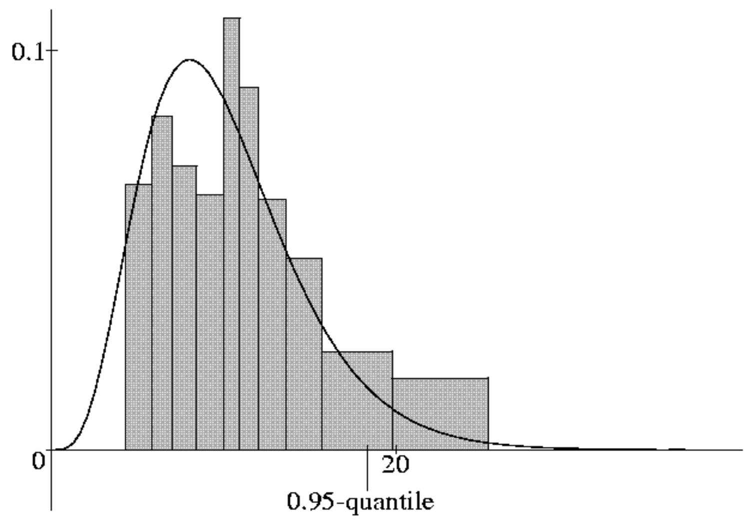
UNIVERSITÄT POTSDAM

Institut für Mathematik

Martingale, Amarts
und das Starke Gesetz der Grossen Zahlen

Diplomarbeit von Martin Anders



Mathematische Statistik und
Wahrscheinlichkeitstheorie

Universität Potsdam – Institut für Mathematik

Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Martingale, Amarts
und das Starke Gesetz der Grossen Zahlen

Martin Anders
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Preprint 2009/01

Januar 2009

Impressum

Herausgeber: Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie
am Institut für Mathematik

Adresse: Universität Potsdam
PF 60 15 53
14415 Potsdam
Telefon:
Fax: +49-331-977 1500
E-mail: +49-331-977 1578
neisse@math.uni-potsdam.de

ISSN 1613-3307

Universität Potsdam
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Wahrscheinlichkeitstheorie

Diplomarbeit

Martingale, Amarts und das Starke Gesetz der Grossen Zahlen

eingereicht von
Martin Anders

Betreuerin:
Prof. Dr. Sylvie Roelly

Januar 2009

Für Olaf, Ilonka, meine Mutter und meinen Bruder.
Ich hoffe es wird dir bald wieder besser gehen.

Die vorliegende Diplomarbeit entstand am Institut für Mathematik der Universität Potsdam unter Leitung von Prof. Dr. Sylvie Roelly. Ich bedanke mich für die Ausbildung, die Prof. Roelly, ihr Lehrstuhl für Wahrscheinlichkeitstheorie und das Institut mir zuteil werden ließen. Diese hat wesentlich zu meiner fachlichen Entwicklung beigetragen. Dank gebührt Prof. Roelly vor allem für den Freiraum der mir bei der Wahl des Themas und der Erstellung dieser Arbeit gelassen wurde, für die freundliche und engagierte Betreuung und ihre stete Diskussionsbereitschaft.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern danken. Ohne ihre moralische und finanzielle Unterstützung wäre das Studium nicht möglich gewesen. Sie haben meine Ausbildung und das Entstehen der Arbeit mit Anteilnahme verfolgt und haben mich mit so manchem Ratschlag auf den richtigen Weg gebracht.

Schliesslich möchte ich all jenen danken, die immer in mich und meine Fähigkeiten vertraut haben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit beschäftige ich mich mit Martingalen, Quasimartingalen und Amarts mit Indexmengen $\mathbb{N}$, $-\mathbb{N}$ oder beliebiger gerichteter Indexmenge. Spezielles Augenmerk lege ich auf Konvergenzsätze zur fast sicheren und essentiellen Konvergenz. Desweiteren untersuche ich Summen unabhängiger Zufallsvariablen, Prozesse mit *-mixing-Eigenschaft sowie Martingale und Amarts hinsichtlich Wachstumseigenschaften inform Starker Gesetze der grossen Zahlen. In diesem Zusammenhang versuche ich Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu erkennen und deutlich zu machen.

In Kapitel 2 beschäftige ich mich mit Martingalen, Submartingalen und Supermartingalen mit Indexmenge $\mathbb{N}$. Die Verbindung zum Glücksspiel wird selten so deutlich wie im Konzept des Martingals. Vor diesem Hintergrund können Martingale als „faire“ Spiele angesehen werden. Der, nach Vergangenheit und Gegenwart $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ bedingte, erwartete zukünftige Gewinn $\mathbb{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ entspricht genau (bzw. fast sicher) dem gegenwärtigen Vermögen $\mathcal{S}_n := \sum_{k=1}^n X_k$ des Spielers. Genauso können die Verallgemeinerungen Sub- bzw. Supermartingal, als Reihe von Spielen interpretiert werden, die für den Spieler vorteilhaft bzw. unvorteilhaft sind. Noch deutlicher wird dies an folgender einfachen Umformulierung der Submartingaleigenschaft: S_n ist ein Submartingal genau dann wenn $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq 0$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. wenn jedes einzelne Spiel, auch unter der Kenntnis aller Vorgegangenen, im Mittel einen Gewinn für den Spieler abwirft. Eng mit der Theorie der Martingale verbunden sind Stoppzeiten. Sie sind die mathematische Formulierung der Tatsache, dass ein ehrlicher Spieler nicht vorausschauen kann und sich in der Entscheidung ob er zum Zeitpunkt n aufhören soll zu spielen oder fortfahren soll einzig und allein auf seine bisherigen Gewinne (oder auch Verluste) $X_1, \ldots, X_n$ berufen kann. Faire Spiele (Martingale) sind nicht nur weitestgehend immun gegenüber solchen „Stoppstrategien“, d.h. man kann seinen erwarteten Gewinn nicht durch geeignetes Stoppen vergrössern, sondern gestoppte Martingale sind sogar wieder Martingale. Dies sind die Inhalte der *Doob*schen Stoppsätze und des Optional-Sampling-Theorems.

Die Martingaltheorie, so wie man sie heute kennt, geht zurück auf Paul Lévy. In [**Lév37**] verallgemeinerte er Summen $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ unabhängiger Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null. Er zentrierte die Zuwächse X_n nach dem bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$; oder anders gesagt: die Zuwächse X_n seiner Prozesse, die später als Martingal bekannt werden sollten, besitzen den nach $\mathcal{F}_{n-1}$ bedingten Erwartungswert Null. Selbst die ersten Konvergenzsätze waren nicht aus einer Notwendigkeit entstanden, sondern allein aus dem Drang heraus, Ergebnisse der Theorie von Summen unabhängiger Zufallsvariablen auf größere Klassen von Prozessen auszuweiten. (Dies wird in vorliegender Arbeit u.a. mit Starken Gesetzen der großen Zahlen gemacht.) Viele wichtige Ergebnisse gehen auf die Arbeit von Doob in den Vierziger und frühen Fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts zurück. Darunter sind die schon erwähnten *Doob*schen Stoppsätze und das berühmte Submartingal-Konvergenz-Theorem, welches Durrett dem Leser in [**Dur05**], wie ich finde sehr eingängig, mit folgenden Worten näherbringt: „[Submartingales] are the stochastic analogues of nondecreasing sequences and so, if they are bounded above (to be precise, $\sup \mathbb{E}X_n^+ < \infty$) they converge almost surely“.

Wie dieses Submartingal-Konvergenz-Theorem und das Optional-Sampling-Theorem zur Anwendung gebracht werden können möchte ich kurz mit der Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit im „gamblers ruin problem“ demonstrieren: Zwei Spieler starten mit den Startvermögen $a \in \mathbb{N}$ bzw. $b \in \mathbb{N}$ in eine Reihe von unabhängigen identischen Spielen. Unglücklicherweise (für einen der beiden) sind die Spiele nicht fair. Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 gewinnt sei $p \neq \frac{1}{2}$. Der Einsatz den jeder Spieler pro Spiel setzt sei 1. Der Gewinn von Spieler 1 im k-ten Spiel kann daher via $Z_k \sim p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$ und der Gewinn nach n Spielen durch $Y_n := \sum_{k=1}^n Z_k$ ausgedrückt werden. Man sieht schnell, dass

$X_n := (\frac{q}{p})^{Y_n}$ ein Martingal ist. Dabei sei q:=1-p. Wegen $Y_n \in \{-a, -a+1, \ldots, b-1, b\}$ ist $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Die Zeit des Spielendes $\tau := \min\{n \geq 1\,;\; Y_n = -a \,\text{oder}\, Y_n = b\}$ bei der einer der beiden Spieler sein komplettes Vermögen verloren hat ist eine Stoppzeit. τ ist fast sicher endlich. (Dieses Ergebnis kann man zum Beispiel aus der Betrachtung von S_n als asymmetrische Irrfahrt erhalten.) Nach Optional-Sampling-Theorem ist $\{X_{\tau\wedge n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls ein beschränktes Martingal und konvergiert, gemäß Submartingal-Konvergenz-Theorem, fast sicher gegen X_τ. Somit gilt, nach Dominierende-Konvergenz-Theorem, dass $1 = \mathbb{E}X_0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}X_\tau = (1-r)(\frac{q}{p})^b + r(\frac{q}{p})^{-a}$. $r = \mathbb{P}(X_\tau = -a)$ ist hierbei die Ruinwahrscheinlichkeit von Spieler 1, die man nun sehr schnell aus obiger Gleichung bestimmmen kann.

Das darauf folgende Kapitel 3 verbindet Martingale und Submartingale mit dem Konzept der gleichgradigen Integrierbarkeit. Da die gleichgradige Integrierbarkeit weitestgehend unter bedingten Erwartungswerten erhalten bleibt (gezeigt im ersten Abschnitt) und eng mit der $\mathbf{L}^1$-Konvergenz in Verbindung steht (Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und gleichgradige Integrierbarkeit implizieren die Konvergenz in $\mathbf{L}^1$) ist es klar, dass man für jedes Konvergenzergebnis zur Fast-Sicher-Konvergenz aus Kapitel 2, unter der zusätzlichen Annahme der gleichgradigen Integrierbarkeit, automatisch auch eine Konvergenz in $\mathbf{L}^1$ erhält.

Darüberhinaus wird im zweiten Abschnitt die T-gleichgradige Integrierbarkeit eingeführt, welche uns in Kaptitel 7 im Zusammenhang mit der Fast-Sicher-Konvergenz von Amarts wieder begegnen wird. Und es wird gezeigt, dass, für Martingale, die T-gleichgradige und gleichgradige Integrierbarkeit äquivalent sind.

In Kapitel 7 beschäftige ich mich mit asymptotischen Martingalen, kurz Amarts genannt, mit Quasimartingalen und mit Semiamarts. Um einen ersten Eindruck zu erhalten in wie weit diese den Martingalbegriff verallgemeinern, stelle man sich vor, man habe einen rein deterministischen Prozess, also eine Folge (fast sicher) konstanter Zufallsvariablen. Diese Folge ist ein Martingal, wenn sie (fast sicher) konstant ist, sie ist ein Quasimartingal, wenn sie eine beschränkte Variation besitzt, ein Amart, falls sie konvergiert und ein Semiamart, wenn sie beschränkt ist. Martingale haben die Eigenschaft, dass man sie mittels Stoppzeiten charakterisieren kann: X_n ist genau dann ein Martingal, wenn $\mathbb{E}X_\sigma = \mathbb{E}X_\tau$ für zwei beliebige beschränkte Stoppzeiten σ, τ, also wenn das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_\tau$ konstant ist, wohingegen Amarts integrierbare adaptierte Prozesse $\{X_n\}_n$ derart sind, dass $\{\mathbb{E}X_\tau\}_\tau$ konvergiert. Dementsprechend sind Martingale lediglich eine spezielle Art von Amarts. Neben der Definition eines Amarts kann die Bezeichnung asymptotisches Martingal auch durch die Riesz-Zerlegung gerechtfertigt werden, wonach jedes Amart zerlegt werden kann in ein Martingal und ein weiteres Amart, welches fast sicher und in $\mathbf{L}^1$ gegen Null konvergiert.

Das Konzept Amart ist sehr „ergiebig“. Ein Grund dafür ist wohl, dass viele (klassische) Beweise von Ergebnissen zu Martingalen, eine Vielzahl davon geht auf Doob zurück, Stoppzeitenbeweise sind und Amarts Objekte sind, für die diese Stoppzeitenbeweise ihre Gültigkeit behalten. Zum Beispiel gilt, genauso wie für Martingale und Quasimartingale, ein Optional-Sampling-Theorem, d.h. gestoppte Amarts sind wieder Amarts. Eine weitere wichtige Eigenschaft, die auch schon Martingale besitzen, ist, dass sie unter $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit fast sicher konvergieren. In diesem Kontext wurde, noch bevor der Begriff des asymptotischen Martingals geläufig war, von Chacon in [**Cha74**] bzw. Edgar, Austin und Tulcea in [**Tul74**] erkannt, dass eine enge Verbindung zwischen der Amarteigenschaft und der Fast-Sicher-Konvergenz besteht. So zeigten sie u.a., dass unter der Voraussetzung der $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit von $\{X_n\}_n$ diese beiden Eigenschaften äquivalent sind. Mit der Einführung des Begriffes Amart, zeigten Edgar und Sucheston in [**Suc76a**] sogar, dass die Voraussetzung der $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit ersetzt werden kann durch die schwächere Bedingung der T-gleichgradigen Integrierbarkeit ($\{X_\tau\}_\tau$ ist gleichgradig integrierbar).

Ein wesentlicher Vorteil von Amarts gegenüber Martingalen oder Submartingalen ist, dass sie „robuster“ sind. Beispielsweise bleibt die Amarteigenschaft unter endlichem Supremum erhalten; und allgemeiner sogar unter einer relativ grossen Klasse stetiger Funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) = O(x)$. Dieses Ergebnis stelle ich im letzten Abschnitt von Kapitel 9 vor. Es werden dort Stabilitätseigenschaften für Amarts mit Indexmenge $\mathbb{N}$ und $-\mathbb{N}$ gemeinsam behandelt.

Die Kapitel 1, 4 und 8 beschäftigen sich mit Starken Gesetzen der grossen Zahlen. Zwei frühe Beispiele stammen von Borel, sinngemäß zeigte er Anfang des Zwanzigsten Jahrhunderts folgendes: Man nehme als Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = [0,1]$, versehen mit *Borel*scher σ-Algebra und Lebesgue-Maß. Es sei $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und $X_n^k(w)$ sei die Anzahl der k's in den ersten n Stellen von $w \in \Omega$. Dann gilt $X_n^k \to \frac{1}{10}$ fast sicher und das für jedes k. Damit wird offenbar die Häufigkeit des Auftretens einer bestimmten Ziffer von 0 bis 9 in einer beliebig gewählten Zahl $w \in [0,1]$ in ihrer Dezimaldarstellung geklärt. Das zweite Ergebnis ist weitaus bekannter als das eben vorgestellte, nicht zuletzt, da es der Nachweis ist, dass das, intuitiv klare, Schätzen einer Wahrscheinlichkeit via relativer Häufigkeit auch mathematisch gerechtfertigt ist: X_n sei eine Folge unabhängiger identischer Zufallsexperimente mit zwei möglichen Ausgängen, d.h. Zufallsvariablen $X_n \in \{0, 1\}$. $p := \mathbb{P}(X_n = 1)$ sei die Wahrscheinlichkeit des „Gelingens". Dann konvergiert $\frac{\#\{k \leq n\,;\, X_k(w)=1\}}{n} \to p$ fast sicher. Gut zwanzig Jahre nach Borel lieferte Kolmogorov eine, vor allem aufgrund der zahlreichen daraus resultierenden Verwendungsmöglichkeiten, berühmte Verallgemeinerung: Es sei $X_n \in \mathbf{L}^1$ ein Prozess mit unabhängig und identisch verteilten Zuwächsen. Dann konvergiert $\frac{X_n - \mathbb{E}X_n}{n} \to 0$ fast sicher. Schreibt man für die Differenzen D_n, so erhält das *Kolmogorov*sche SGGZ die gebräuchlichere Form $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k - \mathbb{E}D_k \to 0$ fast sicher. Mit dieser Schreibweise wird eher die augenscheinliche Konvergenz arithmetischer Mittel betont, wohingegen die Erstere deutlich macht, dass der Prozess X_n die Ordnung $O(n)$ besitzt.

Ganz allgemein beschreiben Starke Gesetze der grossen Zahlen immer ein Wachstumsverhalten von Partialsummen; im *Kolmogorov*schen Fall von Partialsummen unabhängiger Zufallsvariablen und ein SGGZ hat die folgende Form: Unter gewissen Voraussetzungen an die Folge X_n existieren (zumeist deterministische) Prozesse a_n und b_n derart, dass $\frac{X_n - b_n}{a_n} \to 0$ fast sicher. Es kann häufig $a_n = n$ gewählt werden, aber manchmal beschreibt $a_n = n$ bzw. $X_n = O(n)$ nicht das wahre Wachstum. Je kleiner die Ordnung von $\{a_n\}_n$ umso genauer ist natürlich auch die Angabe zum Wachstumsverhalten (des zentrierten Prozesses $\{X_n\}_n$). Dazu folgende Weiterentwicklung des *Kolmogorov*schen SGGZ gemäß Marcinkiewicz und Zygmund: Es seien $p > 0$ und $X_n \in \mathbf{L}^p$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen. Dann konvergiert $\frac{X_n - \mathbb{E}X_n}{n^{\frac{1}{p}}} \to 0$ fast sicher.

In der vorliegenden Arbeit wird besonderes Augenmerk auf die Gültigkeit von Starken Gesetzen der grossen Zahlen unter Wachstumsbedingungen an die p-ten Momente der Zuwächse gelegt. Im Klartext heisst das: Ist X_n ein $\mathcal{F}_n$-adaptierter Prozess, so wird gezeigt, dass $\frac{X_n}{n} \to 0$ fast sicher gilt, falls ein $p \in (0, 2]$ existiert mit $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|D_k|^p}{k^p}$. Dabei können die Zuwächse D_k unabhängig sein, eine Folge mit *-mixing-Eigenschaft bilden oder X_n ein Martingal und sogar ein Amart sein. Da schon im Fall unabhängiger anhand eines Gegenbeispiels demonstriert werden kann, dass obige Reihenkonvergenz als Bedingung für die Gültigkeit des SGGZ im Fall $p > 2$ nicht mehr genügt, muss eine stärkere Bedingung gefunden werden. Eine Möglichkeit ist es $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|D_k|^p}{k^{1+\frac{p}{2}}} < \infty$ zu fordern. Unter dieser Voraussetzung gilt tatsächlich wieder in allen vier Fällen $\frac{X_n}{n} \to 0$ fast sicher.

Ich möchte an dieser Stelle auch einige Ergebnisse von B. Heinkel vorstellen, da sie eine Möglichkeit eröffnen ein tiefergehendes Verständnis der Verbindung zwischen Gültigkeit des SGGZ bzw. der Folge $\frac{X_n}{n}$ und der Amart- bzw. Quasimartingaleigenschaft zu entwickeln. Sind die Differenzen D_k von X_n unabhängig, so ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{k}$ ein Martingal bezüglich der von $\{X_n\}_n$ erzeugten Filtration und $\frac{X_n}{n}$ ist, wie es Heinkel in [**Hei96**] ausdrückt, „not too far away". Dies führte dazu, dass man untersuchte ob die Folge $\{\frac{X_n}{n}\}_n$ Charakteristika von Martingalen aufweist, im speziellen, ob aus $\frac{X_n}{n}$ Amarts oder gar Quasimartingale kontruiert werden können.

Hierbei spielt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|D_k|^p}{k^p}$ wieder eine tragende Rolle, denn Heinkel zeigte in [**Hei96**], dass, falls diese Reihe für ein $p \in [1, 2)$ konvergiert, $\frac{|X_n|^p}{n^p}$ ein Quasimartingal ist.

Im Fall von $p = 2$ ist die Reihenkonvegenz sogar eine hinreichende *und* notwendige Bedingung dafür, dass $\frac{X_n^2}{n^2}$ die Quasimartingaleigenschaft besitzt.

Gilt die Reihenkonvergenz hingegen nur für ein $p > 2$, so ist die Bedingung „$\frac{X_n}{n} \to 0$ fast sicher" äquivalent zur Amarteigenschaft von $\{\frac{|X_n|^p}{n^p}\}_n$. Insbesondere erkennt man, dass man, im Gegensatz zu den vorangegangenen Fällen, mehr fordern muss(die Fast-Sicher-Konvergenz) und man weniger erhält (anstatt eines Quasimartingals lediglich ein Amart), denn die Äquivalenz ist in folgendem Sinne optimal: Man findet ein $p > 2$ und ein $\{X_n\}_n$ so, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|D_k|^p}{k^p} < \infty$ *und* $\frac{X_n}{n} \to 0$ fast sicher, aber

$\frac{|X_n|^p}{n^p}$ *kein* Quasimartingal ist (ebenfalls enthalten in [**Hei96**]).

In den Kapiteln 5 und 9 widme ich mich Martingalen, Amarts und Semiamarts mit Indexmenge $-\mathbb{N}$. Die hier behandelten Prozesse $\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ sind bezüglich einer aufsteigenden Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ adaptiert (und integrierbar). Man kann die $n \in -\mathbb{N}$ als Zeitpunkte interpretieren und je weiter man in den „Vergangenheit“ vordringt um so näher kommt man dem Ursprung des Prozesses, falls existent. Denn erst eine Konvergenz im Sinne von $\lim_{n\to-\infty} X_n(w) = X(w)$ heisst, dass für $w \in \Omega$ überhaupt ein Ursprung existiert. Desweiteren gibt es, hinsichtlich dieser Interpretation, einen gravierenden Unterschied zum aufsteigenden Fall (Indexmenge $\mathbb{N}$): Man besitzt zu jedem Zeitpunkt $n \in -\mathbb{N}$ mit $\mathcal{F}_n$ die vollständigen (probabilistische) Informationen zu fast allen X_k. Es fehlen lediglich die Informationen zu $X_{n+1}, \dots, X_{-1}$.

Neben der eben genannten Besonderheit, die alle adaptierten Prozesse mit Indexmenge $-\mathbb{N}$ gemeinsam haben, verhalten sich „reversed“ Martingale und Amarts auch in anderer Hinsicht besser als ihre aufsteigenden Pendants. Zum Beispiel sind absteigende Amarts, auch ohne die zusätzliche Voraussetzung der $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit abgeschlossen unter endlichem Supremum und Infimum. Desweiteren wird gezeigt, dass absteigende Amarts fast sicher und in $\mathbf{L}^1$ konvergieren und automatisch gleichgradig integrierbar sind. Diese Ergebnisse wurden erstmals von Edgar und Sucheston in [**Suc76a**] bewiesen.

In Kapitel 6 und 10 betrachte ich Martingale und Amarts mit gerichteter Indexmenge G. Beispiele für gerichtete Indexmengen sind $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+$ oder auch die Menge T aller beschränkten Stoppzeiten (versehen mit einer partiellen Ordnung erklärt durch „fast sicher $\leq$“). Im Fall einer beliebigen gerichteten Indexmenge muss der Begriff der Fast-Sicher-Konvergenz erweitert werden, denn ist z.B. $G = \mathbb{R}_+$, so sind Limes-Superior bzw. Limes-Inferior von $\{X_t\}_{t\in G}$ für gewöhnlich schon nicht mehr messbar und dementsprechend auch nicht die Menge $\{\liminf_t X_t = \limsup_t X_t\}$. Das heisst, man kann die Fast-Sicher-Konvergenz nicht überprüfen, indem man die Wahrscheinlichkeit dieser Menge auswertet. An diesem Punkt tritt die essentielle Konvergenz auf den Plan, welche, im Fall der Abzählbarkeit von G, z.B. für den Fall $G = \mathbb{N}$, wieder mit der fast sicheren Konvergenz zusammenfällt. Krickeberg war einer der ersten der sich in den späten fünfziger Jahren des letzten Jahrhunderts mit der essentiellen Konvergenz von Martingalen und Submartingalen beschäftigte. Dabei werden typischerweise Überdeckungsbedingungen an die zugrundeliegende Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_t$ (, jedes X_t sei $\mathcal{F}_t$-adaptiert,) inform von sogenannten Vitali-Eigenschaften gestellt. Die Vitali-Eigenschaft, die, gemäß [**Ast78**], äquivalent ist zur essentiellen Konvergenz von $\mathbf{L}^1$-beschränkten Amarts werde ich in der vorliegenden Arbeit genauer untersuchen und die Hinrichtung dieser Äquivalenzaussage als Konvergenzsatz formulieren und beweisen.

Für $G = \mathbb{N}$ kann die Fast-Sicher-Konvergenz $\mathbf{L}^1$-beschränkter Amarts mit Hilfe der Approximation von Häufungspunkten (in diesem Fall $\limsup_n X_n$ und $\liminf_n X_n$) durch geeignetes Stoppen erfolgen. Die Vitali-Bedingung besagt gerade, dass der *essentielle* Limes-Superior von adaptierten „Null-Eins-Prozessen“, also $\mathrm{e}\limsup_t \mathbf{1}_{F_t}$ mit $F_t \in \mathcal{F}_t$, ebenfalls durch Stoppen von $\{\mathbf{1}_{F_t}\}_t$ angenähert werden kann. Und auf dieser Grundlage kann der Beweis ähnlich wie für $G = \mathbb{N}$ geführt werden. Ein Hilfsmittel dabei ist der sogenannte stochastische Limes-Superior. Die notwendigen Ergebnisse hierzu findet man im Anhang.

Weiterführend möchte ich in diesem Zusammenhang erwähnen, dass es noch eine Vielzahl anderer „Vitali-ähnlicher“ Überdeckungsbedingungen gibt, welche jeweils zur essentiellen Konvergenz einer bestimmten Klasse von Amarts korrespondieren. So ist die hier vorgestellte Vitali-Eigenschaft zwar hinreichend, aber nicht notwendig für die essentielle Konvergenz $\mathbf{L}^1$-beschränkter Martingale $\{X_t\}_t$. Aber auch in diesem Fall existiert eine entsprechende Überdeckungsbedingung, nachzulesen in [**Tal86**] und [**Suc80**].

Neben Ergebnissen zur, schon erwähnten, stochastischen Konvergenz findet man im Anhang auch noch hilfreiche Umformulierungen der Fast-Sicher-Konvergenz und der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. Ein Abschnitt befasst sich mit der Existenz einer Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit vorgegebener Verteilung und der letzte Part enthält sowohl einen Martingal- als auch einen Amartbeweis des Radon-Nikodym-Theorems als Anwendung der in dieser Arbeit vorgestellten Konvergenzergebnisse.

KAPITEL 1

Starke Gesetze der Grossen Zahlen

Ein *Starkes Gesetz der grossen Zahlen* besagt für gewöhnlich, dass, für einen zufälligen Prozess $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, geeignete „Normierungsfolgen" $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ existieren derart, dass

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a_k \to 0$$

fast sicher. Ein weiteres Ziel ist nichtzuletzt die Normierungsfolgen zu identifizieren. In diesem Kapitel werden einige Starke Gesetze vorgestellt und es wird so sein, dass a_n entweder $\mathbb{E}X_n$ oder Null ist.

Im ersten Abschnitt werden SGGZ unter den Voraussetzungen der Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbb{E}|X_k|^p}{b_k^p}$ bzw. $\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbb{E}|X_k|^p}{b_k^{\frac{p}{2}+1}}$ bewiesen. Unter anderem wird gezeigt, dass, mit der zusätzlichen Bedingung der Unabhängigkeit der X_n, die Konvergenz der ersten Reihe für $p \leq 2$ genügt, für $p > 2$ jedoch nicht mehr.

Wenn man davon ausgeht, dass die X_n alle dieselbe Verteilung besitzen, so muss man lediglich die paarweise Unabhängigkeit und Integrierbarkeit fordern und man erhält ein SGGZ mit $b_n \equiv n$. Abschnitt 2 zeigt aber auch, dass die Integrierbarkeit, also $X_n \in \mathbf{L}^1$, *immer* gefordert werden muss um ein SGGZ mit ebenjener Normierungsfolge b_n zu gewährleisten. Ändert man jedoch die Normierungsfolge in $b_n \equiv n^{\frac{1}{p}}$, dann ist es hinreichend $X_n \in \mathbf{L}^p$ zu fordern.

Der dritte Abschnitt führt den Begriff **-mixing* ein. Prozesse die diese Eigenschaft haben, besitzen eine „verallgemeinerte Form der Unabhängigkeit". Unter bestimmten Wachstumsbedingungen an die Momente können auch hier SGGZ hergeleitet werden. Interessant ist, dass, mit der zusätzlichen Bedingung der $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit, alle SGGZ aus Abschnitt 1 eine „*-mixing-Version" besitzen.

1. SGGZ unter Wachstumsbedingungen an die p-ten Momente

Eine zentrale Rolle spielt in diesem Abschnitt die Voraussetzung $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}|X_k|^p}{b_k^p} < \infty$. *Kolmogorov* behandelt in [**Kol30**] den Fall $p = 2$. Er beweist, dass ein Starkes Gesetz der grossen Zahlen gilt, falls obige Bedingung erfüllt ist, die X_n allesamt unabhängig sind und b_n gegen Unendlich konvergiert. In Bemerkung 1.1 und Beispiel 1.1 wird die Notwendigkeit der Reihenkonvergenz geprüft.

Petrov hat sich eingehend mit dem Fall $p \leq 2$ beschäftigt. Satz 1.3 zeigt, dass das SGGZ für $0 < p < 2$ seine Gültigkeit behält.

Gegenbeispiel 1.2 macht deutlich, dass die bisherigen Voraussetzungen für $p > 2$ nicht mehr genügen, um das SGGZ zu erhalten. Eine Möglichkeit dies zu korrigieren ist es, wie in Satz 1.5, „$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}|X_n|^p}{b_n^p} < \infty$" durch die Bedingung $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}|X_n|^p}{b_n^{\frac{p}{2}+1}} < \infty$ zu ersetzen.

Konvention 1.1. Es sei $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge von Zufallsvariablen und, soweit nicht anders gesagt, $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_n$ und entsprechende Superskripte an X_n machen sich durch das gleiche Superskript an S_n bemerkbar, z.B. X_n', dann S_n'.

Lemma 1.1 (Eine Kolmogorov-Maximal-Ungleichung). *Es seien $X_n \in \boldsymbol{L}^1$ unabhängige Zufallsvariablen und $a > 0$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(\max_{k\leq n}|S_k - \mathbb{E}S_k| \geq a) \leq \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k).$$

Beweis. O.B.d.A. sei $\mathbb{E}X_k = 0$. Definiere $F_0 := \Omega$, $F_k := \{\max_{j\leq k} |S_j| < a\}$ und $G_k := F_{k-1} \setminus F_k = \{|S_1| < a, \ldots, |S_{k-1}| < a, |S_k| \geq a\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n \mathbf{1}_{G_k})^2 &= \mathbb{E}(S_k \mathbf{1}_{G_k})^2 + 2\mathbb{E}S_k \mathbf{1}_{G_k}(S_n - S_k) + \mathbb{E}((S_n - S_k)\mathbf{1}_{G_k})^2 \\ &= \mathbb{E}(S_k \mathbf{1}_{G_k})^2 + \mathbb{E}((S_n - S_k)\mathbf{1}_{G_k})^2 \\ &\geq \mathbb{E}(S_k \mathbf{1}_{G_k})^2 \geq a^2 \mathbb{P}(G_k).\end{aligned}$$

Wir summieren über $k = 1 \ldots n$ und erhalten mit $F_n^c = \bigsqcup_{k=1}^{n} G_k$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var} X_k = \mathbb{E}S_n^2 \geq \mathbb{E}S_n^2 \mathbf{1}_{F_n^c} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}S_n^2 \mathbf{1}_{G_k} \geq a^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(G_k) = a^2 \mathbb{P}(F_n^c).$$

Und das ist die Behauptung. □

Lemma 1.2. *Voraussetzungen seien wie in 1.1. Dann folgt aus* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var} X_k < \infty$, *dass*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (X_k - \mathbb{E}X_k) < \infty$$

fast sicher.

Beweis. Es reicht aus zu zeigen, dass eine streng monoton wachsende Folge $\{n_m\}_m \subseteq \mathbb{N}$ existiert so, dass fast sicher $\max_{k \geq n_m} |S_k - \mathbb{E}S_k| < \frac{1}{m}$ für fast alle $m \in \mathbb{N}$. Dazu schaut man sich den letzten Satz genauer an und erkennt, mittels Monotonieargument und Start bei $k = n$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(\max_{k \geq n} |S_k - \mathbb{E}S_k| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{Var}(X_k).$$

gilt. Wähle nun zu jedem $m \in \mathbb{N}$ n_m so gross, dass $n_m > n_{m-1}$ und $\frac{1}{m^2} \sum_{k=n_m}^{\infty} \mathrm{Var} X_k \leq \frac{1}{2^m}$. Dann ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\max_{k \geq n_m} |S_k - \mathbb{E}S_k| \geq \frac{1}{m}) < \infty.$$

Mittels Borel-Cantelli-Lemma folgt nun die Behauptung. □

Lemma 1.3. *Es seien* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *und* $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$ *so, dass* $c_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \to \infty$. *Dann folgt aus* $a_n \to a \in \mathbb{R}$, *dass auch*

$$\frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{n} b_k a_k \to a.$$

Beweis. Man zeigt zunächst allgemeiner das sogenannte *Töplitz-Lemma*:

Es seien b_{nk}, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m_n \in \mathbb{N}$ und a_k, $k \in \mathbb{N}$, reelle Zahlen. Es existiere eine Konstante $C > 0$ so, dass $\sum_{k=1}^{m_n} |b_{nk}| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gelte für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $b_{nk} \to 0$. Dann gelten:

- Aus $a_n \to 0$ folgt
$$\sum_{k=1}^{m_n} b_{nk} a_k \to 0.$$
- Aus $a_n \to a \in \mathbb{R}$ und $\sum_{k=1}^{m_n} b_{nk} \to 1$ folgt
$$\sum_{k=1}^{m_n} b_{nk} a_k \to a.$$

Um den ersten Punkt zu beweisen wählt man sich zu beliebigem $d > 0$ ein n_d derart, dass $|a_n| \leq \frac{d}{C}$ für alle $n \geq n_d$. Damit ist aber

$$\left|\sum_{k=1}^{m_n} b_{nk} a_k\right| \leq \sum_{k<n_d} |b_{nk} a_k| + d.$$

$\{b_{nk}\}_n$ konvergiert nach Voraussetzung gegen Null. Daher wird der erste Term auf der rechten Seite Null, wenn wir $n \to \infty$ laufen lassen.

Der zweite Punkt folgt aus dem ersten via

$$\sum_{k=1}^{m_n} b_{nk} a_k = a \sum_{k=1}^{m_n} b_{nk} + \sum_{k=1}^{m_n} b_{nk}(a_k - a).$$

Die Behauptung des Lemmas folgt, wenn wir im zweiten Punkt $b_{nk} := \frac{b_k}{c_n}$, $1 \leq k \leq n$, setzen. □

LEMMA 1.4 (Kronecker-Lemma). *Es seien $\{d_k\}_k \subset \mathbb{R}$ und $\{c_n\}_n \subset \mathbb{R}$ so, dass $c_n \to \infty$ und $a := \sum_{k=1}^{\infty} d_k < \infty$. Dann gilt*

$$\frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{n} c_k d_k \to 0.$$

BEWEIS. Wir setzen $a_{n+1} := \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$. Dann ist

$$\frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{n} c_k d_k = \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{n} c_k (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{n} b_k a_k$$

mit $b_k := c_k - c_{k-1}$. Damit sind wir in der Situation des vorangegangenen Lemmas und somit konvergieren nicht nur $a_{n(+1)}$ gegen a, sondern auch

$$\frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{n} b_k a_k \to a.$$

□

Das folgende Starke Gesetz der Großen Zahlen 1.1 geht auf *Kolmogorov* zurück. Die Beweisführung orientiert sich an [**Loe77**], Kapitel 17. Satz 1.1 stellt eine Bedingung an die zweiten Momente; namentlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\,|X_n|^p}{b_n^p} < \infty$$

für $p = 2$. (Wegen $\mathrm{Var}X \leq \mathbb{E}X^2$ folgt aus der obigen Bedingung die aus dem SGGZ.) Später wird sich herausstellen, dass diese Bedingung zwar für $0 < p < 2$ noch ausreicht, aber im allgemeinen nicht mehr falls $p > 2$.(vgl. Sätze 1.3,1.5 und Gegenbeispiel 1.2)

SATZ 1.1 (Erstes SGGZ). *Es seien X_n unabhängig und $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ mit $b_n \to \infty$. Dann folgt aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}X_n}{b_n^2} < \infty$, dass fast sicher*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{b_n} \to 0.$$

BEWEIS. Aus Lemma 1.2 folgt, dass fast sicher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k - \mathbb{E}X_k}{b_k} < \infty.$$

Nun benutzt man lediglich das Kronecker-Lemma. □

BEMERKUNG 1.1. Dieses SGGZ ist insofern „endgültig", als das man zu jeder Folge $\sigma_n^2 \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{b_n^2} = \infty$ eine Folge unabhängiger zentrierter Zufallsvariablen X_n konstruieren kann, sodass $\mathrm{Var}X_n = \sigma_n^2$ und $\frac{S_n}{b_n} \nrightarrow 0$. Das soll aber nicht heissen, dass die Bedingung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}X_n}{b_n^2} < \infty$ notwendig ist für die Fast-Sicher-Konvergenz von $\frac{S_n}{n}$ gegen Null.In Beispiel 1.1 divergiert die Reihe aber trotzdem gilt $\frac{S_n}{n} \to 0$. Sowohl dieses Beispiel als auch die Konstruktion der angesprochenen Folge von Zufallsvariablen sind zu finden in [**Sto97**], Kapitel 15.

LEMMA 1.5. *Es seien $X_n, X'_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq X'_n) < \infty$. Weiterhin seien $b_n > 0$ mit $b_n \to \infty$. Dann gilt fast sicher*

- *$X_n = X'_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.*
- *$\frac{S_n}{b_n}$ konvergiert genau dann, wenn $\frac{S'_n}{b_n}$ konvergiert* und *die Grenzwerte stimmen überein (, falls existent).*

BEWEIS. Benutze das Borel-Cantelli-Lemma. □

BEISPIEL 1.1. Es seien X_n unabhängig mit $\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1-2^{-n}}{2}$ und $\mathbb{P}(X_n = \pm 2^{-n}) = 2^{-(n+1)}$. Man sieht schnell, dass $\mathrm{Var} X_n = 1 + 2^{-n} + 2^n$ und daher $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var X_n}{n^2} = \infty$. Für $X'_n := X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq 1\}}$ sieht das ganz anders aus: $\mathrm{Var} X'^1_n = 1 - 2^{-n}$. Daher ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var X'_n}{n^2} < \infty$ und man kann das SGGZ anwenden um $\frac{S'_n}{n} \to 0$ zu zeigen. Mit Lemma 1.5 folgt aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq X'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

dass auch $\frac{S_n}{n} \to 0$.

KONVENTION 1.2 (Der „truncated process“). Ab hier sei, falls nicht anders gesagt, $X^c = X$, falls $|X| < c$, und ansonsten $X^c = 0$. Dabei ist $c > 0$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable.

LEMMA 1.6. *Es seien $X_k \in \boldsymbol{L}^1$ unabhängige Zufallsvariablen. Existiert ein $c > 0$ derart, dass die drei Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} X_k^c$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var} X_k^c$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_k| \geq c)$ konvergieren, so ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty$$

fast sicher.

BEWEIS. Da $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_k| \geq c) < \infty$, folgt nach Borel-Cantelli-Lemma, dass, fast sicher, ab einem gewissen n für alle $k \geq n$

$$X_k = X_k^c.$$

Dementsprechend reicht es aus die fast sichere Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} X_k^c$ zu zeigen. Aber nach Lemmas 1.2 konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k^c - \mathbb{E} X_k^c$$

fast sicher. Die Behauptung folgt nun aus $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} X_k^c < \infty$. □

BEMERKUNG 1.2. Das Lemma ist Part des sogenannten *Drei-Reihen-Satz* von *Kolmogorov* und wie dieses Ergebnis angwendet werden kann sieht man sehr schön im folgenden Satz aus dem wir dann eine Verallgemeinerung des Ersten SGGZ deduzieren werden. (siehe Satz 1.3).

Das nächste SGGZ 1.3 ist ein Ergebnis, wie man es in [**Pet95**] findet. Der Beweis benutzt Satz 1.2, welcher für den Spezialfall $g_n \equiv g$ von *K.L. Chung* gezeigt wurde([**Chu47**]).

SATZ 1.2. *Es sei (g_n) eine Folge gerader, positiver und, für $x > 0$, nicht-fallender Funktionen. (X_n) sei eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Es sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

(1) $\frac{x}{g_n(x)}$ *sei für $x > 0$ nicht-fallend.*
(2) $\frac{g_n(x)}{x}$ und $\frac{x^2}{g_n(x)}$ *seien für $x > 0$ nicht-fallend* sowie $\mathbb{E}(X_n) = 0$.

Darüberhinaus sei $a_n \to \infty$ so, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} g_n(X_n)}{g_n(a_n)}$ fast sicher konvergiert. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n} < \infty$$

fast sicher.

Beweis. Es sei F_n die Verteilungsfunktion von X_n. Man bemerke, dass

$$\frac{X_n^{a_n}}{a_n} = \left(\frac{X_n}{a_n}\right)^1$$

und dementsprechend reicht es, gemäß Lemma 1.6 aus, zu zeigen, dass die drei Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \mathbb{E}\left|X_n^{a_n}\right|$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} \mathrm{Var} X_n^{a_n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq a_n)$ konvergieren.

Es gelte Bedingung 1. Dann gilt für $|x| < a_n$

$$\frac{x^2}{a_n^2} \leq \frac{g_n^2(x)}{g_n^2(a_n)} \leq \frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}.$$

Es gelte Bedingung 2. Dann gilt für $|x| < a_n$

$$\frac{x^2}{g_n(x)} \leq \frac{a_n^2}{g_n(a_n)}.$$

In jedem Fall folgt daraus

$$\mathbb{E}(X_n^{a_n})^2 = \int\limits_{|x|<a_n} x^2 F_n(dx) \leq \int\limits_{|x|<a_n} \frac{a_n^2}{g_n(a_n)} g_n(x) F_n(dx) \leq \frac{a_n^2}{g_n(a_n)} \mathbb{E} g_n(X_n)$$

und damit folgt aus der vorausgesetzten Reihenkonvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n^{a_n})^2}{a_n^2} < \infty.$$

Es gelte Bedingung 1. Dann ist

$$\left|\mathbb{E} X_n^{a_n}\right| = \left|\int\limits_{|x|<a_n} x F_n(dx)\right| \leq \frac{a_n}{g_n(a_n)} \mathbb{E} g_n(X_n).$$

Es gelte Bedingung 2. Dann ist

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E} X_n^{a_n}\right| &= \left|\int\limits_{|x|\geq a_n} x F_n(dx)\right| \leq \int\limits_{|x|\geq a_n} |x|\, F_n(dx) \\ &\leq \frac{a_n}{g_n(a_n)} \int\limits_{|x|\geq a_n} g_n(x) F_n(dx) \leq \frac{a_n}{g_n(a_n)} \mathbb{E} g_n(X_n).\end{aligned}$$

Dabei erhält man die Gleichung aus $\mathbb{E} X_n = 0$, denn:

$$0 = \mathbb{E} X_n = \int\limits_{|x|<a_n} x F_n(dx) + \int\limits_{|x|\geq a_n} x F_n(dx) = \mathbb{E} X_n^{a_n} + \int\limits_{|x|\geq a_n} x F_n(dx).$$

In jedem Fall gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\mathbb{E} X_n^{a_n}\right|}{a_n} < \infty.$$

Wir müssen noch die Konvergenz der dritten Reihe zeigen:

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq a_n) \leq \int\limits_{|x|\geq a_n} \frac{g_n(x)}{g_n(a_n)} F_n(dx) \leq \frac{\mathbb{E} g_n(X_n)}{g_n(a_n)}.$$

Dementsprechend folgt aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E} g_n(X_n)}{g_n(a_n)} < \infty$, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq a_n) < \infty.$$

□

Satz 1.3 (Zweites SGGZ). *Es seien X_n eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen und $a_n \to \infty$. Es gelte eine der beiden folgenden Bedingungen.*

(1) *Es existiert ein $0 < p \leq 1$ derart, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_n|^p}{a_n^p}$ konvergiert.*

(2) *Es existiere ein $1 < p \leq 2$ derart, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_n|^p}{a_n^p}$ konvergiert* und $\mathbb{E}X_n = 0$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Dann konvergiert

$$\frac{S_n}{a_n} \to 0$$

fast sicher.

Bemerkung 1.3. Für $p = 2$ erhalten wir wieder das Erste SGGZ.

Beweis von Satz 1.3. Es wird der vorangegangene Satz mit $g_n(x) = |x|^p$ verwendet. Nun wird noch das Kronecker-Lemma benutzt. □

Bis jetzt wurden in die Voraussetzungen der Starken Gesetze der großen Zahlen nur p-te Momente bis $p \leq 2$ mit einbezogen. Was ist mit $p > 2$? Gilt möglicherweise Satz 1.3 auch für höhere Momente? Die Antwort ist: nein. Dies kann man an folgendem Gegenbeispiel aus [**Hei94**] sehen.

Gegenbeispiel 1.2. $Y_n \sim \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ seien unabhängig. Definiere $X_n := 0$ für $n \leq 10$ und $X_n := \frac{\sqrt{n}}{(\log\log n)^{\frac{1}{4}}} Y_n$ für $n > 10$. Für große k ist

$$\frac{\mathbb{E}\,|X_k|^p}{k^p} = \frac{1}{k^{\frac{p}{2}}(\log\log k)^{\frac{p}{4}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{p}{2}}}$$

und daher gilt, für $p > 2$, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_k|^p}{k^p} < \infty$. Aber $\frac{S_n}{n}$ konvergiert *nicht* fast sicher gegen Null, denn:

In [**Pro58**], Paragraph 6, wurde folgender Satz formuliert, welcher in [**Pro59**] bewiesen wird.

Satz 1.4. *Es seien $X_n \sim \frac{p_n}{2}\delta_{-a_n} + (1-p_n)\delta_0 + \frac{p_n}{2}\delta_{a_n}$ unabhängig und $I_m := \{k \in \mathbb{N};\ 2^m < k \leq 2^{m+1}\}$. Es gelte $a_n = o(n)$ und für $m \to \infty$ sei $\frac{\max_{n\in\mathbb{I}_m} a_n}{\min_{n\in\mathbb{I}_m} a_n} = O(1) = \frac{\max_{n\in\mathbb{I}_m} p_n}{\min_{n\in\mathbb{I}_m} p_n}$. Dann sind äquivalent:*

(1) $\sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\frac{2^m c}{a_{2^m}} \operatorname{arcsinh} \frac{c}{2a_{2^m}p_{2^m}}) < \infty$ *für alle $c > 0$.*

(2) *Es gilt ein* SGGZ *für X_n, d.h. $\frac{S_n - b_n}{n} \to 0$ fast sicher, für gewisse $b_n \in \mathbb{R}$.*

In unserem Fall ist $\frac{\max_{n\in\mathbb{I}_m} p_n}{\min_{n\in\mathbb{I}_m} p_n} = 1$ und, für n hinreichend gross, $\frac{a_n}{n} \to 0$. Man überzeugt sich schnell davon, dass $\frac{\sqrt{x}}{(\log\log x)^{\frac{1}{4}}}$ nur eine potentielle Extremstelle besitzt. Zusammen mit $\frac{\sqrt{x}}{(\log\log x)^{\frac{1}{4}}} \to \infty$ folgt daraus, für $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß,

$$\max_{n\in I_m} a_n = \frac{\sqrt{2^{m+1}}}{(\log\log 2^{m+1})^{\frac{1}{4}}}$$

und

$$\min_{n\in I_m} a_n = \frac{\sqrt{2^m + 1}}{(\log\log(2^m+1))^{\frac{1}{4}}}.$$

Mit der Regel von l'Hospital sieht man leicht, dass

$$\log\log 2^{m+1} \sim \log(m+1) \sim \log m \sim \log\log(2^m+1)$$

und wegen $\sqrt{2^m+1} \sim \sqrt{2^m}$ ergibt sich damit

$$\frac{\max\limits_{n\in I_m} a_n}{\min\limits_{n\in I_m} a_n} = O(1).$$

Daher sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Wegen $\frac{\operatorname{arcsinh} x}{x} \to 1$, für $x \to 0$, konvergiert die Reihe in (1) genau dann, wenn

$$\sum_{m=4}^{\infty} \exp(-\frac{c2^m}{a_{2^m}} \cdot \frac{c}{2a_{2^m}p_{2^m}}) < \infty.$$

Aber

$$\frac{2^m}{(a_{2^m})^2} = \sqrt{\log\log 2^m} \sim \sqrt{\log m}$$

und

$$\sum_{m=4}^{\infty} \exp(-c^2\sqrt{\log m}) \geq \sum_{m=4}^{\infty} \exp(-c^2 \log m) = \infty$$

für $0 < c \leq 1$. Insbesondere divergiert die Reihe in (1) für $c = 1$ und nach Satz 1.4 gilt

$$\frac{S_n}{n} \nrightarrow 0.$$

Man muss demnach stärkere Voraussetzungen treffen wie es in folgendem SGGZ getan wird.

Satz 1.5 (Drittes SGGZ). *$X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen. $p \geq 2$. Dann folgt aus $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_k|^p}{k^{\frac{p}{2}+1}} < \infty$, dass*

$$\frac{S_n}{n} \to 0$$

fast sicher.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt insbesondere, dass $S_n \in \mathbf{L}^1$ und damit ist S_n ein $\mathcal{F}_n$-Martingal, wobei $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Und der Satz ist ein Spezialfall von Satz 4.6. $\square$

Bemerkung 1.4. Es sei darauf hingewiesen, dass obiger Satz auch ohne Zuhilfenahme von Satz 4.6 bzw. Satz 4.5(siehe dazu Beweis von Satz 4.6) bewiesen werden kann. Der Beweis kann genauso geführt werden, wie der von 4.6. Anstatt der Burkholder-Ungleichung wird die sogenannte *Marcinkiewicz-Zygmund-Ungleichung*(siehe z.B. [**Tei97**], Abschnitt 10.3) verwendet.

2. SGGZ für identisch verteilte Zufallsvariablen

Der Titel dieses Abschnitts verrät schon, dass nun alle X_n dieselbe Verteilung besitzen. Gleich zu Beginn wird das wohl wichtigste, da „anwenderfreundlichste“, SGGZ bewiesen. *Kolmogorov* stellte in den dreißiger Jahren des letzten Jahrhunderts fest, dass die Unabhängigkeit und Integrierbarkeit der $X_n \sim X$ genügen um „$\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}X$ fast sicher“ zu deduzieren. Der Nutzen dieses SGGZ wird am Beweis des *Glivenko-Cantelli-Theorems*, zu finden in Anwendung 1.5, demonstriert.

Die Bedingung der Integrierbarkeit der X_n kann *nicht* fallengelassen werden. Satz 1.7 zeigt was man in diesem Fall zu erwarten hätte. Die Voraussetzungen des *Kolmogorov*schen SGGZ können aber nichtsdestotrotz noch eine wenig abgeschwächt werden. Etemadi hat in [**Ete81**] nachgewiesen, dass man die Unabhängigkeit der X_n durch eine paarweise Unabhängigkeit ersetzen kann. Das ist der Inhalt von Satz 1.9.

Zu guter letzt wird mit dem SGGZ 1.10 gezeigt, dass, unter der Annahme der Existenz eines p-ten Momentes der X_n, die bisher verwendete „Normierungsfolge“ $a_n = n$ durch eine schwächer wachsende Folge ($a_n = n^{\frac{1}{p}}$) ersetzt werden kann.

Satz 1.6 (Viertes SGGZ). *Es seien $X_n \sim X \in \boldsymbol{L}^1$ unabhängig. Dann konvergiert*

$$\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}X$$

fast sicher.

Dieser Satz stammt, genauso wie Satz 1.1, von Kolmogorov (erstmals erwähnt in [**Kol33**], Kapitel VI) und wird auch mit dessen Hilfe gezeigt.

Beweis von Satz 1.6. Definiere $F_k := \{|X| \geq k\}$ und bemerke, dass

$$\mathbb{P}(X_k \neq X_k^k) = \mathbb{P}(|X_k| \geq k) = \mathbb{P}(F_k).$$

Nun gilt aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)(\mathbb{P}(F_{k-1}) - \mathbb{P}(F_k)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{F_{k-1}\setminus F_k}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{\{k-1\le |X| < k\}} = \mathbb{E}\,|X| < \infty$$

(,wobei die erste Gleichheit mittels $n\mathbb{P}(F_n) = n\mathbb{P}(|X| \ge n) \le \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{\{|X|\ge n\}} \to 0$ folgt). Und somit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k \neq X_k^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_k) < \infty.$$

Es sei $\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^n X_k^k$. Nach Lemma 1.5 folgt, dass $\frac{S_n}{n}$ und $\frac{\tilde{S}_n}{n}$ denselben Grenzwert haben. Wir müssen jetzt also nur noch $\frac{\tilde{S}_n}{n} \to \mathbb{E}X$ zeigen. Wegen Dominierende-Konvergenz-Theorem gilt

$$\mathbb{E}X_n^n = \mathbb{E}X\mathbf{1}_{F_n^c} \to \mathbb{E}X.$$

Daher reicht es aus zu zeigen, dass $\frac{\tilde{S}_n - \mathbb{E}\tilde{S}_n}{n} \to 0$, was automatisch aus dem Ersten SGGZ 1.1 folgt, sobald wir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}X_n^n}{n^2} < \infty$ zeigen:

Um das einzusehen definiere $G_m := \{m-1 \le |X| < m\}$. Man sieht, dass für $n \ge m$

$$F_n^c \cap G_m = G_m$$

und ansonsten $\emptyset$. Insbesondere ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^2}{n^2}\mathbf{1}_{F_n^c\cap G_m} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{X^2}{n^2}\mathbf{1}_{F_n^c\cap G_m} \le m^2\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \dots\right)\mathbf{1}_{G_m}$$
$$\le \left(1 + m^2\int_m^{\infty} \frac{1}{x^2}dx\right)\mathbf{1}_{G_m} = (1+m)\mathbf{1}_{G_m} \le (1+1+|X|)\mathbf{1}_{G_m}.$$

Aufsummieren über m und Erwartungswert bilden ergibt

$$\mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^2}{n^2}\mathbf{1}_{F_n^c} \le 2 + \mathbb{E}\,|X| < \infty.$$

Mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}X_n^n}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n^n)^2}{n^2} = \mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^2}{n^2}\mathbf{1}_{F_n^c}$$

folgt schliesslich die gewünschte Reihenkonvergenz. □

Die Bedingung $\mathbb{E}\,|X| < \infty$ ist tatsächlich *in jedem Fall* notwendig, wie Satz 1.7(entnommen aus [**Fel71**], Abschnitt VII.8) zeigt. Für den Beweis, benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 1.7. *F sei Verteilungsfunktion von X und $p > 0$. Dann folgt aus*

$$\int_0^{\infty} |x|^{p-1}(1 - F(x) + F(-x))dx < \infty,$$

dass

$$\mathbb{E}\,|X|^p < \infty.$$

Beweis. Es reicht aus zu zeigen, dass, für eine Verteilungsfunktion G, $\int_0^\infty x^p G(dx) < \infty$ gilt, falls $\int_0^\infty x^{p-1}(1-G(x))dx < \infty$ folgt(, denn mit $G(x) = F(x) + F(-x)$ folgt die Behauptung, da dieses G Verteilungsfunktion von $|X|$ ist.) Um die Gleichung zu zeigen benutze eine partielle Integrationsformel:

Für beliebiges $u \in C^1$ und $0 \le a < b < \infty$ gilt

$$\int_a^{b^+} u(x)G(dx) = u(b)G(b) - u(a)G(a) - \int_a^b u'(x)G(x)dx.$$

(siehe [**Fel71**], Abschnitt V.6)

Wendet man das auf $u(x) = x^p$ an und formt die Gleichung um, so erhält man

$$\int_0^{b+} x^p G(dx) = -b^p(1 - G(b)) + p \int_0^b x^{p-1}(1 - G(x))dx.$$

Man sieht: konvergiert das Integral für $b \to \infty$ auf der rechten Seiten, so auch das Integral auf der linken. $\square$

SATZ 1.7. *Seien $X_i \sim X$ i.i.d. mit $\mathbb{E}\,|X| = \infty$. Dann gilt für jede Folge $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, dass*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{S_n}{n} - a_n\right| = \infty) = 1.$$

BEWEIS. Es sei F die Verteilungsfunktion von X. Ist $\mathbb{E}\,|X| = \infty$, so folgt aus vorangegangenem Lemma, dass $\int_0^\infty (1 - F(x) + F(-x))dx = \infty$. Aufgrund der Monotonie von $x \mapsto 1 - F(x) + F(-x)$ gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $a > 0$

$$a(1 - F(ak) + F(-ak)) \geq \int_{a(k-1)}^{ak} (1 - F(x) + F(-x))dx$$

und aufsummieren ergibt schliesslich

$$a \sum_k \mathbb{P}(|X_k| > ak) = \sum_k a(1 - F(ak) + F(-ak)) = \infty.$$

Da die X_k unabhängig sind folgt aus dem Borel-Cantelli-Lemma, dass fast sicher unendlich oft eine beliebig große Schranke $a > 0$ von $\frac{|X_k|}{k}$ überquert wird. Oder anders gesagt:

$\{\frac{|X_k|}{k}\}_n$ ist fast sicher unbeschränkt.

Wegen

$$\frac{|X_k|}{k} \leq \frac{|S_k|}{k} + \frac{|S_{k-1}|}{k} = \frac{|S_k|}{k} + \frac{k-1}{k}\frac{|S_{k-1}|}{k-1}$$

würde aus der Beschränktheit von $\{\frac{|S_n|}{n}\}$ auch die Beschränktheit von $\{\frac{|X_k|}{k}\}$ folgen. Ergo ist $\{\frac{|S_n|}{n}\}$ fast sicher unbeschränkt, das heisst

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} = \infty) = 1.$$

Wähle nun eine zur Folge X_k unabhängige Folge von Zufallsvariablen $X'_k \sim X$ i.i.d. und betrachte die symmetrische Folge

$$X_k^s := X_k - X'_k.$$

Dann ist auch $\mathbb{E}\,|X_k^s| = \infty$. Insbesondere ist

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_1^s + \ldots + X_n^s|}{n} = \infty) = 1.$$

Aufgrund von

$$\frac{|X_1^s + \ldots + X_n^s|}{n} \leq \frac{|X_1 + \ldots + X_n|}{n} - |a_n| - \left(\frac{|X'_1 + \ldots + X'_n|}{n} - |a_n|\right)$$

muss fast sicher

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_1 + \ldots + X_n|}{n} - |a_n| = \infty$$

oder

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|X'_1 + \ldots + X'_n|}{n} - |a_n| = -\infty$$

gelten. Daraus folgt notwendigerweise, dass

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{S_n}{n} - a_n\right| = \infty) > 0.$$

Aber wegen

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{S_n}{n}-a_n\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{X_m+\ldots+X_n}{n}-a_n\right|,$$

für jedes $m\in\mathbb{N}$, ist $\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{S_n}{n}-a_n\right|$ messbar bezüglich der asymptotischen σ-Algebra von $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Mit Kolmogorov-0-1-Gesetz(Satz 3.6) folgt daher die Behauptung. $\square$

Die Bedeutung des letzten SGGZ soll nun durch den Beweis des *Glivenko-Cantelli-Theorems* verdeutlicht werden. Diese Anwendung findet man z.B. in [**Dur05**], Abschnitt 1.7.

Anwendung 1.5 (Glivenko-Cantelli-Theorem). Soll (in der Statistik) eine Verteilungsfunktion F geschätzt werden, ohne zusätzliche Informationen an die Art der zugrundeliegenden Verteilung, so geschieht dies in der Regel durch die *empirische Verteilungsfunktion*

$$F_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_n\le x\}}.$$

Dabei sind $X_m\sim F$ unabhängige „samples“ sowie $x\in\mathbb{R}$.

Gerechtfertigt wird diese Schätzung durch den Satz von *Glivenko* und *Cantelli*, welcher besagt, dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x)-F(x)|\to 0$$

fast sicher.

Beweis. Für festes $x\in\mathbb{R}$ sind sowohl $Y_n:=\mathbf{1}_{\{X_n\le x\}}$ als auch $Z_n:=\mathbf{1}_{\{X_n<x\}}$ unabhängig und identisch verteilt. Die Erwartungswerte sind $\mathbb{E}Y_n=\mathbb{P}(X_n\le x)=F(x)$ und $\mathbb{E}Z_n=\mathbb{P}(X_n<x)=F(x_-)$. Nach dem SGGZ 1.6 konvergieren $F_n(x)\to F(x)$ und $F_n(x_-)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_n<x\}}\to F(x_-)$ fast sicher. Nun wählt man $k\in\mathbb{N}$ und setzt $x^{j,k}:=\inf\{y;\ F(y)\ge\frac{j}{k}\}$ für $1\le j<k$. Desweiteren definiert man $x^{0,k}:=-\infty$ und $x^{k,k}:=\infty$. Aufgrund von $F_n(x)\to F(x)$ und $F_n(x_-)\to F(x_-)$ findet man immer ein $n_k\in\mathbb{N}$, möglicherweise abhängig von $w\in\Omega$, derart, dass für alle $n\ge n_k$ und alle j

$$\left|F_n(x^{j,k})-F(x^{j,k})\right|<\frac{1}{k}$$

und

$$\left|F_n(x^{j,k}_-)-F(x^{j,k}_-)\right|<\frac{1}{k}$$

gilt. Durch Fallunterscheidung (F stetig oder nicht stetig bei $x^{j,k}$ oder $x^{j-1,k}$) überzeugt man sich schnell davon, dass

$$F(x^{j,k}_-)-F(x^{j-1,k})\le\frac{1}{k}.$$

Als nächstes wählt man $x\in(x^{j-1,k},x^{j,k})$. Benutzt man die Monotonie von F_n und F sowie die bisherigen Ungleichungen, so kann man

$$F_n(x)\le F_n(x^{j,k}_-)<F(x^{j,k}_-)+\frac{1}{k}\le F(x^{j-1,k})+\frac{2}{k}\le F(x)+\frac{2}{k}$$

und

$$F_n(x)\ge F_n(x^{j-1,k})>F(x^{j-1,k})-\frac{1}{k}\ge F(x^{j,k}_-)-\frac{2}{k}\ge F(x)-\frac{2}{k}$$

deduzieren. Insgesamt erhält man $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x)-F(x)|\le\frac{2}{k}$. Da $k\in\mathbb{N}$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 1.8 (Schranken für das p-te Moment). *Es seien $p>0$ und $X:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X|\ge n^{\frac{1}{p}})\le\mathbb{E}\,|X|^p\le\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(|X|>n^{\frac{1}{p}}).$$

Beweis. Definiert man $Y := \sum_{m=1}^{\infty} m\mathbf{1}_{\{m\leq|X|^p<m+1\}}$ und $Z := \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\mathbf{1}_{\{m<|X|^p\leq m+1\}}$, dann ist $Y \leq |X|^p \leq Z$, also auch

$$\mathbb{E}Y \leq \mathbb{E}\,|X|^p \leq \mathbb{E}Z.$$

Damit folgt aus

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X| \geq n^{\frac{1}{p}}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X|^p \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\mathbb{P}(m \leq |X|^p < m+1)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\mathbb{P}(m \leq |X|^p < m+1) = \mathbb{E}Y\end{aligned}$$

und aus

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(|X| > n^{\frac{1}{p}}) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(|X|^p > n) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\mathbb{P}(m < |X|^p \leq m+1)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\mathbb{P}(m < |X|^p \leq m+1) = \mathbb{E}Z\end{aligned}$$

die Behauptung. □

Korollar 1.8. *Ist $0 \leq X \in \boldsymbol{L}^p$, $p > 0$, und F eine Verteilungsfunktion von X, dann gilt*

$$\mathbb{E}X^p = p\int_0^{\infty} x^{p-1}(1-F(x))dx$$

Beweis. Aus dem Beweis von Lemma 1.7 geht hervor, dass

$$\int_0^{b^+} x^p dF(x) = -b^p(1-F(b)) + p\int_0^b x^{p-1}(1-F(x))dx.$$

Man wäre demnach fertig, wenn man zum Beispiel zeigen könnte, dass $n(1-F(n^{\frac{1}{p}})) \to 0$:

Aus Satz 1.8 weiss man, dass $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X > k^{\frac{1}{p}}) < \infty$. Daher muss $\mathbb{P}(X > k^{\frac{1}{p}}) = o(\frac{1}{k})$ sein und das heisst, dass $\mathbb{P}(X > k^{\frac{1}{p}})\cdot k \to 0$. □

Es gibt auch eine Verallgemeinerung des Vierten SGGZ, welches lediglich die paarweise Unabhängigkeit der X_k verlangt:

Satz 1.9 (Fünftes SGGZ). *Es seien $X_n \sim X \in \boldsymbol{L}^1$ paarweise unabhängig. Dann konvergiert*

$$\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}X$$

fast sicher.

Den folgenden Beweis von findet man zum Beispiel in [**Pet95**].

Beweis. O.B.d.A. sei $X_n \geq 0$.(Wenn das nicht der Fall sein sollte, so zeigt man das Theorem separat für X_n^+, X^+ sowie X_n^-, X^-.) Man definiert $T_n := \sum_{k=1}^n X_k^k$. Und setzt $k_n := \lfloor a^n \rfloor$ für beliebiges $a > 1$. Dabei seien für $x \geq 0$ $\lfloor x \rfloor$ bzw. $\lceil x \rceil$ die untere bzw. obere Gaussklammer. Wegen der paarweisen Unabhängigkeit der X_k sind auch die X_k^k paarweise unabhängig. Insbesondere sind deren Covarianzen Null. Daher erhält man unter Benutzung der Chebyshev-Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|T_{k_n} - \mathbb{E}T_{k_n}| \geq \epsilon k_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}T_{k_n}}{(\epsilon k_n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\epsilon k_n)^2}\sum_{m=1}^{k_n}\mathrm{Var}X_m^m.$$

Es sei F die Verteilungsfunktion von X. Als nächstes soll gezeigt werden, dass Konstanten $A, B > 0$ existieren mit

$$A\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n^2}\sum_{m=1}^{k_n}\mathrm{Var}X_m^m \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}X_n^n}{n^2} \leq B\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1} x^2F(dx).$$

Zunächst zur zweiten Ungleichung:

Es gilt

$$\mathrm{Var} X_n^n \le \mathbb{E}(X_n^n)^2 = \int\limits_0^n x^2 F(dx).$$

Dementsprechend reicht es aus zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n x^2 F(dx) \le B \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int\limits_k^{k+1} x^2 F(dx).$$

Aber

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n x^2 F(dx) &= \frac{1}{1^2} \int\limits_0^1 x^2 F(dx) + \frac{1}{2^2} \int\limits_0^2 x^2 F(dx) + \dots \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \int\limits_0^1 x^2 F(dx) + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l^2} \int\limits_1^2 x^2 F(dx) + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \int\limits_k^{k+1} x^2 F(dx)
\end{aligned}$$

und für $k \ge 1$ ist

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \le \sum_{l=k+1}^{\infty} \int\limits_{l-1}^{l} \frac{dx}{x^2} = \int\limits_k^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{k} \le \frac{B}{k+1}$$

sobald $B \ge 2$. Wähle nun $B \ge 2$ so gross, dass auch

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \le \frac{B}{1}$$

gilt. Damit ist die zweite Ungleichung gezeigt.

Nun noch zur ersten Ungleichung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\lceil \frac{\log m}{\log a} \rceil}^{\infty} \frac{1}{\lfloor a^n \rfloor^2} &\le \int\limits_{\lceil \frac{\log m}{\log a} \rceil - 1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor a^x \rfloor^2} dx \le \int\limits_{\lceil \frac{\log m}{\log a} \rceil}^{\infty} \frac{1}{\lfloor a^{y-1} \rfloor^2} dy \\
&\le a^2 \int\limits_{\lceil \frac{\log m}{\log a} \rceil}^{\infty} \frac{1}{\lfloor a^y \rfloor^2} dy \le a^2 \int\limits_{\frac{\log m}{\log a}}^{\infty} \frac{1}{(a^y - 1)^2} dy \\
&\le D a^2 \int\limits_{\frac{\log m}{\log a}}^{\infty} \frac{1}{a^{2y}} dy = \frac{D a^2}{\log a} \int\limits_m^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{2 D a^2}{\log a} \frac{1}{m^2}
\end{aligned}$$

für eine Konstante $D > 0$ unabhängig von $m \in \mathbb{N}$. Man benutzt dies zusammen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sum_{m=1}^{k_n} \mathrm{Var} X_m^m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=\lceil \frac{\log m}{\log a} \rceil}^{\infty} \frac{\mathrm{Var} X_m^m}{k_n^2}.$$

um die erste Ungleichung zu erhalten.(Für die Gleichheit der Doppelsummen beachte: $m \le \lfloor a^n \rfloor \Leftrightarrow m \le a^n \Leftrightarrow \frac{\log m}{\log a} \le n \Leftrightarrow \lceil \frac{\log m}{\log a} \rceil \le n$)

Nun kann man schliessen, dass es eine Konstante C gibt mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|T_{k_n} - \mathbb{E}T_{k_n}| \geq \epsilon k_n) \leq \frac{C}{\epsilon^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} x^2 F(dx) \leq \frac{C}{\epsilon^2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} x F(dx) = \frac{C}{\epsilon^2} \mathbb{E}X < \infty.$$

Als nächstes benutzt man das Borel-Cantelli-Lemma um zu deduzieren, dass fast sicher

$$\frac{T_{k_n} - \mathbb{E}T_{k_n}}{k_n} \to 0.$$

Wegen

$$\mathbb{E}X = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}T_{k_n}}{k_n}$$

konvergiert daher

$$\frac{T_{k_n}}{k_n} \to \mathbb{E}X$$

fast sicher. (Um die Gleichheit einzusehen wähle zu $b > 0$, ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathbb{E}X\mathbf{1}_{\{X \geq m\}} < b$ für alle $m > k$. Dann ist $\mathbb{E}X - \mathbb{E}\frac{T_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}X\mathbf{1}_{\{X\geq m\}} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{k} \mathbb{E}X\mathbf{1}_{\{X\geq m\}} + \frac{1}{n}\sum_{m=k+1}^{n} \mathbb{E}X\mathbf{1}_{\{X\geq m\}} < 2b$ für n hinreichend gross und da $b > 0$ beliebig gewählt werden kann, gilt obige Gleichung.) Gemäß Satz 1.8 ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq X_n^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \geq n) \leq \mathbb{E}X < \infty.$$

Daher ist nach Lemma 1.5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{k_n}}{k_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{T_{k_n}}{k_n} = \mathbb{E}X$$

fast sicher. Wegen $\left[a^{n+1}\right] \leq a \cdot [a^n]$ und $S_n \uparrow$ gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $k_n < m \leq k_{n+1}$

$$\frac{S_{k_n}}{a \cdot k_n} \leq \frac{S_m}{m} \leq \frac{S_{k_{n+1}}}{\frac{k_{n+1}}{a}}.$$

Insbesondere ist

$$\frac{\mathbb{E}X}{a} = \liminf_{n\to\infty} \frac{S_{k_n}}{ak_n} \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{S_m}{m} \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{S_m}{m} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{aS_{k_{n+1}}}{k_{n+1}} = a \cdot \mathbb{E}X.$$

Durch Grenzwertbildung $a \downarrow 1$ erhält man die gewünschte Konvergenz. □

Das nächste SGGZ(Satz 1.10) geht zurück auf den Artikel [**Zyg37**] von *Marcinkiewicz* und *Zygmund*. Der vorliegende Beweis ist zu finden in [**Tei97**], Abschnitt 5.2.

LEMMA 1.9. *Es seien $X_n \sim X$ unabhängige Zufallsvariablen und es gebe ein $p > 0$ mit $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Definiere $Y_n := \left(\frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}}\right)^1 = \frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}}\mathbf{1}_{\{|X_n| \leq n^{\frac{1}{p}}\}}$. Ist*

- $0 < p < 1$, *dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ *fast sicher.*
- $p = 1$, *dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n} - \mathbb{E}Y_n$ *fast sicher.*
- $1 < p < 2$ *und* $\mathbb{E}X = 0$, *dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ *fast sicher.*

BEWEIS. Es seien $F_m := \{(m-1)^{\frac{1}{p}} < |X| \leq m^{\frac{1}{p}}\}$ und $s > p$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|Y_n|^s = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} n^{-\frac{s}{p}} \mathbb{E}|X|^s \mathbf{1}_{F_m} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} n^{-\frac{s}{p}} \mathbb{E}|X|^s \mathbf{1}_{F_m}.$$

Wegen

$$\sum_{n=m}^{\infty} n^{-\frac{s}{p}} \leq \int_{m-1}^{\infty} x^{-\frac{s}{p}} dx = \frac{p}{s-p}(m-1)^{\frac{p-s}{p}} \sim \frac{p}{s-p} m^{\frac{p-s}{p}}$$

existiert ein $A > 0$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\,|Y_n|^s \leq A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p}{s-p} \mathbb{E}(|X|^s\,(m-1)^{\frac{p-s}{p}}\,\mathbf{1}_{F_m}) \leq A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p}{s-p} \mathbb{E}\left(|X|^s\,(|X|^p)^{\frac{p-s}{p}}\,\mathbf{1}_{F_m}\right)$$
$$= A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p}{s-p} \mathbb{E}(|X|^p\,\mathbf{1}_{F_m}) = A\frac{p}{s-p}\mathbb{E}\,|X|^p < \infty.$$

Wählt man $s = 2$, so folgt insbesondere, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var} Y_n < \infty$ und mit Lemma 1.2, dass $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n - \mathbb{E}Y_n$ fast sicher konvergiert. Nach Satz 1.8 ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}} \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > n^{\frac{1}{p}}) \leq \mathbb{E}\,|X|^p < \infty$$

und mit Lemma 1.5 sieht man, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}} - \mathbb{E}Y_n$$

fast sicher konvergiert. Damit ist der Fall $p = 1$ bewiesen. Für $p \neq 1$ muss noch die Konvergenz $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}Y_n$ gezeigt werden. Ist $0 < p < 1$, so folgt dies mit s=1 aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}Y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\,|Y_n|^s \leq A\frac{p}{s-p}\mathbb{E}\,|X|^p < \infty.$$

Ist $1 < p < 2$ *und* $\mathbb{E}X = 0$, dann erhält man die gewünschte Konvergenz via

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}Y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \left|\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq n^{\frac{1}{p}}\}})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \left|\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| > n^{\frac{1}{p}}\}})\right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{\{|X| > n^{\frac{1}{p}}\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{F_m}$$
$$= \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right) \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{F_m} \leq \sum_{m=2}^{\infty} \int_0^{m-1} \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} dx \cdot \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{F_m}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p}{p-1}(m-1)^{\frac{p-1}{p}} \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{F_m} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\,|X|^p\,\mathbf{1}_{F_m} = \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\,|X|^p < \infty.$$

□

Satz 1.10 (Sechstes SGGZ). *Es seien $X_n \sim X$ unabhängige Zufallsvariablen und es gebe ein $0 < p < 2$ mit $\mathbb{E}\,|X|^p < \infty$. Ist*

- $0 < p < 1$, *dann konvergiert*

$$\frac{S_n}{n^{\frac{1}{p}}} \to 0$$

  fast sicher.
- $1 \leq p < 2$, *dann konvergiert*

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}X}{n^{\frac{1}{p}}} \to 0$$

  fast sicher.

Obiges SGGZ erhält man *nicht* als Folgerung von Satz 1.3. Satz 1.3 setzt lediglich die Unabhängigkeit der X_n voraus aber nicht, dass alle X_n dieselbe Verteilung haben. Dafür muss aber eine stärkere Bedingung an die Momente in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|X_n|^p}{a_n^p} < \infty$ gestellt werden, was widerum im obigen Satz, mit $a_n = n^{\frac{1}{p}}$, nur dann erfüllt ist, wenn $X = 0$ fast sicher.

Beweis von Satz 1.10. Nach Lemma 1.9 gilt für

- $0 < p < 1$, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ fast sicher konvergiert und die Behauptung folgt aus dem Kronecker-Lemma.

- $1 < p < 2$, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - \mathbb{E}X_n}{n^{\frac{1}{p}}}$ fast sicher konvergiert. Die Behauptung folgt wieder mittels Kronecker-Lemma.
- $p = 1$, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - \mathbb{E}X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \le n\}}}{n}$ fast sicher konvergiert.

$$\mathbb{E}X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \le n\}} = \mathbb{E}X \mathbf{1}_{\{|X| \le n\}} \to \mathbb{E}X$$

nach Dominierende-Konvergenz-Theorem; daher konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - \mathbb{E}X}{n}$ fast sicher und die Behauptung folgt aus dem Kronecker-Lemma.

□

Bemerkung 1.6. Der erste Punkt von Satz 1.10 kann auf sogenannte *vertauschbare Zufallsvariablen* verallgemeinert werden. Dabei heisse $X_k \in \mathbf{L}^1$ vertauschbar, falls für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Permutationen $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, $(X_1, \ldots, X_n) \sim (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)})$. (Daraus folgt natürlich, dass alle X_n dieselbe Verteilung haben.) Ein Beweis ist zu finden in [**Suc92**], Abschnitt 6.1.

3. SGGZ für Prozesse mit *-mixing-Eigenschaft

Die *-mixing-Eigenschaft wurde von *Blum*, *Koopmans* und *Hanson* in [**Koo63**] eingeführt. Prozesse mit dieser Eigenschaft werden auch **-mixing sequences* genannt. Sie erfüllen eine gewisse Art von asymptotischer Unabhängigkeit, wenn man nur „genügend Zeit verstreichen lässt“ (siehe Definition 1.3). Das nächste SGGZ 1.11, zu finden in [**Hey80**], setzt voraus, dass X_n u.A. **-mixing* ist. Es werden zusätzlich Bedingungen an die ersten und zweiten Momente gestellt. Schliesslich werden in Bemerkung 1.7 noch einige andere Voraussetzungen angegeben unter denen auch ein SGGZ für *-mixing sequences gilt.

Definition 1.3. Es sei $\mathcal{F}_k^l := \sigma(X_k, \ldots, X_l)$. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wird **-mixing(sequence)* genannt, falls es ein $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ mit $f \downarrow 0$ gibt derart, dass für hinreichend große n und alle $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{F}_1^m$, $B \in \mathcal{F}_{m+n}^\infty$

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \le f(n)\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

gilt.

Lemma 1.10. *Ist $X_n \in \boldsymbol{L}^1$ eine* *-mixing-sequence*, so gilt für n hinreichend gross und alle $m \in \mathbb{N}$*

$$|\mathbb{E}(X_{m+n} \mid \mathcal{F}_1^m) - \mathbb{E}(X_{m+n})| \le f(n)\mathbb{E}\,|X_{m+n}|$$

fast sicher.

Beweis. Für $G \in \mathcal{F}_{m+n}^\infty$ definiert man $X := \mathbb{P}(G \mid \mathcal{F}_1^m) - \mathbb{P}(G)$. Dann ist für beliebiges $F \in \mathcal{F}_1^m$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_F &= \mathbb{E}X\mathbf{1}_{F \cap \{X \ge 0\}} - \mathbb{E}X\mathbf{1}_{F \cap \{X < 0\}} \\
&= \mathbb{E}\mathbb{P}(G \mid \mathcal{F}_1^m)\mathbf{1}_{F \cap \{X \ge 0\}} - \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F \cap \{X \ge 0\}) \\
&- \mathbb{E}\mathbb{P}(G \mid \mathcal{F}_1^m)\mathbf{1}_{F \cap \{X < 0\}} + \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F \cap \{X < 0\}) \\
&= \mathbb{P}(G \cap F \cap \{X \ge 0\}) - \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F \cap \{X \ge 0\}) \\
&- \mathbb{P}(G \cap F \cap \{X < 0\}) + \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F \cap \{X < 0\}) \\
&\le f(n)\mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F \cap \{X \ge 0\}) + f(n)\mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F \cap \{X < 0\}) \\
&= f(n)\mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F) = \mathbb{E}f(n)\mathbb{P}(G)\mathbf{1}_F.
\end{aligned}$$

Daher ist $|\mathbb{P}(G \mid \mathcal{F}_1^m) - \mathbb{P}(G)| \le f(n)\mathbb{P}(G)$ fast sicher für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. (Obige Bedingung ist sogar äquivalent zu der *-mixing-Bedingung und stellt keine Forderungen an X_{n+m}, sondern an die σ-Algebra $\mathcal{F}_{n+m}^\infty$. Daher kann und wird die Behauptung für alle $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_{n+m}^\infty)$ gezeigt.)

$$|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1^m) - \mathbb{E}(X)| \le f(n)\mathbb{E}\,|X|$$

ist nach eben gezeigter Ungleichung klar für alle $X = \mathbf{1}_G$ mit $G \in \mathcal{F}_{m+n}^\infty$. Daraus folgt, dass dies auch für beliebige Treppenfunktionen $X_k = \sum_i a_i^k \mathbf{1}_{G_i^k}$ mit $a_i^k \ge 0$ und $G_i^k \in \mathcal{F}_{m+n}^\infty$ gilt. Aber für jedes positive $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_{n+m}^\infty)$ existiert eine monotone Folge solcher Treppenfunktionen mit $X_k \uparrow X$. Nach Monotone-Konvergenz-Theorem (für den bedingten Erwartungswert) gilt fast sicher

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1^m) - \mathbb{E}X| &= \left|\lim_{k\to\infty}(\mathbb{E}(X_k \mid \mathcal{F}_1^m) - \mathbb{E}X_k)\right| = \lim_{k\to\infty}|\mathbb{E}(X_k \mid \mathcal{F}_1^m) - \mathbb{E}X_k| \\ &\le \lim_{k\to\infty} f(n)\mathbb{E}X_k = f(n)\mathbb{E}X.\end{aligned}$$

Ist $X \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_{n+m}^\infty)$ nicht unbedingt ≥ 0, so aber $X_-, X_+ \in \mathbf{L}^1(\mathcal{F}_{n+m}^\infty)$, und

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1^m) - \mathbb{E}X| &\le |\mathbb{E}(X_+ \mid \mathcal{F}_1^m) - \mathbb{E}X_+| + |\mathbb{E}(X_- \mid \mathcal{F}_1^m) - \mathbb{E}X_-| \\ &\le f(n)\mathbb{E}X_+ + f(n)\mathbb{E}X_- = f(n)\mathbb{E}\,|X|\end{aligned}$$

fast sicher. □

Satz 1.11 (Siebentes SGGZ). *Es sei X_n eine zentrierte* *-mixing sequence. *Es sei $b_n > 0$ eine Folge mit beschränkten Zuwächsen (z.B. $b_n = n$) und $b_n \to \infty$. Ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbb{E}X_n^2}{b_n^2} < \infty$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\,|X_k| < \infty$, so konvergiert*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n X_k \to 0$$

fast sicher.

Beweis. Nach Lemma 1.10 ist für beliebige $i, j \in \mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ hinreichend gross

$$\left|\mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_1, X_2, \ldots, X_{(i-1)n_0+j})\right| \le f(n_0)\mathbb{E}\,|X_{in_0+j}|\,.$$

Dementsprechend gilt fast sicher

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j}, X_{2n_0+j}, \ldots, X_{(i-1)n_0+j})\right| \\ &= \left|\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_1, X_2, \ldots, X_{(i-1)n_0+j}) \mid X_{n_0+j}, X_{2n_0+j}, \ldots, X_{(i-1)n_0+j})\right| \\ &\le f(n_0)\mathbb{E}\,|X_{in_0+j}|\,.\end{aligned}$$

Nun teilt man n durch n_0 mit Rest

$$n = qn_0 + r,$$

wobei $0 \le r < n_0$, und zerlegt

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n_0-1} X_k + \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=0}^{n_0-1} X_{in_0+j} + \frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{r} X_{qn_0+j}.$$

Da n_0 fest gewählt ist, konvergiert der erste Summand gegen Null und

$$
\begin{aligned}
&|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=0}^{n_0-1} X_{in_0+j} + \frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{r} X_{qn_0+j}| \\
&\leq |\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=0}^{n_0-1} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j}) \\
&+ \frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{r} X_{qn_0+j} - \mathbb{E}(X_{qn_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(q-1)n_0+j})| \\
&+ \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=0}^{n_0-1} \left|\mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j})\right| \\
&+ \frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{r} \left|\mathbb{E}(X_{qn_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(q-1)n_0+j})\right| \\
&\leq |\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=0}^{n_0-1} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j}) \\
&+ \frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{r} X_{qn_0+j} - \mathbb{E}(X_{qn_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(q-1)n_0+j})| + \frac{1}{b_n}\sum_{k=n_0}^{n} f(n_0)\mathbb{E}\left|X_k\right|.
\end{aligned}
$$

Der zweite Summand kann, wegen $f \downarrow 0$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|X_k\right| < \infty$, durch genügend grosses n_0 beliebig klein gemacht werden. Man muss noch zeigen, dass der erste Summand fast sicher gegen Null konvergiert. Dazu benutzt man Satz 4.3:

Für jedes feste j sind die

$$X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j})$$

Martingaldifferenzen. Man kann sich eine Filtration $\mathcal{G}_n$ und ein $\mathcal{G}_n$-Martingal Y_n definieren via

$$Y_{in_0+k} := Y_{in_0}$$

für alle $k < n_0$, wobei

$$Y_{in_0} := \sum_{s=1}^{i} X_{sn_0+j} - \mathbb{E}(X_{sn_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(s-1)n_0+j})$$

und

$$\mathcal{G}_{in_0+k} := \mathcal{G}_{in_0} := \sigma(X_{n_0+j},\ldots,X_{in_0+j})$$

für alle $k < n_0$. Bezeichnet man die Differenzen von Y_n mit $D_{n,Y}$(man bemerke, dass $D_{n,Y} \neq 0$, nur dann, wenn n ein vielfaches von n_0), so folgt aus der Vorausetzung $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}X_n^2}{b_n^2} < \infty$, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}D_{n,Y}^2}{b_n^2} \leq 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}X_n^2}{b_n^2} < \infty.$$

Insbesondere sind fast sicher die Voraussetzungen aus Satz 4.3 erfüllt.

$$
\begin{aligned}
&|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=0}^{n_0-1} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j,\ldots,X_{(i-1)n_0+j}})\\
&+ \frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{r} X_{qn_0+j} - \mathbb{E}(X_{qn_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(q-1)n_0+j})|\\
&\leq \frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{r}|\sum_{i=1}^{q} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j})|\\
+&\frac{1}{b_n}\sum_{j=r+1}^{n_0-1}|\sum_{i=1}^{q-1} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j})|\\
\leq&\frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{n_0-1}|\sum_{i=1}^{q} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j})|\\
+&\frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{n_0-1}|\sum_{i=1}^{q-1} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j})|\\
=&\sum_{j=0}^{n_0-1}|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{q} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j})|\\
+&\sum_{j=0}^{n_0-1}|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{q-1} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j})| \to 0
\end{aligned}
$$

fast sicher, denn nach Satz 4.3 konvergieren, für jedes feste j,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{q} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j}) = \frac{Y_n}{b_n}$$

und

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{q-1} X_{in_0+j} - \mathbb{E}(X_{in_0+j} \mid X_{n_0+j},\ldots,X_{(i-1)n_0+j}) = \frac{b_{n-n_0}}{b_n}\frac{Y_{n-n_0}}{b_{n-n_0}}$$

fast sicher gegen Null. □

Bemerkung 1.7.

- Laut *Hall* und *Heyde* gilt der Satz auch ohne die Voraussetzung, dass b_n beschränkte Zuwächse besitzt. Siehe dazu [**Hey80**], Abschnitt 2.6.. Für $b_n = n$ kann die Voraussetzung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\,|X_k| < \infty$ auch durch *gleichgradige Integrierbarkeit*(siehe [**Koo63**]) und sogar durch $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit(siehe [**Rév68**], Kapitel 8) von $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ersetzt werden.
- Wie im letzten Punkt vermerkt, erhält Satz 1.1, unter $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit, eine „*-mixing-Version“. Darüberhinaus kann man zeigen, dass mit dieser zusätzlichen Voraussetzungen auch die SGGZ 1.3 (2) und 1.5 auf *-mixing sequences ausgedehnt werden können. (siehe [**Suc92**], Abschnitt 6.1)
- In [**Koo63**] wird auch ein SGGZ unter der Voraussetzung bewiesen, dass $\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(|X_k| \geq n) < \infty$. Im Hinblick auf Satz 1.8 ist dies eine ähnliche Bedingung wie $\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\,|X_k| < \infty$ aus Satz 1.11.

KAPITEL 2

Einführung zu diskreten (Sub-,Super-)Martingalen

Nach grundlegenden Definitionen von *Stoppzeit* und *Sub-* und *Supermartingal* folgt, mit Abschnitt 1 ein kurzer Teil über *vorhersagbare Prozesse*. Es wird untersucht unter welchen Voraussetzungen die Transformation eines Martingals durch einen solchen noch ein Martingal ist.

Abschnitt 2 beschäftigt sich damit unter welchen Bedingungen sich die Submartingaleigenschaft $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n$ auch auf den „gestoppten“ Prozess überträgt. U.a. werden Stoppsätze von *Doob* bewiesen.

In Part 3 werden „Upcrossing-Sätze“ von Doob bzw. *Dubins* gezeigt. Sie spielen ein wichtige Rolle beim Beweis von Konvergenzsätzen zur Fast-Sicher-Konvergenz in Abschnitt 4. Die Hauptergebnisse dieses Abschnitts sind sicherlich, dass $\mathbf{L}^p$-beschränkte Submartingale, für $p = 1$, fast sicher und, für $p > 1$, zusätzlich in $\mathbf{L}^p$ konvergieren.

Die Quintessenz von Abschnitt 5 ist, dass sich *jeder* adaptierte Prozess $X_n \in \mathbf{L}^1$ in ein Martingal und einen vorhersagbaren Prozess zerlegen lässt. Es wird speziell die Zerlegung von X_n^2 behandelt, wobei X_n ein $\mathbf{L}^2$-Martingal ist.

Der letzte Abschnitt gibt uns eine äquivalente Beschreibung der Begriffe Martingal und Submartingal via Erwartungswert des gestoppten Prozesses. Dies ist vor allem in Hinblick auf das Begreifen eines *Amarts* als „asymptotisches Martingal“ hilfreich.(siehe auch Kapitel 7)

Konvention 2.1. Im folgenden sei, sofern nicht anders gesagt, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein integrierbarer und, bzgl. einer Filtration $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, adaptierter Prozess, d.h.:

- $\mathcal{F}_n$ sind Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ mit der Eigenschaft
$$m \leq n \Rightarrow \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n.$$
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist
$$X_n \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}).$$

$\mathcal{F}_\infty$ sei die kleinste σ-Algebra so, dass, für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_\infty$.

Definition 2.2 (Stoppzeiten und (Sub-,Super-)Martingale). Eine $\mathcal{F}$-messbare Abbildung
$$\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$
heisst *Stoppzeit*, falls für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$
$\{X_n\}_n$ heisst *Supermartingal*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n.$$
$\{X_n\}_n$ heisst *Submartingal*, falls $\{-X_n\}_n$ Supermartingal ist und *Martingal*, falls $\{X_n\}_n$ sowohl Super- als auch Submartingal ist, d.h. wenn für alle $n \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n.$$

1. Vorhersagbarkeit

X_n sei der Gewinn eines Spielers in einem Glücksspiel zum Zeitpunkt n und V_n seine „Spielstrategie“. Das nächste Ergebnis besagt: Ist das Spiel „fair“, so wird es auch mit jeder Strategie fair bleiben. Ist das Spiel hingegen „unfair“; das heisst, macht der Spieler bei jedem Spielzug einen potentiellen Verlust ($\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n \leq 0$), so wird das Spiel auch mit jeder Strategie unfair sein.

Definition 2.3 (vorhersagbare Prozesse, Martingaltransformation). Ein $\mathcal{F}_{n-1}$-adaptierter Prozess V_n heißt *vorhersagbar* bzw. *vorhersehbar*.

Ist X_n ein (Sub-,Super-)Martingal so definiert man

$$(V \bullet X)_n := \sum_{k=1}^{n} V_k(X_k - X_{k-1})$$

für $n \geq 1$ und $V_0 := 0$.

Satz 2.1. (1) *$V_n \geq 0$ sei vorhersehbar und beschränkt. X_n sei ein (Super-)Martingal. Dann ist auch $(V \bullet X)_n$ ein (Super-)Martingal.*
(2) *V_n sei vorhersehbar und beschränkt. X_n sei ein Martingal. Dann ist auch $(V \bullet X)_n$ ein Martingal.*
(3) *$V_n \in \boldsymbol{L}^2$ sei vorhersehbar. $X_n \in \boldsymbol{L}^2$ sei ein Martingal. Dann ist auch $(V \bullet X)_n$ ein Martingal.*

2. gestoppte (Sub-,Super-)Martingale

Im *Optional-Sampling-Theorem* wird geklärt unter welchen Voraussetzungen gestoppte Submartingale wieder Submartingale sind. Hireichende Bedingungen unter denen man aus der Submartingaleigenschaft $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_0$ schlussfolgern kann werden in den *Doob-Stoppsätzen* präsentiert. Das dies nicht immer der Fall ist zeigt Gegenbeispiel 2.1.

Satz 2.2. *Für jede Stoppzeit τ und jedes (Super-)Martingal ist $X_n^\tau := X_{\tau \wedge n}$ auch ein (Super-)Martingal*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^\tau - X_n^\tau \mid \mathcal{F}_n) \ (\leq) = \ 0.$$

Aber $X_{n+1}^\tau - X_n^\tau = \mathbf{1}_{\{\tau > n\}}(X_{n+1} - X_n)$ und $\mathbf{1}_{\{\tau > n\}}$ ist $\mathcal{F}_n$-meßbar. □

Im Allgemeinen gilt aber *nicht* $\mathbb{E}(X_\tau) \ (\leq) = \ \mathbb{E}(X_0)$, obwohl nach vorangegangenem Satz, für jedes $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n^\tau) \ (\leq) = \ \mathbb{E}(X_0)$ gilt.

Gegenbeispiel 2.1 (einfache Irrfahrt). $X_n \in \mathbb{Z}$ sei symmetrische Irrfahrt; d.h. $X_n := Y_1 + \ldots + Y_n$, wobei $Y_k \sim \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ unabhängig. Dann ist X_n ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Definiere eine Stoppzeit $\tau := \inf\{n\,;\ X_n = 1\}$.

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$$

(Denn eine eindimensionale symmetrische Irrfahrt ist eine rekurrente Markovkette. Und es kann gezeigt werden, dass jede rekurrente Markovkette fast sicher in endlicher Zeit in jeden möglichen Zustand wechselt.) Somit ist

$$\mathbb{E}(X_\tau) = 1 \neq 0 = \mathbb{E}(X_0).$$

Unter welchen Bedingungen trotzdem $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_n)$ gilt sagt folgender Satz.

Satz 2.3 (Doob's Stoppsätze). *Es sei τ eine Stoppzeit und X_n ein Supermartingal. Es gelte einer der folgenden Fälle:*

- *τ ist beschränkt.*
- *Die Zuwächse von X_n sind gleichmäßig beschränkt und $\mathbb{E}(\tau) < \infty$.*
- *X_n ist gleichmäßig beschränkt und $\tau < \infty$ fast sicher.*
- *$X_n \geq 0$ und $\tau < \infty$ fast sicher*

Dann gilt

$$\mathbb{E}(X_\tau) \leq \mathbb{E}(X_0).$$

Beweis.
- Ist $\tau \leq n$, so gilt $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_n^\tau \leq \mathbb{E}X_0^\tau = \mathbb{E}X_0$.
- Dominierende-Konvergenz-Theorem angewendet auf $X_n^\tau - X_0 = \sum_{k=1}^{\tau \wedge n} X_k^\tau - X_{k-1}^\tau$.
- Dominierende-Konvergenz-Theorem
- $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E} \liminf_{n \to \infty} X_n^\tau \leq \liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}X_n^\tau \leq \mathbb{E}X_0$

□

Bemerkung 2.1. Wenn X_n ein Martingal ist, so sieht man schnell, dass die Ungleichung aus vorangegangenem Satz unter den gegebenen Voraussetzungen zu einer Gleichung wird, d.h.

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$$

(Denn wenn X_n Martingal, so sind X_n und $-X_n$ Supermartingale und erfüllt X_n eine der ersten drei Voraussetzungen, so auch $-X_n$. Für den letzten Punkt wird noch $\mathbb{E}X_0 = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^\tau \leq \mathbb{E}\limsup_{n\to\infty} X_n^\tau = \mathbb{E}X_\tau$ benutzt.)

Definition 2.4 (von τ erzeugte σ-Algebra). Ist τ eine $\mathcal{F}_n$-Stoppzeit, so definiert man

$$\mathcal{F}_\tau := \{F \in \mathcal{F}\,;\ \forall n :\ F \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Man sieht leicht, dass $\mathcal{F}_\tau$ tatsächlich eine σ-Algebra ist. X_τ ist für $\tau < \infty$ auch $\mathcal{F}_\tau$-messbar, denn: Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist entweder

$$\{X_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} \in B\} = \{X_k \in B\} \cap \{\tau = k\}$$

oder

$$\{X_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} \in B\} = \{X_k \in B\} \cup \{\tau = k\}^c = (\{X_k \notin B\} \cap \{\tau = k\})^c$$

je nachdem ob $0 \notin B$ oder $0 \in B$. Aber $\{X_k \in B\} \cap \{\tau = k\}, \{X_k \notin B\} \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_\tau$. Dementsprechend ist jedes $X_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}}$ $\mathcal{F}_\tau$-messbar und damit auch

$$X_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}}.$$

Sind $\sigma \leq \tau$ beschränkte Stoppzeiten, so folgt aus

$$F \cap \{\tau = n\} = \sum_{k=1}^{n} F \cap \{\sigma = k\} \cap \{\tau = n\},$$

dass $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

Darüberhinaus gilt folgendes Lemma.

Lemma 2.1. *Ist X_n ein Submartingal und $\sigma \leq \tau$ zwei beschränkte $\mathcal{F}_n$-Stoppzeiten, so gilt*

$$\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma.$$

Beweis. Hier nur der Beweis für den Martingalfall.

- Ist X_n gleichgradig integrierbar, so gilt $\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$, denn:
  Konvergenzsatz 3.4 besagt, dass $X_n \to X_\infty$ in $\mathbf{L}^1$, wobei $X_n = \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_n)$. Nach Lemma 6.2 ist $X_\tau = \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\tau)$. Wir hatten gesehen, dass $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$. Insgesamt ergibt sich also
  $$\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) = \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma.$$
- $\{X_{n\wedge m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ ist ein gleichgradig integrierbares Martingal, denn:
  Nach Satz 2.2 ist $X_{n\wedge m}$ ein Martingal und aufgrund der Integrierbarkeit der X_m kann $K > 0$ so gross gewählt werden, dass
  $$\sup_m \mathbb{E}\,|X_{n\wedge m}|\,\mathbf{1}_{\{|X|_{n\wedge m} > K\}} \leq \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_m|\,\mathbf{1}_{\{|X_m| > K\}} < \epsilon.$$
- Wählt man $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\tau \leq n$, so folgt aus den ersten beiden Punkten, dass
  $$\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = \mathbb{E}(X_{n\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_\sigma) = X_{n\wedge\sigma} = X_\sigma.$$

□

Aus diesem Lemma folgt sofort das Optional-Sampling-Theorem für (Sub-)Martingale.

Satz 2.4 (Optional-Sampling-Theorem). *Es sei $\tau_n \uparrow$ eine Folge beschränkter Stoppzeiten und X_n ein (Sub-)Martingal. Dann ist $\{X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein $\{\mathcal{F}_{\tau_n}\}$-(Sub-)Martingal.*

Beweis. Folgt aus letztem Lemma und der Tatsache, dass, wegen $\tau_n \leq m_n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\,|X_{\tau_n}| \leq \sum_{k=1}^{m_n} \mathbb{E}\,|X_k| < \infty$ und somit jedes $X_{\tau_n} \in \mathbf{L}^1$. □

3. Upcrossings

Die Untersuchung von Upcrossings (siehe Definition unten) ist, vor allem bei (Super-)Martingalen, ein wichtiges Hilfsmittel, zur Untersuchung der Fast-Sicher-Konvergenz. In diesem Abschnitt zu finden sind der *Doob-Upcrossing-Satz* und die *Dubins-Upcrossing-Ungleichung*, welche im nächsten Part zur Herleitung von Konvergenzsätzen verwendet werden.

Definition 2.5 (Upcrossings). $U_n[a,b]$ bezeichne die Anzahl der Überquerungen des Intervalls $[a,b]$ von a in Richtung b eines Prozesses X bis zum Zeitpunkt n.

Definition 2.6. Es sei $p > 0$.

- X_n heisst $\mathbf{L}^p$-*beschränkt*, falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,|X_n|^p < \infty$.
- X_n heisst $\mathbf{L}^p$-*dominiert*, falls $\mathbb{E}\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|^p < \infty$.

Satz 2.5 (Doob-Upcrossing). *X_n sei ein Submartingal und $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$(b-a)\mathbb{E}(U_n[a,b]) \le \mathbb{E}(X_n - a)^+ - \mathbb{E}(X_1 - a)^+.$$

Ist X_n zusätzlich $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt, so gilt

$$U_\infty[a,b] \in \boldsymbol{L}^1.$$

Beweis. Der Beweis ist zu entnommen aus [**Hey80**], Abschnitt 2.2. Es ist zu zeigen, dass für beliebiges *positives* Submartingal Y_n

$$b\mathbb{E}U_n[0,b] \le \mathbb{E}(Y_n - Y_1).$$

Mit $Y_k := (X_k - a)^+$ würde dann die zu zeigende Ungleichung folgen, denn die Anzahl der Upcrossings $U_n[0, b-a]$ von $(X_k - a)^+$ ist gleich der Anzahl der Upcrossings $U_n[a,b]$ von X_k.

Dass $U_\infty[a,b]$, unter $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit von X_n, integrierbar ist, folgt schliesslich aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}(b-a)\mathbb{E}(U_n[a,b]) &\le \mathbb{E}(X_n - a)^+ \le \mathbb{E}\,|X_n - a| \\ &\le \mathbb{E}\,|X_n| + a \le \sup_m \mathbb{E}(|X_m|) + a < \infty\end{aligned}$$

Nun benutzt man noch das Monotone-Konvergenz-Theorem.

Zum Beweis von $b\mathbb{E}U_n[0,b] \le \mathbb{E}(Y_n - Y_1)$:

Man definiert sich Stoppzeiten

$$\begin{aligned}\sigma_0 &:= 1 \\ \sigma_1 &:= \inf\{m > \sigma_0\,;\ Y_m = 0\} \\ \sigma_2 &:= \inf\{m > \sigma_1\,;\ Y_m \ge b\} \\ \sigma_3 &:= \inf\{m > \sigma_2\,;\ Y_m = 0\} \\ &\ \vdots\end{aligned}$$

und $\tau_k := \sigma_k \wedge n$. Damit ist $\tau_n = n$ und

$$Y_n - Y_1 = \sum_{k=0}^{n-1} Y_{\tau_{k+1}} - Y_{\tau_k} = \sum_{k=0,2,4}^{n-1} Y_{\tau_{k+1}} - Y_{\tau_k} + \sum_{k=1,3,5}^{n-1} Y_{\tau_{k+1}} - Y_{\tau_k}.$$

Nach Satz 2.4 ist $(Y_{\tau_k})_k$ ein $\mathcal{F}_{\tau_k}$-Submartingal. Dementsprechend ist

$$\mathbb{E}(\sum_{k=0,2,4}^{n-1} Y_{\tau_{k+1}} - Y_{\tau_k}) \ge 0.$$

Man zeigt nun noch, dass

$$\mathbb{E}(\sum_{k=1,3,5}^{n-1} Y_{\tau_{k+1}} - Y_{\tau_k}) \ge b\mathbb{E}U_n[0,b].$$

Dazu sei m das kleinste k für das $\sigma_k \geq n$. Damit ist aber

$$\sum_{k=1,3,5}^{n-1} Y_{\tau_{k+1}} - Y_{\tau_k} = \sum_{k=1,3,5;k<m}^{n-1} Y_{\tau_{k+1}} - Y_{\tau_k} \geq \sum_{k=1,3,5;k<m}^{n-1} b = \left[\frac{m}{2}\right] b \geq U_n[0,b] \cdot b.$$

□

Satz 2.6 (Dubin-Upcrossing-Ungleichung). *Es sei X_n ein positives Supermartingal und $0 \leq a \leq b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(U_\infty[a,b] \geq k \mid \mathcal{F}_0) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \min\left(\frac{X_0}{a}, 1\right).$$

Der Beweis stammt aus [**Nev75**], Abschnitt II-2.

Beweis. Man zeigt zunächst, dass für zwei positive Supermartingale X_n^1, X_n^2 und eine Stoppzeit τ mit

$$X_\tau^1 \geq X_\tau^2$$

(auf $\{\tau < \infty\}$) auch $Y_n = X_n^1 \mathbf{1}_{\{n<\tau\}} + X_n^2 \mathbf{1}_{\{n\geq\tau\}}$ ein positives Supermartingal ist.(Dazu zerlegt man Y_n und Y_{n+1} in $\mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n \mid \mathcal{F}_n)$ auf $\sqcup_{k=1}^\infty \{\tau = k\}$ und nutzt aus, dass $X_\tau^1 \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} \geq X_\tau^2 \mathbf{1}_{\{\tau=k\}}$.) Danach definiert man die Stoppzeiten

$$\begin{aligned}
\tau_1 &:= \inf\{n \geq 0\,;\ X_n \leq a\} \\
\tau_2 &:= \inf\{n > \tau_1\,;\ X_n \geq b\} \\
\tau_3 &:= \inf\{n > \tau_2\,;\ X_n \leq a\} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

und wendet zunächst obiges Ergebnis auf $X_n^1 = 1$, $X_n^2 = \frac{X_n}{a}$ und $\tau = \tau_1$ an, nehmen diesen Prozess als neuen X_n^1, wählen als neues $X_n^2 = \frac{b}{a}$ und $\tau = \tau_2$ und wenden dasgleiche nochmal an. Danach nochmal mit $X_n^2 = \frac{b}{a}\frac{X_n}{a}$ und $\tau = \tau_3$ usw. Man erhält also ein positives Supermartingal Y_n, das in den Intervallen

$$[0,\tau_1), [\tau_1,\tau_2), [\tau_2,\tau_3), [\tau_3,\tau_4), \ldots, [\tau_{2k-1},\tau_{2k}), [\tau_{2k},\infty)$$

definiert ist als

$$1, \frac{X_n}{a}, \frac{b}{a}, \frac{b}{a}\frac{X_n}{a}, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1} \frac{X_n}{a}, \left(\frac{b}{a}\right)^k.$$

Man sieht nun leicht, dass

- $Y_0 = \min(\frac{X_0}{a}, 1)$
- $Y_n \geq \left(\frac{b}{a}\right)^k \mathbf{1}_{\{n\geq\tau_{2k}\}}$
- $Y_0 \geq \mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_0)$

Aus den drei Punkten folgt zunächst

$$\mathbb{P}(n \geq \tau_{2k} \mid \mathcal{F}_0) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \min\left(\frac{X_0}{a}, 1\right).$$

Man lässt nun $n \to \infty$ laufen und benutzt, dass

$$\{\tau_{2k} < \infty\} = \{U_\infty[a,b] \geq k\}.$$

□

4. Konvergenzsätze

Die ersten drei Konvergenzsätze sind Konvergenzsätze zur Fast-Sicher-Konvergenz. Die Idee ist immer die gleiche:

Man versucht zu zeigen, dass für beliebige $-\infty < a < b < \infty$

$$\mathbb{P}(U_\infty [a,b] = \infty) = 0.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n \text{ konvergiert}) &= \mathbb{P}(\liminf X_n = \limsup X_n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} \{\liminf X_n < a < b < \limsup X_n\}) \\ &\geq 1 - \sum_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} \mathbb{P}(\liminf X_n < a < b < \limsup X_n) \\ &= 1 - \sum_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} \mathbb{P}(U_\infty [a,b] = \infty) = 1. \end{aligned}$$

So wird u.a. gezeigt, dass sowohl $\mathbf{L}^1$-beschränkte, als auch positive Supermartingale konvergieren(Sätze 2.7 und 2.8). Der Erste Konvergenzsatz wird durch eine Reihe von Beispielen beleuchtet. Mit dem Zweiten Konvergenzsatz wird nachgewiesen, dass Verzweigungsprozesse exponentiell wachsen.

Die beiden letzten Konvergenzsätze zeigen, dass man unter $\mathbf{L}^p$-Beschränktheit(für $p > 1$!, siehe dazu auch die nächste Bemerkung) zusätzlich zur Fast-Sicher-Konvergenz auch die $\mathbf{L}^p$-Konvergenz erhält. Der Beweis benutzt die *Doob-$\boldsymbol{L}^p$-Ungleichung*.

Satz 2.7 (Erster Konvergenzsatz). *Es sei X_n ein $\boldsymbol{L}^1$-beschränktes Supermartingal. Dann existiert fast sicher $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n \in \boldsymbol{L}^1$.*

Bemerkung 2.2. Obiger Satz besagt *nicht*, daß X_n in $\mathbf{L}^1$ gegen X_∞ konvergiert. Ein Gegenbeispiel ist das Martingal X_n aus Anwendung 2.3. Es ist nämlich $\mathbb{E}(X_n) = 1$, aber $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n = 0$, falls $\mu = \mathbb{E}(Y_k^n) \leq 1$.

Beweis. Um zu zeigen, dass $\mathbb{P}(U_\infty [a,b] = \infty) = 0$ ist, benutze den Doob-Upcrossing-Satz. □

Trotzdem für Martingale X_n der Erwartungswert konstant ist, ist *nicht* jedes Martingal $\mathbf{L}^1$-beschränkt, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 2.2 (symmetrische Irrfahrt). X_n sei wie in Gegenbeispiel 2.1. Nach *Zentralem Grenzwertsatz* (siehe z.B. [**Wil91**], Kapitel 18) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_n > \sqrt{n}x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy =: L$$

Wähle $x > 0$ fest. Es sei $a > 0$ beliebig. Dann gilt für hinreichend grosses $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\mathbb{P}(X_n > a) > \frac{L}{2} > 0;$$

insbesondere ist $\mathbb{E}\,|X_n| > \frac{a\cdot L}{2}$ und daher muss $\mathbb{E}\,|X_n| \to \infty$ gelten.

Eine weitere Frage die man sich stellen könnte ist, ob ein Martingal X_n fast sicher auf der Menge $\{\sup_{k\in\mathbb{N}} |X_k| < \infty\}$ konvergiert. Die Antwort ist *nein*. Dazu folgendes Gegenbeispiel von *D.L. Burkholder* (z.B. in [**Suc92**] Abschnitt 1.4).

Gegenbeispiel 2.3. Es seien $Y_k \sim (1 - \frac{1}{2^k})\delta_{-1} + \frac{1}{2^k}\delta_{2^k-1}$ unabhängig und $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Dann ist $\tau := \inf\{k\,;\ Y_k \neq -1\}$ eine $\mathcal{F}_n$-Stoppzeit und $X_n := \sum_{k=1}^n (-1)^k \mathbf{1}_{\{\tau\geq k\}} Y_k$ ein $\mathcal{F}_n$-Martingal, denn:

Für beliebiges $F \in \mathcal{F}_{n-1}$ ist

$$\mathbb{E}(X_n - X_{n-1})\mathbf{1}_F = \mathbb{E}((-1)^n \mathbf{1}_{\{\tau\geq n\}} Y_n)\mathbf{1}_F = (-1)^n \mathbb{E} Y_n \mathbb{E}\mathbf{1}_{\{\tau\geq n\}\cap F} = 0.$$

Definiere $X^* := \sup_{k\in\mathbb{N}} |X_k|$. Man überlegt sich leicht, dass aufgrund der „alternierenden" Definition von X_n (d.h., der Faktor „$(-1)^k$" in jedem Summanden) für $X^* > 2^n$ notwendigerweise $Y_k \neq -1$ für mindestens ein $k > n$ gelten muss.(Das wäre auch schon ohne den Faktor „$\mathbf{1}_{\{\tau\geq k\}}$" in jedem Summanden der Fall.) Insbesondere ist

$$\mathbb{P}(X^* > 2^n) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \{Y_k = 2^k - 1\}) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_k = 2^k - 1) = \frac{1}{2^n}.$$

Es sei $a > 0$. Dann ist für $a = 2^n$ schon $a\mathbb{P}(X^* > a) \leq 1$. Gilt für alle n, dass $a \neq 2^n$, so wähle n so, dass $a = 2^n + r$ mit $r < 2^n$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} a\mathbb{P}(X^* > a) &= 2^n\mathbb{P}(X^* > a) + r\mathbb{P}(X^* > a) \leq 2^n\mathbb{P}(X^* > 2^n) + 2^n\mathbb{P}(X^* > 2^n) \\ &= 2 \cdot 2^n\mathbb{P}(X^* > 2^n) \leq 2. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich $a\mathbb{P}(X^* > a) \leq 2$ und daher ist $X^* < \infty$ fast sicher. Man sieht leicht, dass X_n auf der Menge $\{\tau = \infty\}$ zwischen 0 und 1 alterniert und dort deswegen nicht konvergiert. Das Gegenbeispiel ist vollständig, falls man zeigen kann, dass $\mathbb{P}(\tau = \infty) > 0$ ist. Zunächst ist

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{2^k}) = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 - \frac{1}{2^k})\right].$$

Da, für $0 < x < 1$, $\log x \geq 1 - \frac{1}{x}$ gilt, reicht es aus zu zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} > -\infty,$$

was aber via

$$-\sum_{k=1}^{\infty} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

folgt.

Nun noch ein Beispiel aus [**Sto97**], dass $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit nicht automatisch Dominiertheit durch eine $\mathbf{L}^1$-Zufallsvariable zur Folge hat. Das unterstreicht noch einmal die Bemerkung, denn in diesem Beispiel können wir eben nicht mittels Dominierende-Konvergenz-Theorem eine $\mathbf{L}^1$-Konvergenz schließen.

Beispiel 2.4. Definiere $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \{\{1\}, \ldots, \{n\}, [n+1, \infty)\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{A}_n)$, $\mathbb{P}(n) := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ und $X_n(w) := (n+1) \cdot \mathbf{1}_{[n+1,\infty)}(w)$. Man sieht:

- $\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 < \infty$
- für alle Atome $A \in \mathcal{A}_n$ von $\mathcal{F}_n$ gilt
$$\mathbb{E}(X_{n+1}\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_n\mathbf{1}_A).$$
- $\sup_k X_k(w) \cdot \mathbf{1}_{\{n\}}(w) = n \cdot \mathbf{1}_{\{n\}}(w)$

Mit dem ersten und zweiten Punkt sieht man, dass X_n ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes Martingal ist. Der dritte Punkt gibt

$$\mathbb{E}(\sup_{k\in\mathbb{N}} X_k) = \infty.$$

Demnach ist X_n *nicht* $\mathbf{L}^1$-dominiert.

Satz 2.8 (Zweiter Konvergenzsatz). *Jedes positive Supermartingal X konvergiert fast sicher.*

Beweis. Man benutzt die Dubins-Upcrossing-Ungleichung:

$$\mathbb{P}(U_\infty[a,b] \geq k \mid \mathcal{F}_0) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \min\left(\frac{X_0}{a}, 1\right)$$

für beliebige $a < b$. Bildet man den Erwartungswert, so gilt

$$\mathbb{P}(U_\infty[a,b] \geq k) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \mathbb{E}\min\left(\frac{X_0}{a}, 1\right).$$

lässt man jetzt $k \to \infty$ laufen, so erhält man

$$\mathbb{P}(U_\infty[a,b] = \infty) = 0.$$

$\square$

Unter Anderem kann man mit diesem Konvergenzsatz das exponetielle Wachstum von Verzweigungsprozessen nachweisen.

Anwendung 2.3 (Verzweigungsprozess). Es seien $Y_r^n : \Omega \to \mathbb{N}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen.
Dabei stehe Y_r^n für die Anzahl der Nachkommen des $r-$ten Individuums aus der $n-$ten Generation.
Ist Z_n die die Population der $n-$ten Generation, dann gilt

$$Z_{n+1} = \sum_{r=1}^{Z_n} Y_r^n.$$

Bemerkung 2.4. Die Existenz einer Folge unabhängiger Zufallsvariablen $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mit beliebigen vorgegebenen Verteilungen wird in Anhang A geklärt.

Definition 2.7.
- Es sei $G_n(\theta) := \mathbb{E}(\theta^{Z_n})$ die erzeugende Funktion von Z_n.
- Es sei $G := G_1$.
- Es sei $\mu := \mathbb{E}(Y_r^n)$.
- $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$

Lemma 2.2. *Es gilt $G_n = G \circ G_{n-1}$, d.h. G_n ist die $n-$fache Verknüpfung von G.*

Beweis. mittels bedingtem Erwartungswert $\square$

Daher gilt

$$\pi_n := \mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0) = G(G_{n-1}(0)) = G(\pi_{n-1})$$

und für die Aussterbewahrscheinlichkeit $\pi := \lim_{n\to\infty} \pi_n$ notwendigerweise

$$\pi = G(\pi).$$

Definiere den Prozess $X_n := \frac{Z_n}{\mu^n}$

Satz 2.9. *$X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ existiert fast sicher.*

Beweis. Da X_n ein $\mathcal{F}_n$-Martingal ist, ist dies eine Konsequenz aus Konvergenzsatz 2.8. $\square$

D.h. wir haben ein exponentielles Wachstum der Population nachgewiesen. Für Aussagen über die Verteilung von X_∞ ist folgendes Ergebnis hilfreich.

Satz 2.10. *Für die* Laplace-Transformation *von X_∞ gilt*

$$\mathbb{E}(e^{-tX_\infty}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{-tX_n}) = \lim_{n\to\infty} G_n(e^{-\frac{t}{\mu^n}})$$

für alle $t > 0$.

Beweis. Vorangegangener Satz und Lebesgue-Konvergenz-Theorem $\square$

Beispiel 2.5. Die Y_r^n seien geometrisch verteilt $\mathbb{P}(Y_r^n = k) = pq^k$. Es sei $\mu > 1$, also $q > p$ (wegen $\mu = \frac{q}{p}$).
Es ist $\pi = \frac{1}{\mu}$ (wegen $G(\theta) = \frac{p}{1-q\theta}$).
Mittels obigem Satz zeigt man, daß

$$\mathbb{P}(X_\infty = 0) = \pi$$

und

$$\mathbb{P}(X_\infty > x) = (1-\pi)e^{-(1-\pi)x}.$$

Die Grenzverteilung von X_n ist in diesem Fall also eine Mischung aus ein einer Einpunktverteilung bei Null, mit Gewicht π, und einer Exponentialverteilung, mit dem Erwartungswert $\frac{1}{1-\pi}$ und Gewicht $1-\pi$.

Satz 2.11 (Dritter Konvergenzsatz). *Jedes Submartingal X_n mit*

$$\sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty$$

konvergiert fast sicher gegen ein $X_\infty \in \boldsymbol{L}^1$.

Beweis. Benutze die Krickeberg-Zerlegung aus Kapitel 5 Satz 6.2 und den Konvergenzsatz 2.8 $\square$

Satz 2.12 (Doob-Ungleichung). *Es sei $X_n \geq 0$ ein Submartingal und $c > 0$. Dann gilt*

$$c\mathbb{P}(\sup_{k\leq n} X_k \geq c) \leq \mathbb{E}(X_n \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{k\leq n} X_k \geq c\}})$$

Beweis. Zerlege $\{\sup_{k\leq n} X_k \geq c\}$ disjunkt in die n Ereignisse $F_k := \{X_0 < c\} \cap \ldots \cap \{X_{k-1} < c\} \cap \{X_k \geq c\}$. Dann ist

$$c\mathbb{P}(F_k) \leq \mathbb{E}X_k\mathbf{1}_{F_k} \leq \mathbb{E}X_n\mathbf{1}_{F_k}.$$

Aufsummieren ergibt die Behauptung. $\square$

Satz 2.13 (Doob-$\mathbf{L}^p$-Ungleichung). *Es sei $X_n \geq 0$ ein $\boldsymbol{L}^p$-beschränktes Submartingal, $p > 1$. q sei so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $X^* := \sup_{k\in\mathbb{N}} X_k$. Dann gilt*

$$\sup_n \|X_n\|_p = \|X_\infty\|_p \leq \|X^*\|_p \leq q \cdot \sup_n \|X_n\|_p.$$

Beweis. Es sollte klar sein, dass wir nach Monotone-Konvergenz-Theorem lediglich

$$\|X_n\|_p \leq \left\|\max_{k\leq n} X_k\right\|_p \leq q \cdot \|X_n\|_p$$

zu zeigen haben. Mit Doob-Ungleichung, Satz von Fubini und der Hölder-Ungleichung folgt dies aus

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\max_{k\leq n} X_k^p) &= p\int_0^\infty x^{p-1}\mathbb{P}(\max_{k\leq n} X_k > x)dx \leq p\int_0^\infty x^{p-2}\mathbb{E}(X_n\mathbf{1}_{\{\max_{k\leq n} X_k > x\}})dx \\
&= p\mathbb{E}\left(X_n \int_0^{\max_{k\leq n} X_k} x^{p-2}dx\right) = q\mathbb{E}\left(X_n \cdot \max_{k\leq n} X_k^{p-1}\right) \\
&\leq q(\mathbb{E}X_n^p)^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}\max_{k\leq n} X_k^p)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.14 (Vierter Konvergenzsatz). *Es sei X_n ein $\boldsymbol{L}^2$-beschränktes Martingal. Dann konvergiert X_n fast sicher* und *in $\boldsymbol{L}^2$.*

Beweis. Dass X_n fast sicher konvergiert folgt aus dem Ersten Konvergenzsatz. Es gilt

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_0^2) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2.$$

$\mathbf{L}^2$-Beschränktheit heißt also $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2 < \infty$. Durch mehrmaliges Anwenden des bedingten Erwartungswerts erhält man

$$\mathbb{E}(X_n - X_{n+r})^2 = \sum_{k=n+1}^{n+r} \mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2.$$

Nach Fatou-Lemma folgt daraus

$$\mathbb{E}(X_n - X_\infty)^2 \leq \sum_{k=n+1}^\infty \mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2.$$

Aber das konvergiert, aufgrund von $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2 < \infty$, gegen Null. $\square$

Satz 2.15 (Fünfter Konvergenzsatz). *Es sei X_n ein $\boldsymbol{L}^p$-beschränktes Martingal mit $p > 1$. Dann konvergiert X_n fast sicher* und *in $\boldsymbol{L}^p$.*

Beweis. $-X_n$, und somit auch X_n, konvergiert fast sicher nach Konvergenzsatz 2.7. $|X_n|$ ist ein Submartingal. Wir können demnach Ungleichung 2.13 anwenden und erhalten

$$\mathbb{E}(\sup_{k\in\mathbb{N}} |X_k|^p) \leq q^p \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,|X_k|^p < \infty.$$

Es sei $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$. Dann ist

$$|X_\infty - X_n|^p \leq 2^p (\sup_{k\in\mathbb{N}} |X_k|)^p \in \mathbf{L}^1$$

und die $\mathbf{L}^p$-Konvergenz folgt mittels Dominierende-Konvergenz-Theorem. □

5. Doob-Zerlegung

Jeder integrierbare adaptierte Prozess kann in ein Martingal und einen vorhersagbaren Prozess zerlegt werden. Ein wichtiger Spezialfall ist die *Doob-Zerlegung* von X_n^2, wobei $X_n \in \mathbf{L}^2$ ein Martingal ist. Die Konvergenz von X_n kann in diesem Fall auf die Konvergenz der *quadratischen Variation* zurückgeführt werden (Satz 2.17).

Satz 2.16. *Jeder $\mathcal{F}_n$-adaptierte Prozess $X_n \in \boldsymbol{L}^1$ kann in ein Martingal M_n, mit $M_0 = 0$, und in einen vorhersagbaren Prozess A_n, mit $A_0 = 0$, zerlegt werden*

$$X_n = X_0 + M_n + A_n.$$

Dabei sind M und A bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig.

Beweis. A_n ist eindeutig bestimmbar aus $\mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(A_n - A_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A_{n-1}$ und $A_0 = 0$; notwendigerweise ist dann $M_n - M_{n-1} = X_n - \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$. □

Lemma 2.3. *Sind die Zuwächse von X_n $\boldsymbol{L}^2$-beschränkt, so sind es auch die Zuwächse von M_n und A_n.*

Beweis. Es war $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}$ und daher $M_n - M_{n-1} = X_n - \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$. Da A_n vorhersagbar ist, gilt

$$\begin{aligned}\langle A_n - A_{n-1}, M_n - M_{n-1}\rangle_{\mathbf{L}^2} &= \mathbb{E}A_nM_n - \mathbb{E}A_nM_{n-1} - \mathbb{E}A_{n-1}M_n + \mathbb{E}A_{n-1}M_{n-1}\\ &= \mathbb{E}(A_n\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) - \mathbb{E}A_nM_{n-1} - \mathbb{E}A_{n-1}M_n + \mathbb{E}A_{n-1}M_{n-1} = 0\end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichung aus dem dritten Punkt von Satz 2.1, denn man sieht schnell, dass $A_n - A_{n-1}, M_n - M_{n-1} \in \mathbf{L}^2$. Ist $\langle \cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V und $\langle v, w\rangle = 0$, so gilt

$$\langle v + w, v + w\rangle - \langle v, v\rangle = \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle - \langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle \geq 0.$$

Dementsprechend ist

$$\|A_k - A_{k-1}\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|A_k - A_{k-1} + (M_k - M_{k-1})\|_{\mathbf{L}^2} = \|X_k - X_{k-1}\|_{\mathbf{L}^2}$$

und daher

$$\mathbb{E}(A_k - A_{k-1})^2 \leq \mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2.$$

Also ist $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(A_k - A_{k-1})^2 < \infty$. Aufgrund der Orthogonalität von $A_n - A_{n-1}$ und $M_n - M_{n-1}$ gilt

$$\mathbb{E}(M_n - M_{n-1})^2 = \mathbb{E}(X_n - X_{n-1})^2 - \mathbb{E}(A_n - A_{n-1})^2.$$

Somit ist auch $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2 < \infty$. □

Falls X_n ein Submartingal ist, geht aus der Konstruktion von A_n hervor, dass A_n wächst.

Definition 2.8 (quadratische Variation). Es sei $X_n \in \mathbf{L}^2$ ein Martingal. Man definiert den fast sicher monoton wachsenden vorhersehbaren Prozess A_n, $A_0 = 0$, der $X_n^2 - A_n$ zu einem Martingal macht zu

$$\langle X\rangle_n := A_n.$$

$\{\langle X\rangle_n\}_n$ wird auch *quadratische Variation* von X_n genannt.

Satz 2.17. *Es sei $X_n \in \boldsymbol{L}^2$ ein Martingal, $X_0 = 0$. Dann gilt:*

- *Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \langle X\rangle_n < \infty$ fast sicher, so existiert auch $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ fast sicher.*
- *Fast sicher folgt aus der Existenz von X_∞ auch $\lim\limits_{n\to\infty} \langle X\rangle_n < \infty$, sobald X_n gleichmäßig beschränkte Zuwächse besitzt.*

Für einen Beweis siehe [**Wil91**], Kapitel 12.

Korollar 2.4. *Sind $Y_n \in \boldsymbol{L}^2$ unabhängig und zentriert und betrachtet man $X_n := \sum_{k=1}^n Y_k$, $X_0 = 0$, so gilt:*

- *Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var} Y_k < \infty$ fast sicher, so existiert auch $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ fast sicher.*
- *Fast sicher folgt aus der Existenz von X_∞ auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var} Y_k < \infty$, sobald Y_n gleichmäßig beschränkt ist.*

Beweis. X_n ist ein Martingal bezüglich $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ mit $\langle X\rangle_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Var} Y_k$. □

6. Eine äquivalente Definition eines (Sub-)Martingals

Im folgenden wird gezeigt, dass die Martingaleigenschaft äquivalent dazu ist, dass $\mathbb{E}X_\sigma = \mathbb{E}X_\tau$ gilt für beliebige beschränkte Stoppzeiten σ, τ. In diesem Sinn sind Martingale als Spezialfälle von sogenannten *Amarts*(siehe Definition 7.2) zu betrachten.

Satz 2.18. *Ein X_n ist genau dann ein Martingal, wenn für beliebige beschränkte Stoppzeiten $\tau \geq \sigma$*

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_\sigma)$$

gilt.

Beweis. Es gelte obige Gleichung für beliebige beschränkte Stoppzeit τ. Es sei $k \leq n$ und $F \in \mathcal{F}_k$. Dann ist

$$\tau := n\mathbf{1}_F + k\mathbf{1}_{F^c}$$

eine beschränkte Stoppzeit mit $\tau \geq k$, und dementsprechend

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_k),$$

also

$$\mathbb{E}(X_n\mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(X_k\mathbf{1}_F).$$

Ist andererseits X_n ein Martingal und $\tau \leq n$ eine Stoppzeit, so ist

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i\mathbf{1}_{\{\tau=i\}}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_i)\mathbf{1}_{\{\tau=i\}}) = \mathbb{E}(X_n).$$

Analog gilt natürlich auch für $\sigma \leq n$

$$\mathbb{E}(X_\sigma) = \mathbb{E}(X_n).$$

□

Satz 2.19. *X_n ist genau dann ein Submartingal, wenn für beliebige beschränkte Stoppzeiten $\tau \geq \sigma$*

$$\mathbb{E}(X_\tau) \geq \mathbb{E}(X_\sigma)$$

gilt.

Beweis. Setzt man zunächst obige Ungleichung voraus, dann verfährt man so wie im Beweis des letzten Satzes.

Ist andererseits X_n ein Submartingal, so benutzt man die Doobzerlegung und den letzten Satz. □

KAPITEL 3

Martingale und gleichgradige Integrierbarkeit

Der erste Part beschäftigt sich mit grundlegenden Ergebnissen zur gleichgradigen Itegrierbarkeit. U.a. wird gezeigt, dass eine Folge X_n von Zufallsvariablen *genau dann* in $\mathbf{L}^1$ konvergiert, wenn sie gleichgradig integrierbar ist und in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

In Abschnitt 2 werden einige Konvergenzergebnisse bewiesen. Zum Beispiel konvergieren gleichgradig integrierbare Supermartingale fast sicher *und* in $\mathbf{L}^1$. Es wird auch die T-*gleichgradige Integrierbarkeit* eingeführt und gezeigt, dass, für Martingale, diese Eigenschaft äquivalent ist zur gewöhnlichen Gleichgradigen Integrierbarkeit.

1. Gleichmäßige(-förmige,-gradige) Integrierbarkeit

Dies ist eine kurze Einführung der *gleichgradigen Integrierbarkeit* und es wird hier nur vorgestellt, was für den weiteren Verlauf der Arbeit von Belang ist. (Weitere Ergebnisse finden sich zum Beispiel in [**Nev69**], Abschnitt 2.5.) Es wird z.B. gezeigt, dass eine Klasse von gleichgradig integrierbaren Zufallsvariablen diese Eigenschaft auch unter Bedingen nach Teil-σ-Algebren behält.

Dass die gleichgradige Integrierbarkeit unter Umständen etwas mit der $\mathbf{L}^1$-Konvergenz zu tun haben könnte lässt sich vielleicht schon aus der folgenden Definition erahnen. Konkretisiert wird dies durch Satz 3.3, der besagt, dass die $\mathbf{L}^1$-Konvergenz äquivalent ist zur gleichgradigen Integrierbarkeit und der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

Definition 3.1. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt gleichmäßig(-förmig,-gradig) integrierbar, falls zu jedem $a > 0$ ein $0 < b < \infty$ existiert, sodass für alle $X \in \mathcal{C}$

$$\mathbb{E}(|X| \cdot \mathbf{1}_{|X|>b}) < a$$

gilt.

Lemma 3.1. *Es sei $p > 1$ beliebig. Dann gilt für eine Klasse $\mathcal{C}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ folgende Inklusionskette:*
$\mathcal{C}$ ist $\boldsymbol{L}^p$-beschränkt $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ist gleichgradig integrierbar $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ist $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt.

Beweis. einfach nachrechnen □

Lemma 3.2. *Für eine Klasse $\mathcal{C}$ von Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:*

(1)
- *$\mathcal{C}$ ist $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt.*
- *Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass $\mathbb{P}(F) < \delta \Rightarrow \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_F < \epsilon$ für alle $X \in \mathcal{C}$ und alle $F \in \mathcal{F}$.*

(2) *$\mathcal{C}$ ist gleichgradig integrierbar.*

Beweis. (1)⇒(2): Ist $\mathcal{C}$ L^1-beschränkt, dann ist $\sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}\,|X| < \infty$. Wählt man $F := \{|X| > b\}$, dann gilt für $\delta > 0$ und b hinreichend gross, dass

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(|X| > b) \leq \frac{\sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}\,|X|}{b} < \delta$$

und dementsprechend ist dann für $\epsilon > 0$ und b hinreichend groß

$$\mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{\{|X|>b\}} = \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_F < \epsilon$$

für alle $X \in \mathcal{C}$.

(2)⇒(1): Nach Lemma 3.1 ist $\mathcal{C}$ $\mathbf{L}^1$-beschränkt. Um den zweiten Punkt zu zeigen benutze

$$\mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_F = \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{F\cap\{|X|>b\}} + \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{F\cap\{|X|\leq b\}} \leq \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{\{|X|>b\}} + b\mathbb{P}(F)$$

und wähle b so groß, dass $\sup\limits_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{\{|X|>b\}} < \frac{\epsilon}{2}$ und δ so klein, dass $b\mathbb{P}(F) < \frac{\epsilon}{2}$, z.B. $\delta = \frac{\epsilon}{2b}$. □

Lemma 3.3. *Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei gleichgradig integrierbare Klassen von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann ist*

$$\mathcal{S} := \{X + Y\,;\ X \in \mathcal{C},\, Y \in \mathcal{D}\}$$

gleichgradig integrierbar.

Beweis. Ist eine einfache Anwendung von Lemma 3.2 □

Der bedingte Erwartungswert ist sehr gut mit dem Konzept der gleichgradigen Integrierbarkeit verträglich wie die folgenden beiden Sätze (hoffentlich) verdeutlichen.

Satz 3.1. *Es sei $X \in \boldsymbol{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und es sei $\mathcal{C}$ die Klasse aller, bezüglich Teil-σ-Algebren $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$, gebildeten bedingten Erwartungswerte von X. Dann ist $\mathcal{C}$ gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Man benutzt die Tatsache, dass es, für $X \in \mathbf{L}^1$, zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass aus $\mathbb{P}(F) < \delta$, $F \in \mathcal{F}$, immer $\mathbb{E}(|X|\,\mathbf{1}_F) < \epsilon$ folgt. Betrachte $F = \{|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})| > b\}$. Es gilt

$$b \cdot \mathbb{P}(F) \le \mathbb{E}(|X|) < \infty.$$

Wähle nun b so groß, dass

$$\frac{\mathbb{E}(|X|)}{b} < \delta.$$

□

Satz 3.2. *Jede Klasse $\mathcal{C}$ die nur aus bedingten Erwartungswerten von Zufallsvariablen aus einer gleichgradig integrierbaren Klasse besteht ist auch gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Wird ähnlich bewiesen, wie der letzte Satz. Man erhält, wegen Lemma 3.2, sogar, dass $\frac{\sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}|X|}{b} < \delta$ für b hinreichend groß. D.h. $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})| > b) < \delta$ für alle $X \in \mathcal{C}$ *und* alle Teil-σ-Algebren $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$. Wieder nach 3.2 gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})|\,\mathbf{1}_{\{|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})|>b\}} &\le \mathbb{E}\mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{G})\mathbf{1}_{\{|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})|>b\}} \\
&= \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_{\{|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})|>b\}} = \mathbb{E}\,|X|\,\mathbf{1}_F < \epsilon
\end{aligned}$$

□

Nun folgt eine äquivalente Beschreibung von $\mathbf{L}^1$-Konvergenz mittels gleichgradiger Integrierbarkeit.

Satz 3.3. *Es seien $X_n, X \in \boldsymbol{L}^1$. Es konvergiert X_n in $\boldsymbol{L}^1$ gegen X genau dann wenn X_n in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergiert* und *$\{X_n\}$ gleichgradig integrierbar ist.*

Beweis. Zeige nur die wichtigere $\Leftarrow$-Richtung.
Die Idee ist eine Zerlegung von

$$\mathbb{E}(|X_n - X|) \le \mathbb{E}(|X - f_a(X)|) + \mathbb{E}(|f_a(X) - f_a(X_n)|) + \mathbb{E}(|f_a(X_n) - X_n|)$$

mit

$$f_a(x) := \begin{cases} a & , x > a \\ x & , -a \le x \le a \\ -a & , x < -a \end{cases}.$$

Wegen $|f_a(x) - x| \le |x|\,\mathbf{1}_{|x|>a}$ sieht man nun, dass wir den ersten und dritten Summanden durch Wahl eines genügend großen $a > 0$ unter $\frac{\epsilon}{3}$ drücken können.

Wegen $|f_a(x) - f_a(y)| \le |x - y|$ konvergiert $f_a(X_n)$ in Wahrscheinlichkeit gegen $f_a(X)$. Nun benutzt man die Tatsache, dass aus gleichmäßiger Beschränktheit und Konvergenz in Wahrscheinlichkeit schon $\mathbf{L}^1$-Konvergenz folgt.

Insbesondere konvergiert also $f_a(X_n)$ in $\mathbf{L}^1$ gegen $f_a(X)$, und wir können für hinreichend großes n auch den zweiten Summanden unter $\frac{\epsilon}{3}$ drücken. □

2. gleichgradig integrierbare Martingale

Gleich zu Beginn dieses Abschnitts wird mit Satz 3.4 gezeigt, dass eine Folge gleichgradig integrierbarer Zufallsvariablen nicht nur fast sicher, sondern auch in $\mathbf{L}^1$ konvergieren. Wer sich also nach Bemerkung 2.2 gefragt hat, welche zusätzliche Bedingung an X_n zu stellen ist um die $\mathbf{L}^1$-Konvergenz zu sichern erhält hiermit eine (im Hinblick auf Lemma 3.1) befriedigende Antwort. Darüber hinaus wird im *Levy-Upward* und im *Levy-Downward-Theorem* gezeigt, dass integrierbare Zufallsvariablen bedingt nach einer Filtration nicht nur ein Martingal bilden, sondern sowohl fast sicher als auch in $\mathbf{L}^1$ konvergieren. Darüber hinaus wird die *T-gleichgradige Integrierbarkeit* erklärt und gezeigt, dass jedes gleichgradig integrierbare Martingal schon T-gleichgradig integrierbar ist.

Konvention 3.2. Im folgenden sei, soweit nicht anders gesagt, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein bezüglich einer Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adaptierter integrierbarer Prozess. T sei die Menge aller beschränkten Stoppzeiten bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 3.4. *Jedes gleichgradig integrierbare $\mathcal{F}_n$-Supermartingal X_n konvergiert fast sicher* und *in $\boldsymbol{L}^1$ gegen ein X_∞. Ist X_n sogar ein Martingal, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$X_n = \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_n).$$

Beweis. Nach einem Konvergenzsatz aus 1 und Abschnitt 1 wissen wir, dass $X_n \to X_\infty$ fast sicher und somit auch in $\mathbf{L}^1$ konvergiert.

Um die Gleichung zu zeigen, wähle ein beliebiges $F \in \mathcal{F}_n$ und zeige $\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(X_\infty \mathbf{1}_F)$. Zunächst gilt $\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(X_r \mathbf{1}_F)$ für beliebiges $r > n$. Benutze jetzt

$$|\mathbb{E}(X_\infty \mathbf{1}_F) - \mathbb{E}(X_r \mathbf{1}_F)| \leq \mathbb{E}\,|X_r - X_\infty|\,\mathbf{1}_F \leq \mathbb{E}\,|X_r - X_\infty| \to 0.$$

□

Anwendung 3.1. Das Ergebniss kann verwendet werden um den Satz von Radon-Nikodym zu beweisen. (siehe Satz D.1 im Anhang oder [**Wil91**])

Satz 3.5 (Levy-Upward-Theorem). *Ist $X \in \boldsymbol{L}^1$, so ist $X_n := \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.*

$$X_n \to \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)$$

fast sicher und *in $\boldsymbol{L}^1$.*

Beweis. Die Sätze 3.1 und 3.4 liefern

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \to X_\infty$$

fast sicher und in $\mathbf{L}^1$. Noch zu zeigen ist, dass für alle $F \in \mathcal{F}_\infty$

$$\mathbb{E}(X_\infty \mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_F).$$

Aber für $F \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$ gilt die Gleichung schon, denn

$$\mathbb{E}(X \mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)\mathbf{1}_F) \to \mathbb{E}(X_\infty \mathbf{1}_F).$$

Da $\bigcup_n \mathcal{F}_n$ π-System von $\mathcal{F}_\infty$ ist folgt die Behauptung. □

Mit obigem Satz kann das Kolmogorov-0-1-Gesetz bewiesen werden:

Satz 3.6 (Kolmogorov-0-1-Gesetz). *Die asymptotische σ-Algebra einer Folge X_n unabhängiger Zufallsvariablen ist trivial, d.h.*

$$\mathbb{P}(F) \in \{0, 1\}$$

für beliebiges $F \in \bigcap_n \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$.

Beweis. Es sei $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Dann gilt nach Levy-Upward-Theorem für jedes F aus der asymptotischen σ-Algebra

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_F \mid \mathcal{F}_n) \to \mathbb{E}(\mathbf{1}_F \mid \mathcal{F}_\infty) = \mathbf{1}_F$$

fast sicher. Aber $\mathbf{1}_F$ ist $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$-messbar und dementsprechend ist $\mathbf{1}_F$ unabhängig von $\mathcal{F}_n$. Das heisst

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_F \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_F) = \mathbb{P}(F),$$

also

$$\mathbb{P}(F) = \mathbf{1}_F$$

fast sicher. □

SATZ 3.7 (Levy-Downward-Theorem). *Ist* $X \in \boldsymbol{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *und*

$$\mathcal{G}_{-n} \downarrow \mathcal{G}_{-\infty} := \bigcap_n \mathcal{G}_{-n}$$

eine fallende Folge von σ*-Algebren, so konvergiert* $X_{-n} := \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-n})$ *fast sicher und in* $\boldsymbol{L}^1$ *gegen* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_{-\infty})$.

BEWEIS. siehe Konvergenzsatz 5.3 □

Als nächstes wird noch die *T-gleichgradige Integrierbarkeit* eingeführt und gezeigt, dass jedes gleichgradig integrierbare Martingal auch T-gleichgradig integrierbar ist.(Zur Erinnerung: T ist die Menge aller beschränkten Stoppzeiten bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.)

DEFINITION 3.3. X_n heisst T-gleichgradig integrierbar, falls $\{X_\tau\}_{\tau\in T}$ gleichgradig integrierbar ist.

SATZ 3.8. *Ist* X_n *ein gleichgradig integrierbares Martingal, dann ist* X_n *auch* T*-gleichgradig integrierbar.*

Die Idee des folgenden Beweises stammt aus [**Mey66**], Seite 119

BEWEIS. Ist X_n ein gleichgradig integrierbares Martingal, so gilt $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ für ein $X \in \mathbf{L}^1$. (siehe Satz 3.4 oder Satz 6.1). Nach Lemma 6.2 ist $X_\tau = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\tau)$. Schliesslich ist, nach Satz 6.1 mit $G = T$, $\{X_\tau\}_{\tau\in T}$ gleichgradig integrierbar. □

KAPITEL 4

Martingale und das SGGZ

Zunächst wird eine Verallgemeinerung des SGGZ 1.1 auf Martingaldifferenzen gezeigt, gefolgt von einem Martingalbeweis von Satz 1.6. Danach wird mittels einem „bedingten“ Drei-Reihen-Satzes (Satz 4.2) das nächste SGGZ bewiesen. Dieses sticht hervor, da nicht wie üblich „$\frac{S_n}{n} \to 0$ fast sicher“ gezeigt wird, sondern, für spezielle Ereignisse $F \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(\{\frac{S_n}{n} \to 0\} \setminus F) = 0$. D.h.: Hinreichend für $\frac{S_n}{n} \to 0$ ist das Eintreten von F (Satz 4.3). Als Spezialfall erhält man eine Verallgemeinerung des SGGZ 1.3 auf Martingaldifferenzen (siehe Bemerkung 4.1). Schliesslich wird besagter Satz angewendet um das *Hawkins-Sieb*(Definition 4.2) auf Wachstumseigenschaften zu untersuchen. Zu guter Letzt wird, mit Hilfe einer *Burkholder-Ungleichung*(Satz 4.5), eine verallgemeinerte Version des SGGZ 1.5 bewiesem.

Konvention 4.1. $\{D_n\}_n$ sei, soweit nicht anders gesagt, die Folge der Zuwächse/Differenzen von $\{X_n\}_n$, d.h.

$$D_n := X_n - X_{n-1}.$$

Dabei sei $X_0 \equiv 0$ und $\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \emptyset\}$.

Satz 4.1 (Erstes SGGZ). *Es sei X_n ein Martingal und $b_n \to \infty$. Ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\,|D_k|^2}{b_k^2} < \infty,$$

so ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_1 + \ldots + D_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{b_n} = 0$$

fast sicher.

Beweis. Definiert man

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{b_k}$$

, so ist dieser Prozess, aufgrund von

$$\mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1} + \frac{1}{b_n}\mathbb{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1},$$

ein Martingal. Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_n^2 &= \mathbb{E}Z_{n-1}^2 + 2\mathbb{E}(\mathbb{E}\left(Z_{n-1}\frac{D_n}{b_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)) + \mathbb{E}\left(\frac{D_n}{b_n}\right)^2 \\ &= \mathbb{E}Z_{n-1}^2 + \mathbb{E}\left(\frac{D_n}{b_n}\right)^2 = \ldots = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}D_k^2}{b_k^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}D_k^2}{b_k^2} < \infty\end{aligned}$$

ist (Z_n) $\mathbf{L}^2$-beschränkt und aus dem Konvergenzsatz 2.14 und dem Kronecker-Lemma 1.4 folgt die Behauptung. □

Es existiert auch ein Martingalbeweis des Vierten SGGZ aus Kapitel 1:

Martingalbeweis von Satz 1.6. Es seien $\mathcal{G}_{-n} := \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$ und $\mathcal{G}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{G}_{-n}$. Dann weiss man nach Levy-Downward-Theorem(Satz 3.7), dass

$$\mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_{-n}) \to \mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_{-\infty})$$

fast sicher *und* in $\mathbf{L}^1$. Wir zeigen jetzt, dass

$$\mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_{-n}) = \frac{S_n}{n}:$$

Wegen $\mathcal{G}_{-n} = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ und der Unabhängigkeit der X_k ist

$$\mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_{-n}) = \mathbb{E}(X_1 \mid S_n).$$

Sei F die Verteilungsfunktion von $X_k \sim X$. Dann gilt für jede Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und beliebiges $k = 1, \ldots, n$, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1 \mathbf{1}_{S_n \in B}) &= \int\limits_{\{x_1+\ldots+x_n \in B\}} x_1 \cdot dF(x_1) \ldots dF(x_n) \\
&= \int\limits_{\{x_1+\ldots+x_n \in B\}} x_k \cdot dF(x_1) \ldots dF(x_n) \\
&= \mathbb{E}(X_k \mathbf{1}_{S_n \in B}).
\end{aligned}$$

Also ist

$$S_n = \mathbb{E}(S_n \mid S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k \mid S_n) = n\mathbb{E}(X_1 \mid S_n) = n\mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}_{-n}).$$

Wir erhalten somit, dass $\frac{S_n}{n}$ fast sicher und in $\mathbf{L}^1$ konvergiert. Es ist nur noch der Grenzwert zu identifizieren. Aus dem Beweis von Satz 1.7 geht hervor, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$$

messbar ist bezüglich der asymptotischen σ-Algebra von $\{X_k\}_k$ und nach Satz 3.6 ist daher

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \equiv c) \in \{0, 1\}$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$. Sei $c_0 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \equiv c_0) = 1.$$

Dann folgt mittels $\mathbf{L}^1$-Konvergenz

$$c_0 = \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = \mathbb{E}X.$$

$\square$

Sind $F, G \in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse, so bedeutet "fast sicher gilt $F \Rightarrow G$", dass man mit Wahrscheinlichkeit 1 sagen kann, wenn F eintritt, so auch G. Formal bedeutet das $\mathbb{P}(F \Rightarrow G) = 1$ oder $\mathbb{P}(F \setminus G) = 0$. Das nächste SGGZ (Satz 4.3) wird genau von dieser Form sein, wobei

$$G = \{\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{V_n} = 0\} = \{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{V_n} \sum_{k=1}^{n} D_k = 0\}$$

für bestimmte vorhersagbare Prozesse V_n. Der Beweis ist entnommen aus [**Hey80**], Abschnitt 2.6. Damit wird u.A. das SGGZ 1.11 für **-mixing sequences*(Definition 1.3) gezeigt.

Zunächst wird eine Äquivalenz zur Divergenz eines Martingals mit $\mathbf{L}^1$-dominierten Zuwächsen bewiesen.

Lemma 4.1. *X_n sei zentriertes Martingal mit $\mathbb{E}\sup_{k\in\mathbb{N}} |D_k| < \infty$. Dann gilt fast sicher*

$$X_n \text{ divergiert} \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} X_n = \infty \text{ und } \liminf_{n\to\infty} X_n = -\infty.$$

Beweis. Die Richtung „$\Leftarrow$" ist klar. Für die andere Richtung definiere Stoppzeiten $\sigma_a := \min\{n\,;\ X_n > a\}$ auf $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n > a\}$, ansonsten setze $\sigma_a = \infty$. Dann ist $\tau_n := \sigma_a \wedge n$ eine steigende Folge beschränkter Stoppzeiten und, gemäß Satz 2.4, und der $\mathcal{F}_{\tau_n}$-Messbarkeit von X_{τ_n}, ist X_{τ_n} ein $\{\mathcal{F}_{\tau_n}\}_n$-Martingal. Aus

$$X_{\tau_n}^+ \leq X_{\tau_n - 1}^+ + D_{\tau_n}^+ \leq a + \sup_{k\in\mathbb{N}} D_k^+$$

und

$$0 = \mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_{\tau_n} = \mathbb{E}X_{\tau_n}^+ - \mathbb{E}X_{\tau_n}^-$$

folgt

$$\mathbb{E}\,|X_{\tau_n}| = \mathbb{E}X_{\tau_n}^+ + \mathbb{E}X_{\tau_n}^- = 2\mathbb{E}X_{\tau_n}^+ \leq 2a + 2\mathbb{E}\sup_{k\in\mathbb{N}} D_k^+ < \infty.$$

Dementsprechend ist X_{τ_n} auch $\mathbf{L}^1$-beschränkt und konvergiert nach Satz 2.7 fast sicher.

Auf dem Ereigniss $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n \leq a\}$ ist $\sigma_a = \infty$ und somit jedes $\tau_n = n$. D.h., es gilt fast sicher

$$\sup X_n \leq a \Rightarrow X_n \textit{ konvergiert.}$$

Mit $\{\sup X_n < \infty\} = \{\limsup X_n < \infty\}$ erhält man für $a \to \infty$, dass fast sicher

$$\limsup_{n\to\infty} X_n < \infty \Rightarrow X_n \textit{ konvergiert}$$

gilt bzw.

$$X_n \textit{ divergiert} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} X_n = \infty.$$

Man kann die vorangegangene Argumentation auch für $-X_n$ an Stelle von X_n durchführen und erhält, dass fast sicher

$$X_n \textit{ divergiert} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(-X_n) = -\liminf_{n\to\infty} X_n = \infty.$$

□

Korollar 4.2. *Es seien Z_n, $0 \leq Z_n \leq 1$, $\mathcal{F}_n$-messbare Zufallsvariablen. Dann gilt fast sicher*

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) < \infty.$$

Es seien $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $F_n \in \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Dann gilt fast sicher

$$w \in \limsup_{n\to\infty} F_n \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_{n+1} \mid Y_1, \dots, Y_n)(w) = \infty.$$

Beweis. Man definiert $D_k := Z_k - \mathbb{E}(Z_k \mid \mathcal{F}_{k-1})$. Dann ist $X_n := \sum_{k=1}^{n} D_k$ ein zentriertes Martingal.

Ist nun einerseits $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n < \infty$, dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} Z_n < \infty$$

oder andererseits $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) < \infty$, so ist

$$\liminf_{n\to\infty} X_n \geq -\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) > -\infty.$$

In jedem Fall folgt aus Lemma 4.1, dass X_n konvergiert. Aber es gilt

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}).$$

Das heisst, wenn eine der beiden Reihen konvergiert, so konvergiert auch die andere.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten, indem man bemerkt, dass

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{F_{n+1}} = \infty\}$$

und

$$\mathbb{P}(F_{n+1} \mid Y_1, \ldots, Y_n) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{F_{n+1}} \mid Y_1, \ldots, Y_n).$$

□

Lemma 4.3. *$X_n \in \boldsymbol{L}^2$ sei zentriertes Martingal. Dann gilt fast sicher*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(D_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) < \infty \Rightarrow X_n \text{ konvergiert.}$$

Beweis. Sei $a > 0$. Definiere die Stoppzeit $\tau := \min\{n\,;\ \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(D_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) > a\}$ auf $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(D_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) > a\}$, ansonsten setze $\tau = \infty$. $\{X_{\tau\wedge n}\}_n$ ist ein Martingal mit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_{\tau\wedge n}^2 &= \mathbb{E}\mathbb{E}((X_{\tau\wedge(n-1)} + D_n\mathbf{1}_{\{\tau\geq n\}})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \mathbb{E}(X_{\tau\wedge(n-1)}^2 + D_n^2\mathbf{1}_{\{\tau\geq n\}}) = \ldots = \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} D_k^2\mathbf{1}_{\{\tau\geq k\}} \\
&= \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\tau\geq k\}}\mathbb{E}(D_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1})) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n\wedge\tau} \mathbb{E}(D_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1})) \leq a.
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.14 konvergiert $\{X_{\tau\wedge n}\}_n$ fast sicher und somit gilt fast sicher

$$\tau = \infty \Rightarrow X_n \textit{ konvergiert.}$$

D.h. für jedes $a > 0$ ist

$$\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(D_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leq a \Rightarrow X_n \textit{ konvergiert}) = 1.$$

Die Behauptung folgt nun indem man $a \to \infty$ laufen lässt. □

Der nächste Satz ist eine Art von bedingtem *Drei-Reihen-Satz*(vgl. Lemma 1.6 und Bemerkung 1.2).

Satz 4.2. *Es sei $c > 0$. Dann folgt fast sicher aus der Konvergenz der Reihen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(D_k^c \mid \mathcal{F}_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}((D_k^c)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) - (\mathbb{E}(D_k^c \mid \mathcal{F}_{k-1}))^2$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|D_k| \geq c \mid \mathcal{F}_{k-1}),$$

dass auch X_n konvergiert.(Zu „X^c“ siehe Konvention 1.2)

Beweis. Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|D_k| \geq c \mid \mathcal{F}_{k-1}) < \infty$, so folgt aus der zweiten Aussage von Lemma 4.2, dass, für fast alle $k \in \mathbb{N}$, $|D_k| < c$ gilt. Insbesondere konvergiert $X_n = \sum_{k=1}^{n} D_k$ genau dann wenn $\sum_{k=1}^{\infty} D_k^c < \infty$. Wenn zusätzlich $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(D_k^c \mid \mathcal{F}_{k-1}) < \infty$, so konvergiert $X_n = \sum_{k=1}^{n} D_k$ genau dann, wenn $Y_n := \sum_{k=1}^{n} D_k^c - \mathbb{E}(D_k^c \mid \mathcal{F}_{k-1})$ konvergiert. Aber es ist $Y_n \in \mathbf{L}^2$ ein zentriertes Martingal. Sind $D_{k,Y}$ die Zuwächse von Y_n, so muss nach Lemma 4.3 noch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(D_{k,Y}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) < \infty$$

gezeigt werden. Das folgt aber aus der dritten Reihenkonvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}((D_k^c)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) - (\mathbb{E}(D_k^c \mid \mathcal{F}_{k-1}))^2 < \infty,$$

via

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_{k,Y}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}((D_k^c - \mathbb{E}(D_k^c \mid \mathcal{F}_{k-1}))^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \mathbb{E}((D_k^c)^2 - 2D_k^c \mathbb{E}(D_k^c \mid \mathcal{F}_{k-1}) + \mathbb{E}(D_k^c \mid \mathcal{F}_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \mathbb{E}((D_k^c)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) - (\mathbb{E}(D_k^c \mid \mathcal{F}_{k-1}))^2. \end{aligned}$$

□

Nun verallgemeinert man Lemma 4.3

LEMMA 4.4. *X_n sei ein Martingal und $1 \leq p \leq 2$. Dann gilt fast sicher*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}) < \infty \Rightarrow X_n \text{ konvergiert.}$$

BEWEIS. Man zeigt, dass unter $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}) < \infty$ alle drei Reihen aus Satz 4.2 konvergieren. Aus

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(D_k^c \mid \mathcal{F}_{k-1})| &= \left|\mathbb{E}(D_k \mathbf{1}_{\{|D_k|>c\}} \mid \mathcal{F}_{k-1})\right| \leq \mathbb{E}(|D_k| \mathbf{1}_{\{|D_k|>c\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\ &\leq \mathbb{E}(\frac{|D_k|^{p-1}}{c^{p-1}} |D_k| \mathbf{1}_{\{|D_k|>c\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leq c^{1-p} \mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}) \end{aligned}$$

folgt die Konvergenz der ersten Reihe. Die zweite Reihe konvergiert wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_k^2 \mathbf{1}_{\{|D_k|\leq c\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}) - (\mathbb{E}(D_k \mathbf{1}_{\{|D_k|\leq c\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}))^2 &\leq \mathbb{E}(D_k^2 \mathbf{1}_{\{|D_k|\leq c\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\ &\leq \mathbb{E}(\frac{|D_k|^{p-2}}{c^{p-2}} D_k^2 \mathbf{1}_{\{|D_k|\leq c\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\ &\leq c^{2-p} \mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}). \end{aligned}$$

Die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|D_k| \geq c \mid \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{|D_k|\geq c\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\ &\leq \mathbb{E}(\frac{|D_k|^p}{c^p} \mathbf{1}_{\{|D_k|\geq c\}} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \\ &\leq c^{-p} \mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}) \end{aligned}$$

liefert schliesslich die Konvergenz der dritten Reihen. □

SATZ 4.3 (Zweites SGGZ). *X_n sei ein Martingal und $V_n > 0$ sei ein vorhersagbarer Prozess. Ist $1 \leq p \leq 2$, dann gelten fast sicher*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{V_k^p} \mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}) < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{V_k} \text{ konvergiert}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{V_k^p} \mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}) < \infty,\ V_n \to \infty \Rightarrow \frac{X_n}{V_n} \to 0.$$

Ist $p > 2$, dann gilt fast sicher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{V_k} < \infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{V_k^{1+\frac{p}{2}}} \mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}) < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{V_k} \text{ konvergiert und } \frac{X_n}{V_n} \to 0.$$

Bemerkung 4.1. Man sieht , dass man, mit dem ersten Teil des Satzes, aus $0 < a_n \to \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|D_k|^p}{a_k^p} < \infty$ sofort

$$\frac{X_n}{a_n} \to 0$$

fast sicher erhält. Man hat somit eine Erweiterung von Satz 1.3 von unabhängigen Zufallsvariablen auf Martingaldifferenzen.

Beweis. Zunächst erkennt man, dass $Y_n := (\frac{1}{V} \bullet X)_n$(siehe auch Abschnitt 1) ein Martingal ist.

Es sei $1 \leq p \leq 2$.

Die erste Aussage ist eine einfache Anwendung von Lemma 4.4 auf das Martingal Y_n. Um zu zeigen, dass $\frac{X_n}{V_n} \to 0$ gilt, wende das Kronecker-Lemma 1.4 an.

Nun sei $p > 2$.

Da aus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_n} < \infty$ insbesondere $V_n \to \infty$ folgt, ist klar, dass man, wie eben, aus $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{V_k} < \infty$ mittels Kronecker-Lemma $\frac{X_n}{V_n} \to 0$ schliesst. Es ist also nur die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{D_k}{V_k}$ zu zeigen. Das soll wieder mit Hilfe von Lemma 4.4 geschehen. Dazu definiere zunächst die Zuwächse $D_{k,Y} := \frac{D_k}{V_k}$ von Y_n.

- Wenn $(\mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}))^{\frac{2}{p}} > V_k$, dann ist
$$\begin{aligned}(\mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}))^{\frac{2}{p}} &= \mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1})(\mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}))^{\frac{2}{p}-1} \\ &< \mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1})V_k^{1-\frac{p}{2}}.\end{aligned}$$
Mittels Jensen-Ungleichung für den bedingten Erwartungswert erhält man daraus die Abschätzung
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_{k,Y}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \frac{1}{V_k^2}\mathbb{E}(D_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) &\leq \frac{1}{V_k^2}(\mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}))^{\frac{2}{p}} \\ &< V_k^{-1-\frac{p}{2}}\mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}).\end{aligned}$$
- Wenn $(\mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}))^{\frac{2}{p}} \leq V_k$, so ist
$$\mathbb{E}(V_k^2 D_{k,Y}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(D_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leq (\mathbb{E}(|D_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}))^{\frac{2}{p}} \leq V_k.$$

In jedem Fall gilt

$$\mathbb{E}(D_{k,Y}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leq \max(V_k^{-1}, V_k^{-1-\frac{p}{2}}\mathbb{E}(|D_k|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1})).$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(D_{k,Y}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} V_k^{-1} + V_k^{-1-\frac{p}{2}}\mathbb{E}(|D_k|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}) < \infty$$

und die Behauptung folgt wieder aus Lemma 4.4. □

Anwendung 4.2. Obiges SGGZ kann u.a. dazu benutzt werden, um zu zeigen, dass das sogenannte *Hawkins-Sieb* zwei Konvergenzeigenschaften ähnlich der Folge $\{p_n\}_n$ der geordneten Primzahlen besitzt(Satz 4.4). Diese Anwendung findet man in [**Hey80**], Abschnitt 7.4.

Definition 4.2. Man definiert das *Hawkins-Sieb* rekursiv via:

$A_1 := \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $X_1 := \min A_1 = 2$ und definiert, für $k \geq 1$, A_{k+1} als die Menge, die aus A_k entsteht indem man jedes Element, unabhängig von den anderen, entweder mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{X_k}$ entfernt oder mit $1 - \frac{1}{X_k}$ belässt. Schliesslich setzt man $X_{k+1} := \min A_{k+1}$.

Der Idee des Hawkins-Siebs liegt folgendes deterministisches Verfahren zur „Aussiebung“ von Primzahlen nach *Eratosthenes* zugrunde: Man notiert sich Zahlen $2, \ldots, n$ in einer Liste. Die 2 ist eine Primzahl. Nun streicht man alle Vielfachen von 2 aus der Liste. Die kleinste übrigbleibende Zahl, also die 3, ist eine Primzahl. Nun streicht man alle Vielfachen von 3 aus der Liste. Die kleinste übrigbleibende Zahl, also die 5, ist eine Primzahl. Nun streicht man alle Vielfachen von 5 aus der Liste, usw. Im Hawkins-Sieb, geschieht die „Löschung“ hingegen nicht regelmässig, sondern mit einer, durch das Eratosthenes-Sieb „vorgeschlagenen“, Wahrscheinlichkeit.

Das nächste Ergebnis kann in [**Wri54**],Theoreme 8 und 429, nachgelesen werden.

SATZ 4.4. *Es sei* $\{p_n\}_n$ *die Folge der geordneten Primzahlen,* γ *die* Euler-Konstante *und*

$$y_n := \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{p_k})^{-1}.$$

Dann gilt

$$\frac{p_n}{n\log n} \to 1$$

und

$$\frac{y_n}{\log n} \to \exp(\gamma).$$

Es sei X_n ein *Hawkins-Sieb* und definiert man nun analog $Y_n := \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{X_k})^{-1}$, so kann gezeigt werden([**Wun74**]), dass $\frac{X_n}{n\log n} \to 1$ und $\frac{Y_n}{\log n} \to 1$ fast sicher. Im Folgenden wird, als Anwendung des SGGZ 4.3, die Äquivalenz dieser beiden Konvergenzen gezeigt.

BEWEIS. Definiere $Z_n := X_n - 1$ und $U_{n+1} := \frac{Z_{n+1}-Z_n}{Y_n}$. Um die Äquivalenz zu erhalten, ist es hinreichend zu zeigen, dass

$$\frac{Z_n}{nY_n} \to 1$$

fast sicher:

Definiere $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n = j \mid \mathcal{F}_n) = Y_n^{-1}(1-Y_n^{-1})^{j-1}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U_{n+1}-1 \mid \mathcal{F}_n) &= \frac{1}{Y_n}\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n \mid \mathcal{F}_n) - 1 = \frac{1}{Y_n^2}\sum_{j=1}^{\infty} j(1-Y_n^{-1})^{j-1} - 1 \\
&= \frac{1}{Y_n^2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{\infty} x^j\right) \mid_{x=1-Y_n^{-1}} - 1 \\
&= \frac{1}{Y_n^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) \mid_{x=1-Y_n^{-1}} - 1 = 0
\end{aligned}$$

sind die $U_{k+1}-1$ Zuwächse eines $\mathcal{F}_n$-Martingals. Analog zeigt man, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((U_{n+1}-1)^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(U_{n+1}^2 - 2U_{n+1} + 2 - 1 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(U_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) - 1 = 1 - \frac{1}{Y_n} \leq 1.
\end{aligned}$$

Nach Satz 4.3 folgt, mit $p = 2$ und $V_n = n$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{k+1} - 1 \to 0$$

fast sicher.

Es sei $\Omega_0 := \{w \in \Omega\,;\ \lim_{n\to\infty} Y_n(w) =: Y(w) < \infty\}$. Auf Ω_0 ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Z_n} < \infty,$$

denn mit

$$\frac{Y_{n+1}}{Y_n} = \left(1 - \frac{1}{X_{n+1}}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{Z_{n+1}}$$

ist dies genau dann der Fall, wenn $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_{n+1}}{Y_n} - 1 < \infty$. Wegen $Y_n \geq 1$ ist auf Ω_0

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_{n+1}}{Y_n} - 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n+1} - Y_n = (Y - Y_1) < \infty.$$

Aus dem Töplitz-Lemma folgt, mit $a_{nk} = \frac{U_{k+1}}{n}$ und $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} U_{k+1} \to 1$, dass auf Ω_0 auch

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{U_{k+1}}{n} Y_k \to Y.$$

Aber $\sum_{k=1}^{n} \frac{U_{k+1}}{n} Y_k = \frac{1}{n}(Z_{n+1} - 1)$, also

$$\frac{1}{n} Z_{n+1} \to Y.$$

Demnach muss, da auf Ω_0 $Y < \infty$, auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z_n} = \infty$$

gelten. Dies wäre ein Widerspruch falls Ω_0 *keine* Nullmenge ist oder anders ausgedrückt:

Y_n konvergiert fast sicher gegen ∞.

$$\begin{aligned} X_{n+1}Y_n + Y_{n+1} &= X_{n+1}Y_n + \frac{X_{n+1}}{X_{n+1}-1} Y_n = X_{n+1}\left(\frac{X_{n+1}}{X_{n+1}-1}\right) Y_n \\ &= X_{n+1}Y_{n+1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \frac{Z_{n+1}Y_{n+1}^{-1} - Z_n Y_n^{-1}}{U_{n+1} - Y_{n+1}^{-1}} &= \frac{Z_{n+1}Y_n - Z_n Y_{n+1}}{(Z_{n+1} - Z_n)Y_{n+1} - Y_n} \\ &= \frac{X_{n+1}Y_n - Y_n - X_n Y_{n+1} + Y_{n+1}}{X_{n+1}Y_{n+1} - X_n Y_{n+1} - Y_n} = 1. \end{aligned}$$

Also gilt

$$Z_{n+1}Y_{n+1}^{-1} - Z_n Y_n^{-1} = U_{n+1} - Y_{n+1}^{-1} = U_{n+1} + o(1).$$

Summiert man bis n und dividiert anschliessend durch n, so erhält man

$$\frac{Z_{n+1}Y_{n+1}^{-1}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{k+1} + o(1) \to 1$$

fast sicher. Das heisst auch, dass

$$\frac{Z_n}{nY_n} = \frac{Z_n Y_n^{-1}}{n-1}\frac{n-1}{n} \to 1$$

fast sicher. □

Der Beweis des nächsten SGGZ(Satz 4.6) ist, im wesentlichen, entnommen aus [**Tei97**], Abschnitt 11.2. Das Haupthilfsmittel, die *Burkholder-Ungleichung*(Satz 4.5), wird zunächst mit einigen Lemmas vorbereitet.

Lemma 4.5. *X_n sei Martingal oder nichtnegatives Submartingal und $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt. τ sei eine Stoppzeit. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\,|X_\tau| \le 4 \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|X_n|\,.$$

Beweis. $1 \le n \wedge \tau \le n$ sind beschränkte Stoppzeiten und X_n^+ ist ein Submartingal. Also ist $\mathbb{E}X_{n\wedge\tau}^+ \le \mathbb{E}X_n^+$ und $\mathbb{E}X_1 \le \mathbb{E}X_{n\wedge\tau}$. Mittels Fatou-Lemma folgt aus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|X_{\tau\wedge n}|\,\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \le \mathbb{E}\,|X_{\tau\wedge n}| &= 2\mathbb{E}X_{\tau\wedge n}^+ - \mathbb{E}X_{\tau\wedge n} \le 2\mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_1 \\ &\le 2\mathbb{E}\,|X_n| + \mathbb{E}\,|X_1| \le 3\mathbb{E}\,|X_n| \le 3\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,|X_k| \end{aligned}$$

und $X_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \to X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}$, dass

$$\mathbb{E}\,|X_\tau|\,\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \le 3\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,|X_k|\,.$$

X_n konvergiert fast sicher gegen ein $X_\infty \in \mathbf{L}^1$ und dementsprechend konvergiert $X_{\tau\wedge n}\mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}} \to X_\infty \mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}}$. Und man erhält, wieder mit Hilfe des Fatou-Lemma, dass

$$\mathbb{E}\,|X_\infty|\,\mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}} = \mathbb{E}\lim_{n\to\infty}|X_{\tau\wedge n}|\,\mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}} \le \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}\,|X_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\,|X_n|\,.$$

□

Lemma 4.6. *X_n sei ein Martingal oder ein nichtnegatives Submartingal und $a > 0$. Dann gilt*

$$a\mathbb{P}((\sum_{k=1}^{\infty} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > a,\ \sup_{k\in\mathbb{N}}|X_k| \le a) \le 8\sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\,|X_k|\,.$$

Beweis. Definiere $X^* := \sup_{k\in\mathbb{N}}|X_k|$, $X_0 := 0$, $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}_1$ und $\tau := \inf\{k\,;\ |X_k| > a\}$. Dann ist

$$a\mathbb{P}((\sum_{k=1}^{\infty} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > a,\ X^* \le a) \le a\mathbb{P}((\sum_{k=1}^{\tau-1} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > a),$$

da, auf $\{X^* \le a\}$, $\tau - 1 = \infty$ ist. Mittels Markov-Ungleichung folgt daraus

$$a\mathbb{P}((\sum_{k=1}^{\infty} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > a,\ X^* \le a) \le a^{-1}\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau-1} D_k^2.$$

Da für nicht-L^1-beschränktes X_n die Behauptung sowieso stimmt, kann man auch die $\mathbf{L}^1$-Beschränkheit annehmen. Man möchte nun zeigen, dass $\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau-1} D_k^2 \le 2a\sup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}\,|X_k|$, womit die Behauptung bewiesen wäre:

Da X_n $\mathbf{L}^1$-beschränkt ist, konvergiert X_n fast sicher nach Satz 2.7 und nach Lemma 4.5 folgt

$$\mathbb{E}\,|X_\tau X_{\tau-1}| \le a\mathbb{E}\,|X_\tau| \le 4a\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\,|X_k| \le 4a\sup_{k\to\infty}\mathbb{E}\,|X_k|\,.$$

Man zeigt nun noch, dass $\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau-1} D_k^2 \le 2\mathbb{E}\,|X_\tau X_{\tau-1}|$.

$$\sum_{k=1}^{n} D_k^2 \le \sum_{k=1}^{n} D_k^2 + X_n^2 = \ldots = 2\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} X_k X_{k+1}\right) = 2(X_n X_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} X_k D_{k+1}).$$

Man sieht schnell, dass $\sum_{k=1}^{n-1} X_k D_{k+1}$ ein $\mathcal{F}_n$-Submartingal ist. Nach Satz 2.19 ist

$$0 \le \mathbb{E}X_1\mathbb{E}(X_2 - X_1 \mid \mathcal{F}_1) = \mathbb{E}X_1 D_2 \le \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau\wedge n-1} X_k D_{k+1}.$$

Daher ist

$$\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau\wedge n-1} D_k^2 \le 2\mathbb{E}X_{\tau\wedge n-1}X_{\tau\wedge n}.$$

Um auf der rechten Seite Limes und Erwartungswert tauschen zu können, zeigt man noch, dass $X_{\tau\wedge n-1}X_{\tau\wedge n}$ $\mathbf{L}^1$-dominiert ist. Wegen $|X_{\tau\wedge n-1}X_{\tau\wedge n}| \le a(a + |X_\tau|)$ folgt dies aus Lemma 4.5. □

Lemma 4.7. *$X_n \in \boldsymbol{L}^p$ sei ein positives Submartingal und $p > 1$. Dann gilt*

$$\left\|(\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\boldsymbol{L}^p} \le A(p)\,\|X_n\|_{\boldsymbol{L}^p}\,.$$

Beweis. Es seien $a, b > 0$. Definiere $Y_n := X_n\mathbf{1}_{\{(\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{a}{b}\}}$. Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n \mid \mathcal{F}_n) &\ge \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)\mathbf{1}_{\{(\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{a}{b}\}} \mid \mathcal{F}_n)\\ &= \mathbf{1}_{\{(\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{a}{b}\}}\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n) \ge 0\end{aligned}$$

ist $Y_n \ge 0$ ein Submartingal. Definiere nun $\tau := \inf\{n \ge 1\,;\ (\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{a}{b}\}$, $X_n^* := \sup_{k\le n}|X_k|$ und $c := (1 + 2b^2)^{\frac{1}{2}}$. Man möchte zunächst zeigen, dass auf der Menge $\{(\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{ac}{b},\ X_n^* \le a\}$ schon $(\sum_{k=1}^{n} D_{k,Y}^2)^{\frac{1}{2}} > a$ gilt.(Dabei sind $D_{k,Y}$, wie gehabt, die Zuwächse von Y_n.):

Auf der angegebenen Menge gilt $\tau \leq n$, $Y_n^* \leq a$ sowie $|D_\tau| \leq X_\tau \vee X_{\tau-1} \leq X_n^* \leq a$. Also ist

$$\begin{aligned}\frac{a^2(1+2b^2)}{b^2} &< \sum_{k=1}^{n} D_k^2 = \sum_{k=1}^{\tau-1} D_k^2 + D_\tau^2 + \sum_{k=\tau+1}^{n} D_k^2 \\ &\leq \frac{a^2}{b^2} + a^2 + \sum_{k=\tau+1}^{n} D_{k,Y}^2 \leq \frac{a^2}{b^2} + a^2 + \sum_{k=1}^{n} D_{k,Y}^2.\end{aligned}$$

(Man beachte, dass für $k > \tau$ automatisch $D_{k,Y} = D_k$!) Wenn man $\frac{a^2}{b^2} + a^2$ auf beiden Seiten abzieht erhält man

$$(\sum_{k=1}^{n} D_{k,Y}^2)^{\frac{1}{2}} > a.$$

Nun wendet man Lemma 4.6 auf das Submartingal $(Y_1, \dots, Y_n, Y_n, \dots)$ an:

$$a\mathbb{P}((\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{ac}{b},\, X_n^* \leq a) \leq a\mathbb{P}((\sum_{k=1}^{n} D_{k,Y}^2)^{\frac{1}{2}} > a,\, Y_n^* \leq a) \leq 8 \sup_{k \leq n} \mathbb{E}\,|Y_k| = 8\mathbb{E}\,|Y_n|\,.$$

Nun benötigt man eine weitere Hilfsfolge $Z_n := b(\sum_{k=1}^n D_k^2)^{\frac{1}{2}}) \vee X_n^*$. Man sieht, dass $Z_n \in \mathbf{L}^p$. Aus der letzten Abschätzung und Satz 2.12 folgt

$$\begin{aligned}a\mathbb{P}(Z_n > ac) &\leq a\mathbb{P}(X_n^* > a) + a\mathbb{P}((\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{ac}{b},\, X_n^* \leq a) \leq \mathbb{E}X_n\mathbf{1}_{\{X_n^* > a\}} + 8\mathbb{E}\,|Y_n| \\ &\leq \mathbb{E}X_n\mathbf{1}_{\{Z_n > a\}} + 8\mathbb{E}X_n\mathbf{1}_{\{b(\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} > a\}} \leq 9\mathbb{E}X_n\mathbf{1}_{\{Z_n > a\}}.\end{aligned}$$

Zusammen mit Korollar 1.8, der *Hölder-Ungleichung* und dem *Satz von Fubini* schliesst man daraus

$$\begin{aligned}c^{-p}\mathbb{E}Z_n^p &= p\int_0^\infty a^{p-1}\mathbb{P}(Z_n > ac)da \leq 9p\int_0^\infty a^{p-2}\mathbb{E}X_n\mathbf{1}_{\{Z_n > a\}}da \\ &= 9p\mathbb{E}(X_n\int_0^{Z_n} a^{p-2}da) = \frac{9p}{p-1}\mathbb{E}X_n Z_n^{p-1} \leq \frac{9p}{p-1}\,\|X_n\|_{\mathbf{L}^p}\,\|Z_n\|_{\mathbf{L}^p}^{p-1}\,.\end{aligned}$$

Teilt man durch $\|Z_n\|_{\mathbf{L}^p}^{p-1}$ und benutzt, dass $(\sum_{k=1}^n D_k^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{Z_n}{b}$ ist, so erhält man

$$\left\|(\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathbf{L}^p} \leq \frac{1}{b}\,\|Z_n\|_{\mathbf{L}^p} \leq \frac{9pc^p}{b(p-1)}\,\|X_n\|_{\mathbf{L}^p}\,.$$

□

Satz 4.5 (Eine Burkholder-Ungleichung). *$X_n \in \boldsymbol{L}^p$ sei ein Martingal und $p > 1$. Dann gilt*

$$\|X_n\|_{\boldsymbol{L}^p} \leq C(p)\left\|(\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\boldsymbol{L}^p}.$$

Bemerkung 4.3. Für $p = 2$ hat die Burkholder-Ungleichung eine besonders einfache Form: $\mathbb{E}X_n^2 \leq C\sum_{k=1}^n \mathbb{E}D_k^2$ für ein $C > 0$.

Beweis von 4.5. Mit $X_0 := X_1$ und $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}_1$ ist $\{X_n\}_{n\geq 0}$ immer noch ein $\mathbf{L}^p$-Martingal. Definiert man weiterhin $Y_k := \mathbb{E}(X_n^+ \mid \mathcal{F}_k)$ und $Z_k := \mathbb{E}(X_n^- \mid \mathcal{F}_k)$ so sind Y_n und Z_n positive Martingale. $D_{k,Y}$ bzw. $D_{k,Z}$ seien die Zuwächse von Y_k bzw. Z_k. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} &= (\sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{k-1}))^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sum_{k=1}^{n}(D_{k,Y} - D_{k,Z})^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{k=1}^{n} D_{k,Y}^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{n} D_{k,Z}^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.7 gilt somit

$$\left\| (\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq A(p)(\|Y_n\|_{\mathbf{L}^p} + \|Z_n\|_{\mathbf{L}^p}) \leq 2A(p) \|X_n\|_{\mathbf{L}^p} .$$

Diese Burkholder-Unlgeichung in die „andere Richtung“ wird nun benutzt um die zu Beweisende zu zeigen. O.B.d.A. kann man annehmen, dass $\|X_n\|_{\mathbf{L}^p} > 0$ ist. Definiere Y_k neu via $Y_n := \operatorname{sgn}(X_n) |X_n|^{p-1} \cdot \|X_n\|_{\mathbf{L}^p}^{1-p}$, $Y_k := \mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_k)$ und $Y_0 := Y_1$. Y_k ist nicht nur ein Martingal, sondern für q so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist $Y_k \in \mathbf{L}^q$. Man berechnet auch schnell, dass $\|Y_n\|_{\mathbf{L}^q} = 1$ und

$$\begin{aligned} \|X_n\|_{\mathbf{L}^p} &= \mathbb{E}(X_n Y_n) = \mathbb{E}(X_{n-1} + D_n)(Y_{n-1} + D_{n,Y}) \\ &= \mathbb{E}(X_{n-1}Y_{n-1} + D_n D_{n,Y}) = \ldots = \mathbb{E} \sum_{k=1}^{n} D_k D_{k,Y}. \end{aligned}$$

Mit der *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* und der Hölder-Ungleichung folgt daraus

$$\|X_n\|_{\mathbf{L}^p} \leq \mathbb{E} \sum_{k=1}^{n} |D_k D_{k,Y}| \leq \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} D_{k,Y}^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| (\sum_{k=1}^{n} D_k^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{L}^p} \left\| (\sum_{k=1}^{n} D_{k,Y}^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{L}^q} .$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$\left\| (\sum_{k=1}^{n} D_{k,Y}^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{L}^q} \leq 2A(q) \|Y_n\|_{\mathbf{L}^q} = 2A(q) =: C(p).$$

□

Lemma 4.8. *Es seien $p \geq 1$ und $a_1, \ldots, a_n \geq 0$. Dann gilt*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^p \leq n^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right).$$

Beweis. Mittels Hölder-Ungleichung sieht man, dass, für $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot a_k \leq n^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Da $\frac{p}{q} = p - 1$, folgt daraus die Behauptung. □

Lemma 4.9. *$X_n \geq 0$ sei ein Submartingal und $V_n \geq 0$ ein vorhersagbarer und fallender Prozess. Es sei $a > 0$. Dann gilt*

$$a\mathbb{P}(\max_{1 \leq m \leq n} V_m X_m \geq a) + \mathbb{E} V_n X_n \mathbf{1}_{\{\max_{1 \leq m \leq n} V_m X_m < a\}} \leq \mathbb{E}(V \bullet X)_n$$

Beweis. Definiere die Stoppzeit $\tau := \inf\{m\, ;\ V_m X_m \geq a\}$.

$$\begin{aligned} &a\mathbb{P}(\max_{1 \leq m \leq n} V_m X_m \geq a) + \mathbb{E} V_n X_n \mathbf{1}_{\{\max_{1 \leq m \leq n} V_m X_m < a\}} \\ &\leq \mathbb{E} V_\tau X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq n\}} + \mathbb{E} V_n X_n \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} = \mathbb{E} V_{\tau \wedge n} X_{\tau \wedge n}. \end{aligned}$$

Es ist noch zu zeigen, dass $\mathbb{E} V_{\tau \wedge n} X_{\tau \wedge n} \leq \mathbb{E}(V \bullet X)_n$:

Setzt man $X_0 := 0$, $V_0 := V_1$ und $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}_1$, dann ist $Y_n := V_n X_n - \sum_{k=1}^{n} (V_k \mathbb{E}(D_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + (V_k - V_{k-1}) X_{k-1})$ wegen

$$\mathbb{E}(Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(V_n X_n - V_n \mathbb{E}(D_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - (V_n - V_{n-1}) X_{n-1} - V_{n-1} X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$$

ein Martingal. Nach Satz 2.18 gilt

$$\mathbb{E} Y_{\tau \wedge n} = \mathbb{E} Y_1 = \mathbb{E}(V_1 X_1 - V_1 \mathbb{E}(X_1 - X_0 \mid \mathcal{F}_0) - (V_1 - V_0) X_0) = \mathbb{E} V_0 X_0 = 0$$

und daher auch

$$\mathbb{E} V_{\tau \wedge n} X_{\tau \wedge n} = \mathbb{E} \sum_{k=1}^{\tau \wedge n} (V_k \mathbb{E}(D_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + (V_k - V_{k-1}) X_{k-1}).$$

Jetzt nutzt man aus, dass $V_n \downarrow$ und $X_n \geq 0$ um $\mathbb{E}V_{\tau\wedge n}X_{\tau\wedge n} \leq \mathbb{E}\sum\limits_{k=1}^{\tau\wedge n} V_k\mathbb{E}(D_k \mid \mathcal{F}_{k-1})$ zu deduzieren. Die Behauptung folgt nun aus

$$\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau\wedge n} V_k\mathbb{E}(D_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leq \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} V_k\mathbb{E}(D_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{E}(V \bullet X)_n.$$

□

Bemerkung 4.4. Obiges Lemma ist eine Verallgemeinerung von Satz 2.12, da besagter Satz sich ergibt, wenn man $V_n \equiv 1$ setzt.

Satz 4.6 (Drittes SGGZ). *Es sei X_n ein Martingal und $p \geq 2$. Dann folgt aus $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|D_k|^p}{k^{\frac{p}{2}+1}} < \infty$, dass*

$$\frac{X_n}{n} \to 0$$

fast sicher.

Dieser Satz wurde erstmals von Chow in [**Cho67**] bewiesen.

Beweis. Es sei $a > 0$. Lemma 4.9 angewendet auf das Submartingal $\{|X_n|^p\}_{n\geq k}$ ergibt

$$a^p\mathbb{P}(\sup_{m\geq k}\frac{|X_m|}{m} \geq a) = a^p \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\max_{k\leq m\leq n}\frac{|X_m|^p}{m^p} \geq a^p) \leq$$
$$\frac{\mathbb{E}\,|X_k|^p}{k^p} + \sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{1}{m^p}\mathbb{E}(|X_m|^p - |X_{m-1}|^p)$$

HS 1. $\frac{\mathbb{E}|X_k|^p}{k^p} \to 0$

HS 2. $\sum\limits_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^p}\mathbb{E}(|X_m|^p - |X_{m-1}|^p) \to 0$

Aus den Hilfssätzen 1 und 2 folgt für beliebiges $a > 0$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(\sup_{m\geq k}\frac{|X_m|}{m} \geq a) = 0$$

und mit Hilfe von Satz B.1 aus dem Anhang folgt die Behauptung.

Beweis von Hilfssatz 1. Nach Burkholder-Ungleichung und Lemma 4.8 ist

$$\mathbb{E}\,|X_k|^p \leq C(p)\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{k} D_i^2)^{\frac{p}{2}} \leq C(p)\mathbb{E}k^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=1}^{k}|D_i|^p.$$

Mit Kronecker-Lemma und der vorausgesetzten Reihenkonvergenz folgt daraus $\frac{\mathbb{E}|X_k|^p}{k^p} \to 0$. □

Beweis von Hilfssatz 2. Man zeigt, dass $\sum\limits_{m=2}^{k} \frac{1}{m^p}\mathbb{E}(|X_m|^p - |X_{m-1}|^p)$ konvergiert: Wie in Hilfssatz 1 verwendet man die Burkholder-Ungleichung und Lemma 4.8 um

$$\sum_{m=2}^{k}\frac{1}{m^p}\mathbb{E}(|X_m|^p - |X_{m-1}|^p) \leq \sum_{m=2}^{k}(\frac{1}{(m-1)^p} - \frac{1}{m^p})\mathbb{E}\,|X_{m-1}|^p + \mathbb{E}\frac{|X_k|^p}{k^p}$$
$$\leq C(p)\sum_{m=1}^{k-1}(\frac{1}{m^p} - \frac{1}{(m+1)^p})\mathbb{E}(m^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=1}^{m}|D_i|^p) + \mathbb{E}\frac{|X_k|^p}{k^p}.$$

zu erhalten. Nach Hilfssatz 1 konvergiert der zweite Term für $k \to \infty$ gegen Null . Mit der *Regel von l'Hospital* sieht man, dass $(\frac{1}{m^p} - \frac{1}{(m+1)^p})m^{p+1} = (1 - (\frac{m}{m+1})^p)m$ konvergiert; insbesondere ist

$$(\frac{1}{m^p} - \frac{1}{(m+1)^p})m^{\frac{p}{2}-1} = O(\frac{1}{m^{\frac{p}{2}+2}})$$

und dementsprechend muss man nur noch zeigen, dass $\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m^{\frac{p}{2}+2}}\mathbb{E}\sum_{i=1}^{m}|D_i|^p$ konvergiert:

Es existiert eine Konstante $A > 0$ derart, dass

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{p}{2}+2}} \leq \int\limits_{n-1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{p}{2}+2}} = \frac{1}{\frac{p}{2}+1} \frac{1}{(n-1)^{\frac{p}{2}+1}} \leq A \frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}.$$

Damit und mit der vorausgesetzten Reihenkonvergenz folgt

$$\mathbb{E}\,|D_1|^p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{p}{2}+2}} + \mathbb{E}\,|D_2|^p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{p}{2}+2}} + \mathbb{E}\,|D_3|^p \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{p}{2}+2}} + \ldots \leq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\,|D_n|^p}{n^{\frac{p}{2}+1}} < \infty.$$

Die linke Reihe kann beliebig umgeordnet werden, da sie nur positive Summanden enthält und daher schon absolut konvergiert. Insbesondere kommt man so (bis auf endlich viele Summanden) auf $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{p}{2}+2}} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{m} |D_i|^p$. $\square$

$\square$

KAPITEL 5

„reversed“ (Sub-,Super-)Martingale

Genauso, wie man (Sub-Super-)Martingale für „aufsteigende“ Filtrationen definiert hat, kann man dies auch für „absteigende“ Filtrationen tun(siehe Definition 5.2). Ziel dieses Abschnitts ist, einige hinreichende Bedingungen für die Fast-Sicher-Konvergenz oder auch die $\mathbf{L}^1$-Konvergenz im absteigenden Fall kennenzulernen. Zum Beispiel konvergieren, genauso wie im aufsteigenden Fall, positive Supermartingale fast sicher(Satz 5.1). Interessant ist, dass an reversed Submartingale keine zusätzlichen Bedingungen gestellt werden müssen. Man kriegt die Fast-Sicher-Konvergenz, im Gegensatz zum „aufsteigenden“ Fall, als Zugabe zur Submartingaleigenschaft. (vgl. Satz 5.4 und Satz 2.11) Auch neu ist, dass die $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit positiver Supermartingale ausreicht um die Konvergenz in $\mathbf{L}^1$ zu sichern. (vgl. Satz 5.2 und Beispiel 2.4, denn X_n aus diesem Beispiel konvergiert fast sicher gegen Null, aber *nicht* in $\mathbf{L}^1$.)

Konvention 5.1. Im Folgenden sei, wenn nicht anders gesagt, $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ immer eine Filtration, d.h. $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$, falls $m \leq n$, und X_n, für jedes $n \in -\mathbb{N}$, integrierbar und $\mathcal{F}_n$-adaptiert.

Definition 5.2. X_n heisst

- (reversed) Supermartingal, falls für alle $m \leq n \in -\mathbb{N}$
$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \leq X_m.$$
- (reversed) Submartingal, falls $\{-X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ ein (reversed) Supermartingal ist.
- (reversed) Martingal, falls für alle $m \leq n \in -\mathbb{N}$
$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m.$$

Bemerkung 5.1. In der Literatur ist auch der Ausdruck „backwards“ anstelle von „reversed“ gebräuchlich.

1. Konvergenzsätze

Satz 5.1 (Erster Konvergenzsatz). $\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ *sei ein positives Supermartingal. Dann existiert*
$$\lim_{n\to-\infty} X_n = X_{-\infty} \geq 0$$
fast sicher und
$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{-\infty}) \uparrow X_{-\infty}$$
fast sicher.

Beweis. Ist $\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ ein reversed (Super-)Martingal, dann ist offenbar für jedes $n \in -\mathbb{N}$
$$Y^n = (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{-1}, X_0)$$
ein (Super-)Martingal bezüglich
$$\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_{-1} \subseteq \mathcal{F}_0.$$
und die Anzahl der Upcrossings von $[a,b]$ durch Y^n ist gleich der Anzahl der Downcrossings von $[a,b]$ durch
$$(X_0, X_{-1}, \ldots, X_{n+1}, X_n).$$
Schreibe dafür
$$D_n[a,b].$$

Das wendet man zusammen mit der Dubin-Upcrossing-Ungleichung 2.6 an und erhält

$$\mathbb{P}(D_n[a,b] \geq k \mid \mathcal{F}_n) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \min\left(\frac{X_n}{a}, 1\right).$$

Man bedingt nach $\mathcal{F}_{-\infty}$ und lässt $n \to -\infty$ laufen und kriegt

$$\mathbb{P}(D_{-\infty}[a,b] \geq k \mid \mathcal{F}_{-\infty}) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \sup_{n\in-\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\min\left(\frac{X_n}{a}, 1\right) \mid \mathcal{F}_{-\infty}\right).$$

Insbesondere gilt für alle $0 \leq a < b$, dass die Anzahl der Downcrossings von $[a,b]$

$$D_{-\infty}[a,b] < \infty$$

fast sicher. Würde nun X_n für $n \to -\infty$ nicht konvergieren, so gäbe es $a < b$ mit

$$\liminf_{n\in-\mathbb{N}} X_n < a < b < \limsup_{n\in-\mathbb{N}} X_n$$

und dementsprechend $D_{-\infty}[a,b] = \infty$. Also existiert $\lim_{n\to-\infty} X_n = X_{-\infty}$ fast sicher. Die Supermartingaleigenschaft und die Jensen-Ungleichung ($\min(x,a)$ ist nichtnegativ und konkav für $a \geq 0$) ergeben mit nachfolgendem Bedingen nach $\mathcal{F}_{-\infty}$

$$\mathbb{E}(\min(X_n, a) \mid \mathcal{F}_{-\infty}) \geq \mathbb{E}(\min(X_{n+1}, a) \mid \mathcal{F}_{-\infty})$$

für alle $n \in -\mathbb{N}$. Das Dominierende-Konvergenz-Theorem ergibt

$$\lim_{n\to-\infty} \mathbb{E}(\min(X_n, a) \mid \mathcal{F}_{-\infty}) = \mathbb{E}(\min(X_{-\infty}, a) \mid \mathcal{F}_{-\infty}) = \min(X_{-\infty}, a)$$

wobei der Limes nach letzter Ungleichung ein steigender ist. Durch Vertauschbarkeit steigender Limites angewendet auf obige Gleichung

$(\lim_{n\to-\infty} \uparrow \lim_{a\to\infty} \uparrow = \lim_{a\to\infty} \uparrow \lim_{n\to-\infty} \uparrow)$ und Monotone-Konvergenz-Theorem folgt schliesslich

$$\lim_{n\to-\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{-\infty}) = \sup_{n\in-\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{-\infty}) = X_{-\infty}.$$

□

Satz 5.2. *Es sei $\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ ein positives Supermartingal. Dann sind äquivalent:*

(1) *$\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.*
(2) *Es gilt*

$$\lim_{n\to-\infty} \mathbb{E}X_n = \sup_{n\in-\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n < \infty.$$

In jedem der beiden Fälle konvergiert X_n für $n \to -\infty$ fast sicher und *in L^1 gegen eine $\mathcal{F}_{-\infty}$-messbare Zufallsvariable $X_{-\infty}$.*

Beweis. Die Hinrichtung ist klar, da aus gleichgradiger Integrierbarkeit die $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit folgt. Nun sei $\lim_{n\to-\infty} \mathbb{E}X_n =: L < \infty$. Wähle zu beliebigem $a > 0$ ein $n \in -\mathbb{N}$ so, dass, für alle $m \leq n$, $\mathbb{E}X_m > L - \frac{a}{2}$. Wegen $X_m \geq \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m)$ ist, für beliebiges $b > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_m \mathbf{1}_{\{X_m>b\}} &= \mathbb{E}X_m - \mathbb{E}X_m \mathbf{1}_{\{X_m\leq b\}} \leq \mathbb{E}X_m - \mathbb{E}X_n \mathbf{1}_{\{X_m\leq b\}} \\
&= \mathbb{E}X_m - \mathbb{E}X_n + \mathbb{E}X_n \mathbf{1}_{\{X_m>b\}} \\
&\leq L - \mathbb{E}X_n + \mathbb{E}X_n \mathbf{1}_{\{X_m>b\}} < \frac{a}{2} + \mathbb{E}X_n \mathbf{1}_{\{X_m>b\}}.
\end{aligned}$$

Sind $m \in -\mathbb{N}$ und $c > 0$ beliebig, so gilt

$$\mathbb{P}(X_m > c) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}X_m \leq \frac{1}{c} \sup_{m\in-\mathbb{N}} \mathbb{E}X_m \to 0$$

für $c \to \infty$. Da $X_n \in \mathbf{L}^1$, konvergiert $\mathbb{E}X_n \mathbf{1}_{\{X_m>c\}}$ gleichmässig in m gegen Null, wenn $c \to \infty$ läuft. Dementsprechend kann ein $c > 0$ gewählt werden, dass $\mathbb{E}X_n \mathbf{1}_{\{X_m>c\}} < \frac{a}{2}$ für alle $m \in -\mathbb{N}$. Für $m \leq n$ gilt also

$$\mathbb{E}X_m \mathbf{1}_{\{X_m>b\vee c\}} < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.$$

Man wähle nun $d > 0$ so groß, dass für *alle* $m \in -\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}X_m \mathbf{1}_{\{X_m>d\}} < a.$$

(Das funktioniert, da $\max_{m \geq n} X_m \in \mathbf{L}^1$ und daher d so groß gewählt werden kann, dass $\mathbb{E} X_m \mathbf{1}_{\{X_m > d\}} \leq \mathbb{E} \max_{m \geq n} X_m \mathbf{1}_{\{\max_{m \geq n} X_m > d\}} < a$.) Die Fast-Sicher-Konvergenz folgt aus vorangegangenem Satz und die $\mathbf{L}^1$-Konvergenz folgt dann aus Satz 3.3. □

Satz 5.3 (Zweiter Konvergenzsatz). *Es sei $X \in \boldsymbol{L}^1$. Dann konvergiert $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ für $n \to -\infty$ fast sicher und in $\boldsymbol{L}^1$ gegen $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{-\infty})$.*

Beweis. O.B.d.A. sei $X \geq 0$. Dann ist $\{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)\}_{n \in -\mathbb{N}}$ ein positives Martingal und nach Konvergenzsatz 5.1 existiert

$$\lim_{n \to -\infty} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) = X_{-\infty}$$

fast sicher. Insbesondere ist $X_{-\infty}$ $\mathcal{F}_{-\infty}$-messbar. Wegen

$$\sup_n \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)) = \sup_n \mathbb{E}(X) < \infty$$

folgt nach letztem Satz 5.2 die Konvergenz in $\mathbf{L}^1$. Aus der $\mathbf{L}^1$-Konvergenz folgt aber insbesondere

$$\mathbb{E}(X \mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \mathbf{1}_F) \to \mathbb{E}(X_{-\infty} \mathbf{1}_F)$$

für beliebiges $F \in \mathcal{F}_{-\infty}$. D.h. $X_{-\infty} = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{-\infty})$. □

Satz 5.4 (Dritter Konvergenzsatz). *$\{X_n\}_{n \in -\mathbb{N}}$ sei ein Submartingal. Dann konvergiert X_n für $n \to -\infty$ schon fast sicher gegen ein $\mathcal{F}_{-\infty}$-messbares $X_{-\infty}$. Setzt man weiterhin voraus, dass*

$$\lim_{n \to -\infty} \mathbb{E}(X_n) = \inf_{n \in -\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) > -\infty,$$

so konvergiert X_n sogar in $\boldsymbol{L}^1$ gegen $X_{-\infty}$.

Beweis. Wir untersuchen die Prozesse

$$Y_n := \mathbb{E}(X_0^+ \mid \mathcal{F}_n)$$

und

$$Z_n := Y_n - X_n$$

und stellen fest, dass Y_n bzw. Z_n ein positives Martingal bzw. Supermartingal ist und benutzen die beiden vorangegangenen Konvergenzsätze um zu zeigen, dass Y_n fast sicher und $\mathbf{L}^1$ konvergiert und Z_n zumindest fast sicher gegen ein $Z_{-\infty} \geq 0$. Damit ist der erste Teil gezeigt und für den zweiten Teil muß noch die Konvergenz von $Z_n \to Z_{-\infty}$ in $\mathbf{L}^1$ gezeigt werden. Dies würde nach Satz 5.2 sofort folgen, falls $\sup_{n \in -\mathbb{N}} \mathbb{E}(Z_n) < \infty$. Aber die Bedingung $\inf_{n \in -\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) > -\infty$ ist gerade so, dass dies erfüllt ist. □

KAPITEL 6

(Sub-,Super-)Martingale mit gerichteter Indexmenge

Die Indexmenge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wird hier ersetzt durch eine beliebige gerichtete Menge G. Der Konvergenzbegriff muss nun durch den Begriff der *Netzkonvergenz* ersetzt werden und es wird gezeigt, dass Netzkonvergenz immer auf die Konvergenz von Teilfolgen zurückgeführt werden kann. In Definition 6.6 werden Sub- und Supermartingale auf gerichteter Indexmenge erklärt. Weiterhin wird Satz 3.4 auf Martingale mit gerichteter Indexmenge verallgemeinert. Im Anschluss folgt die nützliche *Krickeberg-Zerlegung* für Submartingale. Demnach kann jedes $\mathbf{L}^1$-beschränkte Submartingal als Differenz eines positiven Martingals und eines ebenfalls positiven Supermartingals geschrieben werden.

Abschnitt 1 enthält äquivalente Beschreibungen der Begriffe Martingal und Submartingal. Dazu werden zwei neue Arten von Stoppzeiten, die sogenannten *einfachen* und die *geordneten Stoppzeiten* definiert.

In Abschnitt 2 werden einige Ergebnisse zur Konvergenz vorgestellt. Konvergenzsatz 2.8 findet hier in Satz 6.5 sein „Pendant“. Da schon $\sup_{t\in\mathcal{G}} X_t$ i.a. nicht mehr messbar ist, ist die Fast-Sicher-Konvergenz im Sinne von „$\liminf X_t = \limsup X_t$ fast sicher“ im allgemeinen nicht erklärt. Man benötigt den Begriff der *essentiellen Konvergenz*(siehe Definition 6.8), der für den Fall $G = \mathbb{N}$ wieder mit der normalen Fast-Sicher-Konvergenz zusammenfällt. Die essentielle Konvergenz ist aber nicht so ohne weiteres, wie die Fast-Sicher-Konvergenz in Konvergenzsatz 2.7, durch $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit zu erhalten. Es ist zusätzlich eine Bedingung an die zugrundeliegende Filtration nötig.(vgl. Satz 6.8)

Definition 6.1 (gerichtete Menge). G heißt gerichtete Menge, falls
- eine partielle Ordnung „$\leq$“ auf G existiert.
- es zu je zwei Elementen $r, s \in G$ immer ein $t \in G$ derart gibt, dass

$$r \leq t,\ s \leq t.$$

Beispiel 6.1. Es sei $\mathcal{F}_n$ eine Filtration. Dann ist die Menge aller beschränkten Stoppzeiten von $\mathcal{F}_n$ ein wichtiges Beipiel für eine gerichtete Menge.($\sigma \leq \tau$, wenn für fast alle $w \in \Omega$: $\sigma(w) \leq \tau(w)$)

Konvention 6.2. Soweit nicht anders gesagt sei G immer eine gerichtete Menge.

Definition 6.3 (Netz, Netzkonvergenz, Cauchynetz). (X, d) sei ein metrischer Raum.
- Eine Familie $\{x_t\}_{t\in G} \subseteq X$ heisst *Netz*.
- $\{x_t\}_{t\in G}$ *konvergiert gegen* $x \in X$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $s \in G$ existiert so, dass $d(x_t, x) < \epsilon$ für alle $t \geq s$.
- $\{x_t\}_{t\in G}$ heisst *Cauchy-Netz*, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $r \in G$ existiert so, dass $d(x_s, x_t) < \epsilon$ für alle $s, t \geq r$.

Definition 6.4 (Filtration). Eine Familie $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ von $\sigma-$Algebren $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ heisst *Filtration*, falls für alle $s, t \in G$

$$s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$$

gilt.

Konvention 6.5. Soweit nicht anders gesagt sei $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ eine Filtration und $\{X_t\}_{t\in G}$ eine Familie von Zufallsvariablen, sodass, für alle $t \in G$, $X_t \in \mathbf{L}^1$ und $\mathcal{F}_t$-adaptiert ist. $\mathcal{F}_\infty$ sei die kleinste σ-Algebra mit $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_\infty$ für alle $t \in \mathcal{G}$.

Nun verallgemeinert man leicht den, schon für den Fall $G = \mathbb{N}$ bekannten, Martingalbegriff auf beliebige gerichtete Indexmengen.

Definition 6.6 (Submartingal). $\{X_t\}_{t\in G}$ heißt Submartingal, wenn

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ für alle } s,t \in G \text{ mit } s \leq t.$$

Analog (zum Fall einer diskreten Indexmenge) werden (Super-)Martingale definiert.

Eine Konvergenz von $\{X_t\}_{t\in G}$, $\{\mathbb{E}X_t\}_{t\in G}$, $\{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_t)\}_{t\in G}$ oder ähnlichem wird im vorliegenden Fall immer als eine Netzkonvergenz in einem metrischen Raum wie zum Beispiel $\mathbf{L}^p$, $\mathbb{R}$, $\mathbf{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ ect. verstanden oder aber versucht diese darauf zurückzuführen. Dazu ist folgendes Lemma hilfreich.(siehe [**Suc92**], Abschnitt 1.1)

Lemma 6.1. *Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $\{x_t\}_{t\in G}$ sei ein Netz in X.*

- *Ist X vollständig, so auch "Netzvollständig".*
- *Existiert eine Folge $s_n \uparrow$ aus G derart, dass für beliebige $t_n \geq s_n$, mit $t_n \uparrow$, $\{x_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so konvergiert $\{x_t\}_{t\in G}$.*
- *Das Netz $\{x_t\}_{t\in G}$ konvergiert genau dann, wenn jede Teilfolge $\{x_{t_n}\}_{n\in N}$, mit $t_n \uparrow$, konvergiert.*

Beweis.

- Es sei $\{x_t\}_{t\in G}$ ein Cauchynetz. Dann existiert eine Folge $\{t_n\} \subseteq G$, sodass
  - für alle $s,t \geq t_n$
  $$d(x_s, x_t) < \frac{1}{n}.$$
  - für alle $n \in \mathbb{N}$
  $$t_n \leq t_{n+1}.$$

  Offensichtlich ist $\{x_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, also konvergent gegen ein $x \in X$. Es sei $a > 0$ beliebig. Somit existiert für s hinreichend groß immer ein n mit
  $$d(x_s, x) \leq d(x_s, x_{t_n}) + d(x_{t_n}, x) < \frac{2}{n} < a.$$
- Angenommen $\{x_t\}_{t\in G}$ ist *nicht* Cauchy. Dann existiert ein $a > 0$ und zu jedem $t_1 \in G$ ein $t \geq t_1$ mit
  $$d(x_t, x_{t_1}) > 2a.$$
  Wähle $t_1 \geq s_1$ und ein $t_2' \geq s_2, t_1$. Wenn
  $$d(x_{t_1}, x_{t_2'}) > a,$$
  dann setze $t_2 := t_2'$. Wenn aber $d(x_{t_1}, x_{t_2'}) \leq a$, so wähle ein $t_2 > t_2'$ mit
  $$d(x_{t_2}, x_{t_2'}) > 2a$$
  und damit ergibt sich
  $$d(x_{t_1}, x_{t_2}) \geq d(x_{t_2}, x_{t_2'}) - d(x_{t_1}, x_{t_2'}) > 2a - a = a.$$
  In beiden Fällen ist auch $t_2 \geq s_2$.

  Das ganze wiederholt man mit s_2, s_3, t_2 anstelle von s_1, s_2, t_1 und erhält ein $t_3 \geq s_3$ mit
  $$d(x_{t_2}, x_{t_3}) > a$$
  usw. Insgesamt wird eine steigende Folge $t_n \geq s_n$ konstruiert, die nicht Cauchy ist und damit auch nicht konvergiert und zwar für *beliebiges* $s_n \uparrow$.

  Im Umkehrschluss erhält man, wenn die angegebenen Voraussetzungen gelten, so ist $\{x_t\}_{t\in G}$ ein Cauchy-Netz. Ist s_n eine Folge wie in der Vorausetzung, so kann man $t_n \geq s_n$ finden, mit
  $$d(x_t, x_{t_n}) < \frac{1}{n}$$
  für alle $t \geq t_n$. Die Folge x_{t_n} konvergiert nach Voraussetzung auch gegen ein $x \in X$. Wähle nun m so gross, dass für alle $n \geq m$ $d(x_{t_n}, x) < \frac{a}{2}$. Wähle ein $n > m$ so gross, dass $d(x_t, x_{t_n}) < \frac{a}{2}$ sobald $t \geq t_n$. Dann gilt für alle $t \geq t_n$
  $$d(x_t, x) \leq d(x_t, x_{t_n}) + d(x_{t_n}, x) < a.$$
  Das heisst, dass $\{x_t\}_{t\in G}$ konvergiert.

- Folgt aus dem letzten Punkt.

□

Es werden nun zwei der wichtigsten Netzkonvergenzen genauer erklärt:

BEMERKUNG 6.1.
- $\mathbf{L}^p$-Konvergenz von X_t bedeutet, dass eine $X \in \mathbf{L}^p$ existiert, sodass $\lim_{t \in G} \mathbb{E}\,|X_t - X|^p = 0$.
- Konvergenz in Wahrscheinlichkeit von X_t heisst, dass eine Zufallsvariable X existiert derart, dass $\lim_{t\in G} \mathbb{P}(|X_t - X| > a) = 0$ für alle $a > 0$. Mit Satz B.2 sieht man, dass Konvergenz in Wahrscheinlichkeit tatsächlich gleichbedeutend ist mit der Konvergenz bezüglich einer Metrik.

Obiges Lemma genügt um den zweiten Teil von Satz 3.4 auf beliebige gerichtete Indexmengen zu verallgemeinern.

SATZ 6.1. *$\{X_t\}_{t\in G}$ sei ein Martingal.*

$$X_t = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_t)$$

mit $X \in \boldsymbol{L}^1$ genau dann, wenn $\{X_t\}_{t\in G}$ gleichgradig integrierbar ist.

BEWEIS. Es sei $\{X_t\}_{t\in G}$ gleichgradig integrierbar; dann auch jede Teilfolge $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \uparrow$. Nach 3.4 konvergiert X_{t_n} in $\mathbf{L}^1$. Nach Lemma 6.1 konvergiert auch $\{X_t\}_{t\in G}$ in $\mathbf{L}^1$. Definiert man

$$X_\infty := \lim_{t\in G} X_t,$$

so ist

$$\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_s) = \lim_{t\in G} \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = \lim_{t\in G} X_s = X_s.$$

Die andere Richtung ist einfache Anwendung von Satz 3.1. □

Als nächstes kommt eine interessante Zerlegung von (Sub-)Martingalen.

SATZ 6.2 (Krickeberg-Zerlegung). *$\{X_t\}_{t\in G}$ sei ein Submartingal bzw. Martingal mit*

$$\sup_{t\in G} \mathbb{E}X_t^+ < \infty$$

bzw.

$$\sup_{t\in G} \mathbb{E}\,|X_t| < \infty.$$

Dann existieren ein positives Martingal $\{M_t\}_{t\in G}$ und ein ebenfalls positives Supermartingal $\{Y_t\}_{t\in G}$ derart, dass

$$X = M - Y.$$

BEWEIS. Man definiert zunächst $M_s := \sup_{t\geq s} \mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_s)$ und wir werden zeigen, dass das tatsächlich ein Martingal ist.

Aufgrund der Tatsache, dass auch X_t^+ ein Submartingal ist, ist $\mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_s)$ „steigend" in $t \geq s$. Es folgt, dass

$$M_s = \lim_{t\in G} \mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_s).$$

Mit Lemma 6.1 (für Netzkonv. in $\mathbf{L}^1$) und dem Monotone-Konvergenz-Theorem für den bedingten Erwartungswert sieht man die Existenz von

$$\lim_{t\in G} \mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_s \mid \mathcal{F}_r) = \mathbb{E}(M_s \mid \mathcal{F}_r).$$

Weiterhin ist natürlich klar, daß für $t \geq s \geq r$

$$\left\| \mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_s \mid \mathcal{F}_r) - \mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_r) \right\|_{\mathbf{L}^1} = 0 < \frac{a}{3}.$$

Damit zeigt man, dass für jedes $a > 0$

$$\left\| \lim_{t\in G} \mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_s \mid \mathcal{F}_r) - \lim_{t\in G} \mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_r) \right\|_{\mathbf{L}^1} < a.$$

Das heißt aber

$$\mathbb{E}(M_s \mid \mathcal{F}_r) = \lim_{t \in G} \mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_s \mid \mathcal{F}_r) = \lim_{t \in G} \mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_r) = M_r.$$

M_s ist integrabel, da aufgrund des Monotone-Konvergenz-Theorems

$$\mathbb{E}(M_s) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{t_n}^+ \mid \mathcal{F}_s)) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_{t_n}^+) < \infty$$

gilt.(Gemäß Beweis von Lemma 6.1 kann eine Folge $t_n \uparrow$ gefunden werden mit $M_s = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_{t_n}^+ \mid \mathcal{F}_s)$.) Damit ist M ein positives Martingal und wegen

$$Y_s := M_s - X_s \geq M_s - X_s^+ = \sup_{t \geq s} \mathbb{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_s) - \mathbb{E}(X_s^+ \mid \mathcal{F}_s) \geq 0$$

ist Y ein positives Supermartingal. □

1. Äquivalente Formulierung eines (Sub-)Martingals

Es folgen, mit Satz 6.3, äquivalente Definitionen der Begriffe Martingal und Submartingal via Stoppzeiten. (siehe dazu auch [**Suc92**], Abschnitt 1.4) Stoppzeiten sind, wie schon im Fall von $G = \mathbb{N}$, definiert als Zufallsvariablen $\tau : \Omega \to G$ so, dass, für alle $t \in G$, $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$. Man benötigt im wesentlich zwei verschiedene Arten von Stoppzeiten. Diese werden in folgender Definition erklärt.

Definition 6.7 (einfache und geordnete Stoppzeiten). Die Menge aller Stoppzeiten sei T_0.Eine Stoppzeit τ die nur endlich viele Werte annimmt; soll heissen, es existieren $t_1, \ldots, t_n$ mit

$$\mathbb{P}(\tau \in \{t_1, \ldots, t_n\}) = 1;$$

heisst *einfache Stoppzeit*. Die Menge der einfachen Stoppzeiten sei T. Eine einfache Stoppzeit τ, deren Werte sich ordnen lassen; soll heissen, falls $t_1, \ldots, t_n$ die Werte von τ sind, so ist

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n;$$

heisst *geordnete Stoppzeit*. Die Menge der geordneten Stoppzeiten sei T_{ord}.

Man sieht, dass im Fall von $G = \mathbb{N}$, einfache Stoppzeiten und beschränkte Stoppzeiten dasselbe sind. Weiterhin erkennt man, dass bei einer totalen Ordnung $\leq$ auf G, z.B. $G = \mathbb{N}, \mathbb{R}$, jede einfache Stoppzeit automatisch eine geordnete Stoppzeit ist.

Die Ordnungsrelation auf G induziert in natürlicher Weise eine Ordnung auf T_0 und man setzt

$$\sigma \leq \tau :\leftrightarrow \textit{ für fast alle } w \in \Omega \textit{ gilt } \sigma(w) \leq \tau(w).$$

Lemma 6.2. *Es sei X eine integrable Zufallsvariable. Definiert man den Prozess*

$$X_t := \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_t),$$

und ist $\tau \in T$, so gilt

$$X_\tau = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\tau).$$

Beweis. $t_1, \ldots, t_n$ seien die Werte von τ. Dann ist

$$X_\tau = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{t_k}) \mathbf{1}_{\{\tau = t_k\}}.$$

Man sieht sofort, dass X_τ integrierbar ist, da $X \in \mathbf{L}^1$. Ist $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\{X_\tau > a\} \cap \{\tau = t_k\} = \{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{t_k}) > a\} \cap \{\tau = t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k}.$$

Somit ist $\{X_\tau > a\} \in \mathcal{F}_\tau$ und X_τ daher $\mathcal{F}_\tau$-messbar. Nun sei $F \in \mathcal{F}_\tau$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X \mathbf{1}_F) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{F \cap \{\tau = t_k\}}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{t_k}) \mathbf{1}_{F \cap \{\tau = t_k\}}) = \mathbb{E}(X_\tau \mathbf{1}_F).$$

Das heisst, dass $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$. □

Satz 6.3. • *Es sind äquivalent*

(1) *X_t ist ein $\mathcal{F}_t$-Submartingal*
(2) *Das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau \in T_{\mathrm{ord}}}$ ist steigend, d.h., wenn $\sigma \leq \tau \in T_{\mathrm{ord}}$, dann gilt $\mathbb{E}X_\sigma \leq \mathbb{E}X_\tau$.*
(3) *$\{X_\tau\}_{\tau \in T_{\mathrm{ord}}}$ ist ein $\{\mathcal{F}_\tau\}_{\tau \in T_{\mathrm{ord}}}$-Submartingal.*

- *Es sind äquivalent*
  (1) X_t *ist ein* $\mathcal{F}_t$*-Martingal*
  (2) *Für beliebige* $\sigma, \tau \in T$ *gilt* $\mathbb{E}X_\sigma = \mathbb{E}X_\tau$
  (3) *Für beliebige* $\sigma, \tau \in T_{\text{ord}}$ *gilt* $\mathbb{E}X_\sigma = \mathbb{E}X_\tau$.

BEWEIS. - Aus $\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma$ folgt sofort

$$\mathbb{E}X_\tau \geq \mathbb{E}X_\sigma.$$

Um zu zeigen, dass daraus

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$$

folgt, verfährt man genauso wie im Beweis von Satz 2.19. Man muss noch zeigen, dass aus dem ersten Punkt der dritte folgt. Dazu seien $\sigma \leq \tau$ geordnete Stoppzeiten. Nach (Beweis von) Lemma 6.2 ist $\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$ auf $\{\sigma = s\}$ zu zeigen. Es seien $t_1 < \ldots < t_n$ die Werte, die τ auf $\{\sigma = s\}$ annimmt. Definiere $t_0 := s$. Man macht eine Induktion auf $0 \leq m \leq n$. Die zum Index m gehörende Ausage lautet hierbei:

Für alle geordneten Stoppzeiten τ_m für die auf $\{\sigma = s\}$ gilt:
- $\tau_m \in \{t_0, \ldots, t_n\}$
- $\tau_m \leq t_m$

ist

$$\mathbb{E}(X_{\tau_m} \mid \mathcal{F}_s)\mathbf{1}_{\{\sigma=s\}} \geq X_s \mathbf{1}_{\{\sigma=s\}}.$$

Es ist klar, dass wir die Aussage dann auch für τ gezeigt haben, da τ die Vorrausetzungen für $m = n$ erfüllt.

Der Induktionsanfang sei $m = 0$. Dann ist $\tau_0 = s$ und $\mathbb{E}(X_{\tau_0} \mid \mathcal{F}_s)\mathbf{1}_{\{\sigma=s\}} = X_s \mathbf{1}_{\{\sigma=s\}}$.

Es sei τ_m eine Stoppzeit wie oben. Dann greift für die geordnete Stoppzeit

$$\tau_{m-1} := \tau_m \mathbf{1}_{\{\sigma=s\}\cap\{\tau_m<t_m\}} + t_{m-1}\mathbf{1}_{\{\sigma=s\}\cap\{\tau_m=t_m\}} + \tau_m \mathbf{1}_{\{\sigma\neq s\}}$$

die Induktionsvoraussetzung, und es gilt auf $\{\sigma = s\}$

$$\mathbb{E}(\tau_{m-1} \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s.$$

Auf $\{\sigma = s\}$ gilt auch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{\tau_m} \mid \mathcal{F}_{t_{m-1}}) &= \mathbb{E}(X_{\tau_{m-1}} + (X_{t_m} - X_{t_{m-1}})\mathbf{1}_{\{\tau_{m-1}<\tau_m\}} \mid \mathcal{F}_{t_{m-1}}) \\
&= \mathbb{E}(X_{\tau_{m-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{m-1}}) + \mathbb{E}((X_{t_m} - X_{t_{m-1}})\mathbf{1}_{\{\tau_{m-1}\leq t_{m-1}\}\cap\{\sigma=s\}} \mid \mathcal{F}_{t_{m-1}}) \\
&= X_{\tau_{m-1}} + \mathbf{1}_{\{\tau_{m-1}\leq t_{m-1}\}\cap\{\sigma=s\}}\mathbb{E}(X_{t_m} - X_{t_{m-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{m-1}}) \geq X_{\tau_{m-1}}.
\end{aligned}$$

Also ist, auf $\{\sigma = s\}$,

$$\mathbb{E}(X_{\tau_m} \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{\tau_m} \mid \mathcal{F}_{t_{m-1}}) \mid \mathcal{F}_s) \geq \mathbb{E}(X_{\tau_{m-1}} \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s.$$

- X_t sei Martingal und $\tau \in T$. Sind $t_1, \ldots, t_n$ die Werte von τ und $\tau \leq t$, so ist

$$\mathbb{E}X_\tau = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_{t_k}\mathbf{1}_{\{\tau=t_k\}}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_t \mathbf{1}_{\{\tau=t_k\}}) = \mathbb{E}X_t.$$

Aber für beliebiges $s \in G$ gilt $\mathbb{E}X_s = \mathbb{E}X_t$. Das heisst, dass $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ konstant ist.

Dann ist auch $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T_{\text{ord}}}$ konstant. Und nach erstem Punkt folgt daraus widerrum, dass X_t sowohl Sub- als auch Supermartingal ist. Dementsprechend ist X_t ein Martingal.

□

Dass in der Äquivalenz zur Submartingaleigenschaft Punkt (2) *nicht* durch „$\mathbb{E}X_\sigma \leq \mathbb{E}X_\tau$ für alle $\sigma \leq \tau \in T$" ersetzt werden kann, das Ansteigen des Netzes also nur für $\sigma \leq \tau \in T_{\text{ord}}$ gilt, zeigt folgendes einfaches Beispiel aus [**Suc92**], Abschnitt 4.2.

BEISPIEL 6.2. $G = \mathbb{N}^2$, $(k,l) \leq (m,n) :\leftrightarrow k \leq m$ *und* $l \leq n$. $\Omega = [0,1]$ versehen mit der Borel'schen σ-Algebra und dem Lebesgue-Maß. Man setzt $X_{(1,1)} := 0$, $X_{(1,2)} := 2\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} - \mathbf{1}_{(\frac{1}{2},1]}$, $X_{(2,1)} := -\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + 2\mathbf{1}_{(\frac{1}{2},1]}$ und ansonsten $X_{(m,n)} := 2$. Es sei $\mathcal{F}_{(1,1)} := \sigma(\emptyset, \Omega)$ und ansonsten $\mathcal{F}_{(m,n)} := \sigma([0,\frac{1}{2}], (\frac{1}{2},1])$. Dann gilt

$$X_{(1,1)} = 0 < \frac{1}{2} = \mathbb{E}X_{(1,2)} = \mathbb{E}(X_{(1,2)} \mid \mathcal{F}_{(1,1)}) = \mathbb{E}(X_{(2,1)} \mid \mathcal{F}_{(1,1)}).$$

Es sei $(m,n) \neq (1,1),(1,2),(2,1)$. Ist $F = [0, \frac{1}{2}]$, so ist

$$\mathbb{E}X_{(1,2)}\mathbf{1}_F = 1 = \mathbb{E}X_{(m,n)}\mathbf{1}_F$$

und

$$\mathbb{E}X_{(2,1)}\mathbf{1}_F = -\frac{1}{2} < 1 = \mathbb{E}X_{(m,n)}\mathbf{1}_F.$$

Für $F = (\frac{1}{2}, 1]$ gelten ähnliche (Un-)gleichungen. Daher ist $\{X_{(m,n)}\}_{(m,n)\in G}$ ein Submartingal. Aber $\sigma := (1,1)$ und $\tau := (2,1)\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + (1,2)\mathbf{1}_{(\frac{1}{2},1]}$ sind zwei Stoppzeiten $\sigma \leq \tau \in T$ mit

$$\mathbb{E}X_\sigma = 0 > -1 = \mathbb{E}X_\tau.$$

2. Konvergenzsätze

Der Erste Konvergenzsatz besagt, dass ein $X \in \mathbf{L}^p$ bedingt nach einer Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ auch in $\mathbf{L}^p$ konvergiert. Für $p = 1$ und $G = \mathbb{N}$ ist diese Aussage schon im *Levy-Upward-Theorem* enthalten. Der Zweite Konvergenzsatz zeigt, dass es für die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit eines Submartingals $\{X_t\}_{t\in G}$ hinreichend ist, wenn der positive Anteil $\mathbf{L}^1$-beschränkt ist. Danach wird in Definition 6.8, die *essentielle Konvergenz* erklärt und anhand eines Gegenbeispiels verdeutlicht, dass, anders als für $G = \mathbb{N}$, $\mathbf{L}^1$-beschränkte Martingale i.a. noch *nicht* essentiell konvergieren. Setzt man aber voraus, dass die zugrundeliegende Filtration die *Vitali-Eigenschaft* besitzt(Definition 6.10), so konvergieren $\mathbf{L}^1$-beschränkte Martingale essentiell(Konvergenzsatz 6.8).

Satz 6.4 (Erster Konvergenzsatz). *Es sei $X \in \mathbf{L}^p$ für ein $p \geq 1$. Dann ist*

$$\{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_t)\}_{t\in G}$$

ein Martingal und konvergiert in $\mathbf{L}^p$ gegen $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)$.

Beweis. Benutze den dritten Punkt von Lemma 6.1 und Konvergenzsatz 2.15(für $p > 1$) bzw. das Levy-Upward-Theorem(für $p = 1$) um zu zeigen, das

$$X_\infty := \lim_{t\in G} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_t)$$

existiert und die Abgeschlossenheit von $\mathbf{L}^p(\mathcal{F}_\infty)$ für

$$X_\infty \in \mathbf{L}^p(\mathcal{F}_\infty).$$

Um zu zeigen, dass $X_\infty = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)$, benutze

$$\mathbb{E}X_\infty\mathbf{1}_F = \lim_{t\in G} \mathbb{E}\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_t)\mathbf{1}_F = \lim_{t\in G} \mathbb{E}X\mathbf{1}_F = \mathbb{E}X\mathbf{1}_F$$

für beliebiges $F \in \bigcup_{t\in G} \mathcal{F}_t$ (erzeugt $\mathcal{F}_\infty$). □

Satz 6.5 (Zweiter Konvergenzsatz). *Jedes Submartingal $\{X_t\}_{t\in G}$ welches der Bedingung*

$$\sup_{t\in G} \mathbb{E}X_t^+ < \infty$$

genügt, konvergiert in Wahrscheinlichkeit.

Es sind dieselben Voraussetzungen wie in Satz 2.11 gegeben. Durch Übergang von $\mathbb{N}$ zu beliebiger gerichteter Indexmenge erhält aber nur noch eine Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und keine Fast-Sicher-Konvergenz mehr. Im Übrigen macht, wie am Anfang des Kapitels schon erwähnt wurde, die Fast-Sicher-Konvergenz im Sinn von „$\liminf X_t = \limsup X_t$ fast sicher“ sowieso keinen Sinn mehr ,da i.a. die beiden beteiligten Abbildungen *nicht* mehr messbar sind. (Wähle zum Beispiel $G = \mathbb{R}$, eine nicht-Borel-messbare Menge $M \subset \mathbb{R}$ und definiere für jedes $t \in M$ $X_t := \mathbf{1}_{\{t\}}$, ansonsten $X_t \equiv 0$)

Beweis von Konvergenzsatz 6.5. Man will eine *Netzkonvergenz in Wahrscheinlichkeit* zeigen. Dazu benötigt man zunächst einen metrischen Raum in dem Konvergenz gleichbedeutend ist mit Konvergenz in Wahrscheinlichkeit:

Wähle als Raum die Menge aller f.s. endlichen Zufallsvariablen faktorisiert (wie üblich) nach *fast-sicher-gleich*. Man zeigt schnell, dass auf diesem Raum $d(X,Y) := \mathbb{E}(|X-Y| \wedge 1)$ eine Metrik ist und gemäß Satz B.2 braucht man nur noch Lemma 6.1 anwenden und zu zeigen, dass jede Teilfolge $\{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, mit $t_n \uparrow$, in Wahrscheinlichkeit konvergiert. Und das tut jede solche Folge, nach Konvergenzsatz 2.11, sogar f.s. □

Nun haben wir gesehen, dass eine ganze Menge Eigenschaften von (Sub-)Martingalen mit diskreter Indexmenge auch für (Sub-)Martingale mit gerichteter Indexmenge gelten. Man kann nun herangehen und für $\{X_t\}_{t\in G}$ eine spezielle Art(, denn das Problem ist, dass beliebige(überabzählbare) Suprema oder Infima i.a. nicht mehr meßbar sind,) von Limes-Superior und Limes-Inferior definieren. Und untersuchen, ob aus der L^1-Beschränktheit von $\{X_t\}_{t\in G}$, wie z.B. im Fall von $G = \mathbb{N}$, folgt dass diese beiden (fast sicher) übereinstimmen. (vgl. Konvergenzsatz 2.7)

Zunächst die nötige Begriffsbildung und danach ein Gegenbeispiel(6.3).

Definition 6.8 (essentiell).

- Das *essentielle Supremum* von $\{X_t\}_{t\in G}$ ist das kleinste messbare X so, dass, für jedes $t \in G$, $X_t \leq X$ fast sicher. Man schreibt

$$\operatorname*{e\,sup}_{t\in G} X_t.$$

- Das *essentielle Infimum* von $\{X_t\}_{t\in G}$ ist das größte *meßbare* X so, dass, für jedes $t \in G$, $X_t \geq X$ fast sicher. Man schreibt

$$\operatorname*{e\,inf}_{t\in G} X_t.$$

- Dementsprechend sind der *essentielle Limes-Superior* bzw. der *essentielle Limes-Inferior*

$$\operatorname*{e\,lim\,sup}_{t\in G} X_t := \operatorname*{e\,inf}_{s\in G} \operatorname*{e\,sup}_{t\geq s} X_t$$

  bzw.

$$\operatorname*{e\,lim\,inf}_{t\in G} X_t := \operatorname*{e\,sup}_{s\in G} \operatorname*{e\,inf}_{t\geq s} X_t.$$

- $\{X_t\}_{t\in G}$ heiße *essentiell konvergent*, falls fast sicher

$$\operatorname*{e\,lim\,sup}_{t\in G} X_t = \operatorname*{e\,lim\,inf}_{t\in G} X_t$$

  und man kann dann den *essentiellen Limes* definieren als

$$\operatorname*{e\,lim}_{t\in G} X_t := \operatorname*{e\,lim\,inf}_{t\in G} X_t.$$

In der Literatur kommt es häufig vor, dass *essentiell* vor sup, inf oder lim mit „ess“ abgekürzt wird. Der nächste Satz rechtfertigt obige Definitionen:

Satz 6.6. *Zu jeder Familie $\{X_t\}_{t\in G}$ von(nicht notwendig adaptierten) Zufallsvariablen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ existieren* $\operatorname{e\,sup} X_t$ *und* $\operatorname{e\,inf} X_t$. *Sie sind bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt und es existieren Folgen $\{t_n\}, \{s_n\} \subseteq G$ mit $\operatorname{e\,sup}_{t\in G} X_t = \sup_{n\in\mathbb{N}} X_{t_n}$ bzw. $\operatorname{e\,inf}_{t\in G} X_t = \inf_{n\in\mathbb{N}} X_{s_n}$.*

Beweis. Betrachte nur den „sup“-Fall; der andere wird ähnlich bewiesen. Zunächst seien alle $X_t : \Omega \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $\mathcal{C}$ sei die Klasse aller abzählbaren Teilmengen von $\{X_t\}_{t\in G}$ und definiere für $M \in \mathcal{C}$ die messbare Abbildung $X_M := \sup_{X\in M} X$. Ist $S := \sup_{M\in\mathcal{C}} \mathbb{E}X_M$, dann existiert eine Folge $M_n \in \mathcal{C}$ so, dass $\mathbb{E}X_{M_n} \to S$. Definiere $\tilde{M} := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Es gilt $\tilde{M} \in \mathcal{C}$ und $\mathbb{E}X_{M_n} \leq \mathbb{E}X_{\tilde{M}} \leq S$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Demzufolge ist $S = \mathbb{E}X_{\tilde{M}}$. Es sei X_t bzw. $t \in G$ beliebig. Dann gilt

$$S = \mathbb{E}X_{\tilde{M}} \leq \mathbb{E}(X_{\tilde{M}} \vee X_t) \leq S,$$

denn mit $\tilde{M}$ ist auch $\tilde{M} \cup \{X_t\} \in \mathcal{C}$. Insbesondere ist $X_{\tilde{M}} = X_{\tilde{M}} \vee X_t$ und daher auch $X_t \leq X_{\tilde{M}}$ fast sicher. Ist Y eine andere messbare Abbildung so, dass $X_t \leq Y$ fast sicher für jedes $t \in G$, dann ist natürlich auch

$$X_{\tilde{M}} = \sup_{X\in\tilde{M}} X \leq Y$$

fast sicher. Dementsprechend ist $X_{\tilde{M}} = \operatorname*{e\,sup}_{t\in G} X_t$. Gäbe es 2 essentielle Suprema, so wären diese, nach der letzten Überlegung, fast sicher gleich. Nummeriert man die Elemente von $\tilde{M} = \{X_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch, dann ist offenbar

$$\operatorname*{e\,sup}_{t\in G} X_t = X_{\tilde{M}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} X_{t_n}.$$

Sind schliesslich $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$, so gilt der Satz nach eben Bewiesenem für $Y_t := \arctan X_t$. Man sieht leicht, dass

$$\operatorname*{e\,sup}_{t\in G} X_t = \tan(\operatorname*{e\,sup}_{t\in G} Y_t)$$

und daher

$$\operatorname*{e\,sup}_{t\in G} X_t = \tan \sup_{n\in\mathbb{N}} Y_{t_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \tan Y_{t_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} X_{t_n},$$

falls $\{t_n\} \subseteq G$ so gewählt wurde, dass $\operatorname{e\,sup}_{t\in G} Y_t = \sup_{n\in\mathbb{N}} Y_{t_n}$. $\square$

Genauso wie e sup, e inf etc. von Familien von messbaren Zufallsvariablen, kann man auch essentielle Suprema, Infima usw. von messbaren Mengen definieren. Es wird zunächst die Existenz in einem Lemma und anschliessender Bemerkung geklärt.

Lemma 6.3. *Es sei $\{F_t\}_{t\in G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Familie von Ereignissen.*

- *Dann existiert eine Folge $\{t_n\} \subseteq G$ so, dass $\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{t_n}} = \operatorname{e\,sup}_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t}$ fast sicher.*
- *$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{t_n}$ ist das, bis auf Nullmengen, kleinste Ereigniss $F \in \mathcal{F}$ so, dass $F_t \subseteq F$ fast sicher für jedes $t \in G$.*

Beweis.
- Wähle $\{t_n\} \subseteq G$ so, dass fast sicher $\operatorname{e\,sup}_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{F_{t_n}} = \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{t_n}}$.
- $\operatorname{e\,sup}_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t}$ ist fast sicher eindeutig. Also ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{t_n}$ fast sicher eindeutig mit der Eigenschaft, dass $\operatorname{e\,sup}_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t} = \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{t_n}}$. Per Definition ist $\mathbf{1}_{F_t} \le \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{t_n}}$, also auch $F_t \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{t_n}$ fast sicher, für beliebiges $t \in G$. Wäre F ein Ereignis mit $F_t \subseteq F$ fast sicher für alle $t \in G$, so wäre auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{t_n} \subseteq F$ fast sicher.

$\square$

Bemerkung 6.2. Ähnlich zeigt man auch, dass es ein fast sicher eindeutiges Ereignis $E \in \mathcal{F}$ gibt mit $\mathbf{1}_E = \operatorname{e\,inf}_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t}$ und dass $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} F_{s_n}$ gewählt werden kann für eine geeignete Folge $\{s_n\} \subseteq G$.Darüberhinaus ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_{s_n}$ das grösste Ereignis E so, dass $F_t \supseteq E$ fast sicher für beliebiges $t \in G$.

Definition 6.9. Ist $\{F_t\} \subseteq \mathcal{F}$ eine Familie von Ereignissen, so definiert man

- $\operatorname*{e\,sup}_{t\in G} F_t$ als das kleinste Ereignis F so, dass $F_t \subseteq F$ fast sicher für beliebiges $t \in G$.
- $\operatorname*{e\,inf}_{t\in G} F_t$ als das grösstes Ereignis E so, dass $F_t \supseteq E$ fast sicher für beliebiges $t \in G$.
- $\operatorname*{e\,lim\,sup}_{t\in G} F_t := \operatorname*{e\,inf}_{s\in G} \operatorname*{e\,sup}_{t\ge s} F_t$
- $\operatorname*{e\,lim\,inf}_{t\in G} F_t := \operatorname*{e\,sup}_{s\in G} \operatorname*{e\,inf}_{t\ge s} F_t$

Die, für den diskreten Fall, bekannte Eigenschaften, dass der Limes-Inferior immer kleiner ist als der Limes-Superior oder dass $\liminf X_n = \liminf Y_n$(bzw. $\limsup X_n = \limsup Y_n$) sofern nur ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $X_n = Y_n$, für alle $n \ge m$, gelten auch hier, zumindest fast sicher.

Lemma 6.4. *Existiert für die beiden Prozesse $\{X_t\}_{t\in G}$ und $\{Y_t\}_{t\in G}$ ein $r \in G$ derart, dass $X_t = Y_t$ für alle $t \ge r$, so gilt $\operatorname{e\,lim\,sup}_{t\in G} X_t = \operatorname{e\,lim\,sup}_{t\in G} Y_t$ und $\operatorname{e\,lim\,inf}_{t\in G} X_t = \operatorname{e\,lim\,inf}_{t\in G} Y_t$ fast sicher.*

Beweis. Aufgrund der Definition von e lim inf und e lim sup ist klar, dass $\operatorname{e\,lim\,sup}_{t\in G} X_t = -\operatorname{e\,lim\,inf}_{t\in G}(-X_t)$ gilt und man braucht nur die erste Gleichung zu zeigen. Es reicht auch aus zu zeigen, dass $\operatorname{e\,lim\,inf}_{t\in G} X_t = \operatorname{e\,sup}_{s\ge r} \operatorname{e\,inf}_{t\ge s} X_t$, denn dann ist

$$\operatorname*{e\,lim\,sup}_{t\in G} X_t = \operatorname*{e\,inf}_{s\ge r} \operatorname*{e\,sup}_{t\ge s} X_t = \operatorname*{e\,inf}_{s\ge r} \operatorname*{e\,sup}_{t\ge s} Y_t = \operatorname*{e\,lim\,sup}_{t\in G} Y_t.$$

Zu $\operatorname{e\,lim\,inf}_{t\in G} X_t = \operatorname{e\,sup}_{s\ge r} \operatorname{e\,inf}_{t\ge s} X_t$:
Wähle zu beliebigem $v \in G$ ein $u \ge r, v$. Dann ist

$$\operatorname*{e\,inf}_{t\ge v} X_t \le \operatorname*{e\,inf}_{t\ge u} X_t \le \operatorname*{e\,sup}_{s\ge r} \operatorname*{e\,inf}_{t\ge s} X_t.$$

Also gilt auch

$$\operatorname*{e\,lim\,inf}_{t\in G} X_t = \operatorname*{e\,sup}_{v\in G} \operatorname*{e\,inf}_{t\ge v} X_t \le \operatorname*{e\,sup}_{s\ge r} \operatorname*{e\,inf}_{t\ge s} X_t.$$

Direkt aus der Definition von e sup folgt $\operatorname{e\,lim\,inf}_{t\in G} X_t \ge \operatorname{e\,sup}_{s\ge r} \operatorname{e\,inf}_{t\ge s} X_t$. $\square$

Lemma 6.5. *Es ist fast sicher $\operatorname{e\,lim\,inf}_{t\in G} X_t \le \operatorname{e\,lim\,sup}_{t\in G} X_t$.*

Beweis. Für jedes $s \in G$ gilt $\operatorname{e}\inf_{t \geq s} X_t \leq X_s$. Aus der Definition des essentiellen Supremums kann man schliessen, dass $\operatorname{e}\sup_{s \geq r} \operatorname{e}\inf_{t \geq s} X_t \leq \operatorname{e}\sup_{s \geq r} X_s$ für alle $r \in G$. Aus dem Beweis des letzten Lemmas wissen wir, dass $\operatorname{e}\liminf_{t \in G} X_t = \operatorname{e}\sup_{s \geq r} \operatorname{e}\inf_{t \geq s} X_t$. Daraus folgt

$$\operatorname{e}\liminf_{t \in G} X_t = \operatorname{e}\inf_{r \in G} \operatorname{e}\liminf_{t \in G} X_t \leq \operatorname{e}\inf_{r \in G} \operatorname{e}\sup_{s \geq r} X_s = \operatorname{e}\limsup_{t \in G} X_t$$

und die Behauptung ist bewiesen.

□

Es wird später auch noch benötigt, dass der Limes-Superior von $\{X_t\}_{t \in G}$ derselbe ist, wie der von $\{X_\tau\}_{\tau \in T}$:

Lemma 6.6. *Es gilt*

$$\operatorname{e}\limsup_{t \in G} X_t = \operatorname{e}\limsup_{\tau \in T} X_\tau$$

fast sicher.

Beweis. Der Beweis wird in zwei Schritte unterteilt(auf den Zusatz „fast sicher“ wird aufgrund der Übersichtlichkeit verzichtet):

HS 3. $\operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq s} X_\tau = \operatorname{e}\inf_{\sigma \in T} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq \sigma} X_\tau$

HS 4. $\operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{t \geq s} X_t = \operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq s} X_\tau$

Aus den Hilfssätzen 3 und 4 folgt dann

$$\operatorname{e}\limsup_{t \in G} X_t = \operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{t \geq s} X_t = \operatorname{e}\inf_{\sigma \in T} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq \sigma} X_\tau = \operatorname{e}\limsup_{\tau \in T} X_\tau.$$

Beweis von Hilfssatz 3. Klar ist, dass $\operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq s} X_\tau \geq \operatorname{e}\inf_{\sigma \in T} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq \sigma} X_\tau$, da $\sigma \equiv s \in T$.

Ist $\sigma \in T$ und $s_1, \ldots, s_n$ die Werte von σ, so wähle ein $s \geq s_1, \ldots, s_n$. Dann ist $\operatorname{e}\sup_{\tau \geq s} X_\tau \leq \operatorname{e}\sup_{\tau \geq \sigma} X_\tau$. Insbesondere gilt für alle $\sigma \in T$

$$\operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq s} X_\tau \leq \operatorname{e}\sup_{\tau \geq \sigma} X_\tau.$$

Und daraus folgt $\operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq s} X_\tau \leq \operatorname{e}\inf_{\sigma \in T} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq \sigma} X_\tau$. □

Beweis von Hilfssatz 4. Klar ist, dass $\operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq s} X_\tau \geq \operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{t \geq s} X_t$,
da $\operatorname{e}\sup_{\tau \geq s} X_\tau \geq \operatorname{e}\sup_{t \geq s} X_t$ für jedes $s \in G$.

Ist $s \leq \tau \in T$ und $t_1, \ldots, t_n$ sind die Werte von τ, dann ist, für jedes $k = 1, \ldots, n$, $X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau = t_k\}} = X_{t_k} \mathbf{1}_{\{\tau = t_k\}} \leq (\operatorname{e}\sup_{t \geq s} X_t) \mathbf{1}_{\{\tau = t_k\}}$, denn es gilt schon $X_{t_k} \leq \operatorname{e}\sup_{t \geq s} X_t$. Aufsummieren über k ergibt $X_\tau \leq \operatorname{e}\sup_{t \geq s} X_t$. Insbesondere ist dann $\operatorname{e}\sup_{\tau \geq s} X_\tau \leq \operatorname{e}\sup_{t \geq s} X_t$ und demzufolge

$$\operatorname{e}\inf_{t \in G} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq t} X_\tau \leq \operatorname{e}\sup_{t \geq s} X_t$$

für jedes $s \in G$. Also gilt auch $\operatorname{e}\inf_{t \in G} \operatorname{e}\sup_{\tau \geq t} X_\tau \leq \operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{t \geq s} X_t$. □

□

Folgendes Beispiel stammt aus [**Suc92**], Abschnitt 4.2, und zeigt, dass es $\mathbf{L}^1$-beschränkte Martingale gibt die *nicht* essentiell konvergieren. Dabei liegt dies nicht etwa an der Überabzählbarkeit der Indexmenge, denn G ist in diesem Fall abzählbar(siehe dazu auch Bem 6.3)

Beispiel 6.3. $G := \{M \subset \mathbb{N};\ \sharp M < \infty\}$. Bezüglich Mengeninklusion ($s \leq t :\leftrightarrow s \subseteq t$) ist G eine gerichtete Menge. Es seien $U_n \sim \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ unabhängig. Für $t \in G$ sei $\mathcal{F}_t := \sigma(U_n\,;\ n \in t)$ und $X_t := \sum_{n \in t} \frac{1}{n} U_n$.

- Man sieht schnell, dass $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in G}$ eine Filtration ist und jedes X_t $\mathcal{F}_t$-adaptiert.

- Wegen
$$\|X_t\|^2_{\mathbf{L}^2} = \mathbb{E}\left(\sum_{n\in t}\frac{1}{n}U_n\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{n\in t}\frac{1}{n^2} + \sum_{n,m\in t, n\neq m}\frac{1}{mn}U_mU_n\right)$$
$$= \sum_{n\in t}\frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$
ist $\{X_t\}_{t\in G}$ $\mathbf{L}^2$-beschränkt und insbesondere $\mathbf{L}^1$-beschränkt.
- Es sei $t > s$. Dann existieren $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ mit $s \sqcup \{n_1, \dots, n_m\} = t$ und aufgrund der Unabhängigkeit von $\mathcal{F}_s$ zu jedem U_{n_k} gilt
$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_s + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n_k}U_{n_k} \mid \mathcal{F}_s) = X_s + \mathbb{E}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n_k}U_{n_k} = X_s.$$

Aus obigen drei Punkten folgt, dass X_t ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes $\mathcal{F}_t$-Martingal ist. (Nach Satz 6.5 konvergiert X_t in Wahrscheinlichkeit.) Wir werden sehen, dass X_t *nicht* essentiell konvergiert. Zunächst ist klar, dass, wegen der Abzählbarkeit von G, essentielle Konvergenz nichts anderes bedeutet als die fast sichere Konvergenz des Netzes $\{X_t\}_{t\in G}$. Per Definition konvergiert $\{X_t(w)\}_{t\in G}$ genau dann gegen ein $x \in \mathbb{R}$, falls es zu beliebigem $a > 0$ immer eine endliche Teilmenge $s \subset \mathbb{N}$ (ein $s \in G$) gibt mit
$$\left|x - \sum_{n\in t}\frac{1}{n}U_n(w)\right| < a$$
für alle $t \geq s$. Das heisst gerade, dass $\{\frac{1}{n}U_n(w)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *summierbar* ist. [**Wie96**], Abschnitt B.6, entnimmt man, dass $\{\frac{1}{n}U_n(w)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *absolut summierbar* ist, was nichts anderes heisst, als dass $\{\left|\frac{1}{n}U_n(w)\right|\}_{n\in\mathbb{N}}$ summierbar ist. Aber das stimmt mit Wahrscheinlichkeit 1 *nicht*, denn:

Mit Wahrscheinlichkeit 1 ist $|U_n| = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $\{\left|\frac{1}{n}U_n(w)\right|\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Summierbarkeit würde bedeuten, dass es für jedes $a > 0$ immer eine endliche Teilmenge $s \subseteq \mathbb{N}$ gibt mit
$$\left|x - \sum_{n\in t}\frac{1}{n}\right| < a$$
sobald $t \geq s$. Ist m das grösste Element von s, so gilt $\{1, \dots, n\} \geq s$ für jedes $n \geq m$ und daher
$$\left|x - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right| < a.$$
Daraus würde $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to x \in \mathbb{R}$ folgen, was mitnichten der Fall ist.

Verfolgt man nun die ganze Überlegung zurück, so wird man feststellen, dass $\{\frac{1}{n}\left|U_n(w)\right|\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit Wahrscheinlichkeit Eins *nicht* summierbar ist. Deswegen gilt dasselbe auch für $\{\frac{1}{n}U_n(w)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Schliesslich divergiert das Netz $\{X_t\}_{t\in G}$ fast sicher.

Das heißt, wir müssen stärkere Bedingungen fordern, damit aus der L^1-Beschränkheit des $\mathcal{F}_t$-Martingals X_t wieder eine Konvergenz im Sinne von Definition 6.8 folgt und dazu stellt man eine zusätzliche Bedingung an die zugehörige Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$:

Definition 6.10 (Vitali-Bedingung). Man sagt, dass $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ einer Vitali-Bedingung genügt, falls es zu beliebigen $F_t \in \mathcal{F}_t$, $A \subseteq \limsup_{t\in G} F_t$ mit $A \in \mathcal{F}_\infty$ und jedem $a > 0$ endlich viele $t_1, \dots, t_n \in G$ und $B_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ gibt so, dass
- die B_i paarweise disjunkt sind,
- $B_i \subseteq F_{t_i}$ und
- $\mathbb{P}(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)^c) < a$.

Für den weiteren Umgang mit der Vitali-Bedingung benötigt man einige äquivalente Formulierungen. Sie werden im nächsten Satz zusammengefasst. (siehe auch [**Suc92**], Abschnitt 4.2)

- Eine Familie $\{F_t\}_{t\in G}$ derart, dass jedes F_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist, nennt man *adaptierte Familie (von Ereignissen)*.
- Für $\operatorname{e\,lim\,sup}_{t\in G} F_t$ wird auch die Schreibweise F^* verwendet.
- Ist $\tau \in T$, so definiert man $F_\tau := \bigcup_{t\in G} F_t \cap \{\tau = t\}$ und wegen $F_\tau \cap \{\tau = t\} = F_t \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ sieht man, dass $F_\tau \in \mathcal{F}_\tau$.

Satz 6.7. *Es sind äquivalent:*

(1) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ *erfüllt die Vitali-Bedingung.*
(2) *Zu jedem* $a > 0$ *und jeder adaptierten Familie* $\{F_t\}_{t\in G}$ *existiert ein* $\tau \in T$ *derart, dass* $\mathbb{P}(F^* \setminus F_\tau) < a$.
(3) *Zu jedem* $a > 0$, *jedem* $s \in G$ *und jeder adaptierten Familie* $\{F_t\}_{t\in G}$ *existiert ein* $\tau \in T$ *mit* $\tau \geq s$ *derart, dass* $\mathbb{P}(F^* \setminus F_\tau) < a$.
(4) *Zu jedem* $a > 0$, *jedem* $s \in G$ *und jeder adaptierten Familie* $\{F_t\}_{t\in G}$ *existiert ein* $\tau \in T$ *mit* $\tau \geq s$ *derart, dass* $\mathbb{P}(F_\tau) > \mathbb{P}(F^*) - a$.
(5) *Zu jedem* $a > 0$, *jedem* $s \in G$ *und jeder adaptierten Familie* $\{F_t\}_{t\in G}$ *existiert ein* $\tau \in T$ *mit* $\tau \geq s$ *derart, dass* $\mathbb{P}(F^* \Delta F_\tau) < a$.

Beweis. (1)⇒(2): Man definiere mit den t_i und B_i aus der Vitali-Bedingung $\tau(w) := t_i$ für $w \in B_i$, wähle ein $t \in G$ mit $t_1, \dots, t_n \leq t$ und setze $\tau(w) := t$ falls $w \notin \bigcup_{i=1}^n B_i$. Dann ist

$$F^* \setminus F_\tau \subseteq F^* \cap \left(\bigcup_{i=1}^n (F_{t_i} \cap B_i)\right)^c = F^* \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)^c$$

und daher $\mathbb{P}(F^* \setminus F_\tau) < a$.

(2)⇒(3): Definiere die adaptierte Familie

$$E_t := \begin{cases} F_t & \text{wenn}\, t \geq s \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und beachte, dass $E^* = F^*$ gilt.(Nach Lemma 6.4 ist $\mathbf{1}_{E^*} = \operatorname{e\,lim\,sup}_{t\in G} \mathbf{1}_{E_t} = \operatorname{e\,lim\,sup}_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t} = \mathbf{1}_{F^*}$!) Wähle ein $\sigma \in T$ so, dass $\mathbb{P}(E^* \setminus E_\sigma) < a$ und wähle $t \geq \sigma \vee s$. Dann ist

$$\tau := \begin{cases} \sigma & \text{wenn}\, \sigma \geq s \\ t & \text{sonst} \end{cases}$$

eine einfache Stoppzeit $\geq s$. Es gilt

$$\begin{aligned} E_\sigma &= \bigcup_{r\in G} E_r \cap \{\sigma = r\} = \bigcup_{r \geq s} E_r \cap \{\sigma = r\} = \bigcup_{r\geq s} E_r \cap \{\tau = r\} \\ &= \bigcup_{r\geq s} F_r \cap \{\tau = r\} \subseteq \bigcup_{r\in G} F_r \cap \{\tau = r\} = F_\tau. \end{aligned}$$

Demzufolge ist $F^* \setminus F_\tau \subseteq E^* \setminus E_\sigma$ und daher auch $\mathbb{P}(F^* \setminus F_\tau) < a$.

(3)⇒(4): $\mathbb{P}(F^*) \leq \mathbb{P}(F_\tau \cup F^*) = \mathbb{P}(F^* \setminus F_\tau) + \mathbb{P}(F_\tau)$ und daher ist

$$\mathbb{P}(F^*) - a < \mathbb{P}(F^*) - \mathbb{P}(F^* \setminus F_\tau) \leq \mathbb{P}(F_\tau).$$

(4)⇒(5): Da eine Folge $\{r_n\} \subseteq G$ existiert mit

$$F^* = \operatorname{e}\inf_{r\in G} \operatorname{e}\sup_{t\geq r} F_t = \bigcap_{n=1}^\infty \operatorname{e}\sup_{t\geq r_n} F_t$$

müssen endlich viele Elemente aus $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, o.B.d.A. seien diese $r_1, \dots, r_m$, dass $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^m \operatorname{e\,sup}_{t\geq r_k} F_t \setminus F^*) < a$. Es sei $r \geq r_1, \dots, r_m, s$. Dann ist auch $\mathbb{P}(\operatorname{e\,sup}_{t\geq r} F_t \setminus F^*) < a$ und wählt man $\tau \geq r$ wie in (4), so gilt

$$F_\tau = \bigcup_{t\geq r} (F_t \cap \{\tau = t\}) \subseteq \operatorname{e}\sup_{t\geq r} F_t,$$

also auch

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F^*\Delta F_\tau) &= \mathbb{P}(F^*\setminus F_\tau)+\mathbb{P}(F_\tau\setminus F^*) \le \mathbb{P}(\operatorname*{e\,sup}_{t\ge r} F_t\setminus F_\tau)+\mathbb{P}(\operatorname*{e\,sup}_{t\ge r} F_t\setminus F^*)\\ &\le \mathbb{P}(\operatorname*{e\,sup}_{t\ge r} F_t)-\mathbb{P}(F_\tau)+a=\mathbb{P}(\operatorname*{e\,sup}_{t\ge r} F_t)-\mathbb{P}(F^*)+\mathbb{P}(F^*)-\mathbb{P}(F_\tau)+a\\ &< a+a+a.\end{aligned}$$

(5)$\Rightarrow$(1): Wähle zu beliebigem $s\in G$ ein $\tau\in T$ wie in (5). τ nehme die Werte $t_1,\dots,t_n$ an. Dann sind $B_i := F_{t_i}\cap\{\tau=t_i\}\in\mathcal{F}_{t_i}$ paarweise disjunkt mit $B_i\subseteq F_{t_i}$ und

$$\mathbb{P}(A\cap(\bigcup_{i=1}^n B_i)^c)\le\mathbb{P}(F^*\setminus F_\tau)\le\mathbb{P}(F^*\Delta F_\tau)<a.$$

□

Im nächsten Lemma wird gezeigt, dass für *total geordnete* Filtrationen $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$, das sind Filtrationen, bei denen für beliebige $s,t\in G$ entweder $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}_s$ oder $\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t$ gilt, die Vitali-Bedingung erfüllt ist.

LEMMA 6.7. *Es sei $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ eine total geordnete Filtration. Dann erfüllt $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ die Vitali-Bedingung.*

Damit weiss man zum Beispiel, dass L^1-beschränkte Martingale $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ essentiell konvergieren.

BEWEIS VON LEMMA 6.7. $a>0$ und $\{F_t\}_{t\in G}$ sei eine adaptierte Familie. Man sieht schnell, dass $\operatorname{e\,lim\,sup}_{t\in G} F_t\subseteq\operatorname{e\,sup}_{t\in G} F_t$ fast sicher und daher eine Folge $\{t_n\}\subseteq G$ existiert mit $F^*\subseteq\bigcup_{k=1}^\infty F_{t_k}$. Insbesondere existiert ein $m\in\mathbb{N}$ so, dass $\mathbb{P}(F^*\setminus\bigcup_{k=1}^m F_{t_k})<a$. Man ordne $t_1,\dots,t_m$ derart, dass $\mathcal{F}_{t_1}\subseteq\mathcal{F}_{t_2}\subseteq\ldots\subseteq\mathcal{F}_{t_m}$ und definiere die einfache Stoppzeit

$$\tau := t_1\mathbf{1}_{F_{t_1}}+\sum_{k=2}^m t_k\mathbf{1}_{F_{t_k}\setminus\bigcup_{l=1}^{k-1}F_{t_l}}+t_m\mathbf{1}_{(\bigcup_{l=1}^{m}F_{t_l})^c}.$$

Wegen

$$\bigcup_{k=1}^m F_{t_k}=F_{t_1}\cup\bigcup_{k=2}^m\left(F_{t_k}\setminus\bigcup_{l=1}^{k-1}F_{t_l}\right)=\bigcup_{k=1}^m F_{t_k}\cap\{\tau=t_k\}=F_\tau$$

ist $\mathbb{P}(F^*\setminus F_\tau)<a$ und nach Satz 6.7 besitzt $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ die Vitali-Eigenschaft. □

SATZ 6.8 (Dritter Konvergenzsatz). *Es sei X_t ein Martingal und $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ genüge der Vitali-Bedingung. Dann folgt aus der $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit von $\{X_t\}_{t\in G}$ die essentielle Konvergenz.*

Obiger Satz ist eine direkte Konsequenz eines Ergebnisses von Astbury (siehe dazu [**Ast78**]), das besagt, dass die Vitali-Bedingung äquivalent zur essentiellen Konvergenz jedes L^1-beschränkten Amarts ist.(zu Amarts siehe folgende Kapitel)

BEWEIS. Ein Martingal X_t ist insbesondere ein Amart und nach Satz 10.9 konvergiert X_t essentiell. Füre einen „direkten“ Beweis siehe [**Nev75**], Kapitel V. □

BEMERKUNG 6.3. Offenbar besitzt die Filtration aus Beispiel 6.3 nicht die Vitali-Eigenschaft, da man ja ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes Martingal konstruiert, das *nicht* essentiell konvergiert. Für einen direkten Nachweis siehe [**Suc92**], Abschnitt 4.2.

KAPITEL 7

Quasimartingale,Amarts und Semiamarts

Zunächst werden die Begriffe *Quasimartingal*, *Amart* und *Semiamart* erklärt und gleich im Anschluß folgende Implikationskette bewiesen:

X_n ist Martingal $\Rightarrow X_n$ ist Quasimartingal $\Rightarrow X_n$ ist Amart $\Rightarrow X_n$ ist Semiamart

gefolgt von Beispielen, die zeigen, dass die Umkehrungen i.a. nicht gelten. Mit Satz 7.3 folgt eine Verallgemeinerung des Optional-Sampling-Theorems 2.4 für Martingale auf Quasimartingale. Die Sätze 7.4(erstmals bewiesen in [**Sud71**]) und 7.5(gezeigt in [**Che76**]) sind „Fatou-ähnliche" Ungleichungen, welche später in Abschnitt 1 benutzt werden um Konvergenzsätze für Amarts zu beweisen. Beispiel 7.3 demonstriert eine Besonderheit des Limes-Superior für Netze, denn, anders als für $G = \mathbb{N}$, kann es passieren, dass

$\limsup_{t\in G} x_t \lneq \limsup_{t\in \tilde{G}} x_t$ ist, obwohl $\tilde{G} \subsetneq G$. Sehr hilfreich sind auch die Abgeschlossenheitseigenschaften von (Semi-)Amarts präsentiert in Satz 7.6. Zum Beispiel ist das Supremum oder Infimum von endlich vielen Amarts wieder ein Amart. Diese Eigenschaften werden zum Beweis einer Maximalungleichung eines Konvergenzsatzes(Satz 7.11) oder einer äquivalenten Formulierung der Amarteigenschaft(Satz 7.16) verwendet.

In Abschnitt 1 werden einige Konvergenzsätze vorgestellt. Die wichtigsten Ergebnisse sind, dass $\mathbf{L}^1$-beschränkte Amarts fast sicher konvergieren und, unter der Annahme der T-gleichgradigen Integrierbarkeit, X_n *genau dann* ein Amart ist, wenn der Prozess fast sicher konvergiert.

Abschnitt 2 behandelt die *Riesz-Zerlegung* von Amarts und der Nutzen dieser Art der Zerlegung soll anhand von einigen wichtigen Folgerungen, wie zum Beispiel das Optional-Sampling-Theorem für Amarts, gezeigt werden.

Zum Schluss folgt, mit Abschnitt 3, noch ein kurzer Part über die Doob-Zerlegung von Amarts.

Konvention 7.1. Mit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei, falls nicht anders erklärt, immer ein Prozess X_n auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gemeint, der bezüglich einer Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert ist und integrierbar ist. Wenn die Filtration nicht explizit angegeben ist, sei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. T sei die Menge aller *beschränkten* Stoppzeiten und T_0 die Menge aller *fast sicher endlichen* Stoppzeiten bezüglich $\mathcal{F}_n$.

Definition 7.2.

- X_n heißt Quasimartingal, falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n|) < \infty.$$

- X_n heißt Amart, falls das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.
- X_n heißt Semiamart, falls das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

Satz 7.1. *Jedes Quasimartingal ist auch ein Amart.*

Beweis. Es sei $a > 0$ beliebig. Wähle $k \in \mathbb{N}$ und $\tau \in T$ hinreichend groß, dass

$$\sum_{m=k}^{\infty} \mathbb{E}(|X_m - \mathbb{E}(X_{m+1} \mid \mathcal{F}_m)|) < a$$

und

$$\tau \geq k.$$

Per Definition von T existiert ein n mit

$$\tau < n.$$

Man zeigt nun, dass

$$|\mathbb{E}(X_\tau) - \mathbb{E}(X_n)| \le a.$$

Dazu wird

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_\tau) - \mathbb{E}(X_n) &= \sum_{l=k}^{n-1}\sum_{m=l}^{n-1}(\mathbb{E}(X_m) - \mathbb{E}(X_{m+1}))\mathbf{1}_{\tau=l} \\ &= \sum_{m=k}^{n-1}\sum_{l=k}^{m}(\mathbb{E}(X_m) - \mathbb{E}\mathbb{E}(X_{m+1} \mid \mathcal{F}_m))\mathbf{1}_{\tau=l}\end{aligned}$$

verwendet. Mit dieser Ungleichung sieht man sehr schnell, dass

$$|\mathbb{E}(X_\tau) - \mathbb{E}(X_\sigma)| \le 2a$$

falls $\sigma, \tau \in T$ hinreichend groß. Der letzte Schritt folgt dann aus dem ersten Punkt von Lemma 6.1. □

Die Rückrichtung gilt im allgemeinen nicht wie folgendes Beispiel aus [**Sto97**] zeigt.

Beispiel 7.1. Es seien X_n i.i.d. mit

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

sowie $c_n > 0$ eine Nullfolge so, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty.$$

(z.B. $c_n = \frac{1}{n}$) Dann ist

$$Y_n := c_n X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$$

auch $\mathcal{F}_n$-adaptiert und man sieht schnell, dass Y_n *kein* Quasimartingal ist. Wenn man sich das Netz $\{\mathbb{E}Y_\tau\}_{\tau \in T}$ anschaut so stellt man fest, dass es gegen Null konvergiert, denn nach Lemma 6.1 ist dies nur für $\tau_n \uparrow \infty$ zu zeigen und $|Y_n| \le c_n \to 0$, also auch $Y_{\tau_n} \to 0$ fast sicher. Das Dominierende-Konvergenz-Theorem tut dann den Rest.

Es gelten auch die folgenden Implikationen:

Satz 7.2.
- *Jedes Martingal ist ein Quasimartingal.*
- *Jedes Amart ist ein Semiamart.*

Beweis.
- klar
- Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so gross, dass für alle $\tau \in T$ mit $\tau \ge n$

  $$|\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_n| \le 1.$$

  Wir schreiben, für $\tau \in T$ beliebig,

  $$X_\tau = X_{n\wedge\tau} + X_{n\vee\tau} - X_n.$$

  Damit folgt

  $$|\mathbb{E}X_\tau| \le |\mathbb{E}X_{n\wedge\tau}| + 1 \le \mathbb{E}\max_{1\le k\le n}|X_k| + 1 < \infty.$$

□

Die Rückrichtungen gelten i.a. nicht wie zwei weitere Beispiele zeigen:

Beispiel 7.2.
(1) Um ein einfaches Beispiel eines Quasimartingals zu erhalten, das kein Martingal ist, betrachte den „Produktprozess“

$$X_n := Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_n$$

wobei die Y_n unabhängig seien und $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2^n}$ sowie $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 - \frac{1}{2^n}$.
(2) Für ein Beispiel eines Semiamarts, das kein Amart ist siehe Beispiel 7.4, denn hier ist $0 \le \mathbb{E}X_\tau \le 1$, aber $\mathbb{E}X_n$ alterniert zwischen 0 und 1.

Hilfreich im Umgang mit Amarts ist auch folgendes Lemma.

Lemma 7.1. *Es sind äquivalent:*

(1) *Das Netz* $\{\mathbb{E}(X_\tau)\}_{\tau\in T}$ *konvergiert, d.h.* X_n *ist Amart.*
(2)

$$\begin{aligned}\liminf_{\tau\in T}\mathbb{E}X_\tau &:= \sup_{\sigma\in T}\inf_{\tau\geq\sigma}\mathbb{E}(X_\tau)\\ &= \lim_{n\to\infty}\inf_{\tau\geq n}\mathbb{E}(X_\tau)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sup_{\tau\geq n}\mathbb{E}(X_\tau)\\ &= \inf_{\sigma\in T}\sup_{\tau\geq\sigma}\mathbb{E}(X_\tau) =: \limsup_{\tau\in T}\mathbb{E}(X_\tau)\end{aligned}$$

Quasimartingale können, wie im folgenden Lemma zu sehen ist, ebenfalls via Stoppzeiten charakterisiert werden.(siehe auch [**Suc92**], Abschnitt 1.4)

Lemma 7.2. *Es sind äquivalent:*

(1) X_n *ist ein Quasimartingal, d.h. es existiert ein* $C>0$ *mit* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_{k+1}\mid\mathcal{F}_k)-X_k|\leq C$.
(2) *Es existiert ein* $C>0$ *so, dass für beliebige* $\tau_1,\ldots,\tau_n\in T$*, mit* $\tau_1\leq\ldots\leq\tau_n$*, gilt*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_{\tau_{k+1}}\mid\mathcal{F}_{\tau_k})-X_{\tau_k}\right|\leq C.$$

(3) *Es existiert ein* $C>0$ *so, dass für beliebige* $\tau_1,\ldots,\tau_n\in T$*, mit* $\tau_1\leq\ldots\leq\tau_n$*, gilt*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|\mathbb{E}X_{\tau_{k+1}}-\mathbb{E}X_{\tau_k}\right|\leq C.$$

Beweis. Wurde, laut [**Suc92**], Abschnitt 1.4, in einer privaten Unterredung zwischen den Autoren *G.A. Edgar* und *L. Sucheston* mit *R. Wittman* ausdiskuttiert. □

Daraus erhält man sofort ein Optional-Sampling-Theorem für Quasimartingale.

Satz 7.3 (Optional-Sampling-Theorem). *Es sei* $\tau_n\uparrow$ *eine Folge beschränkter Stoppzeiten und* X_n *ein Quasimartingal. Dann ist* $\{X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ein* $\{\mathcal{F}_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$*-Quasimartingal.*

Beweis. Folgt aus letztem Lemma und der Tatsache, dass, wegen $\tau_n\leq m_n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}\,|X_{\tau_n}|\leq\sum\limits_{k=1}^{m_n}\mathbb{E}\,|X_k|<\infty$ und somit jedes $X_{\tau_n}\in\mathbf{L}^1$. □

Wichtige Hilfsmittel um eine Verbindung zwischen der Fast-Sicher-Konvergenz und der Amart-Eigenschaft zu erhalten sind (Un-)Gleichungen in der Art des Fatou-Lemmas. Im Folgenden werden wir einige dieser Ungleichungen kennenlernen.

Satz 7.4. *Es sei* X_n $\mathcal{F}_n$*-adaptiert. Unter der Bedingung der (Wohl-)Definiertheit der entsprechenden Erwartungswerte gilt:*

$$\mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty}X_n)\leq\limsup_{\tau\in T_0}\mathbb{E}(X_\tau)$$
$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty}X_n)\geq\liminf_{\tau\in T_0}\mathbb{E}(X_\tau)$$

Beweis. Folgende Beweisskizze liefert [**Che76**]: Man nimmt zunächst an, dass $\limsup\limits_{n\to\infty}X_n$ integrierbar ist. Wähle nun Treppenfunktionen $Y_n:=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i\mathbf{1}_{A_i}$ so, dass $Y_n\to\limsup\limits_{n\to\infty}X_n$ fast sicher und in $\mathbf{L}^1$. Nun wird zu jedem $n\in\mathbb{N}$, zu jedem $b>0$ und zu jeder Stoppzeit $\sigma\in T_0$ eine Stoppzeit $\tau\geq\sigma$ konstruiert, derart, dass $\mathbb{E}(X_\tau)\geq\mathbb{E}(Y_n)-b$. Damit ist insbesondere für jedes n, und jedes $\sigma\in T_0$

$$\sup_{\tau\geq\sigma}\mathbb{E}(X_\tau)\geq\mathbb{E}(Y_n).$$

Damit aber auch $\limsup\limits_{\tau\in T_0}\mathbb{E}(X_\tau)\geq\mathbb{E}(\limsup\limits_{n\to\infty}X_n)$. Wenn nun $\mathbb{E}(\limsup\limits_{n\to\infty}X_n)=\infty$, dann beschränke X_n:

$$X_n^k:=X_n\wedge k.$$

Für $\{X_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt die Ungleichung. Nun benutzt man das Monotone-Konvergenz-Theorem in k. $\square$

LEMMA 7.3. *Im Fall von L_1-Dominiertheit des Prozesses X_n von*

- *oben, wird die erste Ungleichung zu einer Gleichung.*
- *unten, wird die zweite Ungleichung zur Gleichung.*

BEWEIS. Sei z.B. $X_n \leq Z \in \mathbf{L}^1$. Dann ist auch $Y_n := \sup_{n\leq k} X_k \leq Z$ und somit nach Monotone-Konvergenz-Theorem

$$\mathbb{E}(Z) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z - Y_n) = \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} X_n).$$

Man muss also noch zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n) \geq \limsup_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau),$$

was man aber mit

$$\mathbb{E}(Y_n) \geq \sup_{\tau\geq n} \mathbb{E}(X_\tau)$$

sieht. $\square$

Obiges Ergebnis wird in [**Che76**] noch verallgemeinert. Einerseits wird hier gezeigt, dass die $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit von oben(bzw. unten) durch die Voraussetzung ersetzt werden kann, dass $\{X_\tau^+\}_{\tau\in T_0}$(bzw. $\{X_\tau^-\}_{\tau\in T_0}$) gleichgradig integrierbar sind. (siehe Lemma und Theorem (2.2) in [**Che76**]). Andererseits wird gezeigt, dass unter der zusätzlichen Bedingung, dass X_n^-(bzw. X_n^+) gleichgradig integrierbar sind, die Gleichheit auch noch für T gilt:

SATZ 7.5 (Chen's Fatou-Gleichungen).

- *Ist sowohl $\{X_\tau^+\}_{\tau\in T_0}$, als auch $\{X_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar, so gilt*

$$\limsup_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau) = \limsup_{\tau\in T} \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} X_n).$$

- *Ist sowohl $\{X_\tau^-\}_{\tau\in T_0}$, als auch $\{X_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar, so gilt*

$$\liminf_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau) = \liminf_{\tau\in T} \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n).$$

Es wird in [**Che76**] auch ein Beispiel eines gleichgradig integrierbaren Prozesses X_n gegeben für den

$$\limsup_{\tau\in T} \mathbb{E}(X_\tau) \gneq \limsup_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau)$$

gilt:

BEISPIEL 7.3 (Doppelt oder Nichts unter erschwerten Bedingungen). Es seien V_n i.i.d. mit $\mathbb{P}(V_n = 1) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(V_n = 0) = \frac{1}{2}$. Betrachte $Y_n := 2^n V_1 \cdot \ldots \cdot V_n$ als den Gewinn eines Spielers. $j(n)$ sei die größte Zeit bei der, sofern alle Spiele gewonnen wurden, der Gewinn noch $\leq n$ ist, d.h. $j(n) = \max\{k\,;\, 2^k \leq n\}$. Setze $Z_n := Y_{j(n)}$. Wähle nun einen von V_n unabhängigen Prozess U_n mit folgenden Eigenschaften:

- Ist $2^k \leq n < 2^{k+1}$, so ist $P(U_n = 1) = \frac{1}{2^k}$ und $P(U_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^k}$.
- $\sum\limits_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} U_n \equiv 1$

(Unterteile z.B. den Intervall $[0, 1]$, versehen mit Borel'scher σ-Algebra und Lebesguemaß in 2^k gleichlange disjunkte Intervalle.) Dann ist $X_n := Z_n U_n$ gleichgradig integrierbar. Man definiert nun eine beschränkte Stoppzeit $\tau = n$ für $2^k \leq n < 2^{k+1}$ auf $\{X_n > 0\}$ (wählt man U_n, konkret wie oben, so sind diese Mengen disjunkt, τ also bis jetzt wohldefiniert.), ansonsten setze $\tau = 2^{k+1} - 1$. Der

Erwartungswert von X_τ ist Eins, denn:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_\tau &= \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \mathbb{E}X_n \mathbf{1}_{\{X_n>0\}} = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \mathbb{E}(2^k \mathbf{1}_{\{V_1=1\}\cap\ldots\cap\{V_k=1\}\cap\{U_n=1\}}) \\ &= \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} 2^k \prod_{l=1}^{k} \mathbb{P}(V_l=1)\cdot\mathbb{P}(U_n=1) = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2^k} = 1.\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\limsup_{\tau\in T} \mathbb{E}(X_\tau) \geq 1.$$

Nun definiert man sich $\sigma = 2^m - 1$, wobei m das kleinste k ist so, dass $X_n = 0$ ist für alle n mit $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Mittels Borel-Cantelli-Lemma sieht man, dass $\sigma \in T_0$ und daher ist $\mathbb{E}(X_\sigma) = 0$. Nicht nur das, sondern auch für jedes $\tau \geq \sigma$ ist $\mathbb{E}(X_\tau) = 0$. (Denn man hat, falls $\sigma = 2^m - 1$, nämlich auf kompletter Partition von Ω, namentlich: $\{\{U_n = 1\}\,;\; 2^{m-1} \leq n < 2^m\}$, das dort das entsprechende $Z_n = 0$ sein muss, aber da aus $Z_n = 0$ automatisch $Z_{n+1} = 0$ folgt, ist $Z_{2^m-1} \equiv 0$ und für jedes $n \geq 2^m - 1$ auch $X_n = 0$.) Das heisst aber, dass

$$\limsup_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau) = 0.$$

Die nachfolgende Ungleichung ist zu finden in [**Cha74**].

Lemma 7.4. *Es sei X_n $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt und $\mathcal{F}_n$-adaptiert. Dann gilt*

$$\mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} X_n - \liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \limsup_{\tau,\sigma\in T} \mathbb{E}(X_\tau - X_\sigma)$$

und unter der $\boldsymbol{L}^1$-Beschränktheit des Netzes $\{X_\tau\}_{\tau\in T}$ sind $\limsup X_n$ und $\liminf X_n$ auch aus $\boldsymbol{L}^1$.

Unter L^1-Beschränktheit kann man sich auf positive Amarts beschränken, wie aus dem nächsten Lemma zu ersehen ist.

Lemma 7.5. *Es gelte $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$ oder $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^- < \infty$. Dann sind äquivalent:*

(1) *$\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ konvergiert.*
(2) *$\{\mathbb{E}X_\tau^+\}_{\tau\in T}$ und $\{\mathbb{E}X_\tau^-\}_{\tau\in T}$ konvergieren.*

Insbesondere gilt die Äquivalenz, falls X_n $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt ist.

Beweis. (2)⇒(1): klar
(1)⇒(2):

- Es sei $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^- < \infty$. Man will für ein beliebig fest gewähltes $a > 0$ zeigen, dass, für $\sigma \geq \tau_0 \in T$ „hinreichend groß", einerseits

  $$\mathbb{E}X_\sigma^+ - \mathbb{E}X_{\tau_0}^+ < a$$

  und andererseits

  $$\mathbb{E}X_{\tau_0}^+ - \mathbb{E}X_\sigma^+ < a.$$

  Damit wäre für $\tau, \sigma \geq \tau_0$

  $$\left|\mathbb{E}X_\tau^+ - \mathbb{E}X_\sigma^+\right| < 2a,$$

  $\mathbb{E}X_\tau^+$ demnach eine Chauchynetz und somit konvergent.

  Wähle zunächst $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $\tau, \sigma \geq n$

  $$|\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_\sigma| < a.$$

  Wähle nun $\tau_0 \geq n$ so groß, dass für alle $\sigma \geq \tau_0$ schon

  $$\mathbb{E}X_\sigma^+ < \mathbb{E}X_{\tau_0}^+ + a$$

  gilt. Das funktioniert, da das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau^+\}_{\tau\in T}$ nach oben beschränkt ist. (Um das einzusehen nimmt man sich eine beliebige beschränkte Stoppzeit $\tau \in T$ und wählt eine obere Grenze $m \geq \tau$. Definiert man die Stoppzeit $\tau_1 := \tau\mathbf{1}_{\{X_\tau\geq 0\}} + m\mathbf{1}_{\{X_\tau<0\}}$, dann ist $X_\tau^+ \leq X_{\tau_1} + X_m^-$

und somit $\mathbb{E}X_\tau^+ \le \sup_{\sigma\in T}\mathbb{E}(X_\sigma)+\sup_m \mathbb{E}X_m^- < \infty$.) Um die zweite Ungleichung zu beweisen definiert man die Stoppzeit

$$\sigma_1 := \sigma\mathbf{1}_{\{X_{\tau_0}\ge 0\}} + \tau_0\mathbf{1}_{\{X_{\tau_0}<0\}},$$

zerlegt X_{τ_0} und X_{σ_1} auf $\{X_{\tau_0}\ge 0\}\cup\{X_{\tau_0}<0\}$ und benutzt

$$|\mathbb{E}X_{\tau_0} - \mathbb{E}X_{\sigma_1}| < a$$

sowie

$$\mathbb{E}(X_\sigma\mathbf{1}_{\{X_{\tau_0}\ge 0\}}) \le \mathbb{E}X_\sigma^+.$$

- Es sei $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n^+ < \infty$ Nun zeigt man nicht, wie im ersten Punkt, die Beschränkheit von $\{\mathbb{E}X_\tau^+\}_{\tau\in T}$ sondern, dass $\sup\limits_{\tau\in T}\mathbb{E}X_\tau^- < \infty$ indem man

  $$\tau_1 := m\mathbf{1}_{\{X_\tau\ge 0\}} + \tau\mathbf{1}_{\{X_\tau<0\}}$$

  setzt und aus $X_\tau^- \le -X_{\tau_1} + X_m^+$ folgert, dass

  $$\mathbb{E}X_\tau^- \le -\inf_{\sigma\in T}\mathbb{E}X_\sigma + \sup_{m\in\mathbb{N}} X_m^+ < \infty.$$

  Nun verfährt man ähnlich wie im ersten Punkt, nur, dass man nun zeigt, dass $\{\mathbb{E}X_\tau^-\}_{\tau\in T}$ konvergiert:

  Man wählt ein $n\in\mathbb{N}$ so, dass für alle $\sigma,\tau\ge n$

  $$|\mathbb{E}X_\sigma - \mathbb{E}X_\tau| < a$$

  gilt und wegen $\sup_{\tau\in T}\mathbb{E}X_\tau^- < \infty$ existiert auch ein $\tau_0\ge n$ so, dass für alle $\sigma\ge\tau_0$

  $$\mathbb{E}X_\sigma^- < \mathbb{E}X_{\tau_0}^- + a.$$

  Mit $\sigma_1 := \sigma\mathbf{1}_{\{X_{\tau_0}\le 0\}} + \tau_0\mathbf{1}_{\{X_{\tau_0}>0\}} \ge \tau_0$ folgt dann aus

  $$\mathbb{E}X_{\tau_0}^- - \mathbb{E}X_\sigma^- \le \mathbb{E}(X_\sigma - X_{\tau_0})\mathbf{1}_{\{X_{\tau_0}\le 0\}} = \mathbb{E}X_{\sigma_1} - \mathbb{E}X_{\tau_0} \le |\mathbb{E}X_{\sigma_1} - \mathbb{E}X_{\tau_0}| < a$$

  die zweite benötigte Ungleichung.

In obigen Punkten hat man gezeigt, dass $\{\mathbb{E}X_\tau^+\}$ bzw. $\{\mathbb{E}X_\tau^-\}$ konvergiert und mit der Konvergenz von $\{\mathbb{E}X_\tau\}$ folgt die Konvergenz von $\{\mathbb{E}X_\tau^-\}$ bzw. $\{\mathbb{E}X_\tau^+\}$. □

Der Begriff des (Semi-)Amarts ist so allgemein gehalten, dass eine Menge von „Abgeschlossenheitseigenschaften“ gelten, welche Sub- bzw. Supermartingale i.a. nicht besitzen. Sie sind in folgendem Satz zusammengefasst.(siehe auch [**Sch83**] Teil 1 Kapitel 2)

Satz 7.6. *$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt.*

- *Die Menge der $\boldsymbol{L}^1$-beschränkten (Semi-)Amarts, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und bezüglich fester Filtration, bilden einen Vektorraum.*
- *Ist X_n ein Semiamart so auch X_n^+, X_n^- und $|X_n|$.*
- *Ist X_n ein Amart so auch X_n^+, X_n^- und $|X_n|$.*
- *(Semi-)Amarts sind abgeschlossen gegenüber „$\inf(\cdot,\cdot)$“ und „$\sup(\cdot,\cdot)$“.*

Beweis.

- klar
- Zu zeigen ist, dass aus

  $$\sup_{\tau\in T}|\mathbb{E}X_\tau| < \infty$$

  auch

  $$\sup_{\tau\in T}\mathbb{E}X_\tau^+ < \infty$$

  folgt. Dazu kann man wie im Beweises von Lemma 7.5 verfahren. Noch zu zeigen ist, dass aus

  $$\sup_{\tau\in T}|\mathbb{E}X_\tau| < \infty$$

  auch

  $$\sup_{\tau\in T}\mathbb{E}X_\tau^- < \infty$$

folgt. Aber mit X_n ist auch $-X_n$ ein Semiamart und wir können diesen Fall auf den eben Behandelten via

$$x^- = -\inf(x,0) = \sup(-x,0) = (-x)^+$$

zurückführen. Die letzte Aussage folgt mittels erstem Punkt.

- Lemma 7.5
- Wegen

$$\inf(X_n, Y_n) = X_n + Y_n - \sup(X_n, Y_n)$$

und erstem Punkt braucht man nur zu zeigen, dass $\sup(X_n, Y_n)$ ein (Semi-)Amart ist, was aber ebenfalls aus den vorherigen Punkten via

$$\sup(X_n, Y_n) = \frac{1}{2}(X_n + Y_n + |X_n - Y_n|)$$

folgt.

□

Lemma 7.6 (Eine Maximalungleichung). *X_n sei ein $\boldsymbol{L}^1$-beschränktes Semiamart. Dann gilt für jedes $a > 0$*

$$a\mathbb{P}(\sup_{m\in\mathbb{N}} |X_m| > a) \leq \sup_{\tau\in T} \mathbb{E}\,|X_\tau| < \infty.$$

Beweis. Es reicht aus für jedes $n \in \mathbb{N}$ immer ein $\tau \in T$ zu finden derart, dass

$$a\mathbb{P}(\max_{m\leq n} |X_m| > a) \leq \mathbb{E}\,|X_\tau|\,.$$

Dazu konstruiert man τ so, dass auf $F := \{\max_{m\leq n} |X_m| > a\}$ gilt, dass

$$a < |X_\tau|\,.$$

Wir wissen, dass auf F schon für irgendein m mit $m \leq n$

$$a < |X_m|$$

gelten muss. Daher definieren wir τ auf F als erste Eintrittszeit in (a, ∞) beschränkt durch n, d.h.

$$\tau = \inf\{m \in \mathbb{N}\,;\ m \leq n, |X_m| > a\}$$

auf F. Wir müssen τ auch auf F^c definieren: setze $\tau = n$ damit τ eine beschränkte Stoppzeit ist.

Es ist noch zu zeigen, dass $\{\mathbb{E}\,|X_\tau|\}_{\tau\in T}$ beschränkt ist. Das folgt aber aus dem zweiten Punkt von Satz 7.6. □

Bemerkung 7.1. Aus dem Beweis wird ersichtlich, dass für die Gültigkeit der Ungleichung

$$a\mathbb{P}(\sup_{m} |X_m| > a) \leq \sup_{\tau\in T} \mathbb{E}\,|X_\tau|$$

nur die $\mathcal{F}_n$-Adaptiertheit von X_n erforderlich ist.

Ist X_n ein positives Submartingal, ist es auch $Y := (X_1, \ldots, X_n, X_n, \ldots)$. Es sei $\tau \in T$ und $m \geq n \vee \tau$. Dann ist, nach Satz 2.19, $\mathbb{E}\,|Y_\tau| \leq \mathbb{E}Y_m = \mathbb{E}X_n < \infty$. Dementsprechend ist Y ein Semiamart und man erhält

$$a\mathbb{P}(\sup_{k\leq n} X_k > a) \leq \sup_{\tau\in T} \mathbb{E}\,|Y_\tau| = \mathbb{E}X_n.$$

Demzufolge ist Lemma 7.6 eine Verallgemeinerung von Satz 2.12.

1. Konvergenzsätze

Es werden, wie der Name schon sagt, eine Reihe von Konvergenzsätzen gezeigt, darunter solche die sich mit der Äquivalenz von Amarteigenschaft und Fast-Sicher-Konvergenz auseinandersetzen, wie der Erste und der Zweite Konvergenzsatz. Hier wird bewiesen, dass $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit dafür hinreichend ist. Im Anschluss an diese beiden Sätze wird, anhand von Beispielen, deutlich gemacht, dass $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit von $\{X_\tau\}_{\tau\in T}$ oder aber die gleichgradige Integrierbarkeit von $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* ausreichen um diese Äquivalenz zu sichern. Trotzdem existiert mit der T-gleichgradigen Integrierbarkeit noch eine schwächere Voraussetzung für die Äquivalenz. Das ist der Inhalt des Fünften Konvergenzsatzes (gezeigt in [**Suc76a**]) dem sich 2 Beispiele anschliessen, die einerseits zeigen, dass die Vorraussetzungen nicht mehr wesentlich abgeschwächt werden können und andererseits, dass dieser Satz eine wirkliche Verbesserung des Zweiten Konvergenzsatzes darstellt. Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist Satz 7.11(erstmals gezeigt in [**Tul74**]) der besagt, dass $\mathbf{L}^1$-beschränkte Amarts schon fast sicher konvergieren. Mit seiner Hilfe erhalten 2 Konvergenzsätze aus Kapitel 2 neue (Amart)-Beweise.

Folgender Konvergenzsatz wurde von Sudderth in [**Sud71**] gezeigt und benutzt zum Beweis eine Art von „Fatou-Ungleichung“.

Satz 7.7 (Erster Konvergenzsatz). *Es sei X_n ein $\mathcal{F}_n$-adaptierter und $\boldsymbol{L}^1$-dominierter Prozess. Dann sind äquivalent:*

(1) *X_n konvergiert fast sicher*
(2) *Das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T_0}$ konvergiert.*

Beweis. Falls $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T_0}$ konvergiert, so gilt nach Satz 7.4.

$$0 \le \mathbb{E}(\limsup X_n - \liminf X_n) \le \limsup_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau) - \liminf_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau) = 0.$$

Konvergiert andererseits X_n fast sicher, dann folgt Netzkonvergenz aus Lemma 7.3:

$$0 = \mathbb{E}(\limsup X_n) - \mathbb{E}(\liminf X_n) = \limsup_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau) - \liminf_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau)$$

□

Austin, Edgar und Tulcea haben dieses Ergebnis in [**Tul74**] verfeinert, indem sie zeigten, dass T_0 durch T ersetzt werden kann.(siehe Satz 7.9)

Lemma 7.7. *Es sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable derart, dass, für jedes $w \in \Omega$, $Y(w)$ ein Häufungspunkt von $X_n(w)$ ist. Dann existiert zu jeden $a, b > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ immer eine beschränkte Stoppzeit $\tau \in T$, $\tau \ge m$ mit*

$$\mathbb{P}(|X_\tau - Y| \ge a) < b.$$

Wir werden sehen, dass Lemma 7.7 mit $Y = \limsup X_n$ bzw. $Y = \liminf X_n$ zur Anwendung kommt um wieder ein Verbindung zwischen Netzkonvergenz und Fast-Sicher-Konvergenz zu erhalten. (siehe (Beweis von) Satz 7.9)

Satz 7.8. *Es sei $Y : \Omega \to [-\infty, \infty]$ ein Zufallsvariable wie in obigem Lemma.*

- *Es existiert eine Folge von Stoppzeiten $T \ni \tau_n \uparrow \infty$ so, dass*
$$X_{\tau_n} \to Y$$
fast sicher.
- *Ist X_n $\boldsymbol{L}^1$-dominiert, so konvergiert die Folge $\{\mathbb{E}X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.*

Beweis.
- Sei zunächst $Y \in \mathbb{R}$. Dann kann man sich nach obigem Lemma induktiv eine geeignete Folge definieren, die die Eigenschaft
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_{\tau_n} - Y| \ge \frac{1}{n}) < \infty$$
hat. Für beliebiges $q > 0$ gilt dann nach Borel-Cantelli
$$0 = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|X_{\tau_n} - Y| \ge \frac{1}{n}\}) \ge \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} |X_{\tau_n} - Y| \ge q) \ge 0.$$

Dementsprechend ist

$$\mathbb{P}(X_{\tau_n} \nrightarrow Y) = \mathbb{P}(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}_+} \{\limsup_{n\to\infty} |X_{\tau_n} - Y| \geq q\}) = 0$$

Wenn Y beliebig, so führt man dies wiefolgt auf obigen Fall zurück: Betrachte $f(X_n)$ und $f(Y)$ wobei

$$f(x) := \frac{x}{1+|x|},$$

denn f ist homöomorph und daher ist die entspechende Stoppzeitenfolge bezüglich der von $f(X_n)$ erzeugten Filtration auch eine Stoppzeitenfolge bezüglich $\mathcal{F}_n$.

- Ist, mit dem vorangegangenen Ergebnis, eine einfache Anwendung des Dominierende-Konvergenz-Theorems.

□

Satz 7.9 (Zweiter Konvergenzsatz). *Es sei X_n $\boldsymbol{L}^1$-dominiert. Dann sind äquivalent:*

(1) *X_n konvergiert fast sicher.*
(2) *X_n ist ein Amart.*

Beweis. Die Hinrichtung folgt aus Lemma 6.1 und Dominierende-Konvergenz-Theorem. Für die Rückrichtung wähle, gemäß letztem Satz, einmal für $Y = \liminf_{n\to\infty} X_n$ und einmal für $Y = \limsup_{n\to\infty} X_n$ entsprechende Stoppzeitenfolgen σ_n und τ_n. Wir wissen, dass X_n ein Amart ist und aus der Konvergenz von $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ folgt die Konvergenz jeder Teilfolge $\{\mathbb{E}X_{\rho_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\rho_n \uparrow \infty$ gegen denselben Grenzwert. Insbesondere ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{\sigma_n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{\tau_n}).$$

Mit dem Dominierende-Konvergenz-Theorem folgt dann

$$0 \leq \mathbb{E}(\limsup_{n\to\infty} X_n - \liminf_{n\to\infty} X_n) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} - \lim_{n\to\infty} X_{\sigma_n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{\tau_n}) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{\sigma_n}) = 0$$

□

Wir können leider die Voraussetzung der $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit für die Hinrichtung *nicht* durch eine „T-$\mathbf{L}^1$-Beschränktheit“ ersetzen wie folgendes Gegenbeispiel zeigt.(Inbesondere folgt aus der „T-$\mathbf{L}^1$-Beschränktheit“ *nicht* die $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit.) Dabei heiße X_n T-$\mathbf{L}^1$-beschränkt, falls $\sup_{\tau\in T} \mathbb{E}\,|X_\tau| < \infty$.

Beispiel 7.4. Man definiert auf $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$

$$X_1 = 2 \cdot \mathbf{1}_{[0,2^{-1}]}$$

und für jedes $n \geq 1$

$$X_{2n} = 0$$
$$X_{2n+1} = 2^n \mathbf{1}_{[0,2^{-n}]}$$

sowie $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Man sieht leicht, dass $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen Null konvergiert. Es gilt auch eine „T-$\mathbf{L}^1$-Beschränktheit“, da

$$0 \leq \mathbb{E}(X_\tau) \leq 1$$

für alle $\tau \in T$. Denn

$$Y_n := X_{2n+1}$$

ist ein Supermartingal bezüglich $\mathcal{G}_n := \mathcal{F}_{2n+1}$.(Beachte, dass $\mathbb{E}(2^{n+1}\mathbf{1}_{[0,2^{-(n+1)}]}\mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(2^n\mathbf{1}_{[0,2^{-n}]}\mathbf{1}_F)$ für $F = [0,1], [0,2^{-1}], \ldots, [0,2^{-n}]$!) σ definiert via $\sigma = n :\Leftrightarrow \tau = 2n, 2n+1$, ist eine $\mathcal{G}_n$-Stoppzeit. Und aus Abschnitt 6 folgt daher für $\tau < n$

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k \mathbf{1}_{\tau=k}) \leq \sum_{l=0}^{n} \mathbb{E}(Y_l \mathbf{1}_{\sigma=l}) = \mathbb{E}(Y_\sigma) \leq \mathbb{E}(Y_1) = 1.$$

Mit genau derselben Methode wie in Satz 7.7 erhält man, mittels Satz 7.5, sofort eine Erweiterung von 7.7 auf die Konvergenz von $\{\mathbb{E}(X_\tau)\}_{\tau\in T}$:

Satz 7.10 (Dritter Konvergenzsatz). *Es sei X_n ein $\mathcal{F}_n$-adaptierter und $\boldsymbol{L}^1$-dominierter Prozess. Dann sind äquivalent:*

(1) *X_n konvergiert fast sicher.*
(2) *Das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ konvergiert.*
(3) *Das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T_0}$ konvergiert.*

Bemerkung 7.2. Dies ist natürlich nur eine Zusammenfassung der Sätze 7.7 und 7.9. Interessant sind hierbei die verschiendenen Beweismethoden. Hier werden wieder „Fatou-ähnliche“ (Un-)Gleichungen benutzt, wohingegen zum Beweis des Zweiten Konvergenzsatzes das „Approximationslemma“ 7.7 verwendet wird.

Sudderth zeigt noch anhand eines Gegenbeispiels, das man die Voraussetzung der $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit im allgemeinen *nicht* durch die schwächere Annahme der gleichgradigen Integrierbarkeit ersetzen kann.

Beispiel 7.5. Gemäß [**Sud71**] konstruiert man einen gleichgradig integrierbaren Prozess X_n mit

$$X_n \to 0,$$

aber

$$1 \leq \limsup_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau).$$

X_n ist im Prinzip der Prozess aus Beispiel 7.6 (1) mit $p = 1$. Die gleichgradige Integrierbarkeit wird genauso gezeigt.

Um die angegebene Ungleichung zu zeigen, muss zu jedem $\sigma \in T_0$ lediglich ein $\sigma \leq \tau \in T_0$ gefunden werden so, dass $\mathbb{E}X_\tau \geq 1$. Hier muss Sudderth ein wenig mehr machen, als in Beispiel 7.6 (1) getan. Die $\tau_n \in T$ aus diesem Beispiel werden in einer einzigen Definition für $\tau \in T_0$ verarbeitet:

Auf $\{\sigma = n\}$ sei $j_n \in \mathbb{N}$ das kleinste $j > n$ derart, dass $X_j = Y_1^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. (Für jedes n wird nun solch ein m gewählt.) Auf $\bigcup_{i=1}^m \{Y_i^m \neq 0\}$ definiert man τ als den Index von X der zum kleinsten i mit $Y_i^m \neq 0$ gehört. Ansonsten definiert man τ als den Index von X der zu Y_m^m gehört. Ähnlich wie in Beispiel 7.6 (1) ist

$$X_\tau = \max(Y_1^m, \ldots, Y_m^m) = n\mathbf{1}_{(0,\frac{1}{n})}$$

auf $\{\sigma = n\}$. Nun bemerkt man, dass $\{\sigma = n\}$ unabhängig von $Y_1^m, \ldots, Y_m^m$ ist. Daher gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_\tau &= \mathbb{E}\mathbb{E}(X_\tau \mid \sigma = n) = \mathbb{E}\mathbb{E}(\max(Y_1^m, \ldots, Y_m^m) \mid \sigma = n) \\ &= \mathbb{E}\max(Y_1^m, \ldots, Y_m^m) = \mathbb{E}n\mathbf{1}_{(0,\frac{1}{n})} = 1\end{aligned}$$

Da X_n auch in $\mathbf{L}^1$ gegen Null konvergiert folgt nach Satz 7.4, dass

$$\liminf_{\tau\in T_0} \mathbb{E}(X_\tau) \leq 0$$

und damit kann keine Netzkonvergenz vorliegen.

Aus Lemma 7.4 lässt sich sofort ein Konvergenzsatz ableiten, der insbesondere die Rückrichtung von Satz 7.9 verallgemeinert, denn für ein Amart X_n gilt $\limsup_{\sigma,\tau\in T} \mathbb{E}(X_\tau - X_\sigma) = 0$. Im folgenden Satz wird nur noch $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit vorausgesetzt. Er ist auch eine Verbesserung von Satz 2.7, der besagt, dass $\mathbf{L}^1$-beschränkte (Sub-,Super-)Martingale fast sicher konvergieren.

Satz 7.11 (Vierter Konvergenzsatz). *Es sei X_n $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt. Dann gilt:*
X_n ist ein Amart $\Rightarrow$ X_n konvergiert fast sicher.

Beweis. wird genauso geführt, wie der Beweis von Satz 9.4 □

Der Beweis kann aber auch anders geführt werden: Wegen 7.5 muss man im Beweis von Satz 7.11 anstatt X_n nur noch X_n^+ bzw. X_n^- betrachten. Dazu ist zu beachten, dass die Mengen der beschränkten Stoppzeiten bezüglich der Filtrationen erzeugt von X_n^+ bzw. X_n^- Teilmengen von T sind. Sei also o.B.d.A. $X_n \geq 0$. Man nimmt an, dass X_n *nicht* konvergiert. Dann müssen $a < b \in \mathbb{R}$ existieren so, dass

$$F := \{\liminf X_n < a < b < \limsup X_n\}$$

eine positive Wahrscheinlichkeit hat. Die Idee ist zu geeignetem $\epsilon = \epsilon(F) > 0$ und zu jedem $m \geq 1$ Stoppzeiten $\tau, \sigma \geq m$ zu konstruieren mit

$$|\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_\sigma| \geq \epsilon.$$

Damit wäre $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ kein Cauchynetz und somit (nach Lemma 6.1) auch nicht konvergent. Wie τ und σ konstruiert werden, siehe [**Tul74**].

Bemerkung 7.3. Im allgemeinen gilt jedoch *nicht* die Rückrichtung. Noch nicht mal, wenn man voraussetzt, dass X_n gleichgradig integrierbar ist. *Krengel* und *Sucheston* haben in [**Suc78**], Proposition 1.13 gezeigt, dass ein gleichgradig integrierbares Semiamart existiert, dass fast sicher und zusätzlich in $\mathbf{L}^1$ gegen Null konvergiert, aber trotzdem kein Amart ist. Das zeigt natürlich auch auf, wie „weit entfernt“ ein Semiamart davon sein kann die Amarteigenschaft zu besitzen.

Anwendung 7.4. Wir erhalten als Konsequenz wieder die (, schon aus den Sätzen 2.7 und 2.8 bekannten,) Ergebnisse, dass $\mathbf{L}^1$-beschränkte Submartingale bzw. positive Supermartingale fast sicher konvergieren.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass X_n ein Amart ist bzw. $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ konvergiert. Nach Lemma 6.1 reicht es die Konvergenz von $\{\mathbb{E}X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ zu zeigen, falls $\tau_n \uparrow$. Nach Satz 2.19 gilt aber

$$\mathbb{E}X_{\tau_n} \leq \mathbb{E}X_{\tau_{n+1}}$$

bzw.

$$\mathbb{E}X_{\tau_n} \geq \mathbb{E}X_{\tau_{n+1}}.$$

Man wäre daher fertig, falls man zeigen könnte, dass

$$\sup_{\tau\in T} \mathbb{E}X_\tau < \infty$$

bzw.

$$\inf_{\tau\in T} \mathbb{E}X_\tau > -\infty$$

Dazu wähle für beliebiges $\tau \in T$ einfach ein $m \geq \tau$ um, wieder nach Satz 2.19,

$$\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_m \leq \sup_n \mathbb{E}\,|X_n| < \infty$$

bzw.

$$-\infty < 0 \leq \mathbb{E}X_m \leq \mathbb{E}X_\tau \Rightarrow -\infty < \inf_{\tau\in T} \mathbb{E}X_\tau$$

zu erhalten. □

Bemerkung 7.5. Dies ging nur, da jedes $\mathbf{L}^1$-beschränkte Supermartingal ein Amart ist. Vorsicht ist geboten, falls man sich mit (Sub-,Super-)Martingalen bzw. Amarts mit gerichteter Indexmenge G beschäftigt. Dabei sind Amarts, gemäß [**Ast78**], definiert als adaptierte Prozesse $\{X_t\}_{t\in G}$ aus $\mathbf{L}^1$ derart, dass das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ konvergiert. Dabei ist T die Menge der einfachen Stoppzeiten. In Gegenbeispiel 10.1 sieht man ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes Submartingal, welches *kein* Amart ist.

Edgar und Sucheston haben in [**Suc76a**] die Äquivalenz zwischen Fast-Sicher-Konvergenz und der Amart-Eigenschaft unter der Voraussetzung der T-gleichgradigen Integrierbarkeit bewiesen.

Satz 7.12 (Fünfter Konvergenzsatz). *$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei T-gleichgradig integrierbar. Dann sind äquivalent:*

(1) *X_n konvergiert fast sicher.*
(2) *X_n ist ein Amart.*

Bemerkung 7.6 macht deutlich, dass die T-gleichgradige Integrierbarkeit wirklich eine stärkere Bedingung ist als die gleichgradige Integrierbarkeit. Aber nur solange man nicht voraussetzt, dass X_n ein Amart ist.(siehe Satz 7.15)

Beweis von Satz 7.12. Die Rückrichtung ist nach Satz 7.11 klar, da aus gleichgradiger Integrierbarkeit immer $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit folgt.

Für die Hinrichtung benutze Lemma 6.1. Für jede „Testfolge“ τ_n konvergiert dann nach Voraussetzung X_{τ_n} fast sicher und $\{X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch gleichgradig integrierbar. Die Aussage folgt daher mittels Satz 3.3, denn aus der $\mathbf{L}^1$-Konvergenz folgt insbesondere die Konvergenz von $\mathbb{E}X_{\tau_n}$. □

Bemerkung 7.6. • Aus T-gleichgradiger Integrierbarkeit folgt gleichgradige Integrierbarkeit und T-$\mathbf{L}^1$-Beschränktheit. Aber unter einer dieser beiden schwächeren Voraussetzungen gilt die Äquivalenz schon nicht mehr, wie Bemerkung 7.3 und dass unten angebene Beispiel (1) aus [**Sch83**] zeigen. Daher scheint es so als sei die T-gleichgradige Integrierbarkeit in Satz 7.12 die schwächste Voraussetzung bzw. dieser sehr nahe.

- Beispiel 7.6 (2) (aus [**Dub63**]) zeigt, dass die T-gleichgradige Integrierbarkeit tatsächlich eine schwächere Voraussetzung ist, als die $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit in Konvergenzsatz 7.9

Beispiel 7.6. (1) Es sei $\Omega = [0,1]$ versehen mit der Borel'schen σ-Algebra und dem Lebesgue-Maß. Wir definieren nun für $1 < p < 2$ und $1 \leq i \leq n$

$$Y_i^n(w) := \begin{cases} n^p & , w \in (\frac{i-1}{n^2}, \frac{i}{n^2}) \\ 0 & , sonst \end{cases} .$$

Man setzt

$$(X_1, X_2, \ldots) = (Y_1^1, Y_1^2, Y_2^2, Y_1^3, \ldots)$$

und

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

Man sieht zunächst, dass X_n fast sicher gegen Null konvergiert. Weiter gilt für $n^p > a > 0$, dass

$$\mathbb{E}(|Y_i^n| \, \mathbf{1}_{\{|Y_i^n|>a\}}) = n^p \cdot \frac{1}{n^2}$$

und sonst Null. Da n^{p-2} fallend in n ist, gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n| \, \mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}) = \sup_{i,n} \mathbb{E}(|Y_i^n| \, \mathbf{1}_{\{|Y_i^n|>a\}}) = \max\{n^{p-2} \, ; \, n^p > a\}.$$

Insbesondere sieht man, dass X_n gleichgradig integrierbar ist. X_n ist aber *kein* Amart, wie wir jetzt sehen werden. Dazu definiere eine Folge von Stoppzeiten $\tau_n \uparrow \infty$ mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{E}X_{\tau_n} \to \infty$ und damit ist X_n noch nicht mal ein Semiamart. Auf $\bigcup_{i=1}^n \{Y_i^n \neq 0\}$ definiert man τ_n als den Index von X der zum kleinsten i mit $Y_i^n \neq 0$ gehört und auf dem Komplement, also auf $\bigcap_{i=1}^n \{Y_i^n = 0\}$, setzt man τ_n als den Index von X der zu Y_n^n gehört. Aus der Konstruktion von X und τ_n geht hervor, dass

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq \tau_n \leq \frac{n(n+1)}{2},$$

also $\tau_n \uparrow \infty$. Nun ist es aber so, dass

$$X_{\tau_n} = \max(Y_1^n, \ldots, Y_n^n) = n^p \cdot \mathbf{1}_{(0,\frac{1}{n})}$$

und da $p > 1$ ist, gilt $\mathbb{E}X_{\tau_n} \to \infty$.

(2) *Blackwell* und *Dubins* zeigten in [**Dub63**] sogar:

Es sei $0 \leq X \in \mathbf{L}^1$ mit $X \log X \notin \mathbf{L}^1$. Dann kann man eine Zufallsvariable $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ auf einem, möglicherweise anderen, Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ finden und eine Filtration $\tilde{\mathcal{F}}_n \subset \tilde{\mathcal{F}}$ so, dass

- $\tilde{X}$ induziert dieselbe Verteilung auf $\mathbb{R}$ wie X
- $\mathbb{E} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\tilde{X} \mid \tilde{\mathcal{F}}_n) = \infty$
- $\{\tilde{\mathcal{F}}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kann sowohl absteigend als auch aufsteigend gewählt werden.

Eine einfache Verteilung von X bzw. $\tilde{X}$ die man sich hier vorstellen könnte wäre $X, \tilde{X} \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ mit $\mathbb{P}(X = n) \propto \frac{1}{n^2 \log^2 n}$. Aus dem ersten Punkt geht hervor, dass $Y_n := \mathbb{E}(\tilde{X} \mid \tilde{\mathcal{F}}_n)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Insbesondere konvergiert Y_n fast sicher, ist ein Amart und nach Satz 3.8 auch T-gleichgradig integrierbar. Aber nach zweitem Punkt ist Y_n *nicht* $\mathbf{L}^1$-dominiert. Zusammen mit dem dritten Punkt erhält man, dass, im Fall von absteigenden *oder* aufsteigenden Amarts(sogar im Fall eines Martingals), die $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit eine stärkere Bedingung ist, als die T-gleichgradige Integrierbarkeit.

2. Riesz-Zerlegung

Amarts können immer zerlegt werden in ein Martingal und ein T-gleichgradig integrierbares und fast sicher und in $\mathbf{L}^1$ konvergentes Amart (Satz 7.13). Dies wird angewendet um das Optional-Sampling-Theorem für Amarts zu zeigen, zu beweisen, dass gleichgradig integrierbare Amarts schon T-gleichgradig integrierbar sind oder die Amarteigenschaft mittels bedingtem Erwartungswert um zu formulieren(Satz 7.16).

Lemma 7.8. *Es sei X_n ein Amart und $a > 0$. Dann gilt für hinreichend große $\tau \geq \sigma \in T$*

$$\mathbb{E}\,|X_\sigma - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)| \leq a$$

und für beliebiges $\rho \in T$ konvergiert das Netz $\{\mathbb{E}(X_\sigma \mid \mathcal{F}_\rho)\}_{\sigma \in T}$ in $\boldsymbol{L}^1$.

Beweis. Seien zunächst $\tau \geq \sigma$ beliebig und definiere

$$F := \{X_\sigma - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) \geq 0\} \in \mathcal{F}_\sigma.$$

Betrachte die Zerlegung

$$\mathbb{E}\,|X_\sigma - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)| = \mathbb{E}(X_\sigma - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma))\mathbf{1}_F - \mathbb{E}(X_\sigma - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma))\mathbf{1}_{F^c}$$

und die Stoppzeiten

$$\rho_F := \sigma \mathbf{1}_F + \tau \mathbf{1}_{F^c}$$

sowie

$$\rho_{F^c} := \sigma \mathbf{1}_{F^c} + \tau \mathbf{1}_F.$$

Man sieht, dass

$$|\mathbb{E}(X_\sigma - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)\mathbf{1}_F)| = |\mathbb{E}(X_\sigma - X_{\rho_{F^c}})|$$

und

$$|\mathbb{E}(X_\sigma - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)\mathbf{1}_{F^c})| = |\mathbb{E}(X_\sigma - X_{\rho_F})|\,.$$

Da X_n ein Amart ist und $\rho_F, \rho_{F^c} \geq \sigma$ können wir beides durch hinreichend großes σ unter $\frac{a}{2}$ drücken. Um zu sehen, dass $\{\mathbb{E}(X_\sigma \mid \mathcal{F}_\rho)\}_{\sigma \in T}$ in $\mathbf{L}^1$ konvergiert, zeigt man die Cauchy-Eigenschaft: $\tau \geq \sigma$ hinreichend groß(wie eben) und gleichzeitig $\sigma \geq \rho$, dann ist

$$\mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\sigma \mid \mathcal{F}_\rho) - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\rho)| = \mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\sigma - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) \mid \mathcal{F}_\rho)| \leq a.$$

□

Satz 7.13 (Riesz-Zerlegung). *Jedes Amart X_n kann eindeutig zerlegt werden in eine Summe*

$$X_n = Y_n + Z_n,$$

wobei Y_n ein Martingal ist und Z_n ein T-gleichgradig integrierbares Amart mit

$$Z_n \to 0$$

fast sicher und *in $\boldsymbol{L}^1$.*

Die Riesz-Zerlegung macht insbesondere deutlich, das der Begriff des Amarts nicht „so weit entfernt" ist von einem Martingal.

Der Beweis ist entnommen aus [**Sch83**], Teil 1 Kapitel 6.(Im Prinzip ist es ein Spezialfall des Beweises für Amarts mit gerichteter Indexmenge aus [**Ast78**].)

Beweis von Satz 7.13. Wegen Lemma 7.8 konvergiert

$$\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) \to Y_\sigma$$

in $\mathbf{L}^1$ für jedes feste $\sigma \in T$. Ist $a > 0$, so ist, für τ hinreichend groß, $\mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) - Y_\sigma| < a$. Wählt man also $\rho \leq \sigma \in T$ fest, so gilt offenbar für hinreichend großes $\tau \geq \sigma$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|Y_\rho - \mathbb{E}(Y_\sigma \mid \mathcal{F}_\rho)| &\leq \mathbb{E}\,|Y_\rho - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\rho)| + \mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\rho) - \mathbb{E}(Y_\sigma \mid \mathcal{F}_\rho)| \\ &< a + \mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) - Y_\sigma| < 2a.\end{aligned}$$

Da $a > 0$ beliebig ist, ist $Y_\rho = \mathbb{E}(Y_\sigma \mid \mathcal{F}_\rho)$. Nach Satz 2.18 ist Y_n ein Martingal. Nun definiert man

$$Z_n := X_n - Y_n.$$

Die Riesz-Zerlegung ist eindeutig, denn hat man zwei Zerlegungen

$$X_n = Y_n^1 + Z_n^1 = Y_n^2 + Z_n^2,$$

so gilt einerseits

$$\mathbb{E}\left|Y_n^1 - Y_n^2\right| = \mathbb{E}\left|Z_n^1 - Z_n^2\right| \leq \mathbb{E}\left|Z_n^1\right| + \mathbb{E}\left|Z_n^2\right| \to 0$$

und andererseits

$$0 \leq \mathbb{E}\left|Y_n^1 - Y_n^2\right| \uparrow .$$

($\left|Y_n^1 - Y_n^2\right|$ ist ein Submartingal.) Für $a > 0$ fest gewählt, $b > 0$ beliebig und $\sigma \leq \tau$ hinreichend gross gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|Z_\sigma\right| \mathbf{1}_{|Z_\sigma|>b} \leq \mathbb{E}\left|Z_\sigma\right| &\leq \mathbb{E}\left|Z_\sigma - \mathbb{E}(Z_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)\right| + \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(Z_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)\right| \\
&\leq a + \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) - \mathbb{E}(Y_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)\right| \\
&\leq a + \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) - Y_\sigma\right| \\
&\leq a + a.
\end{aligned}$$

Wähle n so gross, dass obige Ungleichung immer erfüllt ist, falls $\sigma \geq n$. Ist nun $\sigma \in T$ beliebig, dann wähle $b > 0$ so gross, dass

$$\mathbb{E}\left|Z_\sigma\right| \mathbf{1}_{\{|Z_\sigma|>b\}} = \mathbb{E}\left|Z_{\sigma\vee n}\right| \mathbf{1}_{\{Z_{\sigma\vee n}>b\}} \mathbf{1}_{\{\sigma>n\}} + \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left|Z_m\right| \mathbf{1}_{\{|Z_m|>b\}} \mathbf{1}_{\{\sigma=m\}} \leq 2a + a.$$

Das sagt uns, dass Z_n T-gleichgradig integrierbar ist.

Da, für $\sigma \in T$ hinreichend gross, die hergeleitete Ungleichung

$$\mathbb{E}\left|Z_\sigma\right| \mathbf{1}_{|Z_\sigma|>b} < 2a$$

für *alle* $b > 0$ gilt, konvergiert insbesondere $Z_n \to 0$ in $\mathbf{L}^1$ und somit auch in Wahrscheinlichkeit.(siehe z.B. Satz 3.3) Konvergenzsatz 7.12 gibt uns auch eine Fast-Sicher-Konvergenz(insbesondere Konvergenz in Wahrscheinlichkeit). Da der Grenzwert in Wahrscheinlichkeit eindeutig ist, muss

$$Z_n \to 0$$

fast sicher gelten. □

Als Anwendung erhält man, dass neben (Sub-)Martingalen(Satz 2.4) und Quasimartingalen(Satz 7.3) auch Amarts die Optional-Sampling-Eigenschaft besitzen.

Satz 7.14 (Optional-Sampling-Theorem). *Es sei $\tau_n \uparrow$ eine Folge beschränkter Stoppzeiten und X_n ein Amart. Dann ist $\{X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein $\{\mathcal{F}_{\tau_n}\}$-Amart.*

Beweis. Es sei $X_n = Y_n + Z_n$ die Riesz-Zerlegung. Nach Doob-Stoppsatz und dem Optional-Sampling-Theorem für Martingale ist das Netz $\{\mathbb{E}Y_{\tau_\sigma}\}_{\sigma\in T'}$, wobei T' hier die Menge aller beschränkten $\mathcal{F}_{\tau_n}$-Stoppzeiten sei, konstant. Man muss also noch zeigen, dass $\{\mathbb{E}Z_{\tau_\sigma}\}_{\sigma\in T'}$ konvergiert. Aber Z_{τ_n} konvergiert, genauso wie Z_n, fast sicher. Falls wir zeigen könnten, dass Z_{τ_n} T'-gleichgradig integrierbar ist, so wäre Z_{τ_n}, nach Konvergenzsatz 7.12, ein Amart und wir wären fertig. Da Z_n nach Satz 7.13 T-gleichgradig integrierbar ist, reicht es aus zu zeigen, dass für jedes $\sigma \in T'$ $\tau_\sigma \in T$ ist.

$$\{\tau_\sigma = k\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_n = k\} \cap \{\sigma = n\}$$

und $\{\sigma = n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}$. Elemente aus $\mathcal{F}_{\tau_n}$ sind aber dadurch gekennzeichnet, dass, wenn man sie mit $\{\tau_n = k\}$ schneidet, ein Element aus $\mathcal{F}_k$ ergeben (siehe Definition 2.4). Dementsprechend folgt aus obiger Zerlegung, dass $\{\tau_\sigma = k\} \in \mathcal{F}_k$ ist. Somit ist $\tau_\sigma \in T$.(Man bemerke, dass mit τ_n und σ auch τ_σ nur endlich viele Werte annimmt und demzufolge τ_σ eine *beschränkte* Stoppzeit ist.) □

Eine zweite Folgerung ist die Erweiterung von Satz 3.8 auf Amarts.

Satz 7.15. *Ist X_n ein gleichgradig integrierbares Amart, dann ist X_n auch T-gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Es sei $X_n = Y_n + Z_n$ die Riesz-Zerlegung. Dann ist $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar nach Satz 7.13 und somit (nach Lemma 3.3) auch $Y_n = X_n - Z_n$. Nach Satz 3.8 ist Y_n T-gleichgradig integrierbar und somit (nach Lemma 3.3) auch X_n. □

Die letzte Folgerung von Satz 7.13 die hier vorgestellt werden soll ist eine weitere äquivalente Formulierung der Amart-Eigenschaft und stammt aus [**Suc76b**].

Satz 7.16. *Es sind äquivalent:*

(1) *X_n ist ein Amart.*
(2) *Für beliebige $T \ni \tau_n \uparrow$, mit $\tau_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert*

$$\mathbb{E}(X_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_n) - X_n \to 0$$

fast sicher und *in* $\boldsymbol{L}^1$.

Das Ergebnis ist nicht sonderlich überraschend, wenn man bedenkt, dass, aufgrund von Lemma 2.1, für Martingale obige Folge konstant Null ist und jedes Amart, nach Satz 7.13 zerlegt werden kann in ein Martingal und einen Prozess der fast sicher und in $\mathbf{L}^1$ gegen Null konvergiert.

Beweis. (2)⇒(1): $\mathbb{E}(X_{\tau_n} - X_n) \to 0$, insbesondere ist $\{\mathbb{E}X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert daher. Nach Lemma 6.1 konvergiert $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$.

(1)⇒(2): $X_n = Y_n + Z_n$ sei die Riesz-Zerlegung aus Satz 7.13. Für das Martingal Y_n gilt nach *Optional-Sampling-Theorem* schon $\mathbb{E}(Y_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_n) - Y_n = 0$. Und nach Satz 7.14 ist $\{Z_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein $\mathcal{F}_{\tau_n}$-Amart. Es sei $\sigma \in T$ und $m \in \mathbb{N}$ so, dass $\sigma \leq m$. Definiert man $W_n := \mathbb{E}(Z_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_n)$, dann ist

$$\mathbb{E}W_\sigma = \sum_{k=1}^m \mathbb{E}W_k \mathbf{1}_{\{\sigma=k\}} = \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\mathbb{E}(Z_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_k)\mathbf{1}_{\{\sigma=k\}} = \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\mathbb{E}(Z_{\tau_k}\mathbf{1}_{\{\sigma=k\}} \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}Z_{\tau_\sigma}.$$

Wegen $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{\tau_n}$ ist σ auch eine $\mathcal{F}_{\tau_n}$-Stoppzeit und demnach konvergiert $\{\mathbb{E}Z_{\tau_{\sigma_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$, nach Lemma 6.1, für jede Folge $T \ni \sigma_n \uparrow$, also auch $\mathbb{E}W_{\sigma_n}$. Und, wieder nach Lemma 6.1, ist W_n ein $\mathcal{F}_n$-Amart. Nach Satz 7.13 konvergiert $Z_n \to 0$ in $\mathbf{L}^1$. Damit ist Z_n isnbesondere $\mathbf{L}^1$-beschränkt und nach Satz 7.6 ist auch $|Z_n|$ ein Amart welches in $\mathbf{L}^1$ gegen Null konvergiert. Daher muss auch $\lim_{\tau\in T} \mathbb{E}\,|Z_\tau| = 0$ gelten. Man benutzt nun die Ungleichung

$$\mathbb{E}\,|W_n| = \mathbb{E}\,|\mathbb{E}(Z_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}\,|\mathbb{Z}_{\tau_n}|$$

um zu sehen, dass $W_n \to 0$ in $\mathbf{L}^1$. Damit hat man die $\mathbf{L}^1$-Konvergenz aus (2) gezeigt. Wenn W_n in $\mathbf{L}^1$ konvergiert, so ist W_n auch $\mathbf{L}^1$-beschränkt und nach Satz 7.11 konvergiert W_n fast sicher. Der Grenzwert ist wegen

$$\mathbb{E}\left|\lim_{n\to\infty} W_n\right| = \mathbb{E}\liminf_{n\to\infty} |W_n| \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|W_n| = 0$$

ebenfalls Null. Nach Satz über die Riesz-Zerlegung konvergiert auch Z_n fast sicher gegen Null und man hat die Fast-Sicher-Konvergenz aus (2) gezeigt.

□

3. Doob-Zerlegung

In Lemma 2.3 hat man gesehen, dass eine $\mathbf{L}^2$-Beschränktheit der Zuwächse von X_n sich auch auf die Zuwächse von M_n und A_n überträgt. Man kann nun die Frage stellen, ob sich unter Umständen auch eine fast sichere Beschränkung eines Amarts X_n auf M_n und A_n überträgt. Die Antwort ist *nein*. Gegenbeispiel 7.7 aus [**Suc76a**] ist sogar so, dass $\limsup M_n = \limsup A_n = \infty$ und $\liminf M_n = \liminf A_n = -\infty$ fast sicher obwohl $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \leq 1$.

Satz 7.17. *Es sei X_n ein Amart und*

$$X_n = X_1 + M_n + A_n,$$

die Doob-Zerlegung aus Satz 2.16. Dann ist A_n ein vorhersagbares Amart.

Beweis. Das einzige was aus Satz 2.16 nicht folgt ist, dass A_n ein Amart ist. Aber da X_n und M_n Amarts sind, ist es auch A_n nach Satz 7.6. □

Gegenbeispiel 7.7. Es seien $Y_n \sim \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ unabhängig und $c_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ist $X_n := c_n Y_n$, dann ist mit $M_n := \sum_{k=1}^n c_k Y_k - X_1$ und $A_n := -\sum_{k=1}^{n-1} c_k Y_k$

$$X_n = X_1 + M_n + A_n$$

die Doob-Zerlegung von X_n. Da X_n fast sicher gegen Null konvergiert und durch 1 $\mathbf{L}^1$-dominiert wird, ist X_n nach Satz 7.9 ein Amart. Also ist auch A_n ein vorhersagbares Amart und daher

$$\sigma := \infty \mathbf{1}_{\{\sup A_n \leq m\}} + \inf\{k\,;\ A_1, \dots, A_k \leq m,\ A_{k+1} > m\} \mathbf{1}_{\{\sup A_n > m\}}$$

und

$$\tau := \infty \mathbf{1}_{\{\sup A_n \geq -m\}} + \inf\{k\,;\ A_1, \dots, A_k \geq -m,\ A_{k+1} < -m\} \mathbf{1}_{\{\sup A_n < -m\}}$$

Stoppzeiten. $Y_n := A_{n \wedge \sigma}$ und $Z_n := A_{n \wedge \tau}$ sind nach *Optional-Sampling-Theorem* Amarts mit $Y_n \leq m$ und $Z_n \geq -m$. Demnach gilt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} Y_n^+, \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} Z_n^- < \infty$. Nach Lemma 7.5 sind Y_n^-, Y_n^+, Z_n^- und Z_n^+ Amarts. Als positive Semiamarts sind sie natürlich $\mathbf{L}^1$-beschränkt und konvergieren fast sicher nach Satz 7.11. Auf $\{\sup_{n \in \mathbb{N}} A_n \leq m\}$ ist $A_n = Y_n$ und auf $\{\sup_{n \in \mathbb{N}} A_n \geq -m\}$ ist $A_n = Z_n$. Also konvergiert A_n fast sicher auf der Menge

$$\begin{aligned} \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\sup_n A_n \leq m\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\inf_n A_n \geq -m\} &= \{\sup_n A_n < \infty\} \cup \{\inf_n A_n > -\infty\} \\ &= \{\limsup_n A_n < \infty\} \cup \{\liminf_n A_n > -\infty\}. \end{aligned}$$

D.h., falls A_n divergiert, dann gilt $\limsup_n A_n = \infty$ *und* $\liminf_n A_n = -\infty$. Wegen Korollar 2.4 divergiert M_n fast sicher. Da $X_n \to 0$, divergiert auch A_n fast sicher.

Insgesamt erhält man, dass dann $\limsup_n M_n = \limsup_n A_n = \infty$ *und* $\liminf_n M_n = \liminf_n A_n = -\infty$ fast sicher.

KAPITEL 8

Amarts und das SGGZ

Im Fokus stehen, wie in Abschnitt 1 und Kapitel 4, SGGZ für X_n unter Wachstumsbedingungen an p-te Momente. In Satz 8.1 wird gezeigt, dass $\frac{X_n}{n}$ fast sicher konvergiert, falls X_n ein Amart mit $\mathbf{L}^2$-beschränkten Zuwächsen ist. Im Zweiten SGGZ wird Satz 4.6 und im Vierten SGGZ wird Satz 1.3 auf Amartdifferenzen verallgemeinert.

KONVENTION 8.1. Soweit nicht anders gesagt sei $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ immer eine Filtration, $X_n \in \mathbf{L}^1$ seien $\mathcal{F}_n$-adaptiert und $D_n = X_n - X_{n-1}$ seien die Zuwächse von X_n, wobei $D_1 := X_1$.

Das folgende SGGZ für Amart-Differenzen wurde von Edgar und Sucheston in [**Suc76a**] bewiesen.

SATZ 8.1 (Erstes SGGZ). *X_n sei ein Amart mit $\sup\limits_{k\geq 1} \mathbb{E}D_k^2 < \infty$. Dann konvergiert*

$$\frac{X_n}{n}$$

fast sicher.

BEWEIS. Nach Satz 7.17 existiert ein Martingal M_n und ein vorhersagbares Amart A_n , mit $A_1 = M_1 = 0$, derart, dass

$$X_n = X_1 + M_n + A_n.$$

Wegen

$$(\mathbb{E}\,|A_k - A_{k-1}|)^2 \leq \mathbb{E}(A_k - A_{k-1})^2$$

und Lemma 2.3 folgt, dass $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,|A_k - A_{k-1}| < \infty$. Wegen der Vorhersagbarkeit von A_n ist auch A_{n+1} ein Amart.(Man beachte, dass mit $\tau \in T$ immer auch $\tau + 1$ eine Stoppzeit ist und mit Lemma 6.1 sieht man schnell, dass $\{\mathbb{E}A_{\tau+1}\}_{\tau\in T}$ konvergiert.) Daraus folgt, dass auch $B_n := A_{n+1} - A_n$ ein Amart ist und da B_n $\mathbf{L}^1$-beschränkt ist, konvergiert B_n fast sicher nach Konvergenzsatz 7.11. Nach Lemma 1.3 konvergiert

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_k - A_{k-1} = \frac{1}{n}A_n$$

fast sicher. Wieder aus Lemma 2.3 folgt $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(M_n - M_{n-1})^2 < \infty$. Nun benutzt man Satz 4.1 um zu schliessen, dass

$$\frac{1}{n}M_n \to 0$$

fast sicher. Insgesamt ergibt das, dass

$$\frac{1}{n}X_n = \frac{1}{n}M_n + \frac{1}{n}A_n + \frac{1}{n}X_1$$

fast sicher konvergiert. □

Das folgende SGGZ stammt aus [**Suc78**] und benutzt zum Beweis die Doob-Zerlegung und die Tatsache, dass der Satz für den „Martingalfall“ schon bewiesen wurde.(Satz 4.6)

SATZ 8.2 (Zweites SGGZ). *X_n sei ein Amart und $p \geq 2$. Dann folgt aus $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|D_k|^p}{k^{\frac{p}{2}+1}} < \infty$, dass*

$$\frac{X_n}{n} \to 0$$

fast sicher.

Beweis. Es sei $X_n = X_1 + M_n + A_n$, $M_1 = A_1 = 0$ die Doob-Zerlegung. M_n ist ein Martingal mit $M_n - M_{n-1} = X_n - \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$. Notwendigerweise folgt daraus $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}$. Damit schätzt man die $\mathbf{L}^p$-Norm von $M_n - M_{n-1}$ nach oben ab:

$$\|M_n - M_{n-1}\| \leq \|D_n\| + \|A_n - A_{n-1}\| \leq \|D_n\| + (\mathbb{E}\mathbb{E}(|X_n - X_{n-1}|^p \mid \mathcal{F}_{n-1}))^{\frac{1}{p}} = 2\|D_n\|.$$

Insbesondere gilt $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mathbb{E}|M_k - M_{k-1}|^p}{k^{\frac{p}{2}+1}} < \infty$ und nach Satz 4.6 konvergiert

$$\frac{M_n}{n} \to 0$$

fast sicher. Mit Satz 7.16 sieht man, dass $A_n - A_{n-1} \to 0$ fast sicher. Nun benutzt man das Töplitz-Lemma umn auch

$$\frac{A_n}{n} \to 0$$

zu erhalten. □

Der Beweis des nächsten starken Gesetz der Großen Zahlen stützt sich auf folgendes Ergebnis aus [**Suc76a**].

Lemma 8.1. *X_n sei ein Amart derart, dass, für alle $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \to 0$ fast sicher. Dann gilt:*

- $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m)| \in \boldsymbol{L}^1$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \to 0$ *in* $\boldsymbol{L}^1$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$.
- $X_n \to 0$ *in* $\boldsymbol{L}^1$ *und fast sicher.*

Beweis.
- Definiere $Y_n := \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m)$. Man zeigt zunächst, dass $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein Amart bezüglich der konstanten Filtration $\mathcal{G}_n := \mathcal{F}_m$ ist:
  - $X_n \in \mathbf{L}^1 \Rightarrow Y_n \in \mathbf{L}^1$
  - Y_n ist offensichtlich $\mathcal{G}_n$-messbar.
  - T' sei die Menge aller beschränkten Stoppzeiten bezüglich $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ist $\tau \in T'$ mit $\tau \geq m$, so ist auch $\tau \in T$. Wähle n so groß, dass $\tau \leq n$. Dann ist

    $$\mathbb{E}X_\tau = \sum_{k=m}^{n} \mathbb{E}X_k \mathbf{1}_{\{\tau = k\}} = \sum_{k=m}^{n} \mathbb{E}Y_k \mathbf{1}_{\{\tau = k\}} = \mathbb{E}Y_\tau.$$

    Insbesondere konvergiert $\{\mathbb{E}Y_\tau\}_{\tau \in T'}$, da $\{\mathbb{E}Y_\tau\}_{m \leq \tau \in T'} \subseteq \{\mathbb{E}X_\tau\}_{m \leq \tau \in T} \subseteq \{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau \in T}$ konvergiert.

  Man zeigt, dass $\sup_{k \in \mathbb{N}} Y_k, \inf_{k \in \mathbb{N}} Y_k \in \mathbf{L}^1$, denn dann ist auch $\sup_{k \in \mathbb{N}} |Y_k| \in \mathbf{L}^1$, wegen $\sup_{k \in \mathbb{N}} |Y_k| \leq (\sup_{k \in \mathbb{N}} Y_k)^+ + (\inf_{k \in \mathbb{N}} Y_k)^-$:

  Angenommen $\sup_{k \in \mathbb{N}} Y_k \notin \mathbf{L}^1$. Dann ist $\mathbb{E}\sup_{k \in \mathbb{N}} Y_k = \infty$. Wegen $\sup_{k \in \mathbb{N}} Y_k = \lim_{l \to \infty} \sup_{k \leq l} Y_k$ muss, nach Monotone-Konvergenz-Theorem, zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein l existieren so, dass

  $$\mathbb{E}\sup_{k \leq l} Y_k \geq n.$$

  Setze $\tau_n := \inf\{m \leq l\,;\ Y_m = \sup_{k \leq l} Y_k\}$; τ_n ist offenbar eine beschränkte $\mathcal{G}_n$-Stoppzeit mit $\mathbb{E}Y_{\tau_n} = \mathbb{E}\sup_{k \leq l} Y_k \geq n$. Daher ist Y_k noch nicht einmal ein Semiamart im Widerspruch zum vorhin Bewiesenen. Genauso zeigt man, dass $\inf_{k \in \mathbb{N}} Y_k \in \mathbf{L}^1$.
- Folgt aus dem ersten Punkt und dem Dominiernde-Konvergenz-Theorem.
- Man zeigt jetzt, dass $X_n \to 0$ in $\mathbf{L}^1$, denn daraus folgt dann, dass X_n ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes Amart ist, nach Konvergenzsatz 7.11 fast sicher konvergiert und wegen

  $$\mathbb{E}\left|\lim_{n \to \infty} X_n\right| = \mathbb{E}\liminf_{n \to \infty} |X_n| \leq \liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}|X_n| = 0$$

  ist auch hier der Grenzwert Null:

  Man zeigt separat $\mathbb{E}X_n^+ \to 0$ bzw. $\mathbb{E}X_n^- \to 0$: Zunächst ist $\lim_{\tau \in T} \mathbb{E}X_\tau = 0$, denn nach letztem Punkt gilt

  $$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \to 0$$

und die Netze $\{\mathbb{E}X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ müssen denselben Grenzwert haben. Nun setzt man $F := \{X_m < 0\} \in \mathcal{F}_m$ und nach letztem Punkt gilt $\mathbb{E}X_n\mathbf{1}_F = \mathbb{E}\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m)\mathbf{1}_F \to 0$. Man kann daher $n \geq m$ so groß wählen, dass

$$|\mathbb{E}X_n\mathbf{1}_F| < \frac{1}{m}.$$

Definiert man $\tau_m := n\mathbf{1}_F + m\mathbf{1}_{F^c} \in T$, so gilt

$$\left|\mathbb{E}X_m^+ - \mathbb{E}X_{\tau_m}\right| = |\mathbb{E}X_m\mathbf{1}_{F^c} - \mathbb{E}X_m\mathbf{1}_{F^c} - \mathbb{E}X_n\mathbf{1}_F| = |\mathbb{E}X_n\mathbf{1}_F| < \frac{1}{m}.$$

Mit $\mathbb{E}X_{\tau_m} \to 0$, gilt also auch $\mathbb{E}X_m^+ \to 0$. Genauso zeigt man, dass $\mathbb{E}X_m^- \to 0$; hier wird lediglich $F := \{X_m > 0\}$ gesetzt.

□

Folgendes SGGZ stammt aus [**Dam90**]. *Dam* beweist hiermit eine Amartversion von Satz 1.3, mit $a_n = n$, bzw. des ersten Teils von Satz 4.3, wobei die Voraussetzung mit $U_n = n$ fast sicher erfüllt ist. (Es hat jedoch den Anschein, als könnte man das SGGZ 8.4 auch so erhalten, wie Satz 8.2, indem man im Beweis anstatt 4.6 einfach Bemerkung 4.1 verwendet.)

Satz 8.3 (Drittes SGGZ). *X_n sei ein Amart und vorhersagbar. Dann konvergiert*

$$\frac{X_n}{n} \to 0$$

fast sicher.

Beweis. Definiere $Y_n := X_{n+1} - X_n$

- Y_n ist ein Amart mit $\lim_{\tau\in T}\mathbb{E}Y_\tau = 0$: Y_n ist $\mathcal{F}_n$-messbar, da X_n vorhersagbar ist und $Y_n \in \mathbf{L}^1$, da $X_n, X_{n+1} \in \mathbf{L}^1$.. Es sei $\sigma \in T$. σ nehme die Werte $s_1, \dots, s_n$ an. Dann gilt
$$\mathbb{E}Y_\sigma = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_{s_k+1}\mathbf{1}_{\{\sigma=s_k\}} - \mathbb{E}X_{s_k}\mathbf{1}_{\{\sigma=s_k\}}$$
und mit $\tau := \sigma + 1 \in T$ folgt daraus, dass $\mathbb{E}Y_\sigma = \mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_\sigma$. Da $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ insbesondere ein Cauchy-Netz ist, ist $\lim\limits_{\sigma\in T}|\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_\sigma| = 0$, also auch $\lim\limits_{\sigma\in T}\mathbb{E}Y_\sigma = 0$.
- $\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n} \to 0$ fast sicher: Es sei $X_n = M_n + Z_n$ die Riesz-Zerlegung aus Satz 7.13. Aus dem Beweis dieses Satzes geht hervor, dass für den Martingalanteil $M_m = \lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m)$ gilt; also auch
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_m) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_m) - \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = M_m - M_m = 0.$$
Nach Lemma 8.1 konvergiert $Y_n \to 0$ fast sicher. Mit Lemma 1.3 folgt daraus
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \to 0.$$

$\frac{X_n}{n} \to 0$, da

$$\frac{X_{n+1}}{n+1} = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}\frac{n}{n+1} + \frac{X_1}{n+1} \to 0.$$

□

Satz 8.4 (Viertes SGGZ). *Es sei X_n ein Amart und $1 \leq p \leq 2$. Dann folgt aus $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}|D_k|^p}{k^p} < \infty$, dass*

$$\frac{X_n}{n} \to 0$$

fast sicher.

Beweis. $X_n = X_1 + M_n + A_n$ sei die Doob-Zerlegung. M_n ist ein Martingal und A_n ein vorhersagbares Amart. Nach Satz 8.3 gilt schon $\frac{A_n}{n} \to 0$. Es muss demnach nur noch gezeigt werden, dass $\frac{M_n}{n} \to 0$. Das wird ähnlich gemacht wie im Beweis von Satz 8.2, denn genauso folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}|M_k-M_{k-1}|^p}{k^p} < \infty$. Insbesondere folgt daraus, dass $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}(|M_k-M_{k-1}|^p \mid \mathcal{F}_{k-1})}{k^p} < \infty$ fast sicher und $\frac{M_n}{n} \to 0$ folgt nun aus Satz 4.3 □

Bemerkung 8.1. Genauso wie in obigem Beweis kann man natürlich auch Satz 8.2 zeigen. Der einzige Unterschied ist, dass hierbei Satz 4.6 benutzt wird um zu schliessen, dass $\frac{M_n}{n} \to 0$.

KAPITEL 9

„reversed“ Amarts und Semiamarts

Die Indexmenge eines (Semi-)Amarts ist ab diesem Zeitpunkt $-\mathbb{N}$. An der Definition von Stoppzeiten ($\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$) oder der Definition von Amarts (das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ konvergiert) bzw. Semiamarts($\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ ist beschränkt) ändert sich nichts. Auch im „absteigenden“ Fall gilt, dass jedes Amart automatisch ein Semiamart ist(Satz 9.1). Mit Satz 9.2 wird gezeigt, dass dieselben Abgeschlossenheitseigenschaften gelten wie bei „aufsteigenden“ Amarts. Hier kann jedoch auf die Voraussetzung der $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit verzichtet werden. Dieses Phänomen zieht sich übrigens durch das gesamte Kapitel. Der Grund ist recht simpel:

Die Beweise sind allesamt „Stoppzeitenbeweise“. Es werden Stoppzeiten $\tau \in T$ auf einer Menge $F \in \mathcal{F}$ definiert. Um die Definition zu komplettieren wird die Stoppzeit auf F^c auf ein $n \geq \tau$ gesetzt. Im absteigenden Fall kann immer $n = -1$ gewählt werden, wohingegen n im aufsteigenden Fall immer von τ abhängt.

In Abschnitt 1 wird u.a. gezeigt, dass die Amarteigenschaft, unter T-gleichgradiger Integrierbarkeit, äquivalent ist zur Fast-Sicher-Konvergenz. Und, dass absteigende Amarts, *ohne* zusätzliche Bedingungen, fast sicher und in $\mathbf{L}^1$ konvergieren.

Die vorangegangenen Ergebnisse erwecken, aufgrund der häufig vernachlässigbaren Bedingung der $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit, den Anschein als würden sich Prozesse, adaptiert bezüglich absteigender Filtrationen, „besser“ verhalten als Aufsteigende, was offensichtlich in vielerlei Hinsicht richtig ist. Aber nicht immer, denn in Abschnitt 2 wird ein Beispiel gegeben in dem genau das Gegenteil der Fall ist.

In Abschnitt 3 wird die Riesz-Zerlegung von absteigenden Amarts präsentiert. Es wird gezeigt, dass diese, im Gegensatz zum aufsteigenden Fall, nicht mehr eindeutig sein muss.

Ziel des letzten Abschnitts 4 ist es hinreichende Bedingungen an ein Amart X_n und eine Funktion ϕ zu stellen so, dass auch $\phi(X_n)$ ein Amart ist.

KONVENTION 9.1. X_n sei integrierbar, bezüglich einer Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ adaptiert und es sei, wie gehabt, $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap\limits_{n\in-\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$. T sei die Menge aller beschränkten Stoppzeiten bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$.

BEMERKUNG 9.1. $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ konvergiert. $\Leftrightarrow$ Für jede Folge $\tau_n \downarrow$ beschränkter Stoppzeiten konvergiert $\{\mathbb{E}X_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (Denn es gilt ein ähnlicher Sachverhalt wie der Inhalt von Lemma 6.1; der Beweis kann fast nahtlos übernommen werden).

SATZ 9.1. *Jedes Amart ist auch ein Semiamart.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert ein n so, dass für alle $\tau \leq n$

$$|\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_n| \leq 1.$$

Für beliebiges $\sigma \in T$ kann man nun $\mathbb{E}X_\sigma$, auf Grundlage von

$$X_\sigma = X_{\sigma\vee n} + X_{\sigma\wedge n} - X_n,$$

grob abschätzen. □

SATZ 9.2.
- *Die Menge der (Semi-)Amarts, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und bezüglich fester Filtration, ist ein Vektorraum.*
- *Ist X_n ein Semiamart so auch X_n^+, X_n^- und $|X_n|$.*
- *Ist X_n ein Amart so auch X_n^+, X_n^- und $|X_n|$.*
- *(Semi-)Amarts sind abgeschlossen gegenüber „$\inf(\cdot,\cdot)$“ und „$\sup(\cdot,\cdot)$“.*

BEWEIS.
- klar

- Zu zeigen ist, dass aus
$$\sup_{\tau\in T}|\mathbb{E}X_\tau|<\infty$$
auch
$$\sup_{\tau\in T}\mathbb{E}X_\tau^+<\infty$$
folgt. Dazu verfahre wie im Beweises von Lemma 7.5, wähle aber $\tau_1=\tau\mathbf{1}_{\{X_\tau\geq 0\}}+(-1)\mathbf{1}_{\{X_\tau<0\}}$. Mittels erstem Punkt ist
$$X_n^-=-X_n+X_n^+$$
ein Semiamart und auch
$$|X_n|=X_n^++X_n^-.$$
- Zu $a>0$ beliebig wähle $n\in-\mathbb{N}$ so klein, dass
$$|\mathbb{E}X_\tau-\mathbb{E}X_\sigma|<a,$$
falls $\sigma,\tau\leq n$. Wähle $\tau_0\leq n$ so, dass für alle $\sigma\leq\tau_0$
$$\mathbb{E}X_\sigma^+>\mathbb{E}X_{\tau_0}^+-a.$$
(Das funktioniert natürlich, da $\{\mathbb{E}X_\sigma^+\}_{\sigma\in T}$ durch Null nach unten beschränkt ist.) Es sei $\sigma_1:=\sigma\mathbf{1}_{\{X_\sigma\geq 0\}}+\tau_0\mathbf{1}_{\{X_\sigma<0\}}$. σ_1 ist eine Stoppzeit mit $\sigma_1\leq n$. Daher gilt
$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_\sigma^+-\mathbb{E}X_{\tau_0}^+&=\mathbb{E}X_\sigma^+-\mathbb{E}X_{\tau_0}\mathbf{1}_{\{X_{\tau_0}\geq 0\}}\leq\mathbb{E}X_\sigma^+-\mathbb{E}X_{\tau_0}\mathbf{1}_{\{X_\sigma\geq 0\}}\\&=\mathbb{E}X_\sigma^++\mathbb{E}X_{\tau_0}\mathbf{1}_{\{X_\sigma<0\}}-\mathbb{E}X_{\tau_0}\mathbf{1}_{\{X_\sigma<0\}}-\mathbb{E}X_{\tau_0}\mathbf{1}_{\{X_\sigma\geq 0\}}=\mathbb{E}X_{\sigma_1}-\mathbb{E}X_{\tau_0}<a.\end{aligned}$$
Für $\sigma\leq\tau_0$ ergibt sich also
$$\left|\mathbb{E}X_\sigma^+-\mathbb{E}X_{\tau_0}^+\right|<a$$
und genauso wie in Lemma 7.5 folgert man daraus, dass $\{\mathbb{E}X_\tau^+\}_{\tau\in T}$ konvergiert. Demnach ist X_n^+ ein Amart, also auch $X_n^-=-X_n+X_n^+$ und $|X_n|=X_n^++X_n^-$.
- Wegen
$$\inf(X_n,Y_n)=X_n+Y_n-\sup(X_n,Y_n)$$
und erstem Punkt brauchen wir nur zu zeigen, dass $\sup(X_n,Y_n)$ ein (Semi-)Amart ist, was aber ebenfalls aus den vorherigen Punkten via
$$\sup(X_n,Y_n)=\frac{1}{2}(X_n+Y_n+|X_n-Y_n|)$$
folgt.

□

Lemma 9.1 (Eine Maximalungleichung). *X_n sei ein Semiamart. Dann gilt für jedes $a>0$*
$$a\mathbb{P}(\sup_{m\in-\mathbb{N}}|X_m|>a)\leq\sup_{\tau\in T}\mathbb{E}\,|X_\tau|<\infty.$$

Beweis. Der Beweis der ersten Ungleichung ist derselbe wie der von Lemma 7.6; nur, dass man jetzt $\tau:=-1$ auf F^c definiert und $F=\{\max_{m\geq n}|X_m|>a\}$ ist.

Es ist noch zu zeigen, dass $\{\mathbb{E}\,|X_\tau|\}_{\tau\in T}$ beschränkt ist. Das folgt aber aus dem zweiten Punkt von Satz 9.2. □

1. Konvergenzsätze

Im Ersten Konvergenzsatz wird gezeigt, dass, unter $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit, X_n *genau dann* ein Amart ist, wenn X_n fast sicher konvergiert. Die Bedingung der $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit wird im Vierten Konvergenzsatz auf eine T-gleichgradige Integrierbarkeit abgeschwächt. Im Zweiten und Dritten Konvergenzsatz wird gezeigt, dass absteigende Amarts schon fast sicher *und* in $\mathbf{L}^1$ konvergieren. Das ist insbesondere eine Verallgemeinerung der Konvergenz von absteigenden Martingalen gemäß Satz 5.4. Die meisten Ergebnisse aus diesem Abschnitt wurden von Edgar und Sucheston in [**Suc76a**] bewiesen bzw. sind einfache Folgerungen aus ihren Resultaten.

Satz 9.3 (Erster Konvergenzsatz). *Ist $\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ $\boldsymbol{L}^1$-dominiert, dann sind äquivalent:*

(1) *X_n konvergiert für $n\to-\infty$ fast sicher.*

(2) X_n *ist ein Amart.*

Beweis. Der Beweis kann, genauso wie der Beweis von Satz 7.9, mit Hilfe einer Approximation von Häufungspunkten durch geeignetes Stoppen erfolgen; also via Lemma 7.7. Und genau so ein Resultat wird nun für den „absteigenden“ Fall bewiesen.

Ist $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, die nur Häufungspunkte von X_n als Werte annimmt, dann gilt natürlich für jedes feste $n \in -\mathbb{N}$ und jedes $a > 0$

$$\Omega = \bigcup_{m=-\infty}^{n} \{|X_m - Y| < a\}$$

und daher

$$\Omega_l := \bigcup_{m=l}^{n} \{|X_m - Y| < a\} \uparrow \Omega$$

für $l \to -\infty$. Wähle nun $l \in -\mathbb{N}$ so klein, dass

$$\mathbb{P}(\Omega_l) > 1 - b.$$

Man muss nun nur noch eine Stoppzeit $\tau \leq n$ finden, derart, dass

$$\{|X_\tau - Y| < a\} \supseteq \Omega_l.$$

Daraus würde dann die zu beweisende Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X_\tau - Y| \geq a) < b$$

des Lemmas folgen. Dazu setzt man

$$\tau = \min\{m\,;\ l \leq m \leq n, |X_m - Y| < a\}$$

auf Ω_l und (damit τ eine Stoppzeit wird) $\tau = n$ auf Ω_l^c.

Damit hat man ein Ergebnis wie Lemma 7.7 für den „absteigenden“ Fall gezeigt. Alles weitere geht vollständig analog zum „aufsteigenden“ Fall. (vgl. Satz 7.9) □

Satz 9.4 (Zweiter Konvergenzsatz). *Es sei $\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ ein Amart. Dann konvergiert X_n fast sicher.*

Der folgende Beweis findet sich in [**Suc76a**]. Es wird von der Maximalungleichung 9.1 Gebrauch gemacht.

Beweis. Es sei $a > 0$ beliebig und definiere

$$Y_n = a \wedge X_n \vee -a$$

als den, ab $\pm a$ „abgeschnittenen“ Prozess X_n. Y_n ist nach Satz 9.2 ein Amart und offensichtlich $\mathbf{L}^1$-dominiert. Demnach konvergiert Y_n fast sicher, nach Erstem Konvergenzsatz. Damit ist aber (bis auf eine Nullmenge)

$$\{\sup_{n\in-\mathbb{N}} |X_n| < a\} \subseteq \bigcap_{n\leq -1} \{Y_n = X_n\} \subseteq \{X_n \to\}.$$

Nach Maximalungleichung können wir aber a so groß wählen, dass

$$\mathbb{P}(\sup_n |X_n| \geq a) < b,$$

also

$$\mathbb{P}(X_n \to) > 1 - b$$

für beliebiges $b > 0$. □

Folgendes Lemma stammt aus [**Suc76a**] und man zeigt damit schnell, dass jedes „absteigende“ Amart nicht nur fast sicher konvergiert(Satz 9.4) sondern auch in L^1(Satz 9.5); die Bedingung der L^1-Beschränktheit für Fast-Sicher-Konvergenz *und* $\mathbf{L}^1$-Konvergenz also nicht nötig ist.

Lemma 9.2. *Ist $\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ ein Semiamart, so ist X_n schon T-gleichgradig integrierbar.*

Beweis. Nach Satz 9.2 ist auch $|X_n|$ ein Semiamart. Dementsprechend kann man zu $a > 0$ ein $\tau_0 \in T$ finden mit

$$\mathbb{E}\,|X_\tau| < \mathbb{E}\,|X_{\tau_0}| + a$$

für alle $\tau \in T$. Wähle $m \le \tau_0$ und setze $F := \{|X_\tau| > b\}$. Für $\tau \le m$ ist

$$\tau_1 := \tau \mathbf{1}_F + \tau_0 \mathbf{1}_{F^c}$$

eine beschränkte Stoppzeit und

$$\mathbb{E}\,|X_\tau|\,\mathbf{1}_F = \mathbb{E}\,|X_{\tau_1}| - \mathbb{E}\,|X_{\tau_0}| + \mathbb{E}\,|X_{\tau_0}|\,\mathbf{1}_F.$$

Wegen Lemma 9.1 kann man $b > 0$ so groß wählen, dass $\mathbb{P}(\sup_{n\in-\mathbb{N}} |X_n| > b)$ beliebige klein wird. Da $\max_{n\ge m} |X_n| \in \mathbf{L}^1$ ist, kann man daher b so wählen, dass

$$\mathbb{E} \max_{n\ge m} |X_n|\,\mathbf{1}_{\{\sup\limits_{n\in-\mathbb{N}} |X_n|>b\}} < a.$$

Aus der letzten Gleichung und der Wahl von τ_0 folgt somit

$$\mathbb{E}\,|X_\tau|\,\mathbf{1}_F < a + \mathbb{E}\,|X_{\tau_0}|\,\mathbf{1}_F \le a + \mathbb{E}\max_{n\ge m} |X_n|\,\mathbf{1}_{\{\sup\limits_{n\in-\mathbb{N}} |X_n|>b\}} \le 2a.$$

Ist $\tau \in T$ beliebig(also nicht mehr notwendigerweise $\tau \le m$!), dann ist $\tau \wedge m$ ein beschränkte Stoppzeit $\le m$ und

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|X_\tau|\,\mathbf{1}_{\{|X_\tau|>b\}} &= \mathbb{E}\,|X_\tau|\,\mathbf{1}_{\{|X_\tau|>b\}\cap\{\tau\ge m\}} + \mathbb{E}\,|X_\tau|\,\mathbf{1}_{\{|X_\tau|>b\}\cap\{\tau<m\}} \\ &\le \mathbb{E}\max_{n\ge m} |X_n|\,\mathbf{1}_{\{\sup\limits_{n\in-\mathbb{N}} |X_n|>b\}} + \mathbb{E}\,|X_{\tau\wedge m}|\,\mathbf{1}_{\{|X_{\tau\wedge m}|>b\}} < a + 2a.\end{aligned}$$

□

Das Lemma kann so *nicht* für den „aufsteigenden“ Fall gezeigt werden, da τ_1(hier wäre $\tau \ge m \ge \tau_0$!) i.a. keine Stoppzeit mehr ist. Tatsächlich gilt das Lemma im aufsteigenden Fall überhaupt nicht, was man mit Beipiel 2.2 sehen kann.

Satz 9.5 (Dritter Konvergenzsatz). *Jedes Amart $\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ konvergiert f.s.* und *in $\boldsymbol{L}^1$.*

Beweis. Nach dem letzten Lemma ist $\{X_\tau\}_{\tau\in T}$ gleichgradig integrierbar. Klar ist, nach Konvergenzsatz 9.4, dass X_n fast sicher konvergiert. Klar ist auch, dass T-gleichgradige Integrierbarkeit die gleichgradige Integrierbarkeit impliziert.($\tau \equiv n$ sind beschränkte Stoppzeiten!)

Aber aus gleichgradiger Integrierbarkeit und Fast-Sicher-Konvergenz folgt nach Satz 3.3, dass $\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ in $\mathbf{L}^1$ konvergiert. □

Satz 9.6 (Vierter Konvergenzsatz). *$\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ sei T-gleichgradig integrierbar. Dann sind äquivalent:*

(1) *X_n konvergiert fast sicher für $n \to -\infty$*
(2) *X_n ist ein Amart.*

Beweis. Wird genauso geführt, wie der Beweis von Satz 7.12. □

2. „Aufwärts“- gegen „Abwärts“-Adaptiertheit

In diesem Abschnitt soll ein Beispiel aufgezeigt werden, das deutlich machen sollen, dass aufwärts adaptierte Prozesse ($\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\dots,X_n)$) sich im Hinblick auf Martingal- bzw. (Semi)-Amart-Eigenschaften komplett anders verhalten können, als ihre abwärts adaptierten Pendants ($Y_n := X_{-n}$ bzgl $\mathcal{G}_n = \sigma(Y_k\,;\ k \le n)$ für $n \in -\mathbb{N}$). Das Beispiel stammt aus [**Sch83**].

Beispiel 9.1. Ähnlich wie in Beispiel 7.4 wird hier $X_n := 2^n \mathbf{1}_{(0,2^{-n})}$ gesetzt. Dabei ist $\Omega = [0,1]$ versehen mit der Borel'schen σ-Algebra und dem Lebesgue-Maß. $X_n \to 0$ fast sicher und ist $\mathbf{L}^1$-beschränkt. Bezüglich $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1,\dots,X_n)$ ist X_n sogar ein Martingal.

Betrachtet man hingegen $Y_n := X_{-n}$ bezüglich $\mathcal{G}_n := \sigma(Y_k\,;\ k \le n)$ für $n \in -\mathbb{N}$, so sieht das ganz anders aus. Wir definieren eine Stoppzeit τ auf $[0,1]$ wie folgt:

$$\tau = \inf\{k \in -\mathbb{N}\,;\ Y_k \ne 0\}$$

auf $\bigcup_{n\in-\mathbb{N}}\{Y_n \ne 0\}$ und $\tau = -1$ sonst. (Da X_n eine Fast-Sicher-Nullfolge ist und nur die Werte 0 und 2^n annimmt ist $\tau > -\infty$ fast sicher. Interessant ist auch, dass $Y_\tau = \sup_{n\in-\mathbb{N}} Y_n$. (Im Fall der Aufwärts-Adaptiertheit würde man keine Stoppzeit finden, die uns X beim Supremum stoppt.))

Definiert man $\tau_n := \tau \vee -n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, so ist $\tau_n \in T$. Man möchte zeigen, dass $\mathbb{E}Y_{\tau_n} \to \infty$ für $n \to \infty$. Damit wäre $(Y_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ noch nicht mal ein Semiamart:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y_{\tau_n} &= \sum_{k=-n}^{-1} \mathbb{E}(Y_{\tau_n}\mathbf{1}_{\{\tau_n=k\}}) = \sum_{k=-n}^{-1} \mathbb{E}(Y_k\mathbf{1}_{\{\tau_n=k\}}) \\
&= \sum_{k=-n}^{-1} \mathbb{E}(Y_k\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}) + \mathbb{E}(X_n\mathbf{1}_{\{\tau<-n\}}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(2^k\mathbf{1}_{(0,2^{-k})}\mathbf{1}_{\{\tau=-k\}}) + \mathbb{E}(2^n\mathbf{1}_{(0,2^{-n})}\mathbf{1}_{\{\tau<-n\}}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k\mathbb{P}((0,2^{-k}) \cap \{Y_{-k} \neq 0\} \cap \bigcap_{l<-k}\{Y_l = 0\}) + 2\mathbb{P}((0,2^{-1}) \cap \bigcap_{l\leq-1}\{Y_l = 0\}) \\
&+ 2^n\mathbb{P}((0,2^{-n}) \cap \bigcup_{l<-n}\{Y_l \neq 0\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k\mathbb{P}((0,2^{-k}) \cap \{Y_{-k} \neq 0\} \cap \{Y_{-(k+1)} = 0\}) + 2\mathbb{P}((0,2^{-1}) \cap \{Y_{-1} = 0\}) \\
&+ 2^n\mathbb{P}((0,2^{-n}) \cap \{Y_{-(n+1)} \neq 0\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k\mathbb{P}((0,2^{-k}) \cap [2^{-(k+1)},2^{-k})) + 0 + 2^n\mathbb{P}(0,2^{-(n+1)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k(2^{-k} - 2^{-(k+1)}) + 2^{-1} = \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

3. Riesz-Zerlegung

Auch im absteigenden Fall existiert eine Riesz-Zerlegung, wie der folgende Satz, bewiesen in [**Gut82**], zeigt. Die Besonderheit hierbei ist, dass diese Zerlegung i.a. nicht mehr eindeutig ist. Das anschliessende Beispiel macht dies deutlich.

SATZ 9.7. *$\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ sei ein Amart. Dann existiert eine (nicht notwendig eindeutige (siehe Beispiel 9.2)) Zerlegung*

$$X_n = Y_n + Z_n$$

in ein Martingal Y_n und ein T-gleichgradig integrierbares Amart Z_n mit $Z_n \to 0$ fast sicher und *in $\boldsymbol{L}^1$.*

BEWEIS.

$$Y_n := \mathbb{E}(X_{-1} \mid \mathcal{F}_n) + X_{-\infty} - \mathbb{E}(X_{-1} \mid \mathcal{F}_{-\infty})$$

Dabei sei $X_{-\infty}$ der Grenzwert von X_n. (siehe dazu Satz 9.5) Man sieht leicht, dass Y_n ein Martingal ist. Wir müssen noch untersuchen, ob $Z_n = X_n - Y_n$ die Eigenschaften aus dem Satz erfüllt.

Zunächst ist Z_n, als Summe von Amarts, auch ein Amart. Schliesslich konvergiert

$$Z_n \to 0$$

fast sicher und in $\mathbf{L}^1$ nach Levy-Downward-Theorem und Satz 9.5. Dass $\{Z_\tau\}_{\tau\in T}$ gleichgradig integrierbar ist, folgt aus Lemma 9.2. □

Folgendes Beispiel(aus [**Sch83**]) zeigt, dass bei „fallenden“ Amarts tatsächlich nicht mehr von *der* Riesz-Zerlegung gesprochen werden kann.

BEISPIEL 9.2. Wähle $1 < p < 2$ und eine Folge $W_n \sim W$ unabhängig mit $\mathbb{E}\,|W|^p < \infty$ und $\mathbb{E}W = 0$. Definiere

$$X_{-n} := \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{m=1}^{n} W_m.$$

Mit Satz 1.10 erhält man, dass $\{X_n\}_{n\in-\mathbb{N}}$ fast sicher gegen Null konvergiert. X_n ist auch $\mathbf{L}^1$-dominiert, denn in [**Kla74**] wird gezeigt:

Ist $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend so, dass für ein $r > \frac{1}{2}$ immer noch $\frac{f(y)}{y^r} \uparrow$ und sind $Y_n \sim F \in \mathbf{L}^1$ unabhängig, nicht entartet und zentriert, dann sind äquivalent:

(1) $\int_{|x|>f(1)} |x| \int_1^{f^{-1}(|x|)} \frac{dy}{f(y)} dF(x) < \infty$
(2) $\mathbb{E} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|Y_1+\ldots+Y_n|}{f(n)} < \infty$.

Wendet man das mit $f(y) = y^{\frac{1}{p}}$ und $r = \frac{1}{p}$ sowie $Y_n = W_n$ an, so muss man

$$\int\limits_{|x|>1} |x| \int\limits_1^{|x|^p} y^{-\frac{1}{p}} dy dF(x) < \infty$$

zeigen um die $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit von X_n nachzuweisen und wegen $\int_1^{|x|^p} y^{-\frac{1}{p}} dy \leq \frac{p}{p-1} |x|^{p-1}$ ist dieses Integral tatsächlich $\leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E} |W|^p < \infty$.

Nach Konvergenzsatz 9.3 ist X_n ein Amart und hat wegen Lemma 9.2, schon alle Eigenschaften von Z_n. Eine triviale Zerlegung wäre somit

$$X_n = 0 + X_n.$$

Eine weitere Riesz-Zerlegung ist

$$X_{-n} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n W_n + \left(X_{-n} - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n W_n \right).$$

Offensichtlich ist $Y_{-n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^n W_n$ ein Martingal und $Z_n = X_n - Y_n$ ein Amart. Da jedes „fallende" Amart T-gleichgradig integrierbar ist, ist nur noch die Konvergenz gegen Null zu zeigen, was man aber schnell aus dem Vorherigen sieht:

$$\left| \frac{1}{n^{1/p}} - \frac{1}{n} \right| \left| \sum_{m=1}^n W_m \right| \leq \frac{1}{n^{1/p}} \left| \sum_{m=1}^n W_m \right| \to 0.$$

4. Stabilitätsanalyse

Es wird untersucht unter welchen Bedingungen an die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und das Amart X_n, $\phi(X_n)$ wieder ein Amart ist. Es wird sowohl der aufsteigende als auch der absteigende Fall betrachtet. Man stellt u. a. fest, dass es ausreicht, wenn ϕ stetig ist, und $\{\phi(X_\tau)\}_{\tau\in T}$ gleichgradig integrierbar ist. Anhand zweier Beispiele wird gezeigt, dass diese Voraussetzungen *nicht* durch eine $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit von $\{\phi(X_\tau)\}_{\tau\in T}$ oder gleichgradige Integrierbarkeit von $\{\phi(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ersetzt werden können. Die Ergebnisse stammen aus [**Sch83**] Teil 1 Kapitel 5.

SATZ 9.8. *$\{X_n\}_{n\in\mathbb{I}}$ sei ein Amart, $\mathbb{I} = -\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}$ und für $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ $\mathbf{L}^1$-beschränkt. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und $\phi(x) = O(x)$. Dann ist $\{\phi(X_n)\}_{n\in\mathbb{I}}$ ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes Amart.*

Dies gilt *nicht* mehr für Sub- oder Supermartingale X_n. Wählt man zum Beispiel die deterministische Folge $X_n = \frac{1}{n}$, so ist X_n, unabhängig von der Filtration, immer ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes Supermartingal. Nun kann man eine stetige Funktion $\phi(x) = O(x)$ finden, sodass $\phi(X_n) = (-1)^n X_n$ gilt. Natürlich ist, $\phi(X_n)$ dann kein Sub- oder Supermartingal mehr. (Für einen Graphen von ϕ verbinde einfach die Punktfolge $\{(\frac{1}{n}, (-1)^n \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ zu einem Polygonzug, setze für $x \leq 0$, $\phi(x) = 0$ und für $x \geq 1$, $\phi(x) = -1$.)

BEWEIS VON SATZ 9.8. Wir können uns auf $\phi(0) = 0$, $X_n \geq 0$ sowie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\phi(x)}{x} = 0$ beschränken, denn:

- gilt z.B. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x} = a \neq 0$, dann würde die Aussage aber für

$$\psi(x) := \phi(x) - ax$$

gelten und aufgrund der Linearität wäre $\phi(X_n) = \psi(X_n) + aX_n$ ein Amart.(Um die $\mathbf{L}^1$-Beschränkheit zu zeigen, werden wir diesen Punkt nicht brauchen, lediglich die Einschränkung, dass $X_n \geq 0$ ist. Das ist wichtig; sonst könnten wir im Fall $\mathbb{I} = -\mathbb{N}$ i.a. *nicht* schlußfolgern, dass $\phi(X_n)$ $\mathbf{L}^1$-beschränkt ist, da wir dies für X_n nicht vorausgesetzt haben.)

- ist X_n *nicht* notwendigerweise ≥ 0, so gilt die Aussage aber für $\psi(X_n^-) := \phi(-X_n^-)$ und $\phi(X_n^+)$ und wegen $\phi(0) = 0$ ist

$$\phi(X_n) = \phi(X_n^+) + \psi(X_n^-)$$

ein Amart.

- ist $\phi(0) \neq 0$, so definiere einfach

$$\psi(x) := \phi(x) - \phi(0).$$

Mit $\psi(X_n)$ ist, aufgrund der Linearität, auch $\phi(X_n) = \psi(X_n) + \phi(0)$ ein Amart.

Zunächst ist nach Konvergenzsatz 9.4 bzw. 7.11 klar, dass $\phi(X_n)$ für $|n| \to \infty$ fast sicher konvergiert. Im folgenden zeigen wir die $\mathbf{L}^1$-Beschränktheit. Dazu wähle $R > 0$ und $\lambda \geq 0$ so groß, dass für alle $x \geq \lambda$

$$|\phi(x)| \leq Rx.$$

Für $x \in [0, \lambda]$ gilt sowieso eine Beschränkung der Form

$$|\phi(x)| \leq M < \infty.$$

Nun benutzt man

$$|\phi(X_\tau)| = |\phi(X_\tau)| \mathbf{1}_{\{X_\tau \leq \lambda\}} + |\phi(X_\tau)| \mathbf{1}_{\{X_\tau > \lambda\}} \leq M \mathbf{1}_{X_\tau \leq \lambda} + RX_\tau \mathbf{1}_{X_\tau > \lambda}.$$

(Hier wurde nur $X_n \geq 0$, also *nicht* der erste Punkt verwendet.) Man erhält insbesondere,dass $\phi(X_n)$ ein Semiamart ist, und im Fall von $\mathbb{I} = -\mathbb{N}$ sind wir aufgrund von Satz 9.2 und Konvergenzsatz 9.6 fertig. Um die Amart-Eigenschaft auch für $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ zu erhalten, möchte man Konvergenzsatz 7.12 anwenden. Dazu muss noch gezeigt werden, dass $\phi(X_n)$ T-gleichgradige integrierbar ist. Man zeigt sogar, dass $\{\phi(X_\tau)\}_{\tau \in T}$ gleichgradig integrierbar ist:

Mit Hilfe von Maximalungleichung 7.6 erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |\phi(X_\tau)| \mathbf{1}_{|\phi(X_\tau)|>a} &\leq \mathbb{E} |\phi(X_\tau)| \mathbf{1}_{|\phi(X_\tau)|>a} \mathbf{1}_{X_\tau > \lambda} + \mathbb{E} |\phi(X_\tau)| \mathbf{1}_{|\phi(X_\tau)|>a} \mathbf{1}_{X_\tau \leq \lambda} \\
&\leq R \mathbb{E} X_\tau + \frac{M}{a} \sup_{\tau \in T} \mathbb{E} |\phi(X_\tau)| \\
&\leq R \sup_{\tau \in T} \mathbb{E} X_\tau + \frac{M}{a} \sup_{\tau \in T} \mathbb{E} |\phi(X_\tau)| .
\end{aligned}$$

Nach der Rechnung zur $\mathbf{L}^1$-Beschränkheit weiß man, dass $\sup_{\tau \in T} \mathbb{E} |\phi(X_\tau)| < \infty$ und kann, durch geeignete Wahl von R und a,

$$\sup_{\tau \in T} \mathbb{E}(|\phi(X_\tau)| \mathbf{1}_{|\phi(X_\tau)|>a})$$

beliebig klein machen, denn wenn man $\lim_{x \to \infty} \frac{\phi(x)}{x} = 0$ benutzt, dann gilt sogar:

wir finden zu *beliebigem* $R > 0$ ein $\lambda \geq 0$ so , dass für alle $x \geq \lambda$

$$|\phi(x)| \leq R \cdot x$$

gilt. □

Aus dem Beweis des letzten Satz folgt sofort ein Korollar.

Korollar 9.3. (1) *Ist $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein $\boldsymbol{L}^1$-beschränktes Amart, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\{\phi(X_\tau)\}_{\tau \in T}$ gleichgradig integrierbar, so ist auch $\phi(X_n)$ ein Amart.*

(2) *Ist $\{X_n\}_{n \in -\mathbb{N}}$ ein Amart, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi(X_n)$ ein Semiamart, so ist auch $\phi(X_n)$ ein Amart.*

Das Korollar sieht im ersten Moment so aus, als seien die Voraussetzungen im Gegensatz zum letzten Satz wieder verstärkt worden, folgende Beispiele zeigen aber, dass man die Voraussetzungen trotzdem *nicht* wesentlich abschwächen kann. Die Beispiele stammen aus [**Sch83**]

Beispiel 9.3. Wähle die Folge X_n aus Beispiel 7.6 (1), aber diesmal mit $p < 1$. Dann ist X_n, aufgrund von $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit und fast sicherer Konvergenz (siehe Konvergenzsatz 7.9), ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes Amart. Zur $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit:

$\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ist k^p im Interval $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ und dementsprechend ist

$$\mathbb{E}\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-p}} < \infty.$$

Wählt man $\phi(x) = |x|^{\frac{1}{p}}$, so zeigt man, wie in Beispiel 7.6 (1),

$$\phi(X_n)$$

ist gleichgradig integrierbar und

$$\mathbb{E}\phi(X_{\tau_n}) = 1.$$

Gleichzeitig konvergiert $\mathbb{E}\phi(X_n) \to 0$. Damit ist $\phi(X_n)$ kein Amart mehr. Um das einzusehen, kann man sich aus $n \uparrow$ und $\tau_n \uparrow$ eine „Mischfolge“ $\sigma_n \uparrow$ basteln so, dass $\mathbb{E}\phi(X_{\sigma_n})$ *nicht* konvergiert. Nach Lemma 6.1 ist damit $\phi(X_n)$ kein Amart.

Wir können demnach die Voraussetzung der gleichgradigen Integrierbarkeit von $\{\phi(X_\tau)\}_{\tau\in T}$ im Korollar *nicht* durch die gleichgradige Integrierbarkeit von $\phi(X_n)$ ersetzen.

Beispiel 9.4. Man wählt als Grundlage die Folge X_n aus Beispiel 7.4. X_n ist T-$\mathbf{L}^1$-beschränkt und fast sicher konvergent, aber kein Amart. Definiert man nun $\phi(x) := x^{\frac{1}{p}}$ und schreibt

$$X_n = (X_n^p)^{\frac{1}{p}} = \phi(X_n^p),$$

dann ist, für $p < 1$, aufgrund von $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit und fast sicherer Konvergenz, X_n^p ein Amart. Zur $\mathbf{L}^1$-Dominiertheit:

$\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n^p$ ist $2^{k\cdot p}$ auf $(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]$ und dementsprechend ist

$$\mathbb{E}\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\cdot p} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k\cdot p}}{2^{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1-p}}\right)^k < \infty.$$

Wir haben hier also ein Beispiel, dass zeigt, dass wir die Voraussetzung der gleichgradigen Integrierbarkeit von $\{\phi(X_\tau)\}_{\tau\in T}$ im Korollar i.a. *nicht* durch eine T-$\mathbf{L}^1$-Beschränkheit ersetzen können.

KAPITEL 10

Amarts mit gerichteter Indexmenge

In diesem Kapitel stehen Amarts, *geordnete Amarts*, Semiamarts und Quasimartingale mit gerichteter Indexmenge im Mittelpunkt. Diese werden zunächst definiert und im Anschluss wird gezeigt, dass jedes Quasimartingal ein geordnetes Amart ist. In Satz 10.2 werden äquivalente Beschreibungen von Amarts und geordneten Amarts aus [**Suc76b**] vorgestellt. Dieses Ergebnis ist ein wichtiges Hilfsmittel im Beweis der Riesz-Zerlegung. Wie Satz 10.3 zeigt, gelten auch im Fall einer gerichteten Indexmenge die nützlichen Abgeschlossenheitseigenschaft von Amarts bzw. Semiamarts wie wir sie schon für Amarts mit Indexmenge $\mathbb{N}$ oder $-\mathbb{N}$ kennengelernt haben.

Abschnitt 1 enthält einige Konvergenzsätze für gerichtete Amarts. Unter anderem wird gezeigt, dass $\mathbf{L}^1$-beschränkte Amarts in Wahrscheinlichkeit konvergieren und besitzt die zugrundeliegende Filtration zusätzlich die Vitali-Eigenschaft, so konvergiert jedes $\mathbf{L}^1$-beschränkte Amart sogar essentiell.

In Abschnitt 2 wird die Riesz-Zerlegung von (geordneten) Amarts mit gerichteter Indexmenge bewiesen.

Konvention 10.1. Im folgenden sei, soweit nicht anders gesagt, G eine gerichtete Menge, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ eine Filtration und, für jedes $t \in G$, $X_t \in \mathbf{L}^1$ und $\mathcal{F}_t$-adaptiert.

Definition 10.2 ((geordnete) Amarts, Semiamarts, Quasimartingale).

- X_t heisst *geordnetes Amart*, falls das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T_{\mathrm{ord}}}$ konvergiert.
- X_t heisst *Amart*, falls das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ konvergiert.
- X_t heisst *Quasimartingal*, falls es ein $C > 0$ gibt derart, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $t_1 < \ldots < t_n \in G$
$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_{t_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{t_k}) - X_{t_k}\right| \leq C.$$
- X_t heisst *Semiamart*, falls das Netz $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ beschränkt ist.

Im Fall $G = \mathbb{N}$ fallen obige Definitionen mit den Ursprünglichen zusammen und jedes geordnete Amart ist ein Amart.

Satz 10.1. *Jedes Quasimartingal ist ein geordnetes Amart.*

Beweis. Man definiert
$$M := \sup\{\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_{t_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{t_k}) - X_{t_k}\right| \; ; \; n \in \mathbb{N},\, t_k \in G,\, t_1 < \ldots < t_n\}.$$
Aus der Definition des Quasimartingals geht hervor, dass $M < \infty$. Es sei $a > 0$. Dann existieren $s_1 < \ldots < s_m \in G$ mit
$$\sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_{s_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{s_k}) - X_{s_k}\right| > M - a.$$
Es seien $s_m \leq t_1 < \ldots < t_n$. Dann gilt
$$\sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_{s_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{s_k}) - X_{s_k}\right| + \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_{t_1} \mid \mathcal{F}_{s_m}) - X_{s_m}\right| + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_{t_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{t_k}) - X_{t_k}\right| < M.$$
Daraus folgt
$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_{t_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{t_k}) - X_{t_k}\right| \leq \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_{t_1} \mid \mathcal{F}_{s_m}) - X_{s_m}\right| + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X_{t_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{t_k}) - X_{t_k}\right| < a.$$

Ab hier verläuft der Beweis wie im Fall $G = \mathbb{N}$. Es sei $\tau \in T_{\text{ord}}$ mit $\tau \geq s_m$ und τ nehme die Werte $t_1 < \ldots < t_n$ an. Für beliebiges $t_{n+1} := t \geq \tau$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_t &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \mathbb{E}(X_{t_j} - X_{t_{j+1}})\mathbf{1}_{\{\tau=t_k\}}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} \mathbb{E}(X_{t_j} - \mathbb{E}(X_{t_{j+1}} \mid \mathcal{F}_{t_j}))\mathbf{1}_{\{\tau=t_k\}}\end{aligned}$$

Daraus folgert man

$$|\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_t| < a.$$

Ist $\sigma \geq s_m$, $\sigma \in T_{\text{ord}}$ und ist $s \geq \sigma$, so gilt auch

$$|\mathbb{E}X_\sigma - \mathbb{E}X_s| < a.$$

Daraus folgt

$$|\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_\sigma| < 2a.$$

Demnach ist $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T_{\text{ord}}}$ Cauchy und somit konvergent. □

Für die nachfolgende Charakterisierung von geordneten Amarts(Satz 10.2) benötigt man eine weitere Ordnung auf T_{ord}, die T_{ord} ebenfalls zu einer gerichteten Menge macht.

Definition 10.3 („$\leqslant$“ auf T). Es seien $\sigma, \tau \in T$.

$$\sigma \leqslant \tau :\leftrightarrow \exists t \in G : \sigma \leq t \leq \tau \textit{ fast sicher}$$

Satz 10.2 (Charakterisierung von (geordneten) Amarts).

- *Es sind äquivalent*
  (1) X_t *ist ein geordnetes Amart.*
  (2) $\lim\limits_{\sigma\leqslant\tau;\sigma,\tau\in T_{\text{ord}}} \mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma| = 0$
- *Es sind äquivalent*
  (1) X_t *ist ein Amart.*
  (2) $\lim\limits_{\sigma\leq\tau;\sigma,\tau\in T} \mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma| = 0$

Dabei ist ein Doppellimes wie $\lim\limits_{\sigma\leqslant\tau;\sigma,\tau\in T_{\text{ord}}} \mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma| = 0$ wiefolgt zu verstehen:
Zu beliebigem $a > 0$ existiert ein $\rho \in T_{\text{ord}}$ derart, dass für alle $\rho \leqslant \sigma \leqslant \tau$

$$\mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) - X_\sigma| < a.$$

Beweis von Satz 10.2.

- Gilt (1), so existiert zu $a > 0$ ein $r \in G$ derart, dass aus $\rho, \tau \geq r$

$$|\mathbb{E}X_\rho - \mathbb{E}X_\tau| < a$$

folgt. Nun sei $r \leqslant \rho \leqslant \tau$. Definiert man für $F \in \mathcal{F}_\rho$

$$\sigma := \rho\mathbf{1}_F + \tau\mathbf{1}_{F^c},$$

dann ist

$$\mathbb{E}(X_\rho - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\rho))\mathbf{1}_F = \mathbb{E}X_\sigma - \mathbb{E}X_\tau < a,$$

da $r \leq \sigma$. Mit $F = \{X_\rho \geq \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\rho)\}$ folgt

$$\mathbb{E}(X_\rho - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\rho))^+ < a.$$

Wählt man $F = \{X_\rho < \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\rho)\}$, dann ist

$$\mathbb{E}(X_\rho - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\rho))^- = \mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_\sigma \leq |\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_\sigma| < a.$$

Also ist für $\rho \leqslant \tau$ hinreichend gross

$$\mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\rho) - X_\rho| < 2a.$$

Gilt andererseits (2), so ist, für $\rho \leqslant \sigma$ hinreichend gross,

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}X_\rho - \mathbb{E}X_\sigma| &= |\mathbb{E}\mathbb{E}(X_\sigma \mid \mathcal{F}_\rho) - \mathbb{E}X_\rho|\\ &\leq \mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_\sigma \mid \mathcal{F}_\rho) - \mathbb{E}X_\rho| < a.\end{aligned}$$

r sei der grösste Wert von $\rho \in T_{\text{ord}}$. Dann gilt für alle $\sigma, \tau \geq r$, dass

$$|\mathbb{E}X_\sigma - \mathbb{E}X_\tau| \leq |\mathbb{E}X_\sigma - \mathbb{E}X_\rho| + |\mathbb{E}X_\rho - \mathbb{E}X_\tau| < 2a.$$

Demnach ist $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau \in T_{\text{ord}}}$ Cauchy und konvergiert.

- Der Beweis wird wie im ersten Punkt geführt.

□

Obiger Satz ist offenbar eine Weiterentwicklung von Lemma 7.8 und genauso wird auch dieser im Beweis der Riesz-Zerlegung von (geordneten) Amarts verwendet.(siehe Satz 10.10 oder [**Suc92**], Abschnitt 1.4)

LEMMA 10.1. *Es sei entweder $\{X_t^+\}_{t \in G}$ oder $\{X_t^-\}_{t \in G}$ $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt. Dann sind äquivalent:*

(1) *$\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau \in T}$ konvergiert.*
(2) *$\{\mathbb{E}X_\tau^-\}_{\tau \in T}$ und $\{\mathbb{E}X_\tau^+\}_{\tau \in T}$ konvergieren*

BEWEIS. Der Beweis ist derselbe wie der von Lemma 7.5. □

Auch im Fall einer beliebigen gerichteten Indexmenge gelten, genauso wie bei $G = \mathbb{N}$, alle Abgeschlossenheitseigenschaften, die aus Satz 7.6 bekannt sind. Mit Hilfe von Lemma 10.1 wird der Beweis genauso geführt wie der von 7.6.

SATZ 10.3. *$\{X_t\}_{t \in G}$ sei $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt.*

- *Die Menge der $\boldsymbol{L}^1$-beschränkten (Semi-)Amarts, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und bezüglich fester Filtration, bilden einen Vektorraum.*
- *Ist X_t ein Semiamart so auch X_t^+, X_t^- und $|X_t|$.*
- *Ist X_t ein Amart so auch X_t^+, X_t^- und $|X_t|$.*
- *(Semi-)Amarts sind abgeschlossen gegenüber „$\inf(\cdot,\cdot)$“ und „$\sup(\cdot,\cdot)$“.*

Es existiert auch eine Art von Maximalungleichung, wobei „sup“ durch „lim sup“ bzw. „e lim sup“ ersetzt wird. Um diese zu verstehen benötigt man noch eine kleine Definition und ein Lemma:
$\limsup_{\tau \in T} \mathbb{E}X_\tau := \inf_{t \in G} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}X_\tau$.

LEMMA 10.2. *Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt fast sicher*

$$\{\mathrm{e}\limsup_{t \in G} X_t > a\} \subseteq \mathrm{e}\limsup_{t \in G}\{X_t > a\}$$

BEWEIS. Man benutzt, dass man essentielle Infima bwz. Suprema immer als abzählbare Schnitte(Infima) bzw. Vereinigungen(Suprema) darstellen kann:
Zunächst existiert eine Folge $\{t_n\} \subseteq G$ mit $t_n \geq s$ und

$$\{\mathrm{e}\sup_{t \geq s} X_t > a\} = \{\sup_{n \in \mathbb{N}} X_{t_n} > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_{t_n} > a\} \subseteq \mathrm{e}\sup_{t \geq s}\{X_t > a\}$$

fast sicher. Es existiert auch eine Folge $\{s_n\} \subseteq G$ so, dass einerseits
$\mathrm{e}\inf_{s \in G} \mathrm{e}\sup_{t \geq s} X_t = \inf_{n \in \mathbb{N}}(\mathrm{e}\sup_{t \geq s_n} X_t)$ und andererseits
$\mathrm{e}\inf_{s \in G} \mathrm{e}\sup_{t \geq s}\{X_t > a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}\sup_{t \geq s_n}\{X_t > a\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\{\mathrm{e}\inf_{s \in G} \mathrm{e}\sup_{t \geq s} X_t > a\} &= \{\inf_{n \in \mathbb{N}}(\mathrm{e}\sup_{t \geq s_n} X_t) > a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\mathrm{e}\sup_{t \geq s_n} X_t > a + \frac{1}{m}\} \\
&\subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\mathrm{e}\sup_{t \geq s_n} X_t > a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\mathrm{e}\sup_{t \geq s_n} X_t > a\} \\
&\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}\sup_{t \geq s_n}\{X_t > a\} = \mathrm{e}\inf_{s \in G} \mathrm{e}\sup_{t \geq s}\{X_t > a\}
\end{aligned}$$

fast sicher. □

Lemma 10.3. *Es sei $a > 0$ und $X_t \geq 0$, für alle $t \in G$. $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in G}$ erfülle die Vitali-Bedingung. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(\operatorname{e}\limsup_{t \in G} X_t \geq a) \leq \frac{1}{a} \limsup_{\tau \in T} \mathbb{E}X_\tau.$$

Der Beweis stammt aus [**Suc92**], Abschnitt 4.2.

Beweis. Für $0 < b < a$ sei $F_t := \{X_t > b\}$. Nach vorangegangenem Lemma weiss man, dass $\{\operatorname{e}\limsup_{t \in G} X_t > b\} \subseteq F^*$. Wegen Satz 6.7 existiert, zu beliebigen $t \in G$ und $c > 0$, ein $\tau \in T$ mit $\tau \geq t$ so, dass $\mathbb{P}(F_\tau) \geq \mathbb{P}(F^*) - c$. Damit ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_\tau &= \sum_{t \in G} \mathbb{E}X_t \mathbf{1}_{\{\tau = t\}} \geq \sum_{t \in G} \mathbb{E}X_t \mathbf{1}_{\{\tau = t\} \cap F_t} \\ &\geq b \sum_{t \in G} \mathbb{P}(\{\tau = t\} \cap F_t) = b\mathbb{P}(F_\tau) \geq b(\mathbb{P}(F^*) - c).\end{aligned}$$

Da $c > 0$ beliebig gewählt war ist $\sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}X_\tau \geq b\mathbb{P}(F^*)$ für beliebiges $t \in G$. Also auch

$$\inf_{t \in G} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}X_\tau \geq b\mathbb{P}(\operatorname{e}\limsup_{t \in G}\{X_t > b\}).$$

Damit $\inf_{t \in G} \sup_{\tau \geq t} \mathbb{E}X_\tau \geq a\mathbb{P}(\operatorname{e}\limsup_{t \in G}\{X_t \geq a\})$ gilt, muss nur noch gezeigt werden, dass z.B.

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{e}\limsup_{t \in G}\{X_t > a - \frac{1}{n}\} \supseteq \operatorname{e}\limsup_{t \in G}\{X_t \geq a\}.$$

Dies gilt weil:

Sind $\{E_t\}_{t \in G}$ und $\{F_t\}_{t \in G}$ zwei Familien von Ereignissen mit $F_t \subseteq E_t$, für alle $t \in G$, so gilt $\operatorname{e}\sup_{t \geq s} F_t \subseteq \operatorname{e}\sup_{t \geq s} E_t$,für jedes $s \in G$, und daher auch

$$\operatorname{e}\limsup_{t \in G} F_t = \operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{t \geq s} F_t \subseteq \operatorname{e}\inf_{s \in G} \operatorname{e}\sup_{t \geq s} E_t = \operatorname{e}\limsup_{t \in G} E_t$$

fast sicher. Demnach ist $\operatorname{e}\limsup_{t \in G}\{X_t > a - \frac{1}{n}\} \downarrow$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\operatorname{e}\limsup_{t \in G}\{X_t > a - \frac{1}{n}\} \supseteq \operatorname{e}\limsup_{t \in G}\{X_t \geq a\}$. □

1. Konvergenzsätze

Betrachtet man Amarts mit gerichteter Indexmenge, so tritt, genauso wie im Fall von Martingalen mit gerichteter Indexmenge, das Problem auf, dass man i.a. nicht mehr von einer Fast-Sicher-Konvergenz sprechen kann. Dementsprechend konvergieren $\mathbf{L}^1$-beschränkte Amarts bzw. geordnete Amarts lediglich in Wahrscheinlichkeit(Satz 10.4). Dieser, erstmals in [**Suc76a**] bewiesene, Satz wird angewendet um Satz 6.5 mit einem Amartbeweis zu versehen. Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist Konvergenzsatz 10.9 der besagt, dass, unter der Vitali-Bedingung, $\mathbf{L}^1$-beschränkte Amarts essentiell konvergieren. Geschlossen wird mit einem Beispiel in dem ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes Supermartingal, auf einer Filtration mit Vitali-Eigenschaft, konstruiert wird welches jedoch *nicht* essentiell konvergiert.

Satz 10.4 (Erster Konvergenzsatz). *Es sei X_t ein geordnetes Amart.*

- *Ist X_t $\boldsymbol{L}^1$-beschränkt, so konvergiert X_t in Wahrscheinlichkeit.*
- *Ist X_t gleichgradig integrierbar, so konvergiert X_t in $\boldsymbol{L}^1$.*

Anwendung 10.1. Obiger Satz kann dazu verwendet werden, um das Radon-Nikodym-Theorem zu beweisen. Und zwar *ohne* Verwendung des bedingten Erwartungswerts oder des Martingalbegriffs. (siehe Satz D.1 im Anhang oder [**Suc92**]).

Beweis.

- Wähle $s_n \uparrow$ so, dass für alle $s_n \leq \tau_1, \tau_2 \in T_{\text{ord}}$

$$|\mathbb{E}X_{\tau_1} - \mathbb{E}X_{\tau_2}| < \frac{1}{2^n}.$$

Es sei nun $t_n \uparrow$ mit $s_n \leq t_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle zu $a > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $2^{-m} < a$. σ sei eine einfache(beschränkte) Stoppzeit bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sigma \geq m$. Man will zeigen, dass t_σ eine Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ ist. Das heisst es ist $\{t_\sigma = t\} \in \mathcal{F}_t$ zu zeigen.

$$\{t_\sigma = t\} = \bigcup_{s, t_s = t, \mathbb{P}(\sigma = s) > 0} \{t_\sigma = t_s\}$$

und damit ist nur noch zu zeigen, dass $\{t_\sigma = t_s\} \in \mathcal{F}_{t_s}$.

$$\{t_\sigma = t_s\} = \bigcup_{k, t_k = t_s} \{\sigma = k\} \cap \{t_\sigma = t_s\} = \bigcup_{k, t_k = t_s} \{\sigma = k\}$$

und $\{\sigma = k\} \in \mathcal{F}_{t_k}$. Da die Vereinigung nur über solche k mit $t_k = t_s$ geht, ist $\{\sigma = k\} \in \mathcal{F}_{t_s}$ und daher $\{t_\sigma = t_s\} \in \mathcal{F}_{t_s}$.

t_σ ist sogar eine geordnete Stoppzeit, denn σ nimmt nur endlich viele Werte an und $\{t_n\}_n$ ist vollständig geordnet. Wegen $s_m \leq t_m \leq t_\sigma$ ist

$$|\mathbb{E}X_{t_\sigma} - \mathbb{E}X_{t_m}| < \frac{1}{2^m} < a.$$

Also gilt für alle beschränkten Stoppzeiten $\sigma, \rho \geq m$ bzgl. $\{\mathcal{F}_{t_n}\}_n$

$$\left|\mathbb{E}X_{t_\sigma} - \mathbb{E}X_{t_\rho}\right| < 2a$$

und das Netz $\{\mathbb{E}X_{t_\sigma}\}_\sigma$ ist Cauchy. Demnach ist $\{X_{t_n}\}_n$ ein Amart. Dieses konvergiert fast sicher nach Satz 7.11, insbesondere auch in Wahrscheinlichkeit. Dass das Netz $\{X_t\}_{t\in G}$ auch in Wahrscheinlichkeit konvergiert folgt aus Lemma 6.1, falls wir zeigen können, dass „Konvergenz in Wahrscheinlichkeit“ äquivalent ist mit der Konvergenz bezüglich einer Metrik. $d(X,Y) := \mathbb{E}(|X - Y| \wedge 1)$ ist gemäß Satz B.2 ein Kandidat für solch eine Metrik auf dem Raum der Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

- Der Beweis ist der gleiche wie im ersten Punkt, bis zu der Stelle in der gezeigt wird, dass $\{X_{t_n}\}_n$ in Wahrscheinlichkeit konvergiert. Nun benutzt man Satz 3.3 um auf die $\mathbf{L}^1$-Konvergenz von $\{X_{t_n}\}_n$ zu schliessen. Jeder $\mathbf{L}^1$-Raum ist in kanonischer Weise auch ein metrischer Raum und Konvergenz in $\mathbf{L}^1$ heisst nichts anderes als Konvergenz bzgl. der Metrik $d(X,Y) := \mathbb{E}\,|X - Y|$. Daher folgt die Behauptung, wie im ersten Punkt, aus Lemma 6.1.

□

Anwendung 10.2. Man erhält als Folgerung wieder das, aus Satz 6.5, bekannte Ergebnis, dass ein (Sub-)Martingal X_t mit $\sup_{t\in G} \mathbb{E}X_t^+ < \infty$ in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

Beweis. Nach Satz 6.3 gilt für alle $\sigma \leq \tau \in T_{\text{ord}}$ $\mathbb{E}X_\sigma \leq \mathbb{E}X_\tau$. Aber zu jedem $\tau \in T_{\text{ord}}$ existiert ein $t \in G$ mit $\tau \leq t$ und daher gilt

$$\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_t \leq \sup_{t\in G} \mathbb{E}X_t^+ < \infty.$$

Ergo ist $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T_{\text{ord}}}$ ein steigendes Netz was nach oben beschränkt ist. Aus der Definition der Netzkonvergenz geht hervor, dass so ein Netz gegen $\sup_{\tau\in T_{\text{ord}}} \mathbb{E}X_\tau$ konvergiert. X_t ist ein geordnetes Amart und konvergiert in Wahrscheinlichkeit. □

Satz 10.5 (Zweiter Konvergenzsatz). *L^1-beschränkte Quasimartingale konvergieren in Wahrscheinlichkeit.*

Beweis. Benutze Satz 10.1 und Satz 10.4. □

Der nächste Konvergenzsatz ist vergleichbar mit Anwendung 7.4. Jedoch kostet uns die Verallgemeinerung auf gerichtete Indexmengen die Fast-Sicher-Konvergenz. Man erhält lediglich eine Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

Satz 10.6 (Dritter Konvergenzsatz). *$\boldsymbol{L}^1$-beschränkte oder positive Supermartingale X_t konvergieren in Wahrscheinlichkeit.*

BEWEIS. Es sei zunächst $X_t \geq 0$. Wähle eine Folge $\tau_n \uparrow$ geordneter Stoppzeiten. Nach Satz 6.3 gilt

$$\mathbb{E}X_{\tau_n} \geq \mathbb{E}X_{\tau_{n+1}}.$$

Da jedes $X_{\tau_n} \geq 0$ ist, konvergiert $\mathbb{E}X_{\tau_n}$. Nach Lemma 6.1 konvergiert $\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau \in T_{\mathrm{ord}}}$ und nach Erstem Konvergenzsatz konvergiert X_t in Wahrscheinlichkeit.

Nun sei $\sup_{t\in G} \mathbb{E}\,|X_t| < \infty$. Dann ist auch $-X_t$ $\mathbf{L}^1$-beschränkt und nach Satz 6.3 ein Submartingal. Nach Konvergenzsatz 6.5 konvergiert $-X_t$, und damit auch X_t, in Wahrscheinlichkeit. □

Man möchte eine Verallgemeinerung von Satz 7.9 auf beliebige gerichtete Indexmengen beweisen.(Konvergenzsatz 10.8) Die Beweisidee ist genau die gleiche wie bei 7.9 und stammt aus [**Suc92**], Abschnitt 4.2. Dementsprechend benutzt man auch hier ein „Aproximationslemma“ der Form:

LEMMA 10.4. *$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ erfülle die Vitali-Bedingung. Dann existiert zu beliebigen $b > 0$ und $t \in G$ immer ein $\tau \in T$ mit $\tau \geq t$ so, dass*

$$\mathbb{P}(\left|X_\tau - \operatorname{e}\limsup_{t\in G} X_t\right| \geq b) < b.$$

BEWEIS. Die Behauptung ist äquivalent zu

$$\operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} X_\tau = X^*$$

und genau das soll jetzt gezeigt werden. Nach Lemma 6.6 und Satz C.1 weiß man schon, dass $\operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} X_\tau \leq X^*$. Um die Ungleichung in die andere Richtung zu erhalten benutzt man folgenden Hilfssatz:

HS 5. *Für jede Familie $\{F_t\}_{t\in G} \subseteq \mathcal{F}$ gilt*

$$\operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} F_\tau = F^*.$$

Nach Hilfssatz erhält man für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ und $F_t := \{X_t > a\}$

$$\operatorname{s}\limsup_{\tau\in T}\{X_\tau > a\} = \operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} \bigcup_{t\in G}\{X_t > a\} \cap \{\tau = t\} = \operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} F_\tau = F^* = \operatorname{e}\limsup_{t\in G}\{X_t > a\}.$$

Nun benutzt man die Lemmas 10.2 und C.2 um

$$\begin{aligned}\{\operatorname{e}\limsup_{t\in G} X_t > a\} \subseteq \operatorname{e}\limsup_{t\in G}\{X_t > a\} &= \operatorname{s}\limsup_{\tau\in T}\{X_\tau > a\}\\ &\subseteq \operatorname{s}\limsup_{\tau\in T}\{X_\tau \geq a\} \subseteq \{\operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} X_\tau \geq a\}\end{aligned}$$

zu deduzieren. Angenommen $\mathbb{P}(\operatorname{e}\limsup_{t\in G} X_t > \operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} X_\tau) > 0$. Dann muss ein $a \in \mathbb{R}$ existieren mit $\mathbb{P}(\operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} X_\tau < a < \operatorname{e}\limsup_{t\in G} X_t) > 0$. Also ist $\mathbb{P}(\{\operatorname{e}\limsup_{t\in G} X_t > a\}\setminus\{\operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} X_\tau \geq a\}) > 0$ im Widerspruch zu der oben gezeigten Mengeninklusion. Demnach ist

$$\operatorname{e}\limsup_{t\in G} X_t \leq \operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} X_\tau$$

fast sicher.

BEWEIS VON HILFSSATZ 5. Eine Richtung bekommt man sehr leicht mit Hilfe von Lemma 6.6 und Satz C.1 aus

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} F_\tau} &= \operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} \mathbf{1}_{F_\tau} = \operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} \sum_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t}\mathbf{1}_{\{\tau=t\}}\\ &= \operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} \mathbf{1}_{\bigcup_{t\in G} F_t\cap\{t=\tau\}} \leq \operatorname{e}\limsup_{\tau\in T} \mathbf{1}_{\bigcup_{t\in G} F_t\cap\{t=\tau\}}\\ &= \operatorname{e}\limsup_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t} = \mathbf{1}_{\operatorname{e}\limsup_{t\in G} F_t}.\end{aligned}$$

Ist andererseits $E \in \mathcal{F}$ so, dass $\lim_{\tau\in T} \mathbb{P}(F_\tau \setminus E) = 0$, so gilt aufgrund von Satz 6.7 und $\mathbb{P}(F^* \setminus E) \leq \mathbb{P}(F^* \setminus F_\tau) + \mathbb{P}(F_\tau \setminus E)$, dass $\mathbb{P}(F^* \setminus E) = 0$. Nach Lemma C.1 heißt das, dass für alle $E \in \mathcal{F}$ mit $\operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} F_\tau \subseteq E$ automatisch $F^* \subseteq E$ gilt. Insbesondere gilt $F^* \subseteq \operatorname{s}\limsup_{\tau\in T} F_\tau$. □

□

Satz 10.7. *Besitzt $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ die Vitali-Eigenschaft, so existieren zu beliebiger Folge $\{\sigma_n\} \subseteq T$ einfache Stoppzeiten $\tau_n \geq \sigma_n$ mit $\tau_n \uparrow$ und*

$$X_{\tau_n} \to X^*$$

fast sicher.

Beweis. Ist $X^* \in \mathbb{R}$ so wendet man das obige Lemma induktiv an um eine Folge von Stoppzeiten $\tau_n \geq \sigma_n$ mit $\tau_n \uparrow$ zu erhalten so, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_{\tau_n} - X^*| \geq \frac{1}{n}) < \infty.$$

Mittels Borel-Cantelli-Lemma folgt daraus

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{P}(X_{\tau_n} \nrightarrow X^*) &= \mathbb{P}(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}_+} \{\limsup_{n\to\infty} |X_{\tau_n} - X^*| \geq q\}) \\ &\leq \sum_{q\in\mathbb{Q}_+} \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|X_{\tau_n} - X^*| \geq q\}) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}_+} \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|X_{\tau_n} - X^*| \geq \frac{1}{n}\}) = 0. \end{aligned}$$

Ist $X^* \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so gilt die Aussage für $f(X_t)$ und $\mathrm{e}\limsup_{t\in G} f(X_t)$, wobei $f(x) := \frac{x}{1+|x|}$. Man hat also einfache Stoppzeiten $\tau_n \geq \sigma_n$ so, dass

$$f(X_{\tau_n}) \to \mathrm{e}\limsup_{t\in G} f(X_t).$$

Indem man das essentielle Supremum bzw. Infimum in $\mathrm{e}\inf_{s\in G} \mathrm{e}\sup_{t\geq s} f(X_t)$ als abzählbares Supremum bzw. Infimum schreibt zeigt man sehr schnell, dass $f(\mathrm{e}\limsup_{t\in G} X_t) = \mathrm{e}\limsup_{t\in G} f(X_t)$ Nun wendet man f^{-1} an. $\square$

Satz 10.8 (Vierter Konvergenzsatz). *$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ erfülle die Vitali-Bedingung. X_t sei ein Amart so, dass für beliebige Stoppzeitenfolgen $\{\tau_n\} \subseteq T$ immer $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_{\tau_n} \in \boldsymbol{L}^1$ gilt. Dann konvergiert X_t essentiell.*

Beweis. Man wählt $t_n \in G$ so, dass $|\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_\sigma| < \frac{1}{n}$, für alle $\sigma, \tau \geq t_n$, gilt. Wähle nun gemäss letztem Satz $\tau_n \in T$ mit $\tau_n \uparrow$ und $\tau_n \geq t_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $X_{\tau_n} \to X^*$.

$-X_t$ erfüllt dieselben Voraussetzungen wie X_t unnd daher findet man auch hier $\sigma_n \in T$ mit $\sigma \uparrow$ und $\sigma_n \geq t_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $-X_{\sigma_n} \to \mathrm{e}\limsup_{t\in G}(-X_t) = -\mathrm{e}\liminf_{t\in G} X_t$. Mittels Dominierende-Konvergenz-Theorem ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}X_{\sigma_n} - \mathbb{E}X_{\tau_n}| \geq \lim_{n\to\infty} (\mathbb{E}X_{\sigma_n} - \mathbb{E}X_{\tau_n}) \\ &= \mathbb{E}\lim_{n\to\infty} X_{\sigma_n} - \mathbb{E}\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = \mathbb{E}\mathrm{e}\limsup_{t\in G} X_t - \mathbb{E}\mathrm{e}\liminf_{t\in G} X_t \geq 0, \end{aligned}$$

da $\mathrm{e}\limsup_{t\in G} X_t \geq \mathrm{e}\liminf_{t\in G} X_t$ fast sicher, nach Lemma 6.5. $\square$

Dieser Satz wird nun verbessert, indem man mit seiner Hilfe zeigt, dass, unter der Annahme der Vitali-Eigenschaft, jedes $\mathbf{L}^1$-beschränkte Amart konvergiert. (siehe auch [**Suc92**], Abschnitt 4.2; Astbury hat in [**Ast78**] sogar gezeigt, dass die essentielle Konvergenz jedes $\mathbf{L}^1$-beschränkten Amarts tatsächlich *äquivalent* ist zur Vitali-Eigenschaft von $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$.)

Satz 10.9 (Fünfter Konvergenzsatz). *$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ besitze die Vitali-Eigenschaft und $\{X_t\}_{t\in G}$ sei ein $\boldsymbol{L}^1$-beschränktes Amart. Dann konvergiert X_t essentiell.*

Beweis. Es sei $a > 0$. Nach 10.3 ist $Y_t := -a \vee X_t \wedge a$ ein Amart, dass insbesondere die Voraussetzungen von Satz 10.8 erfüllt. Somit konvergiert Y_t essentiell. Ist $\mathrm{e}\limsup_{t\in G} |X_t| < a$, dann gilt

$$-a < \mathrm{e}\liminf_{t\in G} X_t \leq \mathrm{e}\limsup_{t\in G} X_t < a.$$

Da man essentielle Suprema (bzw. Infima) auch als abzählbare Suprema (bzw. Infima) darstellen kann existieren endlich viele $s_1, \ldots, s_n \in G$ derart, dass

$$-a < \max_{k\leq n} \mathrm{e}\inf_{t\geq s_k} X_t \leq \min_{k\leq n} \mathrm{e}\sup_{t\geq s_k} X_t < a.$$

Es sei $s \geq s_1, \ldots, s_n$. Dann ist $-a < \mathrm{e}\inf_{t \geq s} X_t \leq \mathrm{e}\sup_{t \geq s} X_t < a$ und demnach $-a < X_t < a$ für beliebige $t \geq s$. Nach Lemma 6.4 konvergiert X_t essentiell auf $\{\mathrm{e}\limsup |X_t| < a\}$. Wir wissen, dass, mit X_t, auch $|X_t|$ ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes Amart ist. Daher findet man ein $t \in G$ so, dass $|\mathbb{E}\,|X_\tau| - \mathbb{E}\,|X_\sigma|| < 1$ ist für alle $\sigma, \tau \geq t$. Für alle $\tau \geq t$ gilt daher

$$\mathbb{E}\,|X_\tau| \leq |\mathbb{E}\,|X_\tau| - \mathbb{E}\,|X_t|| + \mathbb{E}\,|X_t| \leq 1 + \sup_{t \in G} \mathbb{E}\,|X_t| < \infty.$$

Also ist auch $\limsup_{\tau \in T} \mathbb{E}\,|X_\tau| = \inf_{\sigma \in T} \sup_{\tau \geq \sigma} \mathbb{E}\,|X_\tau| < \infty$. Benutzt man dies zusammen mit Lemma 10.3, so ergibt sich für $a \to \infty$

$$\mathbb{P}(\mathrm{e}\limsup_{t \in G} |X_t| = \infty) = 0$$

oder aber

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\mathrm{e}\limsup_{t \in G} |X_t| < n\}) = \mathbb{P}(\mathrm{e}\limsup_{t \in G} |X_t| < \infty) = 1.$$

Aber daraus folgt die Behauptung, da schon gezeigt wurde, dass X_t auf $\{\mathrm{e}\limsup\limits_{t \in G} |X_t| < n\}$ essentiell konvergiert. □

Bemerkung 10.3. Als einfache Folgerung ergibt sich, dass $\mathbf{L}^1$-beschränkte Martingale essentiell konvergieren.(Satz 6.8) Im Allgemeinen ist es aber *nicht* richtig, dass $\mathbf{L}^1$-beschränkte Submartingale unter der Vitali-Bedingung konvergieren. Insbesondere ist es falsch, dass $\mathbf{L}^1$-beschränkte Sub- oder Supermartingale Amarts sind. Selbst wenn die zugrundeliegende Filtration die Vitali-Eigenschaft besitzt. Dazu folgendes Gegenbeispiel aus [**Ast78**].

Gegenbeispiel 10.1. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $s_m := 1 + \ldots + m$. Man definiert eine Ordnung "$<$" auf $G := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2;\ 1 \leq n \leq 2^{s_m}\}$ via $(k,l) < (m,n) :\leftrightarrow k < m$. Dann ist $\{\mathcal{F}_{(m,n)}\}_{(m,n) \in G}$ mit $\mathcal{F}_{(m,n)} := \sigma((\frac{i-1}{2^{s_m}}, \frac{i}{2^{s_m}}];\ 1 \leq i \leq 2^{s_m})$, eine total geordnete Filtration. Nach Lemma 6.7 erfüllt $\{\mathcal{F}_{(m,n)}\}_{(m,n) \in G}$ die Vitali-Bedingung. Nun definiert man einen Prozess

$$X_{(m,n)} := \mathbf{1}_{(\frac{n-1}{2^{s_m}}, \frac{n}{2^{s_m}}]} + \frac{1}{2^m} \mathbf{1}_{(\frac{n-1}{2^{s_m}}, \frac{n}{2^{s_m}}]^c}.$$

Es sei $(k,l) < (m,n)$ und $A = (\frac{i-1}{2^{s_k}}, \frac{i}{2^{s_k}}]$ ein Atom von $\mathcal{F}_{(k,l)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_{(m,n)}\mathbf{1}_A &< \frac{1}{2^{s_m}} + \frac{1}{2^m}\frac{1}{2^{s_k}} \leq \frac{1}{2^{s_k+k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{2^{s_k}} \\ &= \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{s_k}} \leq \mathbb{E}X_{(k,l)}\mathbf{1}_A.\end{aligned}$$

D.h., dass $X_{(k,l)} \geq \mathbb{E}(X_{(m,n)} \mid \mathcal{F}_{(k,l)})$. Da $\sup_{(m,n) \in G} \mathbb{E}\left|X_{(m,n)}\right| \leq \sup_{(m,n) \in G} 1 \leq 1$ und jedes $X_{(m,n)}$ auch $\mathcal{F}_{(m,n)}$-adaptiert ist, ist $\{X_{(m,n)}\}_{(m,n) \in G}$ ein $\mathbf{L}^1$-beschränktes Supermartingal. Aber $X_{(m,n)}$ konvergiert *nicht* essentiell, denn:

$$\mathrm{e}\limsup_{(m,n) \in G} X_{(m,n)} = \mathrm{e}\inf_{(k,l) \in G} \mathrm{e}\sup_{(m,n) > (k,l)} X_{(m,n)} = \inf_{(k,l) \in G} \sup_{(m,n) > (k,l)} X_{(m,n)}$$

und für beliebiges $(k,l) \in G$ ist $\sup_{(m,n) > (k,l)} X_{(m,n)} = 1$. Also ist $\mathrm{e}\limsup_{(m,n) \in G} X_{(m,n)} = 1$. Genauso sieht man, dass $\inf_{(m,n) > (k,l)} X_{(m,n)} = 0$ für jedes $(k,l) \in G$; also ist

$$\mathrm{e}\liminf_{(m,n) \in G} X_{(m,n)} = \sup_{(k,l) \in G} \inf_{(m,n) > (k,l)} X_{(m,n)} = 0.$$

Nach dem letzten Konvergenzsatz wäre $X_{(m,n)}$ auch *kein* Amart. Im vorliegenden Fall kann man dies auch schnell direkt zeigen:

$\mathbb{E}X_{(m,n)} \to 0$, aber mit

$$\tau := \sum_{i=1}^{2^{s_{m+1}}} (m+1, i)\mathbf{1}_{(\frac{i-1}{2^{s_{m+1}}}, \frac{i}{2^{s_{m+1}}}]}$$

findet man immer eine Stoppzeit $\tau > (m,n)$, so, dass $X_\tau \equiv 1$; also $\mathbb{E}X_\tau = 1$

2. Riesz-Zerlegung

Es wird die Riesz-Zerlegung von Amarts mit gerichteter Indexmenge bewiesen, welche erstmals von Edgar und Sucheston in [**Suc76a**] gezeigt wurde.

Satz 10.10 (Riesz-Zerlegung). *Ist X_t ein geordnetes Amart (bzw. Amart), dann existiert eine eindeutige Zerlegung*

$$X_t = Y_t + Z_t,$$

wobei Y_t ein Martingal ist und $\{Z_\tau\}_{\tau\in T_{\mathrm{ord}}}$ (bzw. $\{Z_\tau\}_{\tau\in T}$) in $\boldsymbol{L}^1$ gegen Null konvergiert.

Beweis. Wegen Satz 10.2 ist, für festes σ, $\{\mathbb{E}(Y_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)\}_{\tau\in T_{\mathrm{ord}}}$ (bzw. $\{\mathbb{E}(Y_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)\}_{\tau\in T}$) Cauchy in $\mathbf{L}^1$.

$$Y_\sigma := \lim_\tau \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)$$

ist, wegen

$$\mathbb{E}(Y_\sigma \mid \mathcal{F}_\rho) = \lim_\tau \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) \mid \mathcal{F}_\rho) = \lim_\tau \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\rho) = Y_\rho$$

für $\rho \leq \sigma$, ein $\mathcal{F}_\tau$-Martingal. Insbesondere ist Y_t ein geordnetes Amart (bzw. Amart) und daher ist auch

$$Z_t := X_t - Y_t$$

ein geordnetes Amart (bzw. Amart).

$$\|Z_\sigma\|_{\mathbf{L}^1} = \|X_\sigma - Y_\sigma\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|X_\sigma - \mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma)\|_{\mathbf{L}^1} + \|\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) - Y_\sigma\|_{\mathbf{L}^1} < \epsilon$$

für $\sigma \leqslant \tau$ (bzw. $\sigma \leq \tau$) hinreichend gross, nach Satz 10.2 und der Definition von Y_σ.

Man habe zwei Riesz-Zerlegungen

$$X_t = Y_t^1 + Z_t^1 = Y_t^2 + Z_t^2.$$

Nach Lemma 6.3 ist Y_t genau dann ein Martingal, wenn $\{Y_\tau\}_{\tau\in T_{\mathrm{ord}}}$ ein $\{\mathcal{F}_\tau\}_{\tau\in T_{\mathrm{ord}}}$-Martingal ist. Daraus folgt, das für $F \in \mathcal{F}_t$ und $t \leq \tau \in T_{\mathrm{ord}}$ (bzw. $\in T$)

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_F Y_t) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_F \mathbb{E}(Y_\tau \mid \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_F Y_\tau).$$

Man sieht nun, dass

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_F Y_t^1) = \lim_\tau \mathbb{E}(\mathbf{1}_F Y_\tau^1) = \lim_\tau \mathbb{E}(\mathbf{1}_F X_\tau - \mathbf{1}_F Z_\tau^1) = \lim_\tau \mathbb{E}(\mathbf{1}_F X_\tau) = \ldots = \mathbb{E}(\mathbf{1}_F Y_t^2)$$

und somit ist fast sicher $Y_t^1 = Y_t^2$. □

Anhang

A. zur Existenz einer Folge unabhängiger Zufallsvariablen

Es sei λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$.
Entwickle $\omega \in [0,1]$ binär, d.h.

$$\omega = 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots$$

mit $\omega_n \in \{0,1\}$.

LEMMA A.1. (1) Die Zufallsvariablen $\Xi_n(\omega) := \omega_n$ sind stochastisch unabhängig und auf $\{0,1\}$ gleichverteilt.
(2) Ist umgekehrt Ξ_n eine Folge unabhängiger auf $\{0,1\}$ gleichverteilter Zufallsvariablen, so ist die binäre Zufallsvariable $0.\Xi_1\Xi_2\Xi_3 \dots$ eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable.

Nach obigem Lemma sind somit

$$\begin{aligned} Y_1(\omega) :=& 0.\omega_1\omega_3\omega_6\omega_{10} \dots \\ Y_2(\omega) :=& 0.\omega_2\omega_5\omega_9\omega_{14} \dots \\ Y_3(\omega) :=& 0.\omega_4\omega_8\omega_{13}\omega_{19} \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

unabhängig auf $[0,1]$ gleichverteilt.

SATZ A.1 (Skorokhod-Darstellung einer Zufallsvariablen). Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine monotonwachsende rechtsstetige Funktion mit $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Dann existiert eine Zufallsvariable auf $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$ die F als Verteilungsfunktion besitzt.

BEWEIS. Man wählt als Zufallsvariable eine verallgemeinerte Inverse von F, d.h. entweder

$$X^+(\omega) = \inf\{x\,;\; F(x) > \omega\}$$

oder

$$X^-(\omega) = \inf\{x\,;\; F(x) \geq \omega\}.$$

Hier wird nur der Fall X^- behandelt(für X^+ siehe [**Wil91**], Kapitel 3). Ist $w \leq F(y)$, so ist $y \in \{x\,;\; F(x) \geq w\}$ und Daher ist $X^-(w) \leq y$. Also erhält man

$$w \leq F(y) \Rightarrow X^-(w) \leq y.$$

Da F rechststetig ist, gilt $F(x) \geq w$ auch für das Infimum all solcher x, das heisst, dass $F(X^-(w)) = F(\inf\{x\,;\; F(x) \geq w\}) \geq w$. Wegen $F\uparrow$ folgt aus $X^-(w) \leq y$, dass $F(X^-(w)) \leq F(y)$. Also erhält man

$$X^-(w) \leq y \Rightarrow w \leq F(y).$$

Insgesamt ergibt sich

$$\mathbb{P}(X^- \leq y) = \mathbb{P}(\{w\,;\; w \leq F(y)\}) = F(y).$$

□

Da jedes Y_n nur wieder das Lebesguemaß auf $[0,1]$ induziert kann man folgendes schließen

KOROLLAR A.2. Zu einer vorgegebenen Folge von Verteilungsfunktionen F_n gibt es meßbare Abbildungen $\Phi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ derart, dass $X_n(\omega) := \Phi_n(Y_n(\omega))$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F_n sind.

Das ist vor allem für die Beispiele, in denen die Existenz einer Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit vorgegebenen Verteilungen stillschweigend vorausgesetzt wird, von Belang.

B. Konvergenz

B.1. Fast-Sicher-Konvergenz.

Satz B.1. Es seien $X, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Dann sind äquivalent:
(1) X_n konvergiert fast sicher gegen X.
(2) $\sup_{k \geq n} |X_k - X|$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen Null.

Beweis. Konvergiert $X_n \to X$ fast sicher, dann bedeutet es, dass zu $a > 0$ fast sicher ein n existiert(möglicherweise abhängig von $w \in \Omega$), sodass für alle $k \geq n$ $|X_k - X| < a$. Insbesondere gilt

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \{|X_k - X| < a\}) = 1,$$

also ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{k \geq n} |X_k - X| \geq a) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k \geq n} \{|X_k - X| \geq a\}) = \mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} \{|X_k - X| \geq a\}) = 0.$$

Gilt hingegen (2), dann ist für jedes $a > 0$ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{k \geq n} |X_k - X| \geq a) = 0$. Demnach ist auch $\mathbb{P}(F_m) = 0$, mit $F_m := \limsup_{n\to\infty} \{|X_n - X| > \frac{1}{m}\}$. Da $F_m \uparrow$, ist $\mathbb{P}(\bigcup_{m \geq 1} F_m) = 0$ bzw. $\mathbb{P}(\bigcap_{m \geq 1} F_m^c) = 1$. Ist $w \in \bigcap_{m \geq 1} F_m^c$, so gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$, dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$|X_n(w) - X(w)| \leq \frac{1}{m}.$$

□

B.2. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

Satz B.2. Es seien $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Dann sind äquivalent:
(1) $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit
(2) $\mathbb{E}(|X_n - X| \wedge 1) \to 0$

Beweis. Wegen

$$\min(a, 1)\mathbb{P}(|X - Y| > a) \leq \mathbb{E}(|X - Y| \wedge 1) \leq a + \mathbb{P}(|X - Y| > a)$$

ist offenbar $\mathbb{E}(|X_n - X| \wedge 1) \to 0$ äquivalent zu $\mathbb{P}(|X_n - X| > a) \to 0$ für alle $a > 0$. Dabei ist die Ungleichung für $a \geq 1$ offensichtlich. Ist $a < 1$, so gilt

$$\begin{aligned} a\mathbb{P}(|X - Y| > a) &= \mathbb{E}a\mathbf{1}_{\{a<|X-Y|\}} \leq \mathbb{E}\,|X - Y|\,\mathbf{1}_{\{a<|X-Y|\leq 1\}} + \mathbb{E}a\mathbf{1}_{\{1<|X-Y|\}} \\ &\leq \mathbb{E}\,|X - Y| \wedge 1\mathbf{1}_{\{a<|X-Y|\leq 1\}} + \mathbb{E}\,|X - Y| \wedge 1\mathbf{1}_{\{1<|X-Y|\}} \\ &\leq \mathbb{E}\,|X - Y| \wedge 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|X - Y| \wedge 1 &= \mathbb{E}\,|X - Y| \wedge 1\mathbf{1}_{\{|X-Y|\leq a\}} + \mathbb{E}\,|X - Y| \wedge 1\mathbf{1}_{\{a<|X-Y|\leq 1\}} \\ &\quad + \mathbb{E}\,|X - Y| \wedge 1\mathbf{1}_{\{|X-Y|>1\}} \\ &\leq a\mathbb{P}(|X - Y| \leq a) + \mathbb{P}(a < |X - Y| \leq 1) + \mathbb{P}(|X - Y| > 1) \\ &\leq a + \mathbb{P}(|X - Y| > a). \end{aligned}$$

□

Satz B.3. Sind $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ gleichmässig beschränkte Zufallsvariablen, dann sind äquivalent:
(1) $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit
(2) $X_n \to X$ in $\mathbf{L}^1$

Beweis. (2)$\Rightarrow$(1): Einfache Anwendung von Satz B.2.

(1)$\Rightarrow$(2): Es sei $a > 0$ so, dass, für alle $n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \le a$ fast sicher. Damit man unterm Erwartungswert mit X rechnen kann, ist zu zeigen, dass $X \in \mathbf{L}^1$:

$|X| > a + \frac{1}{k}$, dann ist auch $|X - X_n| > a + \frac{1}{k} - |X_n| \ge \frac{1}{k}$. Also gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(|X| > a + \frac{1}{k}) \le \mathbb{P}(|X - X_n| > \frac{1}{k}) \to 0$$

für $n \to \infty$. Daher ist $\mathbb{P}(|X| > a) = 0$.

Insbesondere gilt natürlich, dass $|X_n - X| \le 2a$ fast sicher. Es sei $b > 0$ beliebig. Wähle $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass, für alle $n \ge m$, $\mathbb{P}(|X_n - X| \ge \frac{b}{3}) < \frac{b}{3a}$. Dann gilt, für alle $n \ge m$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|X_n - X| &= \mathbb{E}\,|X_n - X|\,\mathbf{1}_{\{|X_n - X| \ge \frac{b}{3}\}} + \mathbb{E}\,|X_n - X|\,\mathbf{1}_{\{|X_n - X| < \frac{b}{3}\}}\\ &< 2a\mathbb{P}(|X_n - X| \ge \frac{b}{3}) + \frac{b}{3} < b.\end{aligned}$$

$\square$

C. stochastischer Limes-Superior

Konvention C.1. G sei eine gerichtete Menge, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und für jedes $t \in G$ sei $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

Definition C.2 (stochastischer Limes-Superior).

- Man sagt, dass eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *asymptotisch größer als* $\{X_t\}_{t\in G}$ *(in Wahrscheinlichkeit)* ist, falls $\lim_{t\in G} \mathbb{P}(X_t > X) = 0$.
- Der *stochastische Limes-Superior* $\operatorname{s\,lim\,sup}_{t\in G} X_t$ ist definiert als das essentielle Infimum aller X die asymptotisch größer sind als X_t.

Satz C.1. Es gilt

$$\operatorname*{s\,lim\,sup}_{t\in G} X_t \le \operatorname*{e\,lim\,sup}_{t\in G} X_t$$

fast sicher.

Beweis. Es sei $r \in G$. Dann gilt für alle $s \ge r$, dass $\operatorname{e\,sup}_{t\ge r} X_t \ge X_s$. Insbesondere ist $\lim_{s\in G} \mathbb{P}(\operatorname{e\,sup}_{t\ge r} X_t < X_s) = 0$. $\operatorname{e\,sup}_{t\ge r} X_t$ ist also asymptotisch größer als $\{X_t\}_{t\in G}$. Per Definition ist daher $\operatorname{s\,lim\,sup}_{t\in G} X_t \le \operatorname{e\,sup}_{t\ge r} X_t$. Da dies für alle $r \in G$ gilt, ist

$$\operatorname*{s\,lim\,sup}_{t\in G} X_t \le \operatorname*{e\,inf}_{r\in G} \operatorname*{e\,sup}_{t\ge r} X_t = \operatorname*{e\,lim\,sup}_{t\in G} X_t.$$

$\square$

Lemma C.1. Es seien $\{F_t\}_{t\in G} \subseteq \mathcal{F}$ Ereignisse. Dann existiert ein $F \in \mathcal{F}$ mit $\mathbf{1}_F = \operatorname{s\,lim\,sup}_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t}$. Darüberhinaus ist dieses Ereigniss F das, bis auf Nullmengen, kleinste $E \in \mathcal{F}$ mit $\lim_{t\in G} \mathbb{P}(F_t \setminus E) = 0$.

Definition C.3. $F \in \mathcal{F}$ aus Lemma C.1 heißt auch *stochastischer Limes-Superior von* $\{F_t\}_{t\in G}$.

Beweis von C.1. Es sei X asymptotisch größer als $\{\mathbf{1}_{F_t}\}_{t\in G}$. Wegen $\{\mathbf{1}_{F_t} > \mathbf{1}_{\{X\ge 1\}}\} = F_t \cap \{X < 1\} \subseteq \{\mathbf{1}_{F_t} > X\}$ ist auch $\mathbf{1}_{\{X\ge 1\}}$ asymptotisch größer als $\mathbf{1}_{F_t}$. Aus $0 \le \mathbb{P}(0 > X) \le \lim_{t\in G} \mathbb{P}(\mathbf{1}_{F_t} > X) = 0$ folgt, dass $X \ge 0$ fast sicher. Also ist $\mathbf{1}_{\{X\ge 1\}} \le X$. Es muss demnach $\operatorname{s\,lim\,sup}_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t}$ ein essentielles Infimum von Indikatorfunktionen sein. Da essentielle Infima als abzählbare Infima geschrieben werden können, ist $\operatorname{s\,lim\,sup}_{t\in G} \mathbf{1}_{F_t} = \mathbf{1}_F$ für ein $F \in \mathcal{F}$. Für den zweiten Teil beachte, dass $F_t \setminus E = \{\mathbf{1}_{F_t} > \mathbf{1}_E\}$ und daher $\lim_{t\in G} \mathbb{P}(F_t \setminus E) = 0$ genau dann gilt, wenn $\mathbf{1}_E$ asymptotisch größer ist als $\{\mathbf{1}_{F_t}\}_{t\in G}$. $\square$

Lemma C.2. Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname*{s\,lim\,sup}_{t\in G} \{X_t \ge a\} \subseteq \{\operatorname*{s\,lim\,sup}_{t\in G} X_t \ge a\}.$$

Beweis. Ist X asymptotisch größer als X_t und definiert man $F_t := \{X_t \geq a\}$, so gilt

$$\mathbb{P}(F_t \setminus \{X \geq a\}) = \mathbb{P}(X < a \leq X_t) \leq \mathbb{P}(X < X_t) \to 0.$$

Nach letztem Lemma ist $\operatorname{s\,lim\,sup}_{t\in G} F_t \subseteq \{X \geq a\}$. Auf der Menge $\operatorname{s\,lim\,sup}_{t\in G} F_t$ gilt also $X \geq a$ für *alle* X die aymptotisch größer sind als X_t. Demnach gilt auch $\operatorname{s\,lim\,sup}_{t\in G} X_t \geq a$ bzw.

$$\operatorname*{s\,lim\,sup}_{t\in G} F_t \subseteq \{\operatorname*{s\,lim\,sup}_{t\in G} X_t \geq a\}.$$

□

Bemerkung C.1. Der Begriff des stochastischen Limes-Superior(auch *upper limit in measure* genannt), wie hier definiert, stammt aus [**Wat60**]. Für weitere Ergebnisse und weiterführende Informationen (u.a. zur *stochastischen Konvergenz*) siehe [**Suc92**], Abschnitt 4.1.

D. Das Radon-Nikodym-Theorem

Satz D.1 (Radon-Nikodym). Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\hat{\mathbb{P}}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, das von $\mathbb{P}$ dominiert wird. Dann existiert ein fast sicher eindeutiges $X \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass für alle $F \in \mathcal{F}$

$$\hat{\mathbb{P}}(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X\mathbf{1}_F)$$

gilt.

Lemma D.1. Zu jedem $b > 0$ existiert ein $a > 0$ so, dass für alle $F \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(F) < a \Rightarrow \hat{\mathbb{P}}(F) < b.$$

Beweis. Man nimmt an, dass obige Inklusion *nicht* gilt, dann existiert ein $b > 0$ und $F_n \in \mathcal{F}$ derart, dass $\mathbb{P}(F_n) < \frac{1}{2^n}$, aber $\hat{\mathbb{P}}(F_n) \geq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachtet man $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F_k$, so ist einerseits

$$\mathbb{P}(F) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(F_k) = 0$$

und andererseits

$$\hat{\mathbb{P}}(F) = \lim_{n\to\infty} \hat{\mathbb{P}}(\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k) \geq \limsup_{n\to\infty} \hat{\mathbb{P}}(F_n) \geq b$$

und das ist ein Widerspruch dazu, dass $\hat{\mathbb{P}}$ von $\mathbb{P}$ dominiert wird. □

Martingalbeweis von Satz D.1. Nur für den Fall, dass $\mathcal{F}$ separabel. Dann ist $\mathcal{F} = \sigma(\{F_n\,;\, n \in \mathbb{N}\})$ und definiert man $\mathcal{F}_n := \sigma(F_1, \ldots, F_n)$, so kann Ω als disjunkte endliche Vereinigung der Atome von $\mathcal{F}_n$ geschrieben werden

$$\Omega = \bigsqcup_{m=1}^{r} A_m.$$

Nun definiert man

$$X_n(w) := \begin{cases} \frac{\hat{\mathbb{P}}(A_m)}{\mathbb{P}(A_m)} & , w \in A_m, \mathbb{P}(A_m) > 0 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht schnell, dass für jedes $F \in \mathcal{F}_n$

$$\hat{\mathbb{P}}(F) = \mathbb{E}(X_n\mathbf{1}_F)$$

gilt. Demnach ist X_n eine Radon-Nikodym-Ableitung auf dem Teilraum $(\Omega, \mathcal{F}_n)$. Jedes X_n ist $\mathcal{F}_n$-adaptiert und integrierbar. Sei A ein Atom von $\mathcal{F}_n$. Dann sind $A \cap F_{n+1}$ und $A \cap F_{n+1}^c$ Atome von $\mathcal{F}_{n+1}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_{n+1}\mathbf{1}_A &= \mathbb{E}X_{n+1}\mathbf{1}_{A\cap F_{n+1}}\mathbb{E}X_{n+1}\mathbf{1}_{A\cap F_{n+1}^c} \\ &= \hat{\mathbb{P}}(A \cap F_{n+1}) + \hat{\mathbb{P}}(A \cap F_{n+1}^c) = \hat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}X_n\mathbf{1}_A. \end{aligned}$$

Daher ist X_n ein $\mathcal{F}_n$-Martingal. Man kann

$$\mathbb{P}(X_n > a) \leq \frac{\mathbb{E}X_n}{a} = \frac{\hat{\mathbb{P}}(\Omega)}{a} = \frac{1}{a}$$

durch hinreichend grosses a beliebig klein machen. Nach Lemma D.1 überträgt sich diese Eigenschaft auch auf

$$\mathbb{E}\,|X_n|\,\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}} = \mathbb{E}X_n\mathbf{1}_{\{X_n>a\}} = \hat{\mathbb{P}}(X_n > a).$$

Insbesondere ist X_n gleichgradig integrierbar. Aus Satz 3.4 folgt für jedes $F \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$

$$\hat{\mathbb{P}}(F)(= \mathbb{E}(X_n\mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_n)\mathbf{1}_F)) = \mathbb{E}(X_\infty\mathbf{1}_F).$$

Da $\bigcup_n \mathcal{F}_n$ π-System von $\mathcal{F}$ ist gilt dies auch für beliebiges $F \in \mathcal{F}$. Ergo ist $X_\infty = \lim X_n$ eine Radon-Nikodym-Ableitung. □

Amartbeweis von Satz D.1. G sei die Menge aller messbaren endlichen Partitionen von Ω. Das heisst,

$$t = \{F_1, \ldots, F_n\} \in G :\leftrightarrow \forall k\ :\ F_k \in \mathcal{F},\ \forall k \neq m\ :\ F_k \cap F_m = \emptyset,\ \bigcup_{k=1}^{n} F_k = \Omega.$$

Dann existiert eine Ordnung „$\leq$“auf G wiefolgt.

$$\{E_1, \ldots, E_m\} = s \leq t = \{F_1, \ldots, F_n\} :\leftrightarrow \forall k \exists l\ :\ F_k \subseteq E_l \textit{ fast sicher}$$

In diesem Sinn ist t eine „feinere“ Teilung von Ω als s. $\mathcal{F}_t$ sei die, bezüglich Nullmengen, vervollständigte σ-Algebra $\sigma(t)$. Dann ist $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in G}$ eine Filtration. Nun definiert man

$$X_t := \sum_{F\in t} \frac{\hat{\mathbb{P}}(F)}{\mathbb{P}(F)}\mathbf{1}_F$$

und zeigt, dass X_t ein Amart ist. Dazu wähle ein $\tau \in T$.

$$\begin{aligned} X_\tau &= \sum_{t\in G\,;\,\mathbb{P}(\tau=t)>0} X_t\mathbf{1}_{\{\tau=t\}} = \sum_{t\in G\,;\,\mathbb{P}(\tau=t)>0}\ \sum_{F\in t} \frac{\hat{\mathbb{P}}(F)}{\mathbb{P}(F)}\mathbf{1}_{F\cap\{\tau=t\}} \\ &= \sum_{t\in G\,;\,\mathbb{P}(\tau=t)>0}\ \sum_{F\in t\,;\,F\subseteq\{\tau=t\}} \frac{\hat{\mathbb{P}}(F)}{\mathbb{P}(F)}\mathbf{1}_F, \end{aligned}$$

denn $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ und somit eine Vereinigung von Mengen $F \in t$. Bildet man nun den Erwartungswert, so erhält man

$$\mathbb{E}X_\tau = \sum_{t\,;\,\mathbb{P}(\tau=t)>0} \hat{\mathbb{P}}(\bigcup_{F\in t\,;\,F\subseteq\{\tau=t\}} F) = \sum_{t\,;\,\mathbb{P}(\tau=t)>0} \hat{\mathbb{P}}(\tau = t) = \hat{\mathbb{P}}(\Omega).$$

$\{\mathbb{E}X_\tau\}_{\tau\in T}$ ist sogar konstant; insbesondere ist X_t ein Amart.

Man zeigt jetzt, dass $\{X_t\}_{t\in G}$ auch gleichgradig integrierbar ist.

Dazu wählt man für $b > 0$ ein $a > 0$ hinreichend klein wie in Lemma D.1 und setzt $c := \frac{1}{a}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\bigcup_{F\in t\,;\,\hat{\mathbb{P}}(F)>c\mathbb{P}(F)} F) \leq \frac{1}{c} \sum_{F\in t\,;\,\hat{\mathbb{P}}(F)>c\mathbb{P}(F)} \hat{\mathbb{P}}(F) \leq a\hat{\mathbb{P}}(\Omega) = a$$

und somit auch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|X_t|\,\mathbf{1}_{\{|X_t|>c\}} &= \mathbb{E} \sum_{F\in t\,;\,\hat{\mathbb{P}}(F)>c\mathbb{P}(F)} \frac{\hat{\mathbb{P}}(F)}{\mathbb{P}(F)}\mathbf{1}_F = \sum_{F\in t\,;\,\hat{\mathbb{P}}(F)>c\mathbb{P}(F)} \hat{\mathbb{P}}(F) \\ &= \hat{\mathbb{P}}(\bigcup_{F\in t\,;\,\hat{\mathbb{P}}(F)>c\mathbb{P}(F)} F) < b. \end{aligned}$$

Das heisst, X_t ist ein gleichgradig integrierbares Amart und konvergiert nach Satz 10.4 gegen ein X in $\mathbf{L}^1$.

Man zeigt jetzt, dass für alle $E \in \mathcal{F}$

$$\hat{\mathbb{P}}(E) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X\mathbf{1}_E)$$

und die Behauptung ist bewiesen. $s := \{E, E^c\}$ ist eine messbare Teilung von Ω und somit $s \in G$. Weiterhin gilt für $t \geq s$

$$\mathbb{E}(X_t \mathbf{1}_E) = \mathbb{E}(\sum_{F \in t\,;\, F \subseteq E} \frac{\hat{\mathbb{P}}(F)}{\mathbb{P}(F)} \mathbf{1}_F) = \sum_{F \in t\,;\, F \subseteq E} \hat{\mathbb{P}}(F) = \hat{\mathbb{P}}(E),$$

also

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}X\mathbf{1}_E - \hat{\mathbb{P}}(E)\right| &\leq \lim_{t \in G} |\mathbb{E}X\mathbf{1}_E - \mathbb{E}X_t\mathbf{1}_E| + \lim_{t \in G} \left|\mathbb{E}X_t\mathbf{1}_E - \hat{\mathbb{P}}(E)\right| \\ &\leq \lim_{t \in G} \mathbb{E}\,|X - X_t| + 0 = 0\end{aligned}$$

□

Literaturverzeichnis

[Ast78] K.A. Astbury. Amarts indexed by directed sets. *The annals of probability*, 6, 1978.

[Cha74] R.V. Chacon. A stopped proof of convergence. *Adv. in Math.*, 14, 1974.

[Che76] R. Chen. Some inequalities for randomly stopped variables. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 36, 1976.

[Cho67] Y.S. Chow. On a strong law of large numbers for martingales. *Ann. Math. Stat.*, 38, 1967.

[Chu47] K.L. Chung. Note on some strong laws of large numbers. *American Journal of Mathematics*, 69, 1947.

[Dam90] Bui Khoi Dam. On the strong law of large numbers for amarts. *Annales Univ. Sci. Budapest*, 33, 1990.

[Dub63] D. Blackwell & L.E. Dubins. A converse to the dominated convergence theorem. *Illinois J. Math.*, 7, 1963.

[Dur05] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples, 3rd Edition*. Brooks/Cole, 2005.

[Ete81] N. Etemadi. An elementary proof of the strong law of large numbers. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 55, 1981.

[Fel71] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications II, 2nd Edition*. John Wiley and Sons, 1971.

[Gut82] A. Gut. A contribution to the theory of asymptotic martingales. *Glasgow Mathematical Journal*, 23, 1982.

[Hei94] B. Heinkel. Kolmogorov's strong law of large numbers: The amart point of view. In *Probability theory and mathematical statistics, Proceedings of the sixth Vilnius conference*, 1994.

[Hei96] B. Heinkel. When is $\frac{|S_n|^p}{n^p}$ an amart. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 32, 1996.

[Hey80] P. Hall & C.C. Heyde. *Martingale Limit Theory and Its Application*. Academic Press, Inc., 1980.

[Kla74] M.J. Klaas. On stopping rules and the expected supremum of $\frac{S_n}{a_n}$ and $\frac{|S_n|}{a_n}$. *The Annals of probability*, 2, 1974.

[Kol30] A. Kolmogorov. Sur la loi forte des grands nombres. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 191, 1930.

[Kol33] A. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 2*. Springer-Verlag, 1933.

[Koo63] J.R. Blum , D.L. Hanson & L.H. Koopmans. On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 2, 1963.

[Lév37] P. Lévy. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars Paris, 1937.

[Loe77] M. Loeve. *Probability Theory I, 4th Edition*. Springer-Verlag, 1977.

[Mey66] P.A. Meyer. *Probabilités et potentiel*. Hermann Luisant, Paris, 1966.

[Nev69] J. Neveu. *Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie : mit zahlreichen Übungen*. Oldenbourg Verlag, 1969.

[Nev75] J. Neveu. *Discrete-Parameter Martingales*. Northholland Publishing Company, 1975.

[Pet95] V.V. Petrov. *Limit Theorems of Probability Theory, Oxford Studies in Probability 4*. Oxford University Press, 1995.

[Pro58] Y.V. Prohorov. Strong stability of sums and infinitely divisible distributions. *Theory of probability and its applications*, 3, 1958.

[Pro59] Y.V. Prohorov. Some remarks on the strong law of large numbers. *Theory of probability and its applications*, 4, 1959.

[Rév68] P. Révész. *Die Gesetze der Grossen Zahlen*. Birkhäuser Verlag, 1968.

[Sch83] A. Gut & K.D. Schmidt. *Amarts and Set Function Processes*. Springer-Verlag, 1983.

[Sto97] J. Stoyanov. *Counterexamples in Probability*. Wiley, 1997.

[Suc76a] G.A. Edgar & L. Sucheston. Amarts: A class of asymptotic martingales. a. discrete parameter. *J. Multivariate Analysis*, 6, 1976.

[Suc76b] G.A. Edgar & L. Sucheston. The riesz decomposition for vector-valued amarts. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 36, 1976.

[Suc78] U. Krengel & L. Sucheston. On semiamarts, amarts and processes with finite value. In *Advances in probability and related topics*, volume 4. Marcel Dekker, Inc., 1978.

[Suc80] A. Millet & L. Sucheston. On covering conditions and convergence. In *Measure Theory, Oberwolfach 1979, Lecture Notes in Mathematics 794*. Springer-Verlag, 1980.

[Suc92] G.A. Edgar & L. Sucheston. *Stopping Times and Directed Processes*. Cambridge University Press, 1992.

[Sud71] W.D. Sudderth. A fatou equation for randomly stopped variables. *The annals of mathematical statistics*, 42, 1971.

[Tal86] M. Talagrand. Derivation, L^ψ-bounded martingales and covering conditions. *Transactions of Am. Math. Soc.*, 293, 1986.

[Tei97] Y.S. Chow & H. Teicher. *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales, 3rd Edition*. Springer-Verlag, 1997.

[Tul74] D.G. Austin & G.A. Edgar & A. Ionescu Tulcea. Pointwise convergence in terms of expectations. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 30, 1974.

[Wat60] C. Goffman & D. Waterman. On upper and lower limits in measure. *Fundamenta Mathematicae*, 48, 1960.

[Wie96] U. Storch & H. Wiebe. *Lehrbuch der Mathematik, Band 1, Analysis einer Veränderlichen, 2. korrigierte Auflage*. Spectrum Akademischer Verlag, 1996.

[Wil91] D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.

[Wri54] G.H. Hardy & E.M. Wright. *An Introduction to the theory of numbers, 3rd Edition*. Oxford University Press, 1954.

[Wun74] M.C. Wunderlich. A probabilistic setting for prime number theory. *Acta Arithmetica*, 26, 1974.

[Zyg37] J. Marcinkiewicz & A. Zygmund. Sur les fonctions independantes. *Fund. Math.*, 29, 1937.