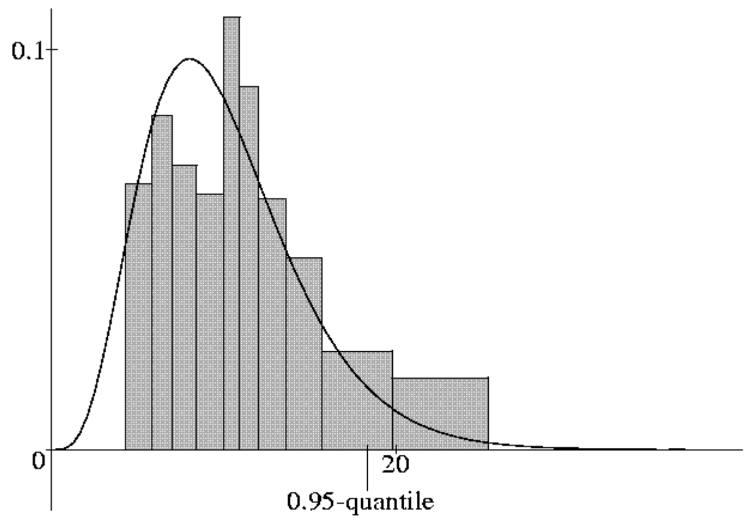
UNIVERSITÄT POTSDAM

Institut für Mathematik

Über Waldidentitäten der Brownschen Bewegung

Diplomarbeit von René Zehmisch



Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Universität Potsdam – Institut für Mathematik

Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Über Waldidentitäten der Brownschen Bewegung

René Zehmisch

Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Preprint 2008/04

Oktober 2008

Impressum

Herausgeber: Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie
am Institut für Mathematik

Adresse: Universität Potsdam
PF 60 15 53
14415 Potsdam
Telefon:
Fax: +49-331-977 1500
E-mail: +49-331-977 1578
neisse@math.uni-potsdam.de

ISSN 1613-3307

Universität Potsdam
Institut für Mathematik

Diplomarbeit

Über Waldidentitäten der Brownschen Bewegung

Verfasser: René Zehmisch

Betreuerin: Prof. Dr. Sylvie Roelly

vorgelegt: August 2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit drei sogenannten Waldidentitäten,

1. $E(B_\tau) = 0$
2. $E(B_\tau^2) = E(\tau)$
3. $E(exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) = 1$,

wobei B die eindimensionale Standard Brownsche Bewegung ist und τ eine Stoppzeit bzgl. der natürlichen Filtration von B ist. Der Name Waldidentität geht dabei auf Abraham Wald (1945) zurück, der die erste Identität benutzt hat, um allgemeine Eigenschaften von sequentiellen Test im Rahmen der Statistik herauszufinden. Die Waldidentitäten finden darüber hinaus, noch in anderen Bereichen der Mathematik Anwendung, wie zum Beispiel der Finanzmathematik. Dort können wir mit Hilfe der dritten Waldidentität den erwarteten Pay-Off von Finanzmodellen bei einer optimalen Stoppzeit ausrechnen. Außerdem können wir den erwarteten Wert von Optionspreisen ausrechnen. In dieser Arbeit werden wir überwiegend die Waldidentitäten für die Standard Brownsche Bewegung behandeln. Für zeitdiskrete Martingale erhalten wir die zeitdiskreten Waldidentitäten. In der Spieltheorie, zum Beispiel " Das Problem des Ruins des Spielers " finden die zeitdiskreten Waldidentitäten Anwendung. Wir wollen uns in dieser Arbeit aber mit der Frage nach den Voraussetzungen für die Gültigkeit der drei Waldidentitäten der Brownschen Bewegung auseinandersetzen. Die Prozesse $(B_t)_t$, $(B_t^2 - t)_t$ und $(exp(B_t - \frac{1}{2}t))_t$ sind Martingale, aber keine gleichgradig integrierbaren Martingale. Außerdem haben wir es hier bloß mit fast sicher endlichen Stoppzeiten τ zu tun. Wir können also insbesondere nicht den Satz " Optionaler Stoppsatz " von Doob [Doo53] anwenden, da τ keine beschränkte Stoppzeit ist und die betrachteten Prozesse keine gleichgradigen Martingale sind. Für viele Anwendungen, unter anderem in der sequentiellen Analysis, ist es interessant zu wissen, unter welchen Minimalvoraussetzungen, die Identitäten erfüllt sind.
Die erste Waldidentität (1) gilt für $E(\tau^{1/2}) < +\infty$.
Die zweite Waldidentität (2) gilt für $E(\tau) < +\infty$.
Die dritte Waldidentität (3) gilt für $E(exp(\frac{1}{2}\tau)) < +\infty$.
Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß diese Voraussetzungen über die Stoppzeiten in einem bestimmten Sinn nicht schwächer gewählt werden können. Wir werden sehen, daß wir auch Stoppzeiten finden können, für die die Waldidentitäten gelten, aber die Voraussetzungen (1), (2), (3) nicht erfüllt sind.

Im ersten Kapitel geben wir eine Biographie und einen kurzen Überblick über die mathematischen Tätigkeiten von dem Erfinder der zeitdiskreten Waldidentitäten, Abraham Wald. Wir erwähnen seine wichtigsten Ergebnisse und sprechen seine bahnbrechenden Forschungen bzw. Erfolge an.

Im zweiten Kapitel stellen wir einige Grundbegriffe und bekannte technische

Ergebnisse aus. Wir brauchen die stochastischen Hilfsmittel, Martingale, lokale Martingale, quadratische Variation, um im weiteren Verlauf der Arbeit darauf aufbauen zu können. Wir benötigen gestoppte Martingale und stellen den Stoppsatz von Doob vor. Diese wichtigen Errungenschaften der Martingaltheorie benötigen wir für die Waldidentitäten. Außerdem können wir die Dichte für spezielle Stoppzeiten der Brownschen Bewegung erhalten, wofür wir anschließend prüfen, ob die oben eingeführten Voraussetzungen und die Waldidentitäten gelten.

Im dritten Kapitel behandeln wir die erste Waldidentität der Brownschen Bewegung. Dabei betrachten wir zuerst die Burkholder, Gundy und Davis Ungleichungen für die gestoppte Brownsche Bewegung. Eine von diesen Ungleichungen verwenden wir, um die erste Waldidentität der Brownschen Bewegung zu zeigen. Dann präsentieren wir Verfeinerungen bzw. schwächere Voraussetzungen für die Gültigkeit der ersten Waldidentität der Brownschen Bewegung. Es werden Beispiele für Stoppzeiten gegeben, die diese Verfeinerungen erfüllen bzw. nicht erfüllen. Im weiteren Verlauf des Kapitels betrachten wir dann Überschreitungszeiten der Brownschen Bewegung für nichtlineare Schranken. Wir können dann angeben, für welche bestimmte Klasse von Funktionen die Waldidentitäten gelten und für welche nicht.

Im vierten Kapitel behandeln wir die zweite Waldidentität der Brownschen Bewegung. Außerdem geben wir Anwendungsbeispiele für die erste und zweite Waldidentität. Diese benutzen wir, um den Erwartungswert von Stoppzeiten auszurechnen.

Im fünften Kapitel behandeln wir die dritte Waldidentität der Brownschen Bewegung. Wir geben dann Verfeinerungen der dritten Waldidentität an. Hierbei benötigen wir eine neue Klasse von Funktionen, die spezielle Voraussetzungen erfüllen. Wir werden sehen, daß auf diese Voraussetzungen nicht verzichtet werden kann. Außerdem geben wir Beispiele für Stoppzeiten, die die Verfeinerung der dritten Waldidentität erfüllen, aber die die stärkere Voraussetzung für die Gültigkeit der dritten Waldidentität nicht erfüllen.

Schließlich widmen wir uns im vorletzten Kapitel der Arbeit, den Waldidentitäten der mehrdimensionalen Brownschen Bewegung. Hier geben wir an, daß die Waldidentitäten im Mehrdimensionalen unter denselben Voraussetzungen gelten, wie für die eindimensionale Brownsche Bewegung.

Im Appendix haben wir alle Stoppzeiten und Dichten aufgelistet, die in dieser Arbeit vorkommen oder eine Rolle spielen. In einer übersichtlichen Tabelle geben wir an, für welche Stoppzeiten die Waldidentitäten gelten. Desweiteren werden wir einen sehr wichtigen Satz aus der Martingaltheorie angeben, der dazu benutzt wird, um die gleichgradige Integrierbarkeit von Martingalen zu zeigen.

1 Abraham Wald (1902-1950)

Im Folgenden beziehen wir uns auf die Biographie von Jacob Wolfowitz in [Wol70]. Abraham Wald wurde am 31.10.1902 in eine jüdische Familie in Klausenburg (Koloszvar, Cluj) hineingeboren. Es war eine Familie von Intellektuellen, aber weil sie Juden waren, wurden sie gezwungen mit einer Arbeit unter ihren Fähigkeiten ihren Lebensunterhalt zu verdienen. Abraham Wald wurde von seinen Eltern, die Lehrer waren, ausgebildet. Seine hervorragenden mathematischen Fähigkeiten führten zu dem Wunsch sich der mathematischen Forschung anzunehmen, so daß er 1927 die Universität Wien besuchte, um mit Karl Menger zu studieren. Er arbeitete unter Mengers Aufsicht an Geometrie und ihm wurde 1931 die Doktorwürde verliehen. Während 1931 bis 1937 veröffentlichte Wald 21 Artikel über Geometrie, welche Menger als "... tief, schön und vom grundlegenden Wert"beschreibt. Wald veröffentlichte auch zehn Artikel über Wirtschaft und Ökonometrie. Außerdem veröffentlichte er 1936 eine wichtige Analyse über saisonale Bewegungen bei Zeitreihen. Das Hauptziel von ihm war die Entwicklung von Methoden, um die saisonale Variation zu minimieren. Nach Morgenstern waren diese Methoden bis dahin allen anderen entwickelten Techniken überlegen.
Die Cowles Kommission lud ihn 1938 in die Vereinigten Staaten von Amerika ein, um ökonometrische Forschung zu betreiben. Bis September 1938 war Wald ein "Fellow of the Carnegie Corporation". Außerdem war er als Professor für Statistik an der Columbia University in New York tätig.
Er wurde in 1941 dazu berufen, bis zu seinem Lebensende an der mathematischen Fakultät von der Columbia University lehren zu dürfen. Neben seiner Lehre und Forschung an der Columbia University beschäftigte er sich mit Kriegsarbeit, nachdem die USA in den zweiten Weltkrieg eintraten. Er hat dann an militärischen Projekten mit der statistischen Forschungsgruppe an der Columbia University gearbeitet. Er benutzte sein statistisches Wissen, um eine Methode zur Schätzung von Schwachstellen von Flugzeugen zu entwickeln.
Wie wir oben bereits erwähnt haben, arbeitete Wald anfangs an der reinen Mathematik, vor allem an der Geometrie. Seine erste reine mathematische Arbeit war über metrische Räume, eine Erweiterung von Steinitzs Arbeit über unendlichdimensionale Vektorräume, und einige schöne Ergebnisse in der Differentialgeometrie.
Walds wichtigste Arbeit war allerdings in der Statistik. 1939 schrieb Wald in dieser Arbeit:
"... ich weise daraufhin, daß die beiden größten Probleme der statistischen Theorie zu dieser Zeit, das Testen von Hypothesen und das Schätzen ist." Beide Fälle können als besondere Fälle eines viel allgemeineren Problems betrachtet werden - bekannt als " das statistische Entscheidungsproblem ". Er definiert Verlustfunktionen, Risikofunktionen, a-Priori-Verteilungen, Bayes Entscheidungsregeln, zulässige Entscheidungsregeln und Minimax Entscheidungsregeln. Desweiteren beweist er, daß eine Minimax Entscheidungsregel ein konstantes Risiko unter bestimmten Regularitätsvoraussetzungen hat.
Außerdem hat Wald Verallgemeinerungen über das "Problem des Ruins des

Spielers" entwickelt, welche eine wichtige Rolle in der statistischen sequentiellen Analysis spielen. Er erfand das Thema der sequentiellen Analysis als Reaktion auf die Nachfrage nach effizienteren Methoden der industriellen Qualitätskontrolle während des zweiten Weltkriegs. Die Idee hier ist eine einfache, bloß Wald war der Erste, der eine statistische Theorie entwickelt hat. Es ist besser die Daten, die sequentiell produziert werden, zu analysieren, als alle Daten zu sammeln und dann die Daten zu analysieren. In dieser Annäherung wählt man keinen festen Stichprobenumfang, sondern man kann das Probieren zu jedem beliebigen Zeitpunkt beenden, wenn die bis dahin gewonnenen Ergebnisse es rechtfertigen. Wald war der Erste, der das allgemeine Problem von sequentiellen Tests über statistische Hypothesen gelöst hat. Die optimale Eigenschaft des Likelihood-Quotienten-Tests wurde durch Wald 1943 vermutet und in einem Artikel, an dem er gemeinsam mit Wolfowitz gearbeitet hat, bewiesen (Wald-Test). Diese und die damit verbundene Arbeit zielten sehr stark auf praktische Anwendungen ab und seine Sätze über die Verteilungen der erforderlichen Anzahl von Beobachtungen und den Wahrscheinlichkeiten, die sich auf die Fehler beziehen, fanden sofortige Anwendung. Seine wichtigsten Ergebnisse über sequentielle Analysis und die Theorie der Entscheidungsfunktionen, waren zusammen in seiner 1947 veröffentlichten Arbeit "Sequential Analysis".
Er bewies wichtige Resultate in der Wirtschaft. Das vielleicht wichtigste Resultat ist die Existenz einer Lösung für sein wettbewerbsfähiges Wirtschaftsmodell, welches er für das Menger Seminar angefertigt hat. Außerdem approximierte er Formeln für Wirtschafts-Indexzahlen und bewies, die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für das Walras'sche Gleichungssystem für Produktionen, das Cournot Duopol-Problem und letztendlich befasste er sich mit den stochastischen Differentialgleichungen, an denen er zusammen mit Mann (1943) gearbeitet hat.
1950 bekam Wald eine Einladung von der indischen Regierung eine Statistik-Vorlesung in Indien zu halten. Er flog gemeinsam mit seiner Frau dorthin, aber tragischerweise kamen sie beide, am 13.Dezember 1950 in Travancore (Indien), bei einem Flugzeugabsturz um.
Wolfowitz schreibt über seinen Mentor: " Einer seiner großen Beiträge zur Statistik war, die mathematische Präzision in der Formulierung der Probleme und die mathematische Strenge in der Argumentation. Diese Qualitäten, die bei ihm zu Beginn seiner statistischen Karriere in 1938 noch nicht so ausgereift waren, hatten sich mit der Zeit verbessert, wenn auch nicht zur Zufriedenheit aller."

2 Einführung der Grundbegriffe. Einige technische bekannte Ergebnisse

Wir wollen zunächst einige grundlegende Sachen der Martingaltheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung einführen, um einen groben Überblick zu erhalten. Hierbei werden wir manche Sachen beweisen und manche wiederum nicht. Für die Ergebnisse, die wir nicht beweisen, geben wir Referenzen an, wo die Beweise stehen. Wir gehen davon aus, daß dem Leser die Begriffe: vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, Erwartungswert und stochastische Prozesse bekannt sind.

Definition 2.0.1 (Pfadstetigkeit). *Ein stochastischer Prozess X heißt stetig in ω, wenn fast alle Pfade stetig sind. Also wenn für fast alle ω gilt, daß die Abbildung*

$$X_\cdot(\cdot) : T \times \Omega \to \mathbb{R} \quad , \quad X_\cdot(\cdot)(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$$

für eine Indexmenge T stetig ist.

Ein Prozess X heißt zeitstetig, wenn $T = \mathbb{R}_+$ ist. Ein Prozess X heißt zeitdiskret, wenn $T = \mathbb{N}$ ist. Wenn wir einen zeitstetigen Prozess meinen, dann wird der Index t sein. Wenn wir einen zeitdiskreten Prozess oder eine Folge von Zufallsvariablen haben, wird der Index j oder n sein. Wenn wir Prozesse meinen, die diskret in ω sein sollen, dann schreiben wir diskrete Prozesse. Ansonsten sind alle Prozesse, die wir in dieser Arbeit betrachten, stetig in ω. Wir schreiben dann nicht mehr extra hin, daß diese Prozesse stetig in ω sind.

Definition 2.0.2 (Filtration). *Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ ist eine Familie von σ-Teilalgebren, so daß $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ für alle $s < t$ und $s, t \in \mathbb{R}_+$ gilt. Die kanonische Filtration für einen Prozess $X := (X_t)_t$ ist für alle t durch*

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\{X_s : 0 \le s \le t\}) \text{ definiert.}$$

Wir wollen nun definieren, was eine Stoppzeit von einem beliebigen Prozess ist.

Definition 2.0.3 (Stoppzeit). *Eine Stoppzeit τ bzgl. der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ des Prozesses $X := (X_t)_t$ ist eine Abbildung:*

$$\tau : \Omega \to [0, +\infty] \quad \text{, so daß für alle } t \ge 0 \text{ gilt:} \quad \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \ .$$

Mit anderen Worten ist τ eine positive Zufallsvariable, die möglicherweise den Wert $+\infty$ annimmt. Wir schreiben τ ist eine Stoppzeit von X, falls τ eine Stoppzeit bzgl. der kanonischen Filtration ist, die von X erzeugt wird.

2.1 Martingal und Doob-Ungleichung

In dieser Sektion wollen wir Martingale behandeln. Außerdem wollen wir die Doob-Ungleichung für L^p-Martingale einführen.

Definition 2.1.1 (Martingal). *Seien $s, t \in \mathbb{R}_+$. Der Prozess $X := (X_t)_t$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal, wenn er die folgenden drei Bedingungen erfüllt:*

$$X \text{ ist } (\mathcal{F}_t)_t\text{-adaptiert, d.h. für alle } t \geq 0 \text{ ist } X_t\ \mathcal{F}_t\text{-meßbar.} \tag{2.1.1}$$

$$\text{Für alle } t \geq 0 \text{ gilt } E(|X_t|) < +\infty. \tag{2.1.2}$$

$$\text{Für alle } 0 \leq s \leq t \text{ gilt } E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \text{ f.s.} \tag{2.1.3}$$

Wir sprechen von einem Sub- bzw. Supermartingal, falls $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ f.s. bzw. $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ f.s. gilt. Wenn X ein Martingal ist, dann folgt aus der Jensenungleichung, daß $|X|$ ein Submartingal ist.
Wir wollen nun eine Proposition einführen. Diese Proposition wurde von Doob in [Doo84] für zeitdiskrete Sub- bzw. Supermartingale bewiesen. Auf einen Beweis von dieser Proposition für zeitstetige Sub- bzw. Supermartingale verweisen wir auf die Bücher [GikSko79], S.11 und [RogWil94], S.189.

Proposition 2.1.2. *Für Sub- bzw. Supermartingale X und Stoppzeiten σ, τ mit $\sigma \leq \tau$ f.s. gilt die Ungleichung:*

$$E(X_\tau) \geq E(X_\sigma) \quad \text{bzw.} \quad E(X_\tau) \leq E(X_\sigma) \ .$$

Wir werden in dieser Arbeit das Problem haben, daß für Martingale eben nicht immer $E(X_\sigma) = E(X_\tau)$ für alle Stoppzeiten σ, τ mit $\sigma \leq \tau$ f.s. gilt.

Definition 2.1.3 (L^p-Martingal). *Sei X ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$. Dann ist X ein L^p-Martingal, wenn $E(|X_t|^p) < +\infty$, für alle $t \geq 0$ gilt.*

Für $p = 2$, schreiben wir anstatt L^2-Martingal auch quadratisch integrierbares Martingal.

Satz 2.1.4 (Doob-Ungleichung). *Sei $X := (X_t)_t$ ein L^p-Martingal. Dann gilt für $1 \leq p < +\infty$, für alle t und $\lambda \geq 0$ die folgende Ungleichung:*

$$\lambda^p P(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| \geq \lambda) \leq E(|X_t|^p) \ .$$

Für $1 < p < +\infty$ ist das Submartingal $(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|)_t$ in L^p enthalten. Wir bekommen dann die L^p-Doobungleichung:

$$E(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_t|^p) \ .$$

Diesen Satz beweisen wir nicht, ein Beweis steht z.B. im Buch von Bauer [Bau91], Kapitel 46, Satz 46.4.

2.2 Brownsche Bewegung und spezielle Martingale

Die Brownsche Bewegung, die wir nun einführen werden, ist ein Martingal bzgl. der kanonischen Filtration. Sie wurde von dem Biologen Brown zum ersten Mal 1827 beobachtet, in dem er Pflanzensporen in Wasser beobachtet hat, die eine Art Zitterbewegungen vollführen. Diese Bewegung wurde auch interessanterweise von Albert Einstein untersucht und mathematisch formuliert. Einstein hat damals diese Zitterbewegungen unter dem Mikroskop für Fettkügelchen in Wasser beobachtet. Die Brownsche Bewegung findet aber auch in der Finanzmathematik ihre Anwendung. So haben die Herren Black und Scholes ein Modell entwickelt, welches in Abhängigkeit der Brownschen Bewegung den Kurs von Aktienoptionen wiedergeben soll.

Definition 2.2.1 (Standard Brownsche Bewegung). *Ein Prozess* $B := (B_t)_{t\geq 0}$ *heißt eine Standard Brownsche Bewegung in* $\mathbb{R}$*, wenn der Prozess folgende Eigenschaften besitzt:*

1. $B_0 = 0$ *f.s.*
2. *Für alle* $s, t \in \mathbb{R}_+$ *mit* $0 \leq s < t < \infty$*, ist* $B_t - B_s$ *eine normalverteilte Zufallsvariable, mit* $E(B_t - B_s) = 0$ *und* $Var(B_t - B_s) = t - s$*.*
3. *Für alle* $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *und für jede Folge* $(t_k)_{k=0,\ldots,l}$ *mit* $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_l < \infty$ *ist* $(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})_{k=1,\ldots,l}$ *eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen.*

Insbesondere ist B_t *für ein* $t \geq 0$ *eine stetige Zufallsvariable, die normalverteilt mit* $E(B_t) = 0$ *und* $Var(B_t) = t$ *ist und die Dichte*

$$f_{B_t}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t}) \quad \forall u \in \mathbb{R} \tag{2.2.1}$$

hat.

Wir werden nun für die Standard Brownsche Bewegung B immer die Brownsche Bewegung schreiben.

Proposition 2.2.2. *Sei* $B := (B_t)_t$ *die Brownsche Bewegung. Dann ist*

$$(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$$

ein Martingal bzgl. der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$*.*

Beweis:

1. **Adaptiertheit von** $(B_t^2 - t)_t$**:**
   klar.

2. **Integrierbarkeit von** $(B_t^2 - t)_t$**:**
   $E(|B_t^2 - t|) \leq E(B_t^2) + E(t) = t + t = 2t < +\infty \quad \forall 0 \leq t < +\infty$

3. **bedingter Erwartungswert:**

$$\begin{aligned} E(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) &= E((B_s + B_t - B_s)^2 - t|\mathcal{F}_s) \\ &= E(B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2 - t|\mathcal{F}_s) \\ &= B_s^2 + 2B_s \cdot E(B_t - B_s) + E((B_t - B_s)^2) - t \\ &= B_s^2 + 2B_s \cdot 0 + t - s - t \\ &= B_s^2 - s \quad \forall 0 \leq s < t \end{aligned}$$

   Hierbei wurde verwendet, daß $(B_t - B_s)$ und $(B_t - B_s)^2$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ für alle $s < t$ sind. Somit ist der bedingte Erwartungswert gleich dem unbedingten Erwartungswert. Dann können wir die Erwartungswerte mit Hilfe der Verteilung von $(B_t - B_s)$ berechnen. Außerdem haben wir benutzt, daß B_s, bzw. B_s^2, $\mathcal{F}_s$-meßbar sind.

Mit (1), (2), (3) folgt nun, daß $(B_t^2 - t)_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal ist. □

Proposition 2.2.3. *Sei* $B := (B_t)_t$ *die Brownsche Bewegung und* $(\mathcal{F}_t)_t$ *die natürliche Filtration. Dann ist*

$$(exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t))_t$$

für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$*, ein* $(\mathcal{F}_t)_t$*-Martingal.*

Beweis:

1. **Adaptiertheit von** $(exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t))_t$**:**
   klar.

2. **Integrierbarkeit von** $(exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t))_t$**:**

$$E(|exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t)|) = E(exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t)) = exp(\frac{\lambda^2}{2} t - \frac{\lambda^2}{2} t) = 1 < \infty \quad \forall t \geq 0$$

   Den Erwartungswert von der Zufallsvariablen $exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t)$ erhalten wir mit Hilfe der Dichte (2.2.1).

3. **bedingter Erwartungswert:**

$$E(exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t)|\mathcal{F}_s) = E(exp(\lambda(B_t - B_s))exp(\lambda B_s)|\mathcal{F}_s)exp(-\frac{\lambda^2}{2} t)$$

   $exp(\lambda(B_t - B_s))$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und $exp(\lambda B_s)$ ist $\mathcal{F}_s$-messbar. Deswegen erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
E(exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t)|\mathcal{F}_s) &= E(exp(\lambda(B_t - B_s)))exp(\lambda B_s)exp(-\frac{\lambda^2}{2}t) \\
&= exp(\frac{\lambda^2}{2}(t-s))exp(\lambda B_s)exp(-\frac{\lambda^2}{2}t) \\
&= exp(\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2}s) \quad \forall 0 \leq s < t\ .
\end{aligned}
$$

Hier haben wir, wie in der Proposition 2.2.2 die Verteilung von $B_t - B_s$ benutzt, um die Erwartungswerte auszurechnen.

Somit ist $(exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t))_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal für beliebige reelle λ. □

2.3 Gleichgradige Integrierbarkeit von Prozessen

In dieser Sektion wollen wir erklären, was der Begriff der gleichgradigen Integrierbarkeit von Prozessen bedeutet, und Beispiele für nicht gleichgradig integrierbare Martingale angeben.

Definition 2.3.1 (gleichgradige Integrierbarkeit von Prozessen). *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Prozess. Wir sagen, daß der Prozess $(X_t)_t$ gleichgradig integrierbar ist, wenn*

$$
\lim_{c\to+\infty} \sup_{t\geq 0} E(|X_t|\mathbf{1}_{\{|X_t|\geq c\}}) = 0
$$

gilt.

Proposition 2.3.2. *Es ist bereits bekannt, daß die Prozesse B und $(B_t^2 - t)_t$ Martingale sind. Wir wollen aber nun zeigen, daß diese Prozesse keine gleichgradig integrierbaren Martingale sind.*

Beweis:

Wir wollen mit Hilfe der Definition eines gleichgradigen Prozesses zeigen, daß B kein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Hierzu berechnen wir den zugehörigen Erwartungswert mit Hilfe der Dichte (2.2.1) der Brownschen Bewegung.

$$
\begin{aligned}
E(|B_t|\mathbf{1}_{\{|B_t|\geq c\}}) &= \int_{\mathbb{R}} |u|\mathbf{1}_{\{|u|\geq c\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du \\
&= 2\int_c^\infty \frac{u}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} exp(-\frac{c^2}{2t})\ . \qquad (2.3.1)
\end{aligned}
$$

In der zweiten Gleichung haben wir benutzt, daß auf der rechten Seite der ersten Gleichung eine gerade Funktion unter dem Integral steht. In der dritten Gleichung haben wir integriert und die Grenzen eingesetzt. Dann bekommen wir:

$$\sup_{t>0} E(|B_t|\mathbf{1}_{\{|B_t|\geq c\}}) = \sup_{t>0} \sqrt{\frac{2t}{\pi}} exp(-\frac{c^2}{2t}) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{2t}{\pi}}(1 + O(\frac{1}{t})) = +\infty \ .$$

Somit gilt:

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{t>0} E(|B_t|\mathbf{1}_{\{|B_t|\geq c\}}) = +\infty \ .$$

Also ist B kein gleichgradig integrierbares Martingal.

$$\begin{aligned}
E(|B_t^2 - t|\mathbf{1}_{\{|B_t^2-t|\geq c\}}) &= \int_{\mathbb{R}} |u^2 - t|\mathbf{1}_{\{|u^2-t|\geq c\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du \\
&= \int_{-\infty}^{-\sqrt{t}} (u^2 - t)\mathbf{1}_{\{|u^2-t|\geq c\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du \\
&- \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} (u^2 - t)\mathbf{1}_{\{|u^2-t|\geq c\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du \\
&+ \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} (u^2 - t)\mathbf{1}_{\{|u^2-t|\geq c\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du \\
&= 2(\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} (u^2 - t)\mathbf{1}_{\{|u^2-t|\geq c\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du \\
&- \int_{0}^{\sqrt{t}} (u^2 - t)\mathbf{1}_{\{|u^2-t|\geq c\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du) \\
&= 2(\int_{\sqrt{c+t}}^{\infty} (u^2 - t) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du \\
&- \int_{0}^{\sqrt{t-c}} (u^2 - t) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}(-ut \cdot exp(-\frac{u^2}{2t})|_{\sqrt{c+t}}^{\infty} + ut \cdot exp(-\frac{u^2}{2t})|_{0}^{\sqrt{t-c}}) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}(\sqrt{c+t} \cdot exp(+\frac{1}{2} - \frac{c}{2t}) \\
&+ \sqrt{-c+t} \cdot exp(-\frac{1}{2} + \frac{c}{2t})) \ . \qquad (2.3.2)
\end{aligned}$$

Wir bekommen dann:

$$\sup_{t>0} E(|B_t^2 - t|\mathbf{1}_{\{|B_t^2-t|\geq c\}}) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}\sqrt{t+c}\cdot exp(\frac{1}{2})(1+O(\frac{1}{t}))$$
$$+ \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}\sqrt{t-c}\cdot exp(-\frac{1}{2})(1+O(\frac{1}{t})) = +\infty \ .$$

Somit gilt:

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{t>0} E(|B_t^2 - t|\mathbf{1}_{\{|B_t^2-t|\geq c\}}) = +\infty \ .$$

Also ist auch $(B_t^2 - t)_t$ kein gleichgradig integrierbares Martingal.

Definition 2.3.3 **(L^p-Beschränktheit).** *Sei $X := (X_t)_t$ ein Prozess. X ist L^p-beschränkt, für ein bestimmtes p, falls*

$$\sup_t E(|X_t|^p) < +\infty$$

gilt.

Wir können den folgenden Satz mit Beweis für zeitdiskrete Martingale in dem Buch [Doo53], S.316-319 wiederfinden. Für beliebige zeitdiskrete Prozesse steht der Satz mit Beweis in dem Buch [Nev69], Kapitel 2.5., Sätze 2.5.1., 2.5.2. und 2.5.4., Seite 69-71, Kapitel 2.6., Satz 2.6.1., Korollar zu Satz 2.6.1., Seite 77. Dieser Satz gilt aber auch für zeitstetige Prozesse. Wir verweisen hier auf die Bücher [IkeWat81], S.30 und [RogWil94], S. 176.

Satz 2.3.4. *Sei $1 \leq p < +\infty$ und $X := (X_t)_t \in L^p$ ein Prozess, der für $t \to \infty$ f.s. gegen eine Zufallsvariable X_∞ konvergiert. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *X ist L^q-beschränkt, für einige $q \in]p, +\infty[$.*
2. *$(X_t)_t$ konvergiert f.s. gegen X_∞ in L^p.*
3. *$(|X_t|^p)_t$ ist gleichgradig integrierbar.*
4. *$\lim_{t\to\infty} E(|X_t|^p) = E(|X_\infty|^p)$.*
5. *Es existiert ein $Y \in L^p$, so daß $|X_t| \leq Y$ f.s., für alle $t \geq 0$.*

Wir wollen den Satz nun anwenden, um zu zeigen, daß $(exp(B_t - \frac{1}{2}t))_t$ kein gleichgradig integrierbares Martingal ist.

Proposition 2.3.5. *Es ist bereits bekannt, daß der Prozess $(exp(B_t - \frac{1}{2}t))_t$ ein Martingal ist. Wir wollen nun zeigen, daß dieser Prozess kein gleichgradig integrierbares Martingal ist.*

Für $t \to \infty$ gilt: $B_t = O(\sqrt{2tlog(log(t))})$ f.s. Deswegen erhalten wir:

$$\lim_{t\to\infty} exp(B_t - \frac{1}{2}t) = \lim_{t\to\infty} exp(t(\frac{B_t}{t} - \frac{1}{2})) = \lim_{t\to\infty} exp(-\frac{t}{2}) = 0 \quad \text{f.s.} \quad (2.3.3)$$

Somit konvergiert das Martingal $(exp(B_t - \frac{1}{2}t))_t$ für $t \to \infty$ f.s. gegen Null. Nun können wir mit Hilfe der Dichte der Brownschen Bewegung (2.2.1) den Erwartungswert von $exp(pB_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ ausrechnen:

$$\begin{aligned} E(|exp(B_t - \frac{1}{2}t)|^p) &= E(exp(pB_t))exp(-\frac{p}{2}t) = exp(\frac{p^2}{2}t)exp(-\frac{p}{2}t) \\ &= exp(\frac{t}{2}p(p-1)) < +\infty \quad \forall t \geq 0 \qquad (2.3.4) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\sup_t E(exp(B_t - \frac{1}{2}t)^p) = +\infty \quad \forall p > 1 \ .$$

Dann können wir den Satz 2.3.4 anwenden. Nach diesem Satz ist für ein fast sicher konvergentes Martingal die L^p-Beschränktheit von einem Martingal für $p > 1$ äquivalent zur gleichgradigen Integrierbarkeit von dem Martingal. Somit ist $(exp(B_t - \frac{1}{2}t))_t$ auch kein gleichgradig integrierbares Martingal.

2.4 Gestopptes Martingal

Wir wollen den folgenden Satz beweisen. Diesen Satz haben wir dem Internet entnommen. Wir können aber auch einen Beweis zu diesem Satz in dem Buch [RevYor01], Kapitel 3, Korollar 3.6., S.71 und in dem Buch [Doo84], S.471 finden.

Satz 2.4.1. *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ und τ eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$. Dann ist der gestoppte Prozess $(X_{\tau\wedge t})_t$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$.*

Beweis:

Wir müssen zuerst die $(\mathcal{F}_t)_t$-Adaptiertheit von $(X_{t\wedge\tau})_t$ zeigen. Es gilt:

$$X_{t\wedge\tau} = X_t \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} + X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}} \quad \text{f.s.}$$

Die Zufallsvariablen X_t, $\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}$ und $\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$ sind $\mathcal{F}_t$-meßbar. Allerdings können wir nicht sagen, ob X_τ, $\mathcal{F}_t$-meßbar. Da τ den Wert unendlich annehmen kann. Somit gibt es ein Problem. Daher führen wir zuerst eine Folge $(\tau_j)_j$ von pfaddiskreten Stoppzeiten ein, die τ approximieren und beweisen das folgende Lemma.

Lemma 2.4.2. *Sei $\tau_j : \Omega \to 2^j \cdot \mathbb{N}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die τ approximieren und die folgendermaßen definiert sind:*

$$\tau_j = \inf\{t > \tau : t = \frac{k}{2^j} \text{ , für einige } k \in \mathbb{N}\} \tag{2.4.1}$$

Dann ist τ_j eine diskrete Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $(X_{t\wedge\tau_j})_t$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal für alle $j \in \mathbb{N}$.

Beweis von Lemma 2.4.2:

Für $\frac{k-1}{2^j} \leq t < \frac{k}{2^j}$ und alle $j \in \mathbb{N}$ haben wir:

$$\{\tau_j \leq t\} = \{\tau_j \leq \frac{k-1}{2^j}\} = \{\tau \leq \frac{k-1}{2^j}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k-1}{2^j}} \subseteq \mathcal{F}_t \quad . \tag{2.4.2}$$

Somit ist für alle $j \in \mathbb{N}$ τ_j eine diskrete Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$. Somit erhalten wir für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $j \in \mathbb{N}$:

$$\{X_{t\wedge\tau_j} \in B\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_{t\wedge\frac{k-1}{2^j}} \in B\} \cap \{\tau_j = \frac{k-1}{2^j}\} \in \mathcal{F}_t \ . \tag{2.4.3}$$

Somit ist $X_{t\wedge\tau_j}$ für alle j und t, $\mathcal{F}_t$-meßbar. Jetzt zeigen wir, daß für beliebige $t \in \mathbb{R}_+$ und $j \in \mathbb{N}$ die folgende Relation erfüllt ist:

$$E(|X_{\tau_j\wedge t}|) < \infty \ .$$

Es gilt für alle $j \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$:

$$E(|X_{\tau_j\wedge t}|) \leq \sum_{\{k:\frac{k-1}{2^j}<t\}} E(|X_{\frac{k-1}{2^j}}|) + E(|X_t|) < \infty \ .$$

Seien nun $t_1, \ldots, t_k \in (s,t)$ die Werte, mit $P(\tau_j = t_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann ergibt sich für alle $s < t$:

$$\begin{aligned}
E(X_{\tau_j\wedge t}|\mathcal{F}_s) &= E(E(X_{\tau_j\wedge t}|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s) \\
&= E(E(\mathbf{1}_{\{\tau_j\leq t_k\}}X_{\tau_j\wedge t}|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s) + E(E(\mathbf{1}_{\{\tau_j>t_k\}}X_{\tau_j\wedge t}|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\tau_j\leq t_k\}}E(X_{\tau_j\wedge t}|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s) + E(\mathbf{1}_{\{\tau_j>t_k\}}E(X_{\tau_j}|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\tau_j\leq t_k\}}X_{\tau_j\wedge t_k}|\mathcal{F}_s) + E(\mathbf{1}_{\{\tau_j>t_k\}}X_{t_k}|\mathcal{F}_s) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\tau_j\leq t_k\}}X_{\tau_j\wedge t_k}|\mathcal{F}_s) + E(\mathbf{1}_{\{\tau_j>t_k\}}X_{\tau_j\wedge t_k}|\mathcal{F}_s) \\
&= E(X_{\tau_j\wedge t_k}|\mathcal{F}_s) \\
&= E(X_{\tau_j\wedge t_{k-1}}|\mathcal{F}_s) \\
&= E(X_{\tau_j\wedge t_1}|\mathcal{F}_s) \\
&= E(X_{\tau_j\wedge s}|\mathcal{F}_s) = X_{\tau_j\wedge s} \text{ f.s.}
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.4.3. *Die Folge $(X_{\tau_j \wedge t})_j$ ist für alle t gleichgradig integrierbar.*

Beweis von Lemma 2.4.3:

$$\begin{aligned}
\sup_{j\geq 1} E(|X_{\tau_j\wedge t}|\mathbf{1}_{\{|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}}) &= \sup_{j\geq 1}\Big(\sum_{\{k:\frac{k-1}{2^j}<t\}} E(|X_{\frac{k-1}{2^j}}|\mathbf{1}_{\{\tau_j=\frac{k-1}{2^j}\}\cap\{|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}})\\
&+ E(|X_t|\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq t\}\cap\{|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}})\Big)\\
&\leq \sup_{j\geq 1}\Big(\sum_{\{k:\frac{k-1}{2^j}<t\}} E(|X_t|\mathbf{1}_{\{\tau_j=\frac{k-1}{2^j}\}\cap\{|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}})\\
&+ E(|X_t|\mathbf{1}_{\{\tau_j\geq t\}\cap\{|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}})\Big)\\
&= \sup_{j\geq 1} E(|X_t|\mathbf{1}_{\{|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}})\\
&\leq \sup_{j\geq 1} E(|X_t|\mathbf{1}_{\{\sup_{j\geq 1}|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}})\\
&= E(|X_t|\mathbf{1}_{\{\sup_{j\geq 1}|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}})
\end{aligned}$$

Erste Ungleichung: Nach Voraussetzung ist $(X_t)_t$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$. Wie wir bereits erwähnt haben, folgt daraus, daß $|X|$ ein Submartingal ist.

Die Majorante von $|X_t|\mathbf{1}_{\{\sup_{j\geq 1}|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}}$ ist $|X_t|$. Die Zufallsvariable $|X_t|$ ist integrierbar für alle t, da $(X_t)_t$ ein Martingal ist. Wir können dann den Lebesgue-Satz der majorisierten Konvergenz anwenden:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\sup_{j\geq 1} E(|X_{\tau_j\wedge t}|\mathbf{1}_{\{|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}}) &\leq \lim_{x\to\infty} E(|X_t|\mathbf{1}_{\{\sup_{j\geq 1}|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}})\\
&= E(|X_t|\lim_{x\to\infty}\mathbf{1}_{\{\sup_{j\geq 1}|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}}) = 0\ .
\end{aligned}$$

Wir haben hier verwendet, daß $\lim_{x\to\infty}\mathbf{1}_{\{|X_{\tau\wedge t}|>x\}} = 0$ gilt. Somit ergibt sich:

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{j\geq 1} E(|X_{\tau_j\wedge t}|\mathbf{1}_{\{|X_{\tau_j\wedge t}|>x\}}) = 0\ . \tag{2.4.4}$$

Deswegen ist die Folge $(X_{\tau_j\wedge t})_j$ für alle t gleichgradig integrierbar. □

Aus der Definition der Folge τ_j folgt:

$$\tau_j \geq \tau_{j+1} \text{ f.s.} \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty}\tau_j = \tau \quad \text{f.s.} \tag{2.4.5}$$

Aus (2.4.5), (2.4.3) und der Stetigkeit von $X_{\tau\wedge\bullet}$ folgt, daß $X_{\tau\wedge t}$ für jedes $t\geq 0$, $\mathcal{F}_t$-meßbar ist. Es muss noch gezeigt werden, daß folgende Beziehungen gelten:

$$E(|X_{\tau\wedge t}|) < \infty \quad \forall t \geq 0 \quad \text{und} \quad E(X_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_s) = X_{\tau\wedge s} \text{ f.s.} \quad \forall s < t\ .$$

Es gilt:

$$E(|X_{t\wedge\tau}|) = E(\lim_{j\to\infty} |X_{t\wedge\tau_j}|) \leq E(|X_{t\wedge\tau_j}|) < +\infty \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.4.6)$$

Erste Gleichung: Da $\lim_{j\to\infty} \tau_j = \tau$ f.s. gilt und da fast alle Pfade von $(X_t)_t$ stetig sind, haben wir die Beziehung $\lim_{j\to\infty} X_{\tau_j\wedge t} = X_{\tau\wedge t}$ f.s. Erste Ungleichung: Nach Lemma 2.4.2 ist $(X_{t\wedge\tau_j})_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal. Somit ist $(|X_{t\wedge\tau_j}|)_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Submartingal und nach Definition von $(\tau_j)_j$ folgt $t\wedge\tau_j \geq t\wedge\tau_{j+1}$ f.s., für alle $j \in \mathbb{N}$. Die Endlichkeit auf der rechten Seite von (2.4.6) folgt nach Lemma 2.4.2.

Das folgende Lemma ist aus dem Buch [ChuWil90], Kapitel 1.5., Seite 8.

Lemma 2.4.4. *Sei $(Y_j)_j$ eine Folge von Zufallsvariablen, die $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptiert ist und die für $j \to \infty$ gegen $Y \in L^1$ in L^1 konvergiert. Dann gilt für jedes $s \in \mathbb{R}_+$ und $\mathcal{F}_s \in (\mathcal{F}_t)_t$, daß $(E(Y_j|\mathcal{F}_s))_j$ eine Folge von Zufallsvariablen ist, die für $j \to \infty$ gegen $E(Y|\mathcal{F}_s)$ in L^1 konvergiert.*

Beweis von Lemma 2.4.4:

Nach Voraussetzung konvergiert $(Y_j)_j$ in L^1 gegen eine integrierbare Zufallsvariable Y. Das ist nach Satz 2.3.4 äquivalent dazu, daß $(Y_j)_j$ eine gleichgradig integrierbare Folge ist. Außerdem gilt für alle $s \in \mathbb{R}_+$ und $j \to \infty$:

$$E(|E(Y_j|\mathcal{F}_s) - E(Y|\mathcal{F}_s)|) \leq E(E(|Y_j - Y|\mathcal{F}_s)) = E(|Y_j - Y|) \to 0 \quad (2.4.7)$$

Wir haben hier die Jensenungleichung angewendet. Somit konvergiert für jedes $s \geq 0$, $E(Y_j|\mathcal{F}_s)$ gegen $E(Y|\mathcal{F}_s)$ in L^1. Das ist nach Satz 2.3.4 äquivalent dazu, daß $(E(Y_j|\mathcal{F}_s))_j$ eine gleichgradig integrierbare Folge ist. □

Dann gilt für alle $s < t$:

$$\begin{aligned} E(X_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_s) &= E(\lim_{j\to\infty} X_{\tau_j\wedge t}|\mathcal{F}_s) \\ &= \lim_{j\to\infty} E(X_{\tau_j\wedge t}|\mathcal{F}_s) = \lim_{j\to\infty} X_{\tau_j\wedge s} = X_{\tau\wedge s} \text{ f.s.} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Erste und Vierte Gleichung: Da $\lim_{j\to\infty} \tau_j = \tau$ f.s. gilt und da fast alle Pfade von $(X_t)_t$ stetig sind, haben wir die Beziehungen $\lim_{j\to\infty} X_{\tau_j\wedge t} = X_{\tau\wedge t}$ f.s. und $\lim_{j\to\infty} X_{\tau_j\wedge s} = X_{\tau\wedge s}$ f.s. Zweite Gleichung: Lemma 2.4.4 für $Y_j = X_{t\wedge\tau_j}$ und $Y = X_{t\wedge\tau}$. Dritte Gleichung: $(X_{\tau_j\wedge t})_t$ ist Martingal nach Lemma 2.4.2.
Somit ist $(X_{\tau\wedge t})_t$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$. □

2.5 Optionaler Stoppsatz von Doob

Doob's optionaler Stoppsatz ist in vielen grundlegenden Texten über Martingal- und Wahrscheinlichkeitstheorie enthalten (siehe zum Beispiel Satz 10.10. aus dem Buch von Williams [Wil91]). Präziserweise sagt der Satz Folgendes aus, daß wenn wir irgendwann Vermögen kaufen, dann können wir es zu einem späteren Zeitpunkt verkaufen. Wenn der Marktpreis ein diskretes Martingal ist, dann können wir kein Geld durch " Markttiming " verdienen, weil der erwartete Preis zu der Verkaufszeit gleich dem Preis ist, der anfangs bezahlt wurde. Wir bezeichnen mit $T(\omega)$ die Zeit, zu welcher das Vermögen verkauft wird. Doob hat den Optionalen Stoppsatz in seinem Buch [Doo53] " Stochastic Processes " bewiesen. Dieses Buch hat sehr viel zur Entwicklung der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie beigetragen.

Satz 2.5.1 (Optionaler Stoppsatz für Martingale). *Sei $X = (X_t)_t$ ein Martingal und T eine beschränkte Stoppzeit. Dann gilt*

$$X_0 = E(X_T|\mathcal{F}_0) \quad \textit{f.s.}$$

Wenn X ein gleichgradig integrierbares Martingal ist, dann gilt für eine beliebige Stoppzeit T:

$$X_0 = E(X_T|\mathcal{F}_0) \quad \textit{f.s.}$$

2.6 Lokales Martingal

Definition 2.6.1 (lokales Martingal). *Ein Prozess $(M_t)_t$, mit $M_0 = 0$ f.s., heißt lokales Martingal bzgl. der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$, falls eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ existiert, so daß*

1. *die Folge $(\tau_n)_n$ ist wachsend mit $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$ f.s.,*
2. *für jedes $n \geq 1$ ist der Prozess $(M_{t\wedge\tau_n})_t$ ein gleichgradig integrierbares $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal.*

Insbesondere ist jedes Martingal auch ein lokales Martingal. Allerdings gilt nicht die Umkehrung, das heisst nicht jedes lokales Martingal ist ein Martingal. Wir geben hierfür ein Beispiel aus dem Internet.

Beispiel 2.6.2. *Seien X eine Zufallsvariable, die nicht integrierbar ist und B die Brownsche Bewegung, die unabhängig von X ist. Seien $M_t = X \cdot B_t$ und $\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t \vee \sigma(X)$. Dann ist $M := (M_t)_t$ ein lokales Martingal, aber kein $(\mathcal{F}_t^X)_t$-Martingal.*

Beweis:

Es sei

$$S_n = \inf\{t : n+1 > |M_t| > n\} \; . \tag{2.6.1}$$

Dann ist $(S_n)_n$ eine Folge von Stoppzeiten, mit

$$S_n \leq S_{n+1} \text{ f.s.} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \tag{2.6.2}$$

Außerdem ist $|M_{t\wedge S_n}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, wegen

$$\begin{aligned} |M_{t\wedge S_n}| &= |M_t \mathbf{1}_{\{t\leq S_n\}} + M_{S_n}\mathbf{1}_{\{t>S_n\}}| \\ &\leq |M_t|\mathbf{1}_{\{t\leq S_n\}} + |M_{S_n}|\mathbf{1}_{\{t>S_n\}} < n + |M_{S_n}| < n+n+1 = 2n+1 \; . \end{aligned}$$

Hier haben wir die Definition von S_n benutzt. Es gilt nämlich $n+1 > |M_{S_n}| > n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $(M_{t\wedge S_n})_t$ integrierbar, für alle n. Außerdem gilt:

$$E(M_{t\wedge S_n}|\mathcal{F}_s^X) = E(X \cdot B_{t\wedge S_n}|\mathcal{F}_s^X) = XE(B_{t\wedge S_n}|\mathcal{F}_s^X) = XB_{s\wedge S_n} = M_{s\wedge S_n}$$

Zweite Gleichung: X ist $\mathcal{F}_s^X$-meßbar. Dritte Gleichung: B ist ein Martingal. Somit ist $M_{t\wedge S_n}$ ein Martingal. Wir müssen noch die gleichgradige Integrierbarkeit von $(M_{t\wedge S_n})_t$ zeigen. Es gilt:

$$\lim_{t\to\infty} M_{t\wedge S_n} = M_{S_n} \quad \text{f.s.} \tag{2.6.3}$$

Somit konvergiert $M_{\bullet\wedge S_n}$ fast sicher gegen M_{S_n}. Außerdem ist $M_{t\wedge S_n}$ für alle n und t beschränkt. Dann können wir Satz 2.3.4 (Implikation (5) nach (2)) anwenden und wir erhalten, daß $(M_{t\wedge S_n})_t$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Somit ist M ein lokales Martingal.

Wir wollen nun mit Hilfe von (2.2.1) zeigen, daß $E(|B_t|) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$ für alle $t > 0$ gilt. Wir werden dieses Ergebnis im Verlauf der Arbeit noch mehrmals verwenden. Wir erhalten mit Hilfe der Verteilung der Brownschen Bewegung (2.2.1):

$$\begin{aligned} E(|B_t|) &= \int_{\mathbb{R}} |u| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du = 2\int_0^\infty u \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} (-exp(-\frac{u^2}{2t}))|_0^\infty = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \quad \forall t > 0 \; . \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Weil X unabhängig von B ist, bekommen wir

$$E(|M_t|) = E(|X \cdot B_t|) = E(|X|)E(|B_t|) = +\infty \quad \forall t > 0 \; .$$

Somit ist M nicht integrierbar und deswegen kein $(\mathcal{F}_t^X)_t$-Martingal.

2.7 Quadratische Variation

Sei $t \in \mathbb{R}_+$ und π_t eine Partition von $[0,t]$, d.h. eine endliche Teilmenge mit $\pi_t = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t\}$. Wir setzen $\delta\pi_t := \max\{|t_{j+1} - t_j|, j = 0, 1, \ldots, k-1\}$. Sei π_t^n eine Folge von Partitionen des Intervalls $[0,t]$. Seien t_j^n, für $j = 1, \ldots, k_n$ die Elemente von π_t^n. Dann bekommen wir folgenden Satz (siehe [ChuWil90], Kapitel 4.2., Satz 4.1., S.76). Die Definition des stochastischen Integrals ($\int_0^t X_s\, dX_s$) können wir in dem Buch [ChuWil90], Kapitel 2.5., S.34/35 nachlesen.

Satz 2.7.1. *Sei $t \geq 0$ und $(\pi_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen von dem Intervall $[0,t]$, so daß $\lim_{n\to\infty} \delta\pi_t^n = 0$ ist. Sei nun $X := (X_t)_t$ ein lokales Martingal und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei:*

$$S_t^n := \sum_{j=1}^{k_n} (X_{t_{j+1}} - X_{t_j})^2$$

Dann konvergiert $(S_t^n)_n$ fast sicher gegen $< X >_t$, wobei

$$< X >_t = (X_t)^2 - (X_0)^2 - 2\int_0^t X_s\, dX_s \quad f.s.$$

Und wir werden $< X >_t$ die quadratische Variation von dem Prozess X zur Zeit t nennen und $< X > := (< X >_t)_t$ den quadratischen Variationsprozess bzgl. X. X hat endliche quadratische Variation, falls $< X >$ fast sicher endlich ist. Für den Fall, daß $< X >_t$ für $t \to \infty$ f.s. konvergiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit $< X >_\infty$.

Die folgende Proposition können wir unter anderem in dem Buch [RevYor01], Kapitel 4.1., Proposition 1.26, S.131 finden. Wir werden diese Proposition im Verlauf der Arbeit immer wieder brauchen, unter anderem in der Sektion 3.3.

Proposition 2.7.2. *Sei $(X_t)_t$ ein lokales Martingal. Wenn $< X >_\infty < +\infty$ fast sicher gilt, dann existiert eine Zufallsvariable X_∞, so daß X_t f.s. gegen X_∞ konvergiert.*

2.8 Die Dichte der ersten einseitigen Überschreitungszeit der Brownschen Bewegung

Wir behandeln die Stoppzeit

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\} \quad \forall a \neq 0 \tag{2.8.1}$$

Wir bemerken zuerst, daß $\tau_a < +\infty$ f.s. ist, wegen $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$, für $a < 0$ und $\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$, für $a > 0$. Wir wollen als Nächstes die Dichte von τ_a ermitteln. Dazu beziehen wir uns auf das Buch [RevYor01], Kapitel 3, Proposition 3.7., S.105-107.

Lemma 2.8.1. *Die Dichte dieser Stoppzeit ist:*

$$f_{\tau_a}(u) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{a^2}{2u}) \quad \forall u > 0 \quad \forall a \neq 0 \tag{2.8.2}$$

Beweis von Lemma 2.8.1:

Für den Beweis benutzen wir die Starke Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung und das Reflektionsprinzip. Das Lemma zur starken Markoveigenschaft wurde dem Buch [Kle07], Kapitel 21.3, Satz 21.18., Seite 441 entnommen. Klenke hat in diesem Buch einen Beweis für die starke Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung angegeben. Die Proposition zum Reflektionsprinzip haben wir dem Buch [RevYor01], Kapitel 3, Proposition 3.7., Seite 105 entnommen.

Lemma 2.8.2 (Starke Markov-Eigenschaft der Brownschen Bewegung). *Sei τ eine Stoppzeit von B. Dann ist $(B_{\tau+t} - B_\tau)_t$ eine Brownsche Bewegung, die unabhängig von $\mathcal{F}_\tau$ ist.*

Proposition 2.8.3 (Reflektionsprinzip). *Sei $\tau_a = \inf\{t : B_t = a\}$ und $a > 0$. Dann gelten:*

$$2P(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a, B_t < a) = P(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a) = P(\tau_a \leq t) \tag{2.8.3}$$

Beweis von Proposition 2.8.3:

Es gilt die Ereignisgleichheit:

$$\{\tau_a \leq t\} = \{\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a\} \tag{2.8.4}$$

Somit erhalten wir die zweite Gleichung in (2.8.3).

Die Pfade der Brownschen Bewegung haben im Intervall $[\tau_a, t]$ dieselbe Wahrscheinlichkeit unter der Geraden $y \equiv a$ und über der Geraden $y \equiv a$ zu verlaufen. Dieses Argument bezeichnen wir als Reflektionsprinzip. Die Pfade, die exakt den Wert a zur Zeit t annehmen, haben die Wahrscheinlichkeit Null. Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a) &= P(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a, B_t > a) + P(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a, B_t < a) \\ &= 2P(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a, B_t > a) = 2P(B_t > a) \,. \end{aligned} \tag{2.8.5}$$

Dritte Gleichung: $\{B_t > a\} \subset \{\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a\}$. Nach der Definition von τ_a gilt, $B_{\tau_a} = a$ f.s. Dann erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
P(\sup_{0\le s\le t} B_s \ge a, B_t < a) &= P(\tau_a \le t, B_t < B_{\tau_a}) \\
&= P(\tau_a \le t, B_{\tau_a+(t-\tau_a)} - B_{\tau_a} < 0) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t, B_{\tau_a+(t-\tau_a)} - B_{\tau_a} < 0\}}) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} \cdot \mathbf{1}_{\{B_{\tau_a+(t-\tau_a)} - B_{\tau_a} < 0\}}) \\
&= E(E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} \cdot \mathbf{1}_{\{B_{\tau_a+(t-\tau_a)} - B_{\tau_a} < 0\}} | \mathcal{F}_{\tau_a})) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} E(\mathbf{1}_{\{B_{\tau_a+s} - B_{\tau_a} < 0\}} | \mathcal{F}_{\tau_a})) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} E(\mathbf{1}_{\{B_{\tau_a+s} - B_{\tau_a} < 0\}})) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} E(\mathbf{1}_{\{B_s < 0\}})) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} \cdot \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2} P(\tau_a \le t)
\end{aligned}
$$

Erste Gleichung: Gleichung (2.8.4). Sechste Gleichung: Das Ereignis $\{\tau_a \le t\}$ ist $\mathcal{F}_{\tau_a}$-meßbar. Siebente und Achte Gleichung: Starke Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung. Neunte Gleichung: Die Dichte von B_s ist eine gerade Funktion. □

Die Ereignisse $\{B_t \ge a\}$ und $\{\sup_{0\le s\le t} B_s\} \cap \{B_t < a\}$ sind disjunkt. Dann gilt:

$$
P(\sup_{0\le s\le t} B_s \ge a) = P(B_t \ge a) + P(\sup_{0\le s\le t} B_s \ge a, B_t < a) \ .
$$

Das können wir in die erste Gleichung in (2.8.3) einsetzen und wir bekommen:

$$
P(\sup_{0\le s\le t} B_s \ge a) = 2P(B_t \ge a) \ . \tag{2.8.6}
$$

Wir erhalten dann mit (2.8.6) und unter Verwendung der Dichte der Brownschen Bewegung (2.2.1) für alle $a > 0$ die folgende Gleichung:

$$
P(\sup_{0\le s\le t} B_s \ge a) = 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t})\, du \ .
$$

Nun differenzieren wir nach t und erhalten für alle $a > 0$ die Dichte der ersten einseitigen Überschreitungszeit der Brownschen Bewegung (2.8.2):

$$\begin{aligned}
f_{\tau_a}(t) &= \frac{\partial P(\tau_a \leq t)}{\partial t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-\frac{1}{t^{3/2}}\int_a^\infty exp(-\frac{u^2}{2t})\,du + \frac{1}{t^{5/2}}\int_a^\infty u^2 exp(-\frac{u^2}{2t})\,du) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-\frac{1}{t^{3/2}}\int_a^\infty exp(-\frac{u^2}{2t})\,du + \frac{1}{t^{5/2}}(-tu\cdot exp(-\frac{u^2}{2t})|_a^\infty + t\int_a^\infty exp(-\frac{u^2}{2t})\,du) \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}exp(-\frac{a^2}{2t}) \quad \forall t > 0\ .
\end{aligned}$$

Zweite Gleichung: Unter dem Integral differenziert. Dritte Gleichung: partielle Integration des zweiten Integrals auf der rechten Seite.

Für $a < 0$ können wir $(-B_t)_t$ betrachten und analog verfahren. Denn $(-B_t)_t$ hat die gleiche Verteilung, wie $(B_t)_t$. Dann ergibt sich die Dichte (2.8.2) □

Lemma 2.8.4. *Die Dichte der ersten einseitigen Überschreitungszeit der Brownschen Bewegung mit Drift*

$$\tau(a,b) := \inf\{t \geq 0 : B_t = bt - a\} \tag{2.8.7}$$

ist für alle $a \neq 0$ *und* $b > 0$*:*

$$f_{\tau(a,b)}(u) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}}exp(-\frac{(bu-a)^2}{2u}) \quad \forall u > 0\ . \tag{2.8.8}$$

Beweis:

Wir wissen schon, daß die Stoppzeit τ_a, für alle $a \neq 0$ die Dichte (2.8.2) hat. Nach Girsanov's Satz (siehe zum Beispiel [KarShr91], Kapitel 3.5, Satz 5.1., S.191) ist $(\tilde{B}_t)_t = (B_t - bt)_t$ eine Brownsche Bewegung mit Drift $b > 0$, unter dem Maß:

$$P^{(b)}(A) := E(\mathbf{1}_A Y_t) \quad , \forall A \in \mathcal{F}_t\ ,$$

wobei wir $Y_t = exp(bB_t - \frac{b^2}{2}t)$, für alle $t \geq 0$ setzen.

$$
\begin{aligned}
P^{(b)}(\tau_a \le t) &= E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} Y_t) = E(E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} Y_t | \mathcal{F}_{\tau_a \wedge t})) = E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} E(Y_t | \mathcal{F}_{\tau_a \wedge t})) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} Y_{\tau_a \wedge t}) = E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} Y_{\tau_a}) = E(\mathbf{1}_{\{\tau_a \le t\}} exp(ba - \frac{b^2}{2}\tau_a)) \\
&= \int_0^t exp(ba - \frac{b^2}{2}u) \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{a^2}{2u})\, du \\
&= \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(a-bu)^2}{2u})\, du
\end{aligned}
$$

Erstes Gleichheitszeichen: Definition von dem Maß $P^{(b)}(\cdot)$. Zweites Gleichheitszeichen: Erwartungswerttreue. Drittes Gleichheitszeichen: $\{\tau_a \le t\} \in \mathcal{F}_{\tau_a \wedge t}$. Viertes Gleichheitszeichen: Stoppsatz von Doob. Fünftes Gleichheitszeichen: Auf der Menge $\{\tau_a \le t\}$ ist $Y_{\tau_a \wedge t} = Y_{\tau_a}$. Sechstes Gleichheitszeichen: $B_{\tau_a} = a$ f.s. Siebentes Gleichheitszeichen: Dichte der Stoppzeit τ_a (2.8.2).

Somit erhalten wir für die Stoppzeit $\tau(a, b)$ die Dichte (2.8.8) □

2.9 Waldidentitäten für die Überschreitungszeiten der Brownschen Bewegung

In dieser Sektion können wir nun für $\tau = \tau_a$ direkt ausrechnen, ob die drei Waldidentitäten gelten, und ob die Voraussetzungen für die drei Waldidentitäten erfüllt sind.

Proposition 2.9.1. *Sei τ_a die Stoppzeit, die durch (2.8.1) definiert wurde. Dann gelten für alle $a \neq 0$:*

$$E(\tau_a^\delta) < +\infty \quad \forall \delta < \frac{1}{2} \quad , \quad E(\tau_a^{\frac{1}{2}}) = +\infty \ , \tag{2.9.1}$$

$$E(B_{\tau_a}) = a \neq 0 \ , \tag{2.9.2}$$

und

$$a^2 = E(B_{\tau_a}^2) \neq E(\tau_a) = +\infty \ . \tag{2.9.3}$$

Beweis von Proposition 2.9.1:

Wir kennen die Dichte der Stoppzeit τ_a, siehe (2.8.2). Wir erhalten dann für $s \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
f_{\tau_a}(s) &= \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} s^{-3/2} exp(-\frac{a^2}{2s}) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} s^{-3/2} (1 - \frac{a^2}{2s} + O(\frac{1}{s^2})) \\
&= \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} s^{-3/2} (1 + O(\frac{1}{s})) \ . \qquad (2.9.4)
\end{aligned}
$$

Dann bekommen wir für $\delta < \frac{1}{2}$ und $s \to \infty$ das Folgende:

$$\begin{aligned}
\int_0^s f_{\tau_a}(u) \cdot u^\delta \, du &= \int_0^1 f_{\tau_a}(u) \cdot u^\delta \, du + \int_1^s f_{\tau_a}(u) \cdot u^\delta \, du \\
&\leq 1 + \int_1^s \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} u^{\delta - \frac{3}{2}} (1 + O(\frac{1}{u})) \, du \\
&= 1 + \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\delta - \frac{1}{2}} u^{\delta - \frac{1}{2}} |_1^s + O(\int_1^s u^{\delta - \frac{5}{2}} \, du) \\
&= 1 + \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\delta - \frac{1}{2}} (\frac{1}{s^{\frac{1}{2} - \delta}} - 1) + O(\frac{1}{s^{\frac{3}{2} - \delta}}) \\
&= c_{a,\delta} < +\infty \quad \text{für } s \to \infty \ .
\end{aligned}$$

Hierbei ist $c_{a,\delta}$ eine Konstante, die von a und δ abhängt. Deswegen gilt für alle $a \neq 0$ und $\delta < \frac{1}{2}$:

$$E(\tau_a^\delta) < +\infty$$

Für $\delta = \frac{1}{2}$ und $s \to \infty$ erhalten wir die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
\int_0^s f_{\tau_a}(u) \cdot u^{\frac{1}{2}} \, du &= \int_0^1 f_{\tau_a}(u) \cdot u^{\frac{1}{2}} \, du + \int_1^s f_{\tau_a}(u) \cdot u^{\frac{1}{2}} \, du \\
&\geq \int_1^s \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} u^{-1} (1 + O(\frac{1}{u})) \, du \\
&= \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} log(u)|_1^s + O(\int_1^s u^{-2} \, du) \\
&= \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} log(s) + O(\frac{1}{s}) \\
&= +\infty \quad \text{für } s \to \infty \ .
\end{aligned}$$

Deswegen gilt für alle $a \neq 0$:

$$E(\tau_a^{1/2}) = +\infty \ .$$

Aus der Stetigkeit der Pfade der Brownschen Bewegung $(B_t)_t$ bekommen wir, daß $B_{\tau_a} = a$ f.s. ist und somit folgt:

$$E(B_{\tau_a}) = E(a) = a \neq 0$$

Die erste Waldidentität gilt also nicht. Der Erwartungswert von τ_a ist auch nicht endlich, weil aus der Hölderungleichung $E(\tau_a^{1/2}) \leq E(\tau_a)$ folgt und $E(\tau_a^{1/2}) = +\infty$, für alle $a \neq 0$ ist. Das Resultat

$$E(\tau_a) = +\infty \quad \forall a \neq 0$$

hätten wir auch mit Hilfe der Dichte von τ_a berechnen können. Außerdem erhalten wir, daß die zweite Waldidentität, wegen $E(B_{\tau_a}^2) = a^2 \neq \infty = E(\tau_a)$, auch nicht gilt. Wir wollen noch schauen, ob die dritte Waldidentität erfüllt ist.

□

Proposition 2.9.2. *Sei τ_a die Stoppzeit, die durch (2.8.1) definiert wurde. Dann gilt für alle $a \neq 0$ und alle $\lambda > 0$:*

$$E(exp(\lambda \tau_a)) = +\infty \ . \tag{2.9.5}$$

Für $a > 0$ gilt:

$$E(exp(B_{\tau_a} - \frac{1}{2}\tau_a)) = 1 \ , \tag{2.9.6}$$

und für $a < 0$:

$$E(exp(B_{\tau_a} - \frac{1}{2}\tau_a)) = exp(2a) < 1 \ . \tag{2.9.7}$$

Beweis von Proposition 2.9.2:

Da $exp(\lambda t) \geq 1 + \lambda t$, für alle $\lambda > 0$ und $t \geq 0$ ist, folgt somit aus $E(\tau_a) = +\infty$, daß $E(exp(\lambda \tau_a)) = +\infty$ ist, für alle $\lambda > 0$ und alle $a \neq 0$.

Für $a > 0$ bekommen wir, wegen $B_{\tau_a} = a$ f.s.:

$$\begin{aligned} E(exp(B_{\tau_a} - \frac{1}{2}\tau_a)) &= E(exp(a - \frac{1}{2}\tau_a)) = \int_0^\infty exp(a - \frac{1}{2}u)\frac{a}{\sqrt{2\pi u^3}}exp(-\frac{a^2}{2u})\,du \\ &= \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi u^3}}exp(-\frac{1}{2u}(u-a)^2)\,du = P(\tau(a,1) < +\infty) = 1 \ , \end{aligned}$$

Nach der Sektion 2.8 ist die Stoppzeit $\tau(a, 1)$ fast sicher endlich, für alle $a > 0$ und besitzt die Dichte (2.8.8). Somit ist die dritte Waldidentität erfüllt für alle $a > 0$, obwohl die Voraussetzung $E(exp(\frac{1}{2}\tau_a)) = +\infty$ für diese nicht gilt.

Für $a < 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} E(exp(B_{\tau_a} - \frac{1}{2}\tau_a)) &= E(exp(a - \frac{1}{2}\tau_a)) = \int_0^\infty exp(a - \frac{1}{2}u)\frac{-a}{\sqrt{2\pi u^3}}exp(-\frac{a^2}{2u})\,du \\ &= exp(2a)\int_0^\infty \frac{-a}{\sqrt{2\pi u^3}}exp(-\frac{1}{2u}(u+a)^2)\,du \\ &= exp(2a)P(\tau(-a,1) < +\infty) = exp(2a) < 1 \quad \forall a < 0 \ , \end{aligned}$$

Nach der Sektion 2.8 ist die Stoppzeit $\tau(-a, 1)$ fast sicher endlich, für alle $a > 0$ und besitzt die Dichte (2.8.8).

Somit ist die dritte Waldidentität nicht mehr erfüllt. $\square$

3 Erste Waldidentität

In diesem Kapitel werden wir zunächst einmal die Burkholder, Gundy und Davis Ungleichungen für die gestoppte Brownsche Bewegung beweisen. Danach werden wir eine von diesen Ungleichungen benutzen, um den wichtigsten Satz 3.0.3 zu beweisen. Diesen Satz haben die Herren Burkholder und Gundy in ihrem Artikel [BurGun70] in Kapitel 7, Korollar 7.1., S.299 angegeben.

Satz 3.0.3. *Sei $(B_t)_t$ die Brownsche Bewegung. Sei τ eine Stoppzeit von B. Wenn die Voraussetzung*

$$E(\tau^{1/2}) < \infty \tag{3.0.8}$$

erfüllt ist, dann gilt die erste Waldidentität:

$$E(B_\tau) = 0 \ . \tag{3.0.9}$$

Im weiteren Verlauf des Kapitels werden wir mehrere Verfeinerungen der ersten Waldidentität zeigen. Wir werden für spezielle Stoppzeiten bzw. für spezielle lokale Martingale sehen, ob die Verfeinerungen anwendbar sind und ob die erste Waldidentität gilt. Später werden wir Stoppzeiten der Brownschen Bewegung für nichtlineare Schranken behandeln.

3.1 Burkholder, Gundy und Davis Ungleichungen der gestoppten Brownschen Bewegung

Diese Ungleichungen haben ursprünglich die drei Herren Burkholder, Gundy und Davis für beliebige Martingale in ihrem Artikel [BurGun70] in Kapitel 7, Satz 7.1., S.297 bewiesen. Dabei haben sie die so genannte $Gute-Lambda$-Ungleichung verwendet. Wir werden uns auf den Satz im Buch [RevYor01], Kapitel 4.4, S.160-163 beziehen. Hierbei brauchen wir nicht die $Gute-Lambda$-Ungleichung, sondern die Dominanzbeziehung, auf die wir im Laufe dieser Sektion noch eingehen werden. Diese Ungleichungen liefern untere und obere Schranken für den Erwartungswert von der Zufallsvariablen $\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^p$, für beliebige $0 < p < +\infty$. Wir werden im Nachfolgenden immer davon ausgehen, daß p endlich ist.

Satz 3.1.1 (Burkholder, Gundy und Davis Ungleichungen). *Sei τ eine Stoppzeit von B mit $E(\tau^{p/2}) < +\infty$, für ein bestimmtes $p > 0$. Dann existieren Konstanten $c_p, C_p > 0$, so daß folgende Ungleichungen gelten:*

$$c_p E(\tau^{p/2}) \leq E(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^p) \leq C_p E(\tau^{p/2}) \ . \tag{3.1.1}$$

Beweis von Satz 3.1.1:

Wir wollen diesen Satz zeigen. Dazu zeigen wir zunächst die folgende Proposition, die die linke Ungleichung beinhaltet.

Proposition 3.1.2. *Sei τ eine Stoppzeit von B mit $E(\tau^{p/2}) < +\infty$, für ein bestimmtes $p > 0$. Dann existiert eine Konstante $c_p > 0$, so daß*

$$c_p E(\tau^{p/2}) \leq E(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^p) \tag{3.1.2}$$

gilt.

Beweis von Proposition 3.1.2:

Es gilt für alle $t \geq 0$ und ein bestimmtes $p > 0$:

$$\begin{aligned} E(|B_{t\wedge\tau}|^p) &= \int_0^\infty E(|B_u|^p)\, dP(t\wedge\tau \leq u) = \int_0^\infty c_p u^{p/2}\, dP(t\wedge\tau \leq u) \\ &= c_p E((t\wedge\tau)^{p/2}) \; . \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Hierbei ist $c_p > 0$ eine Konstante, die von p abhängt. In der zweiten Gleichung haben wir die Dichte der Brownschen Bewegung (2.2.1) benutzt, um den Erwartungswert auszurechnen. Nun ist für alle t:

$$|B_{t\wedge\tau}| \leq \sup_{0\leq s\leq t} |B_{s\wedge\tau}| \quad \text{f.s.}$$

Somit erhalten wir für alle t und ein bestimmtes $p > 0$:

$$c_p E((t\wedge\tau)^{p/2}) = E(|B_{t\wedge\tau}|^p) \leq E(\sup_{0\leq s\leq t} |B_{s\wedge\tau}|^p) \; . \tag{3.1.4}$$

Auf der linken und auf der rechten Seite der Ungleichung (3.1.4) können wir den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden. Somit können wir zum Grenzwert $t \to \infty$ übergehen und es gilt dann die folgende Ungleichung für ein bestimmtes $p > 0$:

$$c_p E(\tau^{p/2}) \leq E(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^p) \tag{3.1.5}$$

□

Proposition 3.1.3. *Sei τ eine Stoppzeit von B mit $E(\tau^{p/2}) < +\infty$, für ein $p > 1$. Dann existiert eine Konstante $C_p > 0$, so daß*

$$E(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^p) \leq C_p E(\tau^{p/2}) \tag{3.1.6}$$

gilt.

Beweis von Proposition 3.1.3:

Wir haben für alle t und ein bestimmtes $p > 1$, die Doobungleichung:

$$E(\sup_{0\leq s\leq t} |B_{s\wedge\tau}|^p) \leq (\frac{p}{p-1})^p E(|B_{t\wedge\tau}|^p) \ . \tag{3.1.7}$$

Wegen der Beziehung (3.1.3) bekommen wir für alle t und ein bestimmtes $p > 0$:

$$E(|B_{t\wedge\tau}|^p) = c_p E((t\wedge\tau)^{p/2}) \ .$$

Hierbei ist $c_p > 0$ eine Konstante, die von p abhängt. Somit erhalten wir:

$$E(\sup_{0\leq s\leq t} |B_{s\wedge\tau}|^p) \leq c_p(\frac{p}{p-1})^p E((t\wedge\tau)^{p/2}) \ . \tag{3.1.8}$$

Auf der linken und auf der rechten Seite der Ungleichung (3.1.8) können wir, wie in der Proposition 3.1.2 den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden. Somit können wir zum Grenzwert $t \to \infty$ übergehen und es gilt dann die folgende Ungleichung für ein bestimmtes $p > 1$:

$$E(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^p) \leq c_p(\frac{p}{p-1})^p E(\tau^{p/2}) = C_p E(\tau^{p/2}) \ .$$

□

Nach Proposition 3.1.3 existiert somit für $p = 2$ eine integrierbare Stoppzeit τ von der Brownschen Bewegung und eine Konstante $C_2 > 0$, so daß für alle beschränkten Stoppzeiten T von B folgende Ungleichung gilt:

$$E(\sup_{0\leq s\leq T} |B_{s\wedge\tau}|^2) \leq C_2 E(\tau\wedge T) \ . \tag{3.1.9}$$

Wir bezeichnen (3.1.9) als " Dominanzbeziehung ".

Lemma 3.1.4. *Sei B die Brownsche Bewegung und τ eine beliebige Stoppzeit von B. Dann existiert eine Konstante C_2, so daß für alle $x > 0$*

$$P(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^2 > x, \tau \leq x) \leq C_2 \frac{1}{x} E(\tau\wedge x)$$

gilt.

Beweis von Lemma 3.1.4:

Wir definieren für alle $x > 0$:

$$R = \inf\{t : t \wedge \tau > x\} \tag{3.1.10}$$

und

$$S = \inf\{t : \sup_{0 \le s \le t} |B_{s\wedge\tau}|^2 > x\} \ . \tag{3.1.11}$$

Aus der Stetigkeit von $(t \wedge \tau)_t$ folgt: $\{\tau \le x\} = \{R = +\infty\}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
P(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^2 > x, \tau \le x) &= P(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^2 > x, R = +\infty) \\
&\le P(\sup_{0\le s\le S} |B_{s\wedge\tau}|^2 \ge x, S < +\infty, R = +\infty) \\
&\le P(\sup_{0\le s\le S\wedge R} |B_{s\wedge\tau}|^2 \ge x) \le \frac{1}{x} E(\sup_{0\le s\le S\wedge R} |B_{s\wedge\tau}|^2) \\
&\le C_2 \frac{1}{x} E(\tau \wedge (S \wedge R)) \le C_2 \frac{1}{x} E(\tau \wedge x)
\end{aligned}$$

Erste Ungleichung: $\sup_{0\le s\le t} |B_{s\wedge\tau}|$ ist monoton wachsend mit t.
Zweite Ungleichung: Für alle $x > 0$ gilt:

$$\{\sup_{0\le s\le S} |B_{s\wedge\tau}|^2 \ge x, S < +\infty, R = +\infty\} \subseteq \{\sup_{0\le s\le S\wedge R} |B_{s\wedge\tau}| \ge x\}$$

Dritte Ungleichung: Markov-Ungleichung.
vorletzte Ungleichung: Dominanzbeziehung (3.1.9).
Die letzte Ungleichung folgt aus der Stetigkeit von $(t \wedge \tau)_t$ und $x > 0$. Somit haben wir dann $\tau \wedge (S \wedge R) \le \tau \wedge x$.

Proposition 3.1.5. *Sei τ eine Stoppzeit von B mit $E(\tau^{p/2}) < +\infty$, für ein $p \in]0, 2[$. Dann existiert für ein $p \in]0, 2[$ eine Konstante $C_p > 0$, so daß*

$$E(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^p) \le C_p E(\tau^{p/2})$$

gilt.

Beweis von Proposition 3.1.5:

Lemma 3.1.6. *Seien Z eine pfadstetige, positive Zufallsvariable und $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
E(f(Z)) &= \int_1^\infty P(Z > x)\, df(x) + \int_0^1 P(Z > x)\, df(x) + f(0) \\
&= \int_0^\infty P(Z > x)\, df(x) + f(0)
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Beweis von Lemma 3.1.6:

$$\begin{aligned}
E(f(Z)) &= \int_0^\infty f(t)\,dP(Z \le t) = -\int_0^\infty f(t)\,dP(Z > t) \\
&= -\int_0^\infty \int_0^t df(x)\,dP(Z > t) + f(0) \\
&= -\int_0^\infty \int_x^\infty dP(Z > t)\,df(x) + f(0) \\
&= \int_0^\infty P(Z > x)\,df(x) + f(0) \\
&= \int_1^\infty P(Z > x)\,df(x) + \int_0^1 P(Z > x)\,df(x) + f(0)
\end{aligned}$$

□

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
E(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^p) &= \int_0^\infty P(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^2 > x)\,d(x^{p/2}) \\
&= \int_0^\infty (P(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^2 > x, \tau \le x) + P(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^2 > x, \tau > x))\,d(x^{p/2}) \\
&\le \int_0^\infty (P(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^2 > x, \tau \le x) + P(\tau > x))\,d(x^{p/2}) \\
&\le \int_0^\infty (C_2 \frac{1}{x} E(\tau \wedge x) + P(\tau > x))\,d(x^{p/2}) \\
&= \int_0^\infty (C_2 \frac{1}{x}(E(\tau \mathbf{1}_{\{\tau \le x\}}) + E(x \mathbf{1}_{\{\tau > x\}})) + P(\tau > x))\,d(x^{p/2}) \\
&= \int_0^\infty (C_2 \frac{1}{x} E(\tau \mathbf{1}_{\{\tau \le x\}}) + 2P(\tau > x))\,d(x^{p/2}) \\
&= C_2 E(\tau \int_\tau^\infty \frac{d(x^{p/2})}{x}) + 2E(\tau^{p/2}) \\
&= C_2 E(\tau \int_\tau^\infty \frac{p}{2} x^{p/2-2}\,dx) + 2E(\tau^{p/2}) \\
&= C_2 E(\tau \frac{p}{p-2} x^{p/2-1}|_\tau^\infty) + 2E(\tau^{p/2}) \\
&= (C_2 \frac{p}{2-p} + 2)E(\tau^{p/2}) \\
&= C_p E(\tau^{p/2}) \quad \forall p \in]0,2[
\end{aligned}$$

Erstes Gleichheitszeichen: Lemma 3.1.6 mit $Z = \sup_s |B_{s\wedge\tau}|^2$ und $f(x) = x^{p/2}$. Zweites Ungleichheitszeichen: Lemma 3.1.4. Fünftes Gleichheitszeichen: Satz von Fubini für den ersten Term und Lemma 3.1.6 mit $Z = \tau$ und $f(x) = x^{p/2}$

für den zweiten Term. Vorletzte Gleichung: $\lim_{x\to\infty} x^{p/2-1} = 0$, weil $p \in]0, 2[$ ist. $\square$

Wegen Proposition 3.1.5 bekommen wir für ein bestimmtes $p \in]0, 2[$ die rechte Ungleichung in (3.1.1). Zusammen mit der Proposition 3.1.3 erhalten wir dann für ein bestimmtes $p > 0$ die rechte Ungleichung in (3.1.1). Die linke Ungleichung in (3.1.1) für ein bestimmtes $p > 0$ folgt aus der Proposition 3.1.2. Somit haben wir den Satz 3.1.1 bewiesen. $\square$

3.2 Erste Waldidentität für die Brownsche Bewegung

Wir wenden uns nun wieder dem wichtigsten Satz 3.0.3 dieses Kapitels zu, den wir zwar eingangs erwähnt haben, aber nicht bewiesen haben.

Beweis von Satz 3.0.3:

B ist ein Martingal, nach Satz 2.4.1 ist dann $(B_{t\wedge\tau})_t$ ebenfalls ein Martingal, für beliebige Stoppzeiten τ. Nach der dritten Bedingung für Martingale (siehe Definition 2.1.1) haben wir dann für alle t:

$$E(B_{t\wedge\tau}) = E(B_{0\wedge\tau}) = E(B_0) = 0 \ ,$$

da die Standard Brownsche Bewegung in 0 startet. Aus der Voraussetzung $E(\tau^{1/2}) < +\infty$ folgt, daß die Stoppzeit τ fast sicher endlich ist. Nach Proposition 2.7.2 existiert dann $B_\tau = \lim_{t\to\infty} B_{t\wedge\tau}$ f.s. Somit erhalten wir:

$$E(B_\tau) = E(\lim_{t\to\infty} B_{t\wedge\tau}) \tag{3.2.1}$$

Nach den Burkholder, Gundy und Davis Ungleichungen, Satz 3.1.1 existiert eine Konstante $c_1 > 0$, mit folgender Eigenschaft:

$$E(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|) \leq c_1 \cdot E(\sqrt{\tau}) \ . \tag{3.2.2}$$

Nun ist nach Voraussetzung $E(\tau^{1/2}) < +\infty$. Somit ist $\sup_s |B_{s\wedge\tau}|$ integrierbar, und bildet eine Majorante von $|B_{t\wedge\tau}|$. Dann können wir in Gleichung (3.2.1) den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und den Limes und den Erwartungswert vertauschen.

$$E(B_\tau) = E(\lim_{t\to\infty} B_{t\wedge\tau}) = \lim_{t\to\infty} E(B_{t\wedge\tau}) = 0 \quad .$$

$\square$

Wir wollen nun ein Anwendungsbeispiel und ein Gegenbeispiel für Stoppzeiten angeben, die den Satz 3.0.3 erfüllen bzw. nicht erfüllen. Das folgende Anwendungsbeispiel und das darauffolgende Gegenbeispiel wurden in der Referenz [Nov71], Satz 1, S. 449 und dem Beweis von Satz 1, S.452/453 behandelt.

Anwendungsbeispiel 3.2.1. *Für alle $a > 0$ sei:*

$$\tilde{\tau}(a,b) = \inf\{t : B_t \leq -a + bt^{1/2}\} \ . \tag{3.2.3}$$

Dann gelten für $b > 0$:

$$E(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}) = \frac{a}{b} \tag{3.2.4}$$

und die erste Waldidentität

$$E(B_{\tilde{\tau}(a,b)}) = 0 \ . \tag{3.2.5}$$

Beweis von Anwendungsbeispiel 3.2.1:

Der Prozess $(B_t + a)_t$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$. Wir wissen, daß B ein Martingal ist und die Konstante a ist ein Martingal. Die Summe von Martingalen ist wieder ein Martingal. Wir wollen nun den Erwartungswert von $B_t + a$ ausrechnen.

$$E(B_t + a) = E(B_t) + a = a \ .$$

Nun ist $\tilde{\tau}(a,b) \wedge t$ beschränkt durch t und wir können den Stoppsatz von Doob anwenden, und wir erhalten:

$$E(B_{\tilde{\tau}(a,b)\wedge t} + a) = E(B_0) + a = a$$

Aus der Definition von $\tilde{\tau}(a,b)$ folgt: $B_{\tilde{\tau}(a,b)\wedge t} + a \geq b(\tilde{\tau}(a,b) \wedge t)^{1/2}$ f.s. Somit ergibt sich für alle $a > 0$, $b > 0$ und t:

$$a = E(B_{\tilde{\tau}(a,b)\wedge t} + a) \geq b \cdot E((\tilde{\tau}(a,b) \wedge t)^{1/2})$$

beziehungsweise

$$\frac{a}{b} \geq E((\tilde{\tau}(a,b) \wedge t)^{1/2}) \ .$$

Somit ist $\frac{a}{b}$ die Majorante von $(\tilde{\tau}(a,b) \wedge t)^{1/2}$. Wir können dann zum Grenzwert $t \to \infty$ übergehen und den Satz von der majorisierten Konvergenz benutzen:

$$\frac{a}{b} \geq \lim_{t\to\infty} E((\tilde{\tau}(a,b)\wedge t)^{1/2}) = E(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}) \ .$$

Daraus folgt, daß $E(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}) < +\infty$ ist, für alle $a > 0$ und $b > 0$. Wir können dann den Satz 3.0.3 anwenden und erhalten die erste Waldidentität (3.2.5):

$$E(B_{\tilde{\tau}(a,b)}) = 0 \ .$$

Mit Hilfe dieser Waldidentität und der Definition von $\tilde{\tau}(a,b)$ können wir nun $E(\tilde{\tau}(a,b))$ für alle $a > 0$ und $b > 0$ berechnen:

$$0 = E(B_{\tilde{\tau}(a,b)}) = -a + bE(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}) \ .$$

Daraus folgt (3.2.4). □

Gegenbeispiel 3.2.2. *Seien $a > 0$ und $\tilde{\tau}(a,b)$, wie in (4.2.1) definiert. Dann gelten für $b \leq 0$:*

$$E(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}) = +\infty \tag{3.2.6}$$

und

$$E(B_{\tilde{\tau}(a,b)}) \neq 0 \ . \tag{3.2.7}$$

Beweis von Gegenbeispiel 3.2.2:

Für $b = 0$ ist $\tilde{\tau}(a,b) = \inf\{t : B_t \leq -a\} := \tau_{-a}$. Wir hatten in der Sektion 2.9 bemerkt, daß τ_{-a} genau so verteilt ist, wie τ_a und daß der Erwartungswert von τ_a nicht existiert. Somit gilt $E(\tilde{\tau}(a,0)^{1/2}) = E(\tau_a^{1/2}) = +\infty$. Für $b < 0$ ist $\tilde{\tau}(a,b) > \tau_{-a}$ f.s. Deswegen folgt auch $E(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}) > E(\tau_a^{1/2})$. Daraus folgt (3.2.6) für alle $b \leq 0$. Es gilt $B_{\tilde{\tau}(a,b)} = -a + b\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}$ f.s. Daraus folgt für $b = 0$:

$$E(B_{\tilde{\tau}(a,b)}) = -a < 0 \ .$$

und für $b < 0$:

$$E(B_{\tilde{\tau}(a,b)}) = -a + bE(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}) = -\infty < 0 \ .$$

□

3.3 Verfeinerungen der ersten Waldidentität

In dieser Sektion wird sich herausstellen, daß die erste Waldidentität $E(B_\tau) = 0$ sogar erfüllt sein kann, obwohl der Erwartungswert von $\sqrt{\tau}$ nicht existiert. Im folgenden Satz 3.3.1 erhalten wir eine Verfeinerung von Satz 3.0.3. Diesen Satz haben wir dem Artikel [Nov96], Korollar, S. 717 entnommen.

Satz 3.3.1. *Sei B die Brownsche Bewegung und τ eine f.s. endliche Stoppzeit von B, mit $E(B_\tau^+) < \infty$ oder $E(B_\tau^-) < \infty$. Dann ist die Ungleichung*

$$\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t} P(\tau > t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} |E(B_\tau)| \tag{3.3.1}$$

erfüllt, und falls noch zusätzlich $E(|B_\tau|) < \infty$ gilt, dann haben wir die folgende Implikation:

$$\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t} P(\tau > t) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(B_\tau) = 0 \ . \tag{3.3.2}$$

Dieser Satz gilt eigentlich für beliebige lokale Martingale ξ (siehe [Nov96], Satz 1, S. 717-720). Wir werden im nächsten Schritt das Lemma 3.3.2 beweisen, das uns eine interessante asymptotische Gleichheit vermittelt. Dieses Lemma mit Beweis können wir in [Nov96], S.718/719, wiederfinden.

Lemma 3.3.2. *Sei ξ ein lokales Martingal, mit $< \xi >_\infty < +\infty$ f.s. Wenn ein $\lambda > 0$ existiert mit*

$$\sup_{t>0} E(exp(\lambda \xi_t)) < +\infty \quad \textit{(Cramer-Bedingung)} \ , \tag{3.3.3}$$

dann ist $0 \leq E(\xi_\infty) < +\infty$ und die folgende Gleichung

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E(\xi_\infty) \tag{3.3.4}$$

ist erfüllt.

Beweis:

Wir setzen

$$\lambda_+ := \sup \{\lambda > 0 : \sup_{t>0} E(exp(\lambda \xi_t)) < +\infty\} \tag{3.3.5}$$

Wir bemerken mit Hilfe des Fatou-Lemmas, daß für $0 < \lambda < \lambda_+$ Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} E(exp(\lambda\xi_\infty)) &= E(\liminf_{t\to\infty} exp(\lambda\xi_t)) \\ &\leq \liminf_{t\to\infty} E(exp(\lambda\xi_t)) \leq \limsup_{t\to\infty} E(exp(\lambda\xi_t)) < +\infty \ . \end{aligned}$$

Die Endlichkeit auf der rechten Seite folgt aus der Voraussetzung (3.3.3). Für ein lokales Martingal ξ mit der Voraussetzung $< \xi >_\infty < +\infty$ f.s. folgt nach der Proposition 2.7.2, daß der Grenzwert ξ_t fast sicher gegen ξ_∞ konvergiert. Wegen der Voraussetzung (3.3.3), für $0 < \lambda < \lambda_+$, ist $\sup_{t>0} E((\xi_t^+)^{1+\varepsilon}) < +\infty$, für alle $\varepsilon > 0$. und somit ist $(\xi_t^+)_t$ nach dem Satz 2.3.4 gleichgradig integrierbar. ξ ist ein lokales Martingal. Dann existiert eine Folge $(\tau_n)_n$ von Stoppzeiten für $(\xi_t)_t$, mit $\tau_n \to +\infty$ f.s., für $n \to \infty$. Für $(\xi_t^+)_t := (\max(0, \xi_t))_t$ und $(\xi_t^-)_t := (\max(0, -\xi_t))_t$ haben wir:

$$E(\xi^+_{t\wedge\tau_n}) - E(\xi^-_{t\wedge\tau_n}) = E(\xi_{t\wedge\tau_n}) = E(\xi_0) = 0 \ . \tag{3.3.6}$$

Zweite Gleichung: ξ ist ein lokales Martingal. Aus (3.3.6) erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$ die Gleichheit:

$$E(\xi^+_{t\wedge\tau_n}) = E(\xi^-_{t\wedge\tau_n}) \ .$$

Nach dem Fatou-Lemma und der gleichgradigen Integrierbarkeit von $(\xi_t^+)_t$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} E(\xi^-_\infty) &= E(\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty} \xi^-_{t\wedge\tau_n}) \\ &\leq \lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty} E(\xi^-_{t\wedge\tau_n}) = \lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty} E(\xi^+_{t\wedge\tau_n}) = E(\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty} \xi^+_{t\wedge\tau_n}) \\ &= E(\xi^+_\infty) < \infty \ . \end{aligned}$$

Dann bekommen wir die erste Aussage des Lemmas, und zwar $0 \leq E(\xi_\infty) = E(\xi^+_\infty) - E(\xi^-_\infty) < +\infty$. $(\xi_t)_t$ ist ein lokales Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$. Mit Hilfe der Itô-Formel kann man zeigen, daß $(\Xi_t(\lambda))_t = (exp(\lambda\xi_t - \frac{\lambda^2}{2} < \xi >_t))_t$, für $0 < \lambda < \lambda_+$ auch ein lokales Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ ist.

Aus der Voraussetzung (3.3.3), für $0 < \lambda < \lambda_+$ und dem Satz 7.0.3 folgt, daß $(\Xi_t(\lambda))_t$ gleichgradig integrierbar ist. Deswegen haben wir für $0 < \lambda < \lambda_+$ die folgende Gleichheit:

$$E(\Xi_\infty(\lambda)) = E(\lim_{t\to\infty} \Xi_t(\lambda)) = \lim_{t\to\infty} E(\Xi_t(\lambda)) = \lim_{t\to\infty} 1 = 1 \ .$$

Dann haben wir für $0 < \lambda < \lambda_+[$:

$$\begin{aligned}1-E(exp(-\frac{\lambda^2}{2}<\xi>_\infty)) &= E(1-exp(-\frac{\lambda^2}{2}<\xi>_\infty))\\ &= E(\Xi_\infty(\lambda)-exp(-\frac{\lambda^2}{2}<\xi>_\infty))\\ &= E(exp(\lambda\xi_\infty-\frac{\lambda^2}{2}<\xi>_\infty)-exp(-\frac{\lambda^2}{2}<\xi>_\infty))\\ &= E((exp(\lambda\xi_\infty)-1)exp(-\frac{\lambda^2}{2}<\xi>_\infty))\ . \qquad (3.3.7)\end{aligned}$$

Wir benutzen die Ungleichung $|e^x-1|\leq|x|e^x$, um für $0<\lambda<\lambda_+$ weiter abzuschätzen:

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}|exp(\lambda\xi_\infty)-1|exp(-\frac{\lambda^2}{2}<\xi>_\infty) &\leq \lambda^{-1}\lambda|\xi_\infty|exp(\lambda\xi_\infty-\frac{\lambda^2}{2}<\xi>_\infty)\\ &\leq |\xi_\infty|exp(\lambda\xi_\infty)\ .\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß aus der Voraussetzung (3.3.3) für $0<\lambda<\lambda_+$, die Endlichkeit von $E(|\xi_\infty|exp(\lambda\xi_\infty))$ folgt. In der Tat haben wir:

$$\begin{aligned}E(|\xi_\infty|exp(\lambda\xi_\infty)) &= E(\mathbf{1}_{\{\xi_\infty\geq 0\}}\xi_\infty exp(\lambda\xi_\infty)\\ &- E(\mathbf{1}_{\{\xi_\infty<0\}}\xi_\infty exp(\lambda\xi_\infty)) \qquad (3.3.8)\end{aligned}$$

Weiter existiert für alle $0<\lambda<\lambda_+$ ein $\epsilon>0$, so daß $\lambda+\epsilon<\lambda_+$ ist. Es gilt $x<exp(\epsilon x)$, für alle $\epsilon>0$ und $x\in\mathbb{R}$. Wir erhalten dann $\xi_\infty<exp(\epsilon\xi_\infty)$. Somit bekommen wir:

$$\xi_\infty exp(\lambda\xi_\infty)<exp((\lambda+\epsilon)\xi_\infty)\quad \text{f.s.}$$

Für die beiden Terme auf der rechten Seite von (3.3.8) bekommen wir dann, für $0<\lambda+\epsilon<\lambda_+$:

$$E(\mathbf{1}_{\{\xi_\infty<0\}}\xi_\infty exp(\lambda\xi_\infty))\leq E(exp((\lambda+\epsilon)\xi_\infty))<+\infty \qquad (3.3.9)$$

beziehungsweise

$$E(\mathbf{1}_{\{\xi_\infty\geq 0\}}\xi_\infty exp(\lambda\xi_\infty))\leq E(exp((\lambda+\epsilon)\xi_\infty))<+\infty\ . \qquad (3.3.10)$$

Die Ungleichungen (3.3.9), (3.3.9) und die Gleichung (3.3.8) implizieren, daß $E(|\xi_\infty|exp(\lambda\xi_\infty))$ endlich ist. Für die Funktion $\lambda^{-1}(exp(\lambda\xi_\infty)-1)exp(-\frac{\lambda^2}{2}<\xi>_\infty)$ führen wir eine Reihenentwicklung durch und bekommen für $\lambda\to 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}exp(\lambda\xi_\infty - \frac{\lambda^2}{2} < \xi >_\infty) - \frac{1}{\lambda}exp(-\frac{\lambda^2}{2} < \xi >_\infty) &= \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda\xi_\infty - \frac{\lambda^2}{2} < \xi >_\infty + o(\lambda)) \\
&- \frac{1}{\lambda}(1 - \frac{\lambda^2}{2} < \xi >_\infty + o(\lambda^3)) \\
&= \frac{1}{\lambda}(\lambda\xi_\infty + o(\lambda)) \\
&= \xi_\infty + o(1) \text{ , für } \lambda \to 0 \text{ .}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten dann für $\lambda \to 0$ die Gleichung:

$$
1 - E(exp(-\frac{\lambda^2}{2} < \xi >_\infty)) = \lambda E(\xi_\infty) + o(\lambda) \text{ .} \qquad (3.3.11)
$$

Wir setzen nun $u := \lambda^2/2$. Wir können dann Lemma 3.1.6 mit $Z =< \xi >_\infty$ und $f(x) = exp(-ux)$ anwenden und erhalten:

$$
\begin{aligned}
E(exp(-u < \xi >_\infty)) &= \int_0^\infty exp(-ut)\, dP(< \xi >_\infty \leq t) \\
&= -\int_0^\infty uP(< \xi >_\infty > t)exp(-ut)\, dt + 1.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich für die linke Seite von Gleichung (3.3.7) die folgende Beziehung:

$$
1 - E(exp(-u < \xi >_\infty)) = \int_0^\infty uP(< \xi >_\infty > t)exp(-ut)\, dt \text{ .} \qquad (3.3.12)
$$

Mit (3.3.12) und (3.3.11) erhalten wir dann für $u \to 0$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty uP(< \xi >_\infty > t)exp(-ut)\, dt &= 1 - E(exp(-u < \xi >_\infty)) \\
&= \sqrt{2u}E(\xi_\infty) + o(\sqrt{u}) \text{ , für } u \to 0 \text{ .}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt nun:

$$
\int_0^\infty P(< \xi >_\infty > t)exp(-ut)\, dt = \sqrt{\frac{2}{u}}E(\xi_\infty) + o(\frac{1}{\sqrt{u}}) \text{ , für } u \to 0 \text{ .} \qquad (3.3.13)
$$

Nun werden wir einen Satz von Tauber benutzen. Diesen Satz hat Karamata in seiner Arbeit [Kar30] bewiesen. Wir können diesen Satz und einen Beweis dafür aber auch in [Sen76] oder in [Fel71], Kapitel 13, Beispiel (c) wiederfinden.

Hilfssatz 3.3.3 (Karamata-Tauber Satz). *Sei X eine Zufallsvariable, mit Werten in $[0, \infty[$. Sei $0 \leq \rho < +\infty$ und L eine reellwertige, positive Funktion ist, die langsam variiert, das heisst $\lim_{t\to\infty} L(\lambda t)/L(t) = 1$, für alle $\lambda > 0$. Dann sind folgende Beziehungen äquivalent:*

1. $(1 - E(exp(-uX))) = u^{1-\rho} L(\frac{1}{u})(1 + O(1))$ *für* $u \to 0$

2. $t^{1-\rho} P(X \geq t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} L(t)(1 + O(1))$ *für* $t \to \infty$

Hierbei ist $\Gamma(\rho) := \int_0^\infty t^{\rho-1} e^{-t}\, dt$.

Damit ist der Beweis von Lemma 3.3.2 erbracht. Wir setzen nämlich $X =< \xi >_\infty$, $L(t) \equiv E(\xi_\infty)$ und $\rho = 1/2$. Die obere Gleichung (3.3.13) ergibt dann die gewünschte Beziehung (3.3.4):

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E(\xi_\infty).$$

□

Die nachfolgende Bemerkung wurde in dem Artikel [Nov96], Bemerkung 1, S.720 angegeben.

Bemerkung 3.3.4. *Die Gleichung (3.3.4)*

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E(\xi_\infty)$$

kann erfüllt sein, wenn die Cramer-Bedingung (3.3.3) zwar nicht erfüllt ist, dafür aber $E(\xi_\infty^-) < +\infty$ *und die Bedingung*

$$\sup_{t>0} (\lambda \xi_t - \frac{\lambda^2 < \xi >_t}{2}) < C \quad , \text{für } 0 < \lambda < \varepsilon$$

für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$ *gelten.*

Unter dieser Bedingung ist $(\Xi_t(\lambda))_t = (exp(\lambda \xi_t - \frac{\lambda^2}{2} < \xi >_t))_t$ ein lokales, beschränktes $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal. Somit ist $(\Xi_t(\lambda))_t$ ein gleichgradig integrierbares $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal. Damit ist der Beweis von dieser Bemerkung analog zu dem Beweis vom Lemma 3.3.2.

Wir wollen nun das Lemma 3.3.2 anwenden, um eine Verfeinerung für die erste Waldidentität von lokalen Martingalen zu bekommen. Wir beziehen uns dabei auf den Artikel von Novikov [Nov96], Satz 1, S.717 und Beweis von Satz 1, S.719/720.

Satz 3.3.5 (Verfeinerung der 1.Waldidentität für lokale Martingale). *Sei* ξ *ein quadratisch integrierbares, lokales Martingal. Außerdem sei* $< \xi >_\infty < +\infty$ *f.s. und* $E(\xi_\infty^+) < \infty$ *oder* $E(\xi_\infty^-) < \infty$*. Dann gilt*

$$\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} |E(\xi_\infty)|. \tag{3.3.14}$$

Falls noch zusätzlich der Erwartungswert von ξ_∞ existiert, d.h. $E(\xi_\infty^+) < \infty$ und $E(\xi_\infty^-) < \infty$. Dann haben wir folgende Implikation:

$$\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(\xi_\infty) = 0 \ . \tag{3.3.15}$$

Beweis :

Wir betrachten für alle $A > 0$ die Stoppzeit:

$$\tilde{R}_A = \inf \{t \geq 0 : \xi_t \geq A\} \ . \tag{3.3.16}$$

Lemma 3.3.6. *Das gestoppte lokale Martingal $(\xi_{t\wedge\tilde{R}_A})_t$ erfüllt die Bedingungen von Lemma 3.3.2.*

Beweis von Lemma 3.3.6:

Für beliebige $\lambda > 0$ und $A > 0$ gilt:

$$\sup_{t>0} E(exp(\lambda \xi_{t\wedge\tilde{R}_A})) \leq \sup_{t>0} E(exp(\lambda A)) = exp(\lambda A) < \infty \ . \tag{3.3.17}$$

Außerdem erhalten wir:

$$\lim_{t\to\infty} < \xi >_{t\wedge\tilde{R}_A} = < \xi >_{\tilde{R}_A} < +\infty \quad \text{f.s.}$$

Erste Gleichung: Satz von der monotonen Konvergenz. Die Endlichkeit von $< \xi >_{\tilde{R}_A}$ folgt aus der Voraussetzung $< \xi >_\infty < +\infty$ f.s. $\square$

Nach Lemma 3.3.2 gilt daher für beliebige $A > 0$:

$$\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t) \geq \liminf_{t\to\infty} \sqrt{t} P(< \xi >_{\tilde{R}_A} > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E(\xi_{\tilde{R}_A}) \ .$$

Auf der anderen Seite gilt:

$$\begin{aligned} E(\xi_{\tilde{R}_A}) &= E(\mathbf{1}_{\{\tilde{R}_A=\infty\}}\xi_\infty) + E(\mathbf{1}_{\{\tilde{R}_A<\infty\}}\xi_{\tilde{R}_A}) \\ &= E(\mathbf{1}_{\{\tilde{R}_A=\infty\}}\xi_\infty) + E(\mathbf{1}_{\{\tilde{R}_A<\infty\}}A) \\ &= E(\mathbf{1}_{\{\tilde{R}_A=\infty\}}\xi_\infty) + AP(\tilde{R}_A < \infty) \geq E(\mathbf{1}_{\{\tilde{R}_A=\infty\}}\xi_\infty) \ . \end{aligned}$$

Weil $(\xi_t)_t$ stetig in ω ist, gilt für $\tilde{R}_A$:

$$\tilde{R}_{A_1} \leq \tilde{R}_{A_2} \quad \forall A_1 \leq A_2 \quad \lim_{A\to\infty} \tilde{R}_A = \infty \tag{3.3.18}$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz bekommen wir dann:

$$\lim_{A\to\infty} E(\mathbf{1}_{\{\tilde{R}_A=\infty\}}\xi_\infty) = E(\lim_{A\to\infty} \xi_{\tilde{R}_A}) = E(\xi_\infty) \ .$$

Daher haben wir

$$\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t}P(< \xi >_\infty > t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{A\to\infty} E(\xi_{\tilde{R}_A}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E(\xi_\infty)$$

gezeigt. Somit ist $\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t}P(< \xi >_\infty > t)$ nicht kleiner als $\sqrt{\frac{2}{\pi}}E(\xi_\infty)$. Für die Stoppzeit

$$\tilde{R}_{-A} = \inf\{t \geq 0 : \xi_t \leq -A\} \quad \forall A > 0 \tag{3.3.19}$$

verfahren wir völlig analog, wie zuvor und bekommen dann:

$$\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t}P(< \xi >_\infty > t) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{A\to\infty} E(-\xi_{\tilde{R}_{-A}}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E(-\xi_\infty) \ .$$

Falls der Erwartungswert von ξ_∞ existiert und $\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t}P(< \xi >_\infty > t) = 0$ erfüllt ist, erhalten wir mit Hilfe der Ungleichung (3.3.14) $|E(\xi_\infty)| \leq 0$. Somit erhalten wir die erste Waldidentität für lokale Martingale: $E(\xi_\infty) = 0$. Damit ist der Satz bewiesen. □

3.4 Stärkere Verfeinerung der ersten Waldidentität für die Brownschen Bewegung

Wir wollen nun ein Resultat von Galtchouk und Novikov [GalNov97], Satz 1 präsentieren, welches wir aber nicht beweisen werden. Sondern wir zeigen, daß dieser Satz eine stärkere Verfeinerung der ersten Waldidentität für lokale Martingale ist, als der Satz 3.3.5.

Satz 3.4.1. *Sei $\xi = (\xi_t)_t$ ein quadratisch integrierbares, lokales Martingal und $< \xi >_\infty < +\infty$ f.s. Außerdem sei $E(|\xi_\infty|) < +\infty$ und es existiere eine positive, monoton wachsende Funktion f mit $E(f(< \xi >_\infty)) < +\infty$ und*

$$\int_1^\infty f(t)t^{-3/2}\, dt = +\infty \ , \tag{3.4.1}$$

dann folgt $E(\xi_\infty) = 0$.

Proposition 3.4.2. *Für eine Funktion f und der Zufallsvariablen $< \xi >_\infty$, die die Eigenschaften aus dem Satz 3.4.1 erfüllen, gilt folgende Implikation:*

$$E(f(< \xi >_\infty)) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \liminf_{t\to\infty} \sqrt{t}P(< \xi >_\infty > t) = 0 \tag{3.4.2}$$

Beweis von Proposition 3.4.2:

Nach Lemma 3.1.6 gilt die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} +\infty &> E(f(< \xi >_\infty)) \\ &= \int_1^\infty P(< \xi >_\infty > t)\, df(t) + \int_0^1 P(< \xi >_\infty > t)\, df(t) + f(0) \\ &= \int_1^\infty P(< \xi >_\infty > t)\, df(t) + c\ , \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

wobei $c = \int_0^1 P(< \xi >_\infty > t)\, df(t) + f(0)$ eine endliche Konstante ist. Wir können die Voraussetzung (3.4.1) partiell integrieren und erhalten:

$$2\int_1^\infty t^{-1/2}\, df(t) = \int_1^\infty f(t)t^{-3/2}\, dt + 2t^{-1/2}f(t)|_1^\infty \tag{3.4.4}$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist nach Voraussetzung (3.4.1) unendlich. Der zweite Term auf der rechten Seite ist positiv. Somit ist die linke Seite auch unendlich. Somit erhalten wir die Äquivalenz:

$$\int_1^\infty f(t)t^{-3/2}\, dt = +\infty \Leftrightarrow \int_1^\infty t^{-1/2}\, df(t) = +\infty\ . \tag{3.4.5}$$

Aus den Beziehungen (3.4.3) und (3.4.5) folgt, daß für genügend große t ein $\varepsilon > 0$ existiert, mit $P(< \xi >_\infty > t) < \varepsilon \cdot t^{-1/2}$. Das heißt:

$$P(< \xi >_\infty > t) = o(t^{-1/2}) \quad \text{für } t \to \infty\ . \tag{3.4.6}$$

Das ist äquivalent mit:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}P(< \xi >_\infty > t) = 0\ . \tag{3.4.7}$$

Daraus folgt dann $\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t}P(< \xi >_\infty > t) = 0$. □

Bemerkung 3.4.3. *Wenn wir speziell $\xi_t = B_{t\wedge\tau}$ und $f(t) = \sqrt{t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ betrachten, dann erfüllt f die Eigenschaften von Satz 3.4.1. Speziell wird dann der Satz 3.4.1 zu Satz 3.0.3.*

$$E(f(< \xi >_\infty)) = E(\tau^{1/2}) < +\infty \quad \Rightarrow \quad E(B_\tau) = 0\ .$$

Nach dem Satz 3.4.1 und der Proposition 3.4.2 ist dann die Voraussetzung $E(\tau^{1/2}) < +\infty$ für eine Stoppzeit τ der Brownschen Bewegung stärker als die Voraussetzung $\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t}P(\tau > t) = 0$.

3.5 Verfeinerung der ersten Waldidentität für spezielle Stoppzeiten der Brownschen Bewegung

Wir behandeln nun spezielle Stoppzeiten, die den Satz 3.3.5 erfüllen bzw. nicht erfüllen. Das nächste Beispiel stammt aus dem Artikel von Novikov [Nov96], Beispiel 1, S.720. Es behandelt die erste einseitige Überschreitungszeit der Brownschen Bewegung.

Beispiel 3.5.1. *Sei* $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ *und* $a \neq 0$. *Dann gilt die Gleichung*

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}P(\tau_a > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|a| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|E(B_{\tau_a})| \ . \tag{3.5.1}$$

Beweis:

Aus der Sektion 2.8 kennen wir die Dichte von τ_a für alle $a \neq 0$:

$$f_{\tau_a}(u) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{a^2}{2u}) \quad \forall u > 0$$

Wir betrachten dann die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\tau_a > t) = \int_t^\infty \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{a^2}{2u})\, du$$

Als Nächstes führen wir eine Variablensubstitution: $\frac{|a|}{\sqrt{u}} = x$ durch. Wir bekommen dann:

$$P(\tau_a > t) = \int_{\frac{|a|}{t}}^0 \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x^2}{2})\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{|a|}{t}} exp(-\frac{x^2}{2})\, dx \ . \tag{3.5.2}$$

Nun führen wir eine Reihenentwicklung von dem Integral auf der rechten Seite an der Stelle 0 durch und bekommen die folgende Reihe:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{|a|}{t}} exp(-\frac{x^2}{2})\, dx &= \int_0^0 exp(-\frac{x^2}{2})\, dx + exp(-\frac{x^2}{2})|_{x=0} \cdot (\frac{|a|}{\sqrt{t}}) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{|a|^2}{t}\frac{d}{dx} exp(-\frac{x^2}{2})|_{x=0} + O(\frac{1}{t^{3/2}}) \text{ für } t \to \infty \\
&= \frac{|a|}{\sqrt{t}} + O(\frac{1}{t^{3/2}}) \text{ für } t \to \infty
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für $t \to \infty$:

$$\sqrt{t}P(\tau_a > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(|a| + O(\frac{1}{t}))$$

Zusammen mit $B_{\tau_a} = a$ f.s. bekommen wir das gesuchte Resultat (3.5.1):

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}P(\tau_a > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|a| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|E(B_{\tau_a})|$$

□

Bemerkung 3.5.2. *Um die Identität (3.5.1) zu bekommen, hätten wir auch das Lemma 3.3.2 anwenden können. Dazu müssen wir zeigen, daß die Voraussetzungen von dem Lemma 3.3.2 erfüllt sind.*

Beweis:

$(B_{t\wedge\tau_a})_t$ ist ein Martingal nach Satz 2.4.1 und damit auch ein lokales Martingal. Es gilt $< B >_{\tau_a} = \tau_a < +\infty$ f.s. Nun ist $B_{t\wedge\tau_a} \leq a$ f.s. für alle $a \geq 0$ und daher ist die Cramer-Bedingung (3.3.3) für alle $\lambda > 0$ und alle $a \geq 0$ erfüllt:

$$\sup_t E(exp(\lambda B_{t\wedge\tau_a})) \leq exp(\lambda a) < +\infty \ .$$

Für $a < 0$ haben wir $-B_{t\wedge\tau_a} \leq a$. Und da $-B_t$ dieselbe Verteilung wie B_t hat, erhalten wir für $a < 0$ ebenfalls die Cramer-Bedingung (3.3.3) für alle $\lambda > 0$. Daher sind alle Eigenschaften von Lemma 3.3.2 erfüllt. □

Wir wollen nun ein Gegenbeispiel aus dem Artikel von Novikov [Nov96], Beispiel 1, S.720 zeigen. Das heisst, wir wollen eine spezielle Stoppzeit angeben, wofür die Gleichung in Lemma 3.3.2 nicht mehr gilt. Wir betrachten hierfür die erste Rückkehrzeit der Brownschen Bewegung.

Gegenbeispiel 3.5.3. *Seien $a > 0$ und $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Seien $a > b$ und:*

$$\sigma_{a,b} = \inf\{t \geq \tau_a : B_t = b\} \ . \tag{3.5.3}$$

Dann folgt die strikte Ungleichung:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}P(\sigma_{a,b} > t) > \sqrt{\frac{2}{\pi}}|E(B_{\sigma_{a,b}})| \tag{3.5.4}$$

Beweis:

Wir wollen die Verteilung der Stoppzeit $\sigma_{a,b}$ studieren und diese bekommen wir, mit Hilfe des Reflektionsprinzips. Wir verfahren dann analog, wie in der Sektion 2.8.

Wir können das Ereignis $\{\sigma_{a,b} \leq t\}$ für alle $a > b$ explizit angeben:

$$\{\sigma_{a,b} \leq t\} = \{\exists s \in [\tau_a, t] : B_s \leq b\} \ . \tag{3.5.5}$$

Wir erhalten dann die Verteilung von $\sigma_{a,b}$ für alle $a > b$ und $a > 0$:

$$\begin{aligned} P(\sigma_{a,b} \leq t) &= P(\inf_{\tau_a \leq s \leq t} B_s \leq b) = P(\inf_{\tau_a \leq s \leq t} B_s - a \leq b - a) \\ &= P(\sup_{\tau_a \leq s \leq t} -B_s + a \geq a - b) = P(\sup_{\tau_a \leq s \leq t} B_s - a \geq a - b) \\ &= P(\tau_a \leq t, \sup_{0 \leq s \leq t - \tau_a} B_{s+\tau_a} \geq 2a - b) \end{aligned}$$

Zweite Gleichung: Verschiebung der Brownschen Bewegung nach oben. Dritte Gleichung: Mit -1 multipliziert. Vorletzte Gleichung: Auf dem Intervall $[\tau_a, t]$ ist $-B + a$ genau so verteilt, wie $B - a$. Letzte Gleichung: Zeittransformation. Nun sei $\bar{B}_t = B_{t+\tau_a}$, für alle $t \geq 0$. Dann ist $\bar{B}$ eine zeittransformierte Brownsche Bewegung. Wir gehen dann analog vor, wie in der Sektion 2.8 und erhalten ein analoges Resultat, zu der Relation (2.8.3):

$$\begin{aligned} P(\sigma_{a,b} \leq t) &= P(\tau_a \leq t, \sup_{0 \leq s \leq t - \tau_a} \bar{B}_s \geq 2a - b) = 2P(\tau_a \leq t, \bar{B}_{t-\tau_a} > 2a - b) \\ &= 2P(B_t > 2a - b) \ . \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Für die Stoppzeit τ_{2a-b} wissen wir bereits aus der Sektion 2.8, Gleichungen (2.8.3) und (2.8.5), daß folgende Beziehung erfüllt ist:

$$P(\tau_{2a-b} \leq t) = 2P(B_t > 2a - b) \tag{3.5.7}$$

Mit (3.5.6) und (3.5.7) erhalten wir dann:

$$P(\sigma_{a,b} \leq t) = 2P(B_t > 2a - b) = P(\tau_{2a-b} \leq t) \ .$$

Somit haben $\sigma_{a,b}$ und τ_{2a-b} dieselbe Verteilung. Wir bekommen dann auch $P(\sigma_{a,b} > t) = 1 - P(\sigma_{a,b} \leq t) = 1 - P(\tau_{2a-b} \leq t) = P(\tau_{2a-b} > t)$, für alle $t \geq 0$. Somit erhalten wir:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} P(\sigma_{a,b} > t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{t} P(\tau_{2a-b} > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} |E(B_{\tau_{2a-b}})| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2a - b) \ .$$

Erste Gleichung: $\sigma_{a,b}$ und τ_{2a-b} sind gleichverteilt. Zweite Gleichung: Beispiel 3.5.1. Aber da $2a - b > |b|$ ist, für $a > b$ und $a > 0$, gilt die strikte Ungleichung (3.5.4). □

Bemerkung 3.5.4. *Die Cramer-Bedingung ist für $(B_{t\wedge\sigma_{a,b}})_t$ nicht erfüllt. Das heißt für alle $\lambda > 0$ gilt:*

$$\sup_{t>0} E(exp(\lambda B_{t\wedge\sigma_{a,b}})) = +\infty \ . \tag{3.5.8}$$

Beweis:

$(B_{t\wedge\sigma_{a,b}})_t$ ist ein Martingal bzgl. der kanonischen Filtration der Brownschen Bewegung. Außerdem gilt: $< B >_{\sigma_{a,b}} = \sigma_{a,b} < +\infty$ f.s., weil $P(\sigma_{a,b} < +\infty) = P(\tau_{2a-b} < +\infty) = 1$, wegen $P(\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty) = 1$ ist. Somit sind bis auf die Cramer-Bedingung alle Voraussetzungen von Lemma 3.3.2 erfüllt. Die Cramer-Bedingung kann nicht gelten, weil wir im Gegenbeispiel 3.5.3 die strikte Ungleichung (3.5.4) verifizieren konnten. □

3.6 Beispiele für lokale Martingale für die Verfeinerung der ersten Waldidentität

Wir geben spezielle lokale Martingale an und schauen, ob diese die Aussagen des Satzes 3.3.5 erfüllen. Wir gelangen zu der Frage, ob es ein lokales Martingal ξ gibt, daß die Bedingungen in dem Satz 3.3.5 erfüllt, aber für das

$$\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t) = 0 \tag{3.6.1}$$

gilt, aber

$$\limsup_{t\to\infty} \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t) > 0 \tag{3.6.2}$$

ist? Für den Fall, daß es so ist, welche Schlußfolgerungen können wir ziehen? Das folgende Beispiel stammt aus der Referenz [Sto97], Kapitel 24.7, S.290.

Beispiel 3.6.1. *Sei $(t_n)_n$ eine Folge von Zeiten, mit $t_1 = 1$ und $t_{i+1} > t_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und die Funktion g sei folgendermaßen definiert:*

$$g(s) := \begin{cases} 1 & , \textit{wenn} \quad 0 \le s < 1 = t_1 \\ 1/s & , \textit{wenn} \quad t_i \le s < t_{i+1} \textit{ für ungerade } i \\ \sqrt{2} & , \textit{wenn} \quad t_i \le s < t_{i+1} \textit{ für gerade } i,\ i \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Seien $\tau_1 = \inf\{t \ge 0 : B_t = 1\}$ und $\sigma_{1,0} = \inf\{t \ge \tau_1 : B_t = 0\}$. Wir definieren den folgenden Prozess ξ durch:

$$\xi_t := \int_0^{t\wedge\sigma_{1,0}} g(s)\,dB_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\sigma_{1,0}\geq s\}} g(s)\,dB_s \ .$$

Dann gilt (3.6.1) und (3.6.2).

Beweis:

Wir zeigen zuerst, daß $E(<\xi>_t) < +\infty$, für alle $t \geq 0$ ist.

$$E(<\xi>_t) = E(\int_0^{t\wedge\sigma_{1,0}} g(s)^2\,ds) = E(G(t\wedge\sigma_{1,0})) \quad \forall t \ .$$

Hierbei ist $G(t) := \int_0^t g(s)^2\,ds$. Diese Funktion ist wohldefiniert für alle t, da aus der Definition von $g(s)$ folgt, daß $g(s)^2$ integrierbar auf $[0,t]$ ist. Außerdem ist G streng monoton wachsend. Es gilt dann für alle t:

$$E(<\xi>_t) = E(G(t\wedge\sigma_{1,0})) \leq G(t) < +\infty \ .$$

Als Wiener-Integral ist ξ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal. Nach dem Satz 4.21. und dem Beweis, S.171-173 aus dem Buch [HacTha99] gilt genau dann $E(<\xi>_t) < +\infty$ für alle t, wenn ξ ein quadratisch integrierbares Martingal ist. Nun ist

$$<\xi>_\infty = G(\sigma_{1,0}) := \int_0^{\sigma_{1,0}} g(s)^2\,ds \text{ f.s.} \tag{3.6.3}$$

Die Stoppzeit $\sigma_{1,0}$ hat nach dem Gegenbeispiel 3.5.3 dieselbe Verteilung, wie $\tau_2 = \inf\{t \geq 0 : B_t = 2\}$. Also gilt $P(\sigma_{1,0} > t) = P(\tau_2 > t)$. Nach dem Beispiel 3.5.1 haben wir für genügend große t, $P(\tau_2 > t) = ct^{-1/2}(1 + O(\frac{1}{t}))$, wobei $c = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ist. Da die Funktion G positiv und streng monoton wachsend ist, gibt es eine ebenfalls positive, streng monoton wachsende, inverse Funktion G^{-1} mit

$$\begin{aligned} P(<\xi>_\infty > t) &= P(G(\sigma_{1,0}) > t) = P(\sigma_{1,0} > G^{-1}(t)) \\ &= c(G^{-1}(t))^{-\frac{1}{2}}(1 + O(\frac{1}{t})) \ , \text{ für } t \to \infty \ . \end{aligned}$$

Nun setzen wir $t_i = i$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei $t \in [2i-1, 2i[$. Dann gilt nach Definition von g und G:

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{i-1}\int_{2k-1}^{2k} \frac{1}{s^2}\,ds + \int_{2i-1}^{t} \frac{1}{s^2}\,ds + \sum_{k=1}^{i-1}\int_{2k}^{2k+1} 2\,ds \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{i-1}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) + (\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{t}) + (i-1)\cdot 2 \end{aligned}$$

Nun gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \ .$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
G(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{i-1} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) + (\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{t}) + 2(i-1) \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{i-1} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}) + (\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{t}) + 2(i-1) \\
&= 2i - \frac{1}{t} \ .
\end{aligned}$$

Für die inverse Funktion G^{-1} bekommen wir dann eine untere Schranke:

$$\frac{1}{2i-t} \leq G^{-1}(t) \quad \forall t \in [2i-1, 2i[\ .$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{\frac{t}{G^{-1}(t)}} \leq \sqrt{t(2i-t)} \quad \forall t \in [2i-1, 2i[\ .$$

Es gilt $\inf_{t \in [2i-1, 2i[} \sqrt{t(2i-t)} = 0$. Daraus folgt

$$0 = \lim_{i \to \infty} \inf_{t \in [2i-1, 2i[} \sqrt{t(2i-t)} \geq \liminf_{t \to \infty} \sqrt{\frac{t}{G^{-1}(t)}} \ .$$

Somit ist also $\liminf_{t \to \infty} \sqrt{\frac{t}{G^{-1}(t)}} = 0$. Das ist äquivalent mit

$$\liminf_{t \to \infty} \sqrt{t} P \left(\int_0^{\sigma_{1,0}} g(s)^2 \, ds > t \right) = \liminf_{t \to \infty} \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t) = 0 \ .$$

Lemma 3.6.2. *Sei $\sigma_{1,0}$ wie oben definiert und $\xi_t := \int_0^{t \wedge \sigma_{1,0}} g(s) \, dB_s$, für alle t. Dann konvergiert ξ_t f.s. gegen ξ_∞, für $t \to \infty$ und es gilt:*

$$E(|\xi_\infty|) < +\infty \ . \tag{3.6.4}$$

Beweis von Lemma 3.6.2:

Nach Sektion 2.8 ist $\tau_2 < +\infty$ f.s. Wir hatten bereits erwähnt, daß τ_2 dieselbe Verteilung hat, wie $\sigma_{1,0}$. Dann ist auch $\sigma_{1,0} < +\infty$ f.s. Dann ist $< \xi >_\infty < +\infty$ f.s., wegen (3.6.3). Nach Proposition 2.7.2 existiert:

$$\xi_\infty = \lim_{t\to\infty} \xi_t \text{ f.s.} \tag{3.6.5}$$

Wir können einen Zeitwechsel einführen:

$$T_t = \inf\{s \geq 0 : < \xi >_s > t\} = \inf\{s \geq 0 : \int_0^s g(u)^2\, du > t\} \ . \tag{3.6.6}$$

Wir bekommen dann die Gleichheit:

$$E(|\xi_\infty|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E(\sqrt{< \xi >_\infty}) \ . \tag{3.6.7}$$

Wir können dann die rechte Seite partiell integrieren und erhalten:

$$\begin{aligned} E(\sqrt{< \xi >_\infty}) &= \int_0^\infty \sqrt{t}\, dP(< \xi >_\infty \leq t) \\ &= \int_0^1 \sqrt{t}\, dP(< \xi >_\infty \leq t) + \int_1^\infty \sqrt{t}\, dP(< \xi >_\infty \leq t) \\ &= \int_0^1 \sqrt{t}\, dP(< \xi >_\infty \leq t) - \int_1^\infty \sqrt{t}\, dP(< \xi >_\infty > t) \\ &= \int_0^1 \sqrt{t}\, dP(< \xi >_\infty \leq t) - \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t)|_1^\infty \\ &+ \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} P(< \xi >_\infty > t)\, dt \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

Das erste Integral auf der rechte Seite ist von oben und von unten beschränkt. G^{-1} ist eine monoton wachsende Funktion, und somit ist $\frac{1}{\sqrt{G^{-1}(\bullet)}}$ eine monoton fallende Funktion ist. Dann bekommen wir:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} P(< \xi >_\infty > t) = \lim_{t\to\infty} c \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t G^{-1}(t)}} = 0 \ .$$

Daher ist das zweite Integral auf der rechten Seite endlich. Angenommen für den zweiten Term auf der rechten Seite von (3.6.8) gelte:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} P(< \xi >_\infty > t) = +\infty \ .$$

Dadurch, daß die anderen beiden Terme endlich sind und von unten durch Null beschränkt sind, würde dann

$$E(\sqrt{<\xi>_\infty}) = -\infty$$

folgen. Das kann aber nicht sein, weil $<\xi>_\infty \geq 0$ f.s. ist und somit auch $E(\sqrt{<\xi>_\infty}) \geq 0$ ist. Somit ist die rechte Seite von (3.6.8) endlich und es gilt:

$$+\infty > \sqrt{\frac{2}{\pi}} E(\sqrt{<\xi>_\infty}) = E(|\xi_\infty|) \; . \tag{3.6.9}$$

□

Nach Satz 3.3.5 gilt dann:

$$E\left(\int_0^{\sigma_{1,0}} g(s)\, dB_s\right) = E(\xi_\infty) = 0 \; .$$

Nun sei $t \in [2i, 2i+1[$. Dann gilt nach Definition von g und G.

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{i} \int_{2k-1}^{2k} \frac{1}{s^2}\, ds + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{2k}^{2k+1} 2\, ds + \int_{2i}^{t} 2\, ds \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{i} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) + 2(i-1) + 2(t-2i) \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$0 = (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-1}) \leq \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \; .$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{i} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) + 2i - 2 + 2(t-2i) \\ &\geq -1 + 2i + 2(t-2i) \\ &= -1 + 2t - 2i \; . \end{aligned}$$

Für die inverse Funktion bekommen wir eine obere Schranke:

$$G^{-1}(t) \leq \frac{t + 2i + 1}{2} \text{ für } t \in [2i, 2i+1[\; .$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{\frac{2t}{t+2i+1}} \leq \sqrt{\frac{t}{G^{-1}(t)}} \quad \forall t \in [2i, 2i+1[\ .$$

Außerdem gilt noch $\sup_{t\in[2i,2i+1[} \sqrt{\frac{2t}{t+2i+1}} = \sqrt{\frac{2(2i+1)}{2i+1+2i+1}} = \sqrt{\frac{4i+2}{4i+2}} = 1$. Daraus folgt:

$$1 = \lim_{i\to\infty} \sup_{t\in[2i,2i+1[} \sqrt{\frac{2t}{t+2i+1}} \leq \limsup_{t\to\infty} \sqrt{\frac{t}{G^{-1}(t)}}\ .$$

Also erhalten wir mit $c = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$:

$$\limsup_{t\to\infty} \sqrt{t}P(< \xi >_\infty > t) = c \limsup_{t\to\infty} \sqrt{\frac{t}{G^{-1}(t)}} > 0\ .$$

□

Bemerkung 3.6.3. *Somit haben wir zwar ein lokales, quadratisch integrierbares Martingal ξ gefunden, für das der Erwartungswert von ξ_∞ existiert bzw. gleich Null ist, aber es ist nicht gleichgradig integrierbar, weil die Beziehung (3.6.2) nach Azema (1980) eine hinreichende und notwendige Bedingung für die nichtgleichgradige Integrierbarkeit von ξ ist.*

Wir zeigen nun ein Beispiel, wo zwar $\liminf_{t\to\infty} \sqrt{t}P(< \xi >_\infty > t) = 0$ ist, aber wir können dann nicht folgern, daß der Erwartungswert von ξ_∞ gleich Null ist, weil nämlich die Voraussetzung $E(|\xi_\infty|) < +\infty$ aus Satz 3.3.5 nicht erfüllt ist. Es stammt aus der Literatur [Nov96], Beispiel 2, S.720/721:

Gegenbeispiel 3.6.4. *Sei τ eine positive Zufallsvariable, mit der Verteilung $P(\tau > t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$, für $t > 0$. τ sei unabhängig von der Brownschen Bewegung $(B_t)_t$ und $\xi_t = \int_0^{t\wedge\tau} g(s)\, dB_s$, wobei*

$$g(s) := \begin{cases} 1 & , \textit{wenn} \quad 0 < s \leq 2 \\ log(s)^{-\frac{\alpha}{2}} & , \textit{wenn} \quad 2 < s \end{cases}\ .$$

Dann ist $(\xi_t)_t$ ein lokales Martingal bzgl. der Filtration der Brownschen Bewegung und es gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}P(< \xi >_\infty > t) = 0\ . \tag{3.6.10}$$

Ferner existiert der Erwartungswert von ξ_∞ nicht.

Beweis:

Wir setzen $G(t) = \int_0^t g(s)^2\, ds$. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} P(<\xi>_\infty > t) &= P(G(\tau) > t) = P(\tau > G^{-1}(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+G^{-1}(t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G^{-1}(t)}}(1+O(\frac{1}{t})) \text{ für } t \to \infty \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion von G existiert, weil G streng monoton wachsend ist. Sei nun speziell für $\alpha > 0$:

$$g(s) := \begin{cases} 1 & \text{, wenn } \quad 0 < s \leq 2 \\ log(s)^{-\frac{\alpha}{2}} & \text{, wenn } \quad 2 < s \end{cases} .$$

Nach den Eigenschaften von regulären Funktionen (siehe [Sen76]) bekommen wir dann für $t \to \infty$:

$$G(t) = t(log(t))^{-\alpha}(1+O(1)) \text{ und } G^{-1}(t) = t(log(t))^{\alpha}(1+O(1)) \ . \tag{3.6.11}$$

Deswegen gilt für $\alpha > 0$:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}P(<\xi>_\infty > t) = \lim_{t\to\infty} log(t)^{-\frac{\alpha}{2}} = 0$$

Wir werden nun zeigen, daß der Erwartungswert von ξ_∞ nicht existiert. Wir können $E(\sqrt{<\xi>_\infty})$ partiell integrieren:

$$\begin{aligned} E(\sqrt{<\xi>_\infty}) &= \int_0^\infty \sqrt{t}\, dP(<\xi>_\infty \leq t) \\ &= -\sqrt{t}P(<\xi>_\infty > t)|_0^\infty \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}P(<\xi>_\infty > t)\, dt \ . \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

Wir wollen erklären, warum der erste Term auf der rechten Seite in (3.6.12) verschwindet. Für $t \to \infty$ gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{t}P(<\xi>_\infty > t) &= \sqrt{t}P(G(\tau) > t) = \sqrt{t}P(\tau > G^{-1}(t)) \\ &= \sqrt{t}P(\tau > t(log(t))^\alpha) = \sqrt{\frac{t}{1+t(log(t))^\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{t}+log(t)^\alpha}} \to 0 \ . \end{aligned}$$

Erstes Gleichheitszeichen: $<\xi>_\infty = G(\tau)$. Zweites Gleichheitszeichen: Umkehrfunktion von G existiert. Drittes Gleichheitszeichen: rechte Gleichung in (3.6.11). Viertes Gleichheitszeichen: Definition der Stoppzeit τ.

Es ist klar, daß $\sqrt{t}P(<\xi>_\infty > t) = 0$ ist, für $t = 0$.

Nun können wir substituieren und zwar $t = G(u) = \int_0^u g(s)^2\,ds$. Dann erhalten wir $dt = g(u)^2 du$. Unter Verwendung von Gleichung (3.6.12) haben wir dann:

$$
\begin{aligned}
E(\sqrt{<\xi>_\infty}) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} P(<\xi>_\infty > t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (G(u))^{-1/2} P(\tau > u) g(u)^2\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (G(u))^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{1+u}} g(u)^2\,du
\end{aligned}
$$

Für $u \to \infty$ und $\alpha > 0$ ist $g(u)^2 = (log(u))^{-\alpha}$. Dann erhalten wir für $u \to \infty$, wegen (3.6.11):

$$
u^{-1/2}(log(u))^{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{u+1}}(log(u))^{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{u(u+1)}}\frac{1}{(log(u))^{\alpha/2}} \to 0 \ .
$$

Für $u \to 0$ ist $g(u) = 1$ und $G(u) = u$. Dann erhalten wir für den Integranden:

$$
u^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{u+1}} = \frac{1}{\sqrt{u(u+1)}} \to \infty \ , \text{ für } u \to 0
$$

Somit divergiert das Integral und wir bekommen:

$$
E(\sqrt{<\xi>_\infty}) = +\infty \ . \tag{3.6.13}
$$

Wir können nun den gleichen Zeitwechsel für das lokale Martingal $\int_0^\bullet g(s)\,dB_s$ machen, den wir schon in dem Beispiel 3.6.1 eingeführt haben:

$$
T_t = \inf\{s \geq 0 : <\xi>_s > t\} = \inf\{s \geq 0 : \int_0^s g(u)^2\,du > t\} \ . \tag{3.6.14}
$$

Wir erhalten dann:

$$
E(\xi_\infty^-) = E(\xi_\infty^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}E(\sqrt{<\xi>_\infty}) = +\infty \ . \tag{3.6.15}
$$

Erste Gleichung: ξ_∞^+ und ξ_∞^- sind gleichverteilt, weil $-B_t$ genau so verteilt ist, wie B_t. Zweite Gleichung: Zeitwechsel. Die Unendlichkeit der rechten Seite folgt aus (3.6.13). Somit existiert der Erwartungswert von ξ_∞ nicht, obwohl (3.6.10) gilt. $\square$

3.7 Überschreitungszeiten der Brownschen Bewegung für nichtlineare Schranken

Diese Sektion beschäftigt sich mit dem Verhalten der Standard Brownschen Bewegung $(B_t)_t$ für nichtlineare Funktionen f. Hierbei ist f immer eine stetige, unbeschränkte Funktion. Für stetige, beschränkte Funktionen ist es trivial, den Satz 3.7.1 zu zeigen. Der Satz 3.7.1 wurde aus dem Artikel von Novikov [Nov96], Sektion 3, Satz 2, S.721-723, übernommen. Für den Fall, daß f eine stückweise stetige Funktion ist und daß die Sprünge von f beschränkt sind, d.h. also $\sup_{t\geq 0}|f(t)-f(t)^-|<c$, wobei f^- der linksseitige Limes ist und $c>0$, würde der nachfolgende Satz 3.7.1 auch gelten (siehe zum Beispiel [Nov83], Kapitel 1, Satz 3, S. 144).

Satz 3.7.1. *Sei $(B_t)_t$ die Brownsche Bewegung und sei*

$$\tau_f := \inf\{t \geq 0 : B_t = f(t)\} \ . \tag{3.7.1}$$

Außerdem sei $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion (entweder wachsend oder fallend) mit $f(0)>0$. Dann ist $0 \leq E(B_{\tau_f}) \leq \infty$ und wir haben die Gleichheit:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}P(\tau_f > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}E(B_{\tau_f}). \tag{3.7.2}$$

Falls f eine monoton wachsende Funktion ist, dann ist $E(B_{\tau_f})>0$ und

$$E(B_{\tau_f}) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t)t^{-3/2}\,dt < +\infty \tag{3.7.3}$$

Falls f eine fallende, konvexe Funktion ist, dann ist $E(B_{\tau_f})<\infty$ und

$$E(B_{\tau_f}) > 0 \Leftrightarrow \int_1^\infty |f(t)|t^{-3/2}\,dt < +\infty \ . \tag{3.7.4}$$

Beweis der Äquivalenz (3.7.3):
(Für den Fall, daß τ_f nicht f.s. endlich ist, ist das Resultat trivial). Sei also f eine monoton wachsende Funktion, so daß $\tau_f < +\infty$ f.s. Dann existiert B_{τ_f} nach Proposition 2.7.2 und da $f(0)>0$ ist, folgt:

$$E(B_{\tau_f}) = E(f(\tau_f)) > 0 \ . \tag{3.7.5}$$

Als Nächstes wollen wir die Beziehung (3.7.3) herleiten. Wegen der Stetigkeit der Probepfade der Brownschen Bewegung haben wir $B_{\tau_f} = f(\tau_f)$ f.s. Nun können wir das Lemma 3.1.6 mit $Z=\tau_f$ anwenden:

$$
\begin{aligned}
E(B_{\tau_f}) &= E(f(\tau_f)) \\
&= \int_1^\infty P(\tau_f > u)\, df(u) + \int_0^1 P(\tau_f > u)\, df(u) + f(0) \\
&= \int_1^\infty P(\tau_f > u)\, df(u) + c\ . \qquad (3.7.6)
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $c = \int_0^1 P(\tau_f > u)\, df(u) + f(0)$. Somit ergibt sich die Äquivalenz:

$$
E(B_{\tau_f}) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^\infty P(\tau_f > t)\, df(t) < +\infty\ . \qquad (3.7.7)
$$

Wegen der Monotonität der Funktion f gilt $f(s) \geq f(t)$, für alle $s > t$ und dann erhalten wir die Abschätzung:

$$
\int_t^\infty f(s) s^{-3/2}\, ds \geq f(t) \int_t^\infty s^{-3/2}\, ds = f(t)(-2s^{-1/2})|_t^\infty = 2t^{-1/2} f(t)
$$

Insgesamt erhalten wir dann: $f(t) \leq \frac{\sqrt{t}}{2} \int_t^\infty f(s) s^{-3/2}\, ds = o(\sqrt{t})$, für $t \to \infty$. Deswegen haben wir für alle $t > 0$:

$$
f(t) \leq c_1 \sqrt{t} + c_2\ , \qquad (3.7.8)
$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten sind. Die Funktion f ist monoton wachsend, deswegen haben wir $f(t) \geq f(0)$, für alle $t \geq 0$. Dann ist für $t \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
P(\tau_f > t) &= P(B_s < f(s), 0 \leq s \leq t) \\
&\geq P(B_s < f(0), 0 \leq s \leq t) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \frac{1}{\sqrt{t}} (1 + O(\frac{1}{t}))\ . \qquad (3.7.9)
\end{aligned}
$$

Wir benutzen die Beziehung (3.7.9) und integrieren partiell:

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty P(\tau_f > t)\, df(t) &\geq C \int_1^\infty t^{-1/2} (1 + O(\frac{1}{t}))\, df(t) \\
&= C(\int_1^\infty 1/2 f(t) t^{-3/2} (1 + O(\frac{1}{t}))\, dt + f(t) t^{-1/2} (1 + O(\frac{1}{t}))|_1^\infty) \\
&= C_1 \int_1^\infty f(t) t^{-3/2}\, dt + C_2\ .
\end{aligned}
$$

Hier haben wir benutzt, daß $f(t)t^{-1/2}|_1^\infty$ endlich ist, aufgrund der Relation (3.7.8). Also erhalten wir die folgende Implikation:

$$\int_1^\infty P(\tau_f > t)\, df(t) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty f(t) t^{-3/2}\, dt < \infty \tag{3.7.10}$$

Die Beziehung (3.7.8) und die Definition der Stoppzeit τ_f implizieren:

$$B_{t\wedge\tau_f} \le f(t \wedge \tau_f) \le c_1\sqrt{t \wedge \tau_f} + c_2 \quad \text{f.s.}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0}(\lambda B_{t\wedge\tau_f} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge \tau_f)) &\le \sup_{t>0}(\lambda(c_1\sqrt{t\wedge\tau_f} + c_2) - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge \tau_f)) \\
&= \sup_{t>0}(-\frac{1}{2}(c_1 - \lambda\sqrt{t\wedge\tau_f})^2 + \frac{c_1^2}{2}) + \lambda c_2 \\
&\le \frac{c_1^2}{2} + \lambda c_2 \qquad (3.7.11)
\end{aligned}$$

Nach der Bemerkung 3.3.4 bekommen wir die Beziehung:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} P(\tau_f > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E(B_{\tau_f}) \ .$$

Wir erhalten für die Verteilung von $\tau_f \wedge k$ und alle $\lambda > 0$, $k > 0$ und $t > 0$:

$$\begin{aligned}
P(\tau_f \wedge k > t) &= P(1 - exp(-\frac{\lambda^2}{2}(\tau_f \wedge k) > 1 - exp(-\frac{\lambda^2}{2}t)) \\
&\le \frac{1}{1 - exp(-\frac{\lambda^2}{2}t)} E(1 - exp(-\frac{\lambda^2}{2}(\tau_f \wedge k))) \\
&= \frac{1}{1 - exp(-\frac{\lambda^2}{2}t)} E(exp(\lambda B_{\tau_f\wedge k} - \frac{\lambda^2}{2}(\tau_f \wedge k)) - exp(-\frac{\lambda^2}{2}(\tau_f \wedge k))) \\
&= \frac{1}{1 - exp(-\frac{\lambda^2}{2}t)} E((exp(\lambda B_{\tau_f\wedge k}) - 1)exp(-\frac{\lambda^2}{2}(\tau_f \wedge k))) \qquad (3.7.12)
\end{aligned}$$

Erste Ungleichung: Tschebyscheff-Ungleichung. Zweite Gleichung: Stoppsatz von Doob. Außerdem erhalten wir für alle $\lambda > 0$,$k > 0$ und $t > 0$ in (3.7.12) die folgende Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
P(\tau_f \wedge k > t) &\leq \frac{1}{1-exp(-\frac{\lambda^2}{2}t)} E((exp(\lambda B_{\tau_f \wedge k}) - 1)exp(-\frac{\lambda^2}{2}(\tau_f \wedge k))) \\
&\leq \frac{1}{1-exp(-\frac{\lambda^2}{2}t)} E(\lambda B_{\tau_f \wedge k} exp(\lambda B_{\tau_f \wedge k}) exp(-\frac{\lambda^2}{2}(\tau_f \wedge k))) \\
&\leq \frac{1}{1-exp(-\frac{\lambda^2}{2}t)} E(\lambda B_{\tau_f \wedge k} exp(\frac{c_1^2}{2} + \lambda c_2)) \\
&\leq \frac{1}{1-exp(-\frac{\lambda^2}{2}t)} E(\lambda f(\tau_f \wedge k)) exp(\frac{c_1^2}{2} + \lambda c_2) \ .
\end{aligned}
$$

Zweite Ungleichung: $e^x - 1 \leq \max\{0, x\} e^x$. Dritte Ungleichung: Ungleichung (3.7.11). Vierte Ungleichung: $B_{\tau_f \wedge k} \leq f(\tau_f \wedge k)$ f.s. Wir setzen nun $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Für beliebige $t > 1$ und $k > 0$ gilt dann:

$$
\begin{aligned}
P(\tau_f \wedge k > t) &\leq \frac{1}{1-exp(-\frac{1}{2})} t^{-1/2} E(f(\tau_f \wedge k)) exp(\frac{c_1^2}{2} + t^{-1/2} c_2) \\
&\leq \frac{1}{1-exp(-\frac{1}{2})} t^{-1/2} E(f(\tau_f \wedge k)) exp(\frac{c_1^2}{2} + c_2) \\
&= c_3 t^{-1/2} E(f(\tau_f \wedge k)) \ . \qquad (3.7.13)
\end{aligned}
$$

wobei $c_3 = \frac{1}{1-exp(-\frac{1}{2})} exp(\frac{c_1^2}{2} + c_2)$. Wir wollen als Nächstes, daß die Ungleichung (3.7.13) auf die Äquivalenzrelation

$$
E(B_{\tau_f}) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^\infty f(t) t^{-3/2}\, dt < +\infty
$$

führt. Wir bemerken, daß die Bedingung $\int_1^\infty f(t)t^{-3/2}\, dt < +\infty$ die Existenz einer monotonen, stetigen, positiven Funktion g impliziert, mit $f(t) = o(g(t))$ für $t \to \infty$, wobei g die Eigenschaft $\int_1^\infty g(t)t^{-3/2}\, dt < +\infty$ hat. Wir wollen den Erwartungswert von $g(\tau_f \wedge k)$ betrachten. Wir können dann Lemma 3.1.6 mit $Z = \tau_f \wedge k$ anwenden und erhalten:

$$
\begin{aligned}
E(g(\tau_f \wedge k)) &= \int_0^\infty g(t)\, dP(\tau_{f \wedge k} \leq t) = \int_1^\infty P(\tau_f \wedge k > t)\, dg(t) + c \\
&\leq c_3 E(f(\tau_f \wedge k)) \int_1^\infty t^{-1/2}\, dg(t) + c \qquad (3.7.14)
\end{aligned}
$$

Erste Ungleichung: Die Beziehung (3.7.13). Nun gilt:

$$
+\infty > \int_1^\infty g(t) t^{-3/2}\, dt = -2t^{-1/2} g(t)|_1^\infty + 2 \int_1^\infty t^{-1/2}\, dg(t)
$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist endlich, weil $g(t) = o(\sqrt{t})$ ist, für $t \to \infty$. Das folgt aus den Eigenschaften von g, siehe (3.7.8). Somit haben wir die Äquivalenz:

$$\int_1^\infty g(t)t^{-3/2}\, dt < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^\infty t^{-1/2}\, dg(t) < +\infty \; . \tag{3.7.15}$$

Somit haben wir herausgefunden, daß in (3.7.14) die folgende Ungleichung für alle $k > 0$ gilt:

$$E(g(\tau_f \wedge k)) \leq c_4 E(f(\tau_f \wedge k)) + c \tag{3.7.16}$$

Da f eine Funktion der Ordnung g ist, existiert eine Konstante c_ε für beliebiges $\varepsilon > 0$, mit $f(t) \leq \varepsilon g(t) + c_\varepsilon$. Wir wählen $\varepsilon < \frac{1}{c_4}$. Dann bekommen wir eine obere Schranke für $E(f(\tau_f \wedge k))$.

$$E(g(\tau_f \wedge k)) \leq c_4 E(f(\tau_f \wedge k)) + c \leq c_4 \varepsilon E(g(\tau_f \wedge k)) + const.$$

Dann können wir nach $E(g(\tau_f \wedge k))$ umstellen und wir erhalten:

$$E(g(\tau_f \wedge k)) \leq \frac{1}{1 - c_4 \varepsilon}(c_4 c_\varepsilon + c) < +\infty \quad , \quad \forall k > 0$$

Wir lassen nun k gegen Unendlich laufen und da g monoton ist, können wir dann den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden:

$$E(g(\tau_f)) = \lim_{k \to \infty} E(g(\tau_f \wedge k)) < +\infty \; .$$

und deswegen ist

$$E(B_{\tau_f}) = E(f(\tau_f)) \leq \varepsilon E(g(\tau_f)) + c_\varepsilon < +\infty \; .$$

Beweis der Äquivalenz (3.7.4):
Aus der Monotonie der Funktion f folgt $B_{\tau_f \wedge t} \leq f(0)$ f.s. Demzufolge ist dann:

$$\sup_{t>0} E(exp(\lambda B_{\tau_f \wedge t})) \leq E(exp(\lambda f(0))) = exp(\lambda f(0)) < +\infty \; .$$

Damit ist die Cramer-Bedingung aus Lemma 3.3.2 erfüllt und wir können dieses Lemma auf den Prozess $(B_{\tau_f \wedge t})_t$ anwenden. Wir erhalten dann:

$$0 \leq E(B_{\tau_f}) < +\infty$$

und die Beziehung (3.7.2). Wir zeigen zuerst die Hinrichtung. Wir nehmen also an, daß $E(|f(\tau_f)|) = E(|B_{\tau_f}|) < +\infty$ ist. Wir können das Lemma 3.1.6 mit $Z = \tau_f$ anwenden und bekommen:

$$\begin{aligned} +\infty > E(|B_{\tau_f}|) &= E(|f(\tau_f)|) = \int_0^\infty |f(t)|\, dP(\tau_f \leq t) \\ &= \int_1^\infty P(\tau_f > t)\, d|f(t)| + \int_0^1 P(\tau_f > t)\, d|f(t)| + f(0) \ . \end{aligned}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist endlich, weil das Integral über ein kompaktes Intervall genommen wird. Somit erhalten wir die Äquivalenz:

$$E(|B_{\tau_f}|) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^\infty P(\tau_f > t)\, d|f(t)| < +\infty \ . \tag{3.7.17}$$

Sei nun $E(B_{\tau_f}) > 0$ angenommen, dann gilt wegen Lemma 3.3.2 für $t \to \infty$ die Gleichung:

$$P(\tau_f > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \frac{1}{\sqrt{t}} (1 + O(\frac{1}{t})) = Ct^{-1/2}(1 + O(\frac{1}{t}) \ .$$

Sei f eine monoton fallende Funktion mit $f(0) > 0$ und negativen Werten. Dann gibt es ein $t_1 \geq 0$, so daß für alle $t \geq t_1$ die Funktion f negativ ist. Dann erhalten wir eine asymptotische Beziehung für f, und zwar:

$$|f(t)| \leq \frac{\sqrt{t}}{2} \int_t^\infty |f(s)| s^{-3/2}\, ds \qquad \text{für } t \to \infty \ . \tag{3.7.18}$$

Daraus folgt für $t \to \infty$:

$$|f(t)| \leq c_1 \sqrt{t} + c_2 \ , \tag{3.7.19}$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten sind. Nach partieller Integration gilt dann:

$$\begin{aligned} +\infty &> \int_1^\infty P(\tau_f > t)\, d|f(t)| = C \int_1^\infty t^{-1/2}(1 + O(\frac{1}{t}))\, d|f(t)| \\ &= C \int_1^\infty \frac{|f(t)|}{2} t^{-3/2} (1 + O(\frac{1}{t}))\, dt + t^{-1/2}|f(t)||_1^\infty \ . \end{aligned} \tag{3.7.20}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite in (3.7.20) ist endlich, wegen (3.7.19). Damit haben wir die folgende Implikation gezeigt:

$$E(B_{\tau_f}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_1^\infty |f(t)| t^{-3/2}\, dt < +\infty \ . \tag{3.7.21}$$

Wir müssen nun noch die Rückrichtung von (3.7.4) zeigen. Dazu benutzen wir die Girsanov-Maruyama-Skorokhod Transformation von der Brownschen Bewegung (siehe [Nov81]). Für eine beliebige monoton fallende, konvexe Funktion f erhalten wir dann:

$$\sqrt{t}P(\tau_f > t) \geq c \cdot exp(-c \int_1^t |f(s)| s^{-3/2}\, ds) \ .$$

Wir wenden nun die Beziehung (3.7.2) an und erhalten das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{\pi}} E(B_{\tau_f}) &= \lim_{t\to\infty} \sqrt{t}P(\tau_f > t) \geq \lim_{t\to\infty} c \cdot exp(-c \int_1^t |f(s)| s^{-3/2}\, ds) \\
&= c \cdot exp(-c \int_1^\infty |f(s)| s^{-3/2}\, ds) > 0 \ ,
\end{aligned}$$

Die strike Positivität folgt aus der Voraussetzung $\int_1^\infty |f(s)| s^{-3/2}\, ds < +\infty$. Somit folgt $E(B_{\tau_f}) > 0$. □

4 Zweite Waldidentität

4.1 Zweite Waldidentität für die Brownsche Bewegung

In diesem Kapitel werden wir den Satz 4.1.1 beweisen. Dieser Satz wurde unter anderem in dem Buch [LipShi01], Kapitel 4.2., Lemma 4.8., S. 112/113, sowie in der Arbeit [She67], Satz 1, S. 1912 bewiesen.

Satz 4.1.1. *Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung und sei τ eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit*

$$E(\tau) < +\infty \ . \tag{4.1.1}$$

Dann gilt:

$$E(B_\tau^2) = E(\tau) \quad \textit{und} \quad E(B_\tau) = 0 \ . \tag{4.1.2}$$

Wir haben bereits in der Sektion 2.2 gesehen, daß $(B_t^2 - t)_t$ ein Martingal ist, aber dieses Martingal ist nach Sektion 2.3 nicht gleichgradig integrierbar. Somit können wir nicht direkt den Stoppsatz anwenden, sondern müssen einen Konvergenzsatz anwenden, um die zweite Waldidentität zu zeigen.

Beweis von Satz 4.1.1:

Nach der Voraussetzung (4.1.1) und der Hölderungleichung folgt, daß auch $E(\tau^{1/2}) < \infty$ ist und wir hatten bereits im Satz 3.0.3 bewiesen, daß somit die erste Waldidentität $E(B_\tau) = 0$ folgt. Mit der Voraussetzung $E(\tau) < \infty$ folgt, daß τ f.s. endlich ist. Dann gilt die Beziehung:

$$\lim_{t\to\infty} t \wedge \tau = \tau \quad \text{f.s.} \tag{4.1.3}$$

Nach Proposition 2.7.2 existiert dann $B_\tau := \lim_{t\to\infty} B_{t\wedge\tau}$ f.s. Wie wir in Proposition 2.2.2 gesehen haben, ist $(B_t^2 - t)_t$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Somit gilt nach Satz 2.4.1, daß $(B_{t\wedge\tau}^2 - t \wedge \tau)_{t\geq 0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ ist. Deswegen gilt dann für alle $t \geq 0$:

$$E(B_{t\wedge\tau}^2 - (t\wedge\tau)) = E(B_{0\wedge\tau}^2 - (0\wedge\tau)) = E(B_0^2 - 0) = 0 \ . \tag{4.1.4}$$

Dann erhalten wir für alle t:

$$E(B_{t\wedge\tau}^2) = E(t\wedge\tau) \ .$$

Jetzt zeigen wir, daß $(B_{t\wedge\tau}^2)_t$ gleichgradig integrierbar ist. Wir verwenden dazu den Satz von Burkholder, Gundy und Davis 3.1.1. Nach diesem Satz folgt aus der Voraussetzung (4.1.1), daß eine Konstante $C_2 > 0$ existiert, mit:

$$E(\sup_s |B_{s\wedge\tau}|^2) \leq C_2 E(\tau) \ . \tag{4.1.5}$$

Wegen $|B_{t\wedge\tau}|^2 \leq \sup_s |B_{s\wedge\tau}|$, für alle $t \geq 0$ ist nach Satz 2.3.4 der Prozess $(B^2_{\wedge\tau})_t$ gleichgradig integrierbar und wir erhalten:

$$\lim_{t\to\infty} E(B^2_{t\wedge\tau}) = E(B^2_\tau).$$

Nun gilt $t \wedge \tau \leq \tau$ f.s., für alle $t \geq 0$ und $\lim_{t\to\infty} t \wedge \tau = \tau$ f.s. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ergibt sich dann:

$$E(\tau) = \lim_{t\to\infty} E(t \wedge \tau) \ .$$

Somit erhalten wir die zweite Waldidentität:

$$E(B^2_\tau) = \lim_{t\to\infty} E(B^2_{t\wedge\tau}) = \lim_{t\to\infty} E(t \wedge \tau) = E(\tau) \ .$$

□

4.2 Anwendungen der ersten und zweiten Waldidentität für die Brownschen Bewegung

Wir geben nun ein Beispiel für eine Stoppzeit, die die zweite Waldidentität erfüllt und wofür der Satz 4.1.1 anwendbar ist. Diese Stoppzeit hatten wir bereits in der Sektion 3.2 eingeführt. Das folgende Anwendungsbeispiel und das darauffolgende Gegenbeispiel stammt aus der Referenz [Nov71], Satz 1, S. 449 und dem Beweis von Satz 1, S.452/453.

Anwendungsbeispiel 4.2.1. *Seien $a > 0$ und $\tilde{\tau}(a,b) = \inf\{t : B_t = -a + bt^{1/2}\}$. Dann gelten für $b > 1$:*

$$E(\tilde{\tau}(a,b)) = \frac{a^2}{b^2-1}$$

und die zweite Waldidentität:

$$E(B^2_{\tilde{\tau}(a,b)}) = \frac{a^2}{b^2-1} = E(\tilde{\tau}(a,b)) \ .$$

Beweis:

Wir betrachten den Prozess:

$$(B_t + a)^2 - t = B_t^2 - t + 2aB_t + a^2 \ .$$

Wir wissen, daß $(B_t^2 - t)_t$ und B Martingale sind. Insbesondere ist jede Konstante ein Martingal. Die Summe von Martingalen ist wieder ein Martingal. Somit ist $((B_t + a)^2 - t)_t$ ein Martingal. Wir berechnen nun mit Hilfe der Verteilung von der Brownschen Bewegung (2.2.1) den folgenden Erwartungswert:

$$E((B_t + a)^2 - t) = E(B_t^2) + 2aE(B_t) + a^2 - t = t + a^2 - t = a^2 \ .$$

Nun ist $\tilde{\tau}(a, b) \wedge t$ beschränkt durch t und wir können den Stoppsatz von Doob anwenden, und wir erhalten:

$$E((B_{\tilde{\tau}(a,b)\wedge t} + a)^2 - (\tilde{\tau}(a, b) \wedge t)) = a^2 \ .$$

Aus der Definition der Stoppzeit $\tilde{\tau}(a, b)$ folgt $\frac{B_{\tilde{\tau}(a,b)\wedge t}+a}{(\tilde{\tau}(a,b)\wedge t)^{1/2}} \geq b$ f.s. Nun ist $f(b) = b^2 - 1$ monoton wachsend, für $b > 1$. Daraus folgt für $b > 1$:

$$(\frac{B_{\tilde{\tau}(a,b)\wedge t} + a}{(\tilde{\tau}(a, b) \wedge t)^{1/2}})^2 - 1 \geq b^2 - 1 \ .$$

oder anders geschrieben:

$$(B_{\tilde{\tau}(a,b)\wedge t} + a)^2 - (\tilde{\tau}(a, b) \wedge t) \geq (b^2 - 1)\tilde{\tau}(a, b) \wedge t \ .$$

Daraus folgt für alle $a > 0$, $b > 1$ und $t \geq 0$:

$$a^2 = E((B_{\tilde{\tau}(a,b)\wedge t} + a)^2 - \tilde{\tau}(a, b) \wedge t) \geq (b^2 - 1)E(\tilde{\tau}(a, b) \wedge t)$$

beziehungsweise

$$\frac{a^2}{b^2 - 1} \geq E(\tilde{\tau}(a, b) \wedge t) \ .$$

Die Majorante von $\tilde{\tau}(a, b) \wedge t$ ist $\frac{a^2}{b^2-1}$. Wir können dann zum Grenzwert $t \to \infty$ übergehen und den Satz von der majorisierten Konvergenz benutzen:

$$\frac{a^2}{b^2 - 1} \geq \lim_{t\to\infty} E(\tilde{\tau}(a, b) \wedge t) = E(\tilde{\tau}(a, b)) \qquad .$$

Daraus folgt, daß $E(\tilde{\tau}(a, b))$ für alle $a > 0$ und $b > 1$ endlich ist. Wir können dann den Satz 4.1.1 anwenden:

$$E(\tilde{\tau}(a,b)) = E(B^2_{\tilde{\tau}(a,b)}) = a^2 - 2abE(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}) + b^2E(\tilde{\tau}(a,b)) \ .$$

Erste Gleichung: Zweite Waldidentität. Zweite Gleichung: Definition der Stoppzeit $\tilde{\tau}(a,b)$. Weiter ist für alle $a > 0$ und $b > 1$:

$$E(\tilde{\tau}(a,b)) = \frac{a^2 - 2abE(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2})}{1-b^2} = \frac{a^2 - 2aba/b}{1-b^2} = \frac{-a^2}{1-b^2} = \frac{a^2}{b^2-1} \ .$$

□

Gegenbeispiel 4.2.2. *Sei* $\tilde{\tau}(a,b) = \inf\{t : B_t \leq -a + bt^{1/2}\}$ *und* $a > 0$. *Dann gelten für* $0 < b < 1$*:*

$$E(\tilde{\tau}(a,b)) = +\infty \tag{4.2.1}$$

und

$$E(B^2_{\tilde{\tau}(a,b)}) \neq E(\tilde{\tau}(a,b)) \ . \tag{4.2.2}$$

Beweis:

Sei $0 < b < 1$. Angenommen $E(\tilde{\tau}(a,b)) < +\infty$. Dann können wir den Satz 4.1.1 anwenden und erhalten für $0 < b < 1$, wie im Anwendungsbeispiel 4.2.1:

$$E(\tilde{\tau}(a,b)) = E(B^2_{\tilde{\tau}(a,b)}) = \frac{a^2}{b^2-1} < 0 \ .$$

Das ist ein Widerspruch, weil $\tilde{\tau}(a,b) > 0$ f.s. und somit $E(\tilde{\tau}(a,b)) > 0$ gilt. Deswegen haben wir für $0 < b < 1$ die Beziehung (4.2.1). Für alle $a > 0$ und $0 < b < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} E(B^2_{\tilde{\tau}(a,b)} - \tilde{\tau}(a,b)) &= a^2 - 2abE(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}) + (b^2-1)E(\tilde{\tau}(a,b)) \\ &= -a^2 + (b^2-1)E(\tilde{\tau}(a,b)) < 0 \ . \end{aligned}$$

Erstes Gleichheitszeichen: Defintion von $\tilde{\tau}(a,b)$. Zweites Gleichheitszeichen: $E(\tilde{\tau}(a,b)^{1/2}) = \frac{a}{b}$, für $b > 0$. Ungleichheitszeichen: $a > 0$, $b < 1$, $E(\tilde{\tau}(a,b)) > 0$. Somit gilt die zweite Waldidentität für alle $a > 0$ und $0 < b < 1$ nicht mehr:

$$E(B^2_{\tilde{\tau}(a,b)}) < E(\tilde{\tau}(a,b)) \ .$$

□

Das folgende Anwendungsbeispiel stammt aus dem Internet.

Anwendungsbeispiel 4.2.3. *Seien $a, b > 0$ Konstanten und wir definieren*

$$\tau_{-a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \textit{ oder } B_t = b\} \ . \tag{4.2.3}$$

Wir wollen die erste bzw. zweite Waldidentität anwenden, um die Verteilung von $B_{\tau_{-a,b}}$ zu bestimmen und um den Erwartungswert von $\tau_{-a,b}$ auszurechnen.

Beweis:

Für die Stoppzeit $\tau_{-a,b}$ gilt, daß $|B_{t\wedge\tau_{-a,b}}| \leq \max\{a, b\}$ f.s. ist. Wir können dann die linke Seite der Burkholder, Gundy Ungleichung, Satz 3.1.1 benutzen und erhalten für alle $p \geq 1$:

$$c_p E(\tau_{-a,b}^{p/2}) \leq E(\sup_{t\geq 0} |B_{t\wedge\tau_{-a,b}}|^p) \leq \max\{a, b\}^p < +\infty \ ,$$

wobei c_p Konstanten sind, die von p abhängen. Somit folgt dann $E(\tau_{-a,b}^{p/2}) < +\infty$, für alle $p \geq 1$. Deswegen können wir die Sätze 3.0.3 und 4.1.1 anwenden. Nach Satz 3.0.3 gilt die erste Waldidentität:

$$0 = E(B_{\tau_{-a,b}}) = -aP(B_{\tau_{-a,b}} = -a) + bP(B_{\tau_{-a,b}} = b) \ .$$

$\tau_{-a,b}$ ist eine Zufallsvariable, also folgt:

$$1 = P(B_{\tau_{-a,b}} = -a) + P(B_{\tau_{-a,b}} = b) \ .$$

Wir haben somit ein Gleichungssystem erhalten, was wir lösen können:

$$P(B_{\tau_{-a,b}} = -a) = \frac{b}{a+b} \quad , \quad P(B_{\tau_{-a,b}} = b) = \frac{a}{a+b} \ . \tag{4.2.4}$$

Somit haben wir die Verteilung von $B_{\tau_{-a,b}}$ bestimmt. Nach Satz 4.1.1 gilt die zweite Waldidentität:

$$\begin{aligned} E(\tau_{-a,b}) &= E(B^2_{\tau_{-a,b}}) = a^2 P(B_{\tau_{-a,b}} = -a) + b^2 P(B_{\tau_{-a,b}} = -b) \\ &= \frac{a^2 b}{a+b} + \frac{b^2 a}{a+b} = ab \ . \end{aligned}$$

Somit haben wir herausgefunden, daß der Erwartungswert von $\tau_{-a,b}$ existiert und wir konnten sogar exakt angeben, wieviel er beträgt, nämlich $E(\tau_{-a,b}) = ab$. Hätten wir schon vorher gewusst, daß der Erwartungswert endlich ist, dann hätten wir nichts mehr tun brauchen, weil wir dann nämlich nach unseren bisherigen Überlegungen die erste Waldidentität $E(B_{\tau_{-a,b}}) = 0$ und die zweite Waldidentität $E(B^2_{\tau_{-a,b}}) = E(\tau_{-a,b})$ bekommen hätten. □

Bemerkung 4.2.4. *Seien $a > 0$ und $b = a$. Dann ist*

$$\tau_{-a,b} = \tau_{-a,a} := \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a\} \ . \tag{4.2.5}$$

Dann gelten:

$$E(\tau_{-a,a}) = a^2 < +\infty$$

und die zweite Waldidentität

$$E(B^2_{\tau_{-a,a}}) = E(\tau_{-a,a}) = a^2 \ .$$

Der Beweis dieser Bemerkung folgt direkt aus dem Beweis vom Anwendungsbeispiel 4.2.3. Die folgende Proposition stammt aus der Referenz [Bil95], Satz 37.6.

Proposition 4.2.5 (Skorokhod's Theorem). *Sei Z eine Zufallsvariable mit Erwartungswert Null und Varianz $\sigma^2 < +\infty$. Dann existiert eine Stoppzeit τ mit Erwartungswert $E(\tau) = \sigma^2 < +\infty$, so daß die Zufallsvariable B_τ die Verteilung von Z hat, also $E(B_\tau) = 0$ gilt, bzw. $E(B_\tau^2) = \sigma^2 = E(\tau)$.*

Diesen Satz beweisen wir nicht. Wir diskutieren aber den Fall, wenn Z eine Zufallsvariable ist, die gleichmäßig auf $[-1, 1]$ verteilt ist. In diesem Fall sind die Berechnungen einfach. Die folgende Proposition stammt aus dem Internet.

Proposition 4.2.6. *Sei $(\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}})_n$ eine Folge von Stoppzeiten, definiert durch:*

$$\tau^{(0)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 0 \quad \textit{f.s. und} \tag{4.2.6}$$

$$\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \inf\{t > \tau^{(n-1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} : B_t - B_{\tau^{(n-1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = \pm\frac{1}{2^n}\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ . \tag{4.2.7}$$

Dann konvergiert $B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}$ für $n \to \infty$ fast sicher gegen eine Zufallsvariable B_τ, die gleichmäßig auf $[-1, 1]$ verteilt ist.

Beweis:

Nach dem Beweis von Anwendungsbeispiel 4.2.3 folgt sofort:

$$P(B_{\tau_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = +\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(B_{\tau_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \ .$$

Lemma 4.2.7. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ gilt:*

$$P(B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = -1 + \frac{2k-1}{2^n}) = \frac{1}{2^n}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. **Induktionsanfang $n = 1$:** Für $\tau_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ gilt:

$$P(B_{\tau_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = +\frac{1}{2}) = P(B_{\tau_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \ .$$

2. **Induktionsvoraussetzung:** Sei n aus der Menge für die die Aussage:

$$P(B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = -1 + \frac{2k-1}{2^n}) = \frac{1}{2^n} \quad \forall k \in \{1, \ldots, 2^n\}$$

wahr ist.

3. **Induktionsschritt:** Wir wollen von n auf $n+1$ schließen. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(B_{\tau^{(n+1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} &= B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \pm \frac{1}{2^{n+1}}) = P(B_{\tau^{(n+1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = x \pm \frac{1}{2^{n+1}}, B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = x) \\ &= P(B_{\tau^{(n+1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = x \pm \frac{1}{2^{n+1}} | B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = x) P(B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Zweites Gleichheitszeichen: Starke Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung. Drittes Gleichheitszeichen: Induktionsvoraussetzung. □

Wir bemerken, daß die Werte von $B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}$ gleichverteilt in dem Intervall $[-1, 1]$ sind und für $n \to \infty$, wird das Intervall $[-1, 1]$ ausgefüllt. Somit konvergiert $B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}$ gegen eine gleichmäßige Verteilung auf dem Intervall $[-1, 1]$, für $n \to \infty$. Die Stoppzeiten $\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ sind wachsend mit n und beschränkt durch $\tau_{-1,1} = \inf\{t \geq 0 : B_t \pm 1\}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\tau_{-1,1}$ ist fast sicher endlich. Somit ist $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ fast sicher endlich. Und wegen der Stetigkeit der Pfade der Brownschen Bewegung bekommen wir:

$$\lim_{n\to\infty} B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} = B_\tau \ .$$

Weil $B_{\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}$ in Verteilung gegen eine Zufallsvariable konvergiert, die gleichmäßig verteilt auf $[-1, 1]$ ist, ist B_τ gleichmäßig verteilt auf $[-1, 1]$. Dann gilt: $E(B_\tau) = (-1+1)/4 = 0$ und $Var(B_\tau) = E(B_\tau^2) = (1-(-1))/6 = 1/3 = E(\tau)$. □

5 Dritte Waldidentität

5.1 Dritte Waldidentität für die Brownsche Bewegung

Nun werden wir die Frage nach Bedingungen für die gleichgradige Integrierbarkeit für den Prozess

$$Z_t = exp(B_{t\wedge\tau} - \frac{1}{2}(t \wedge \tau)) \tag{5.1.1}$$

diskutieren, wobei τ eine Stoppzeit bzgl. der natürlichen Filtration der Brownschen Bewegung ist. Der Prozess $(exp(B_t - \frac{1}{2}t))_t$ ist nach Proposition 2.2.3 ein positives Martingal. Somit ist Z auch ein positives Supermartingal und deswegen gilt für alle Stoppzeiten σ von B:

$$E(exp(B_{\sigma\wedge\tau} - \frac{1}{2}(\sigma \wedge \tau))) = E(Z_\sigma) \leq E(Z_0) = 1 \ .$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichgradige Integrierbarkeit von $(Z_t)_t$ ist die Gleichung $E(Z_\infty) = E(exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) = 1$. Die Frage nach Bedingungen für die gleichgradige Integrierbarkeit von dem Martingal der Form (5.1.1) wurde als erstes durch Girsanov in [Gir60], Satz 1, untersucht. In dem Buch von Gikham und Skorokhod [GikSko72], Kapitel 1, Sektion 12 wurde gezeigt, daß für $c = 1 + \varepsilon$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ die Implikation

$$E(exp(c \cdot \tau)) < +\infty \quad \Rightarrow \quad E(exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) = 1 \tag{5.1.2}$$

erfüllt ist. In dem Artikel von Liptser und Shiryaev [LipShi72], Lemma 3, wurde gezeigt, daß die Konstante $c = \frac{1}{2} + \varepsilon$, für beliebiges $\varepsilon > 0$ gewählt werden kann. Novikov hat dann 1972 in [Nov72], Satz 1, S.717-720, herausgefunden, daß wir keine Konstante $c = \frac{1}{2} - \varepsilon$, für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ nehmen können, die die Implikation (5.1.2) erfüllt. Wir können also keine Konstante kleiner als $\frac{1}{2}$ nehmen. Wir werden in diesem Kapitel den folgenden Satz 5.1.1 beweisen. Dieser Satz, inklusive Beweis, stammt von Novikov aus seinem Artikel [Nov72], Satz 1 und Beweis von Satz 1, S.718/719.

Satz 5.1.1. *Sei τ eine Stoppzeit der Brownschen Bewegung, mit der Eigenschaft*

$$E(exp(\frac{1}{2}\tau)) < \infty \ . \tag{5.1.3}$$

Dann ergibt sich für die Brownsche Bewegung B die dritte Waldidentität:

$$E(exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) = 1 \ . \tag{5.1.4}$$

Die Voraussetzung (5.1.3) ist stärker, als die Voraussetzungen $E(\tau) < \infty$ und $E(\tau^{1/2}) < \infty$. Denn für alle $t \geq 0$ ist

$$exp(\frac{1}{2}t) \geq 1 + \frac{1}{2}t \ .$$

Falls also die Bedingung (5.1.3) erfüllt ist, dann folgen zusammen mit dem nächsten Satz 5.1.1 die drei Waldidentitäten:

$$E(B_\tau) = 0 \quad E(B_\tau^2) = E(\tau) \quad E(exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) = 1$$

Die dritte Waldidentität braucht für ihre Gültigkeit die stärkste Voraussetzung, während die zweite Waldidentität die zweitstärkste Voraussetzung braucht und die erste Waldidentität die schwächste Voraussetzung braucht.

Beweis von Satz 5.1.1:

Wir benutzen die Stoppzeit $\tau(a,b)$, für alle $a > 0$ und $b > 0$. Nach der Sektion 2.8 ist die Zufallsvariable $\tau(a,b) < +\infty$ f.s., für $0 < a < +\infty$, $0 < b < +\infty$ und besitzt die Dichte (2.8.8). Wir betrachten nun $\tau(a,1) = \inf\{t : B_t = t - a\}$. Wegen der Stetigkeit der Pfade der Brownschen Bewegung und der Definition der Stoppzeit $\tau(a,1)$ ist $B_{\tau(a,1)} = \tau(a,1) - a$ f.s. Deswegen gilt auch:

$$B_{\tau(a,1)} - \frac{1}{2}\tau(a,1) = \frac{1}{2}\tau(a,1) - a \quad \text{f.s.}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} E(exp(B_{\tau(a,1)} - \frac{1}{2}\tau(a,1))) &= E(exp(\frac{1}{2}\tau(a,1) - a)) \\ &= E(exp(\frac{1}{2}\tau(a,1)))exp(-a) \ . \qquad (5.1.5) \end{aligned}$$

Wir können dann mit Hilfe der Dichte von $\tau(a,1)$ (2.8.8) das Exponentialmoment auf der rechten Seite von (5.1.5) ausrechnen:

$$\begin{aligned} E(exp(\frac{1}{2}\tau(a,1))) &= \int_0^\infty exp(\frac{1}{2}u)\frac{a}{\sqrt{2\pi u^3}} \cdot exp(-\frac{(u-a)^2}{2u})\,du \\ &= \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi u^3}} \cdot exp(-\frac{u}{2} + a - \frac{a^2}{2u} + \frac{u}{2})\,du \\ &= exp(a)\int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{a^2}{2u})\,du \\ &= exp(a) \ . \qquad (5.1.6) \end{aligned}$$

Vierte Gleichung: Dichte der Stoppzeit τ_a (2.8.2). Aus (5.1.5) ergibt sich letztendlich:

$$E(exp(B_{\tau(a,1)} - \frac{1}{2}\tau(a,1))) = exp(-a+a) = 1 \tag{5.1.7}$$

Der Prozess $(exp(B_t - \frac{1}{2}t))_t$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal, siehe Proposition 2.2.3. $\tau(a,1)$ ist $\mathcal{F}_{\tau(a,1)}$-meßbar. Wegen $\tau \wedge \tau(a,1) \leq \tau(a,1)$ f.s. ist $\tau \wedge \tau(a,1)$, $\mathcal{F}_{\tau(a,1)}$-meßbar. Nach dem Satz 2.4.1 ergibt sich dann, daß

$$(exp(B_{t\wedge\tau(a,1)} - \frac{1}{2}(t \wedge \tau(a,1))))_t \tag{5.1.8}$$

ebenfalls ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal ist, und somit auch ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Supermartingal. Da $0 \leq \tau \wedge \tau(a,1) \leq \tau(a,1)$ f.s. folgt dann nach Proposition 2.1.2:

$$\begin{aligned} 1 &= E(exp(B_0 - \frac{1}{2}0)) \\ &\geq E(exp(B_{\tau\wedge\tau(a,1)} - \frac{1}{2}(\tau \wedge \tau(a,1)))) \\ &\geq E(exp(B_{\tau(a,1)} - \frac{1}{2}\tau(a,1))) = 1 \ . \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Deswegen haben wir folgende Beziehung

$$E(exp(B_{\tau\wedge\tau(a,1)} - \frac{1}{2}(\tau \wedge \tau(a,1)))) = 1 \ . \tag{5.1.10}$$

Diese Beziehung können wir umschreiben. Die obige Gleichung ist nämlich äquivalent zu:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{\{\tau<\tau(a,1)\}}exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) &+ E(\mathbf{1}_{\{\tau\geq\tau(a,1)\}}exp(B_{\tau(a,1)} - \frac{1}{2}\tau(a,1))) \\ &= 1 \ . \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Für den zweiten Term auf der linken Seite in (5.1.11) erhalten wir:

$$E(\mathbf{1}_{\{\tau\geq\tau(a,1)\}}exp(B_{\tau(a,1)} - \frac{1}{2}\tau(a,1))) = E(\mathbf{1}_{\{\tau\geq\tau(a,1)\}}exp(\frac{1}{2}\tau(a,1) - a)) \ .$$

Die Indikatorfunktion ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{1}_{\{\tau\geq\tau(a,1)\}} = \begin{cases} 1 & \text{, für} \quad \tau \geq \tau(a,1) \\ 0 & \text{, für} \quad \tau < \tau(a,1) \end{cases}$$

Mit der Definition der Indikatorfunktion und der Monotonie der Exponentialfunktion erhalten wir:

$$0 \leq \mathbf{1}_{\{\tau \geq \tau(a,1)\}} exp(\frac{1}{2}\tau(a,1)) \leq exp(\frac{1}{2}\tau) \text{ f.s.} \tag{5.1.12}$$

Mit Hilfe von (5.1.12) und der Voraussetzung (5.1.3) bekommen wir:

$$0 \leq \lim_{a\to\infty} E(\mathbf{1}_{\{\tau \geq \tau(a,1)\}} exp(\frac{1}{2}\tau(a,1) - a)) \leq \lim_{a\to\infty} E(exp(\frac{1}{2}\tau))exp(-a) = 0 \ .$$

Damit ergibt sich folgendes Resultat:

$$\lim_{a\to\infty} E(\mathbf{1}_{\{\tau \geq \tau(a,1)\}} exp(\frac{1}{2}\tau(a,1) - a)) = 0 \ . \tag{5.1.13}$$

Wir hatten bereits bemerkt, daß $(exp(B_t - \frac{1}{2}t))_t$ ein Supermartingal ist. Für die Stoppzeit τ gilt dann nach Proposition 2.1.2:

$$E(exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) \leq E(exp(B_0 - \frac{1}{2}0)) = 1 \ .$$

Aus der Definition von τ_a folgt, daß $\tau_{a_1} \leq \tau_{a_2}$ f.s. für $a_1 \leq a_2$ ist. Deswegen haben wir für $a_1 \leq a_2$ die Ungleichung:

$$\mathbf{1}_{\{\tau < \tau_{a_1}\}} exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau) \leq \mathbf{1}_{\{\tau < \tau_{a_2}\}} exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau) \text{ f.s.}$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz, können wir zum Grenzwert im ersten Term von (5.1.11) unter dem Erwartungswert für $a \to +\infty$ übergehen:

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{a\to+\infty} E(exp(B_{\tau\wedge\tau(a,1)} - \frac{1}{2}\tau \wedge \tau(a,1))) \\
&= \lim_{a\to+\infty} E(\mathbf{1}_{\{\tau < \tau(a,1)\}} exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) \\
&+ \lim_{a\to+\infty} E(\mathbf{1}_{\{\tau \geq \tau(a,1)\}} exp(B_{\tau(a,1)} - \frac{1}{2}\tau(a,1))) \\
&= \lim_{a\to+\infty} E(\mathbf{1}_{\{\tau < \tau(a,1)\}} exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) \\
&= E(\lim_{a\to+\infty} \mathbf{1}_{\{\tau < \tau(a,1)\}} exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) \ .
\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

Erste Gleichung: Beziehung (5.1.10). Zweite Gleichung: Beziehung (5.1.11). Dritte Gleichung: Relation (5.1.13). Vierte Gleichung: Satz von der monotonen Konvergenz.

Nach Voraussetzung ist $E(exp(\frac{1}{2}\tau)) < \infty$. Daraus folgt, daß $\tau < \infty$ f.s. und somit $\lim_{a\to\infty} \mathbf{1}_{\{\tau<\tau(a,1)\}} = \mathbf{1}_{\{\tau<+\infty\}} = 1$ f.s. Deswegen erhalten wir die dritte Waldidentität (5.1.4):

$$1 = E(\lim_{a\to+\infty} \mathbf{1}_{\{\tau<\tau(a,1)\}} exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) = E(exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau))$$

□

Wir wollen nun Beispiele für Stoppzeiten geben, wofür die dritte Waldidentität erfüllt bzw. nicht erfüllt ist. Wir werden auch untersuchen, ob die Voraussetzung $E(exp(\frac{1}{2}\tau)) < +\infty$ für den Satz 5.1.1 gilt. In dem Beweis von Satz 5.1.1 hatten wir bereits gezeigt, daß folgendes Beispiel gilt.

Beispiel 5.1.2. *Sei*

$$\tau(a,1) = \inf\{t \geq 0 : B_t \leq t - a\} \quad \text{für } a > 0$$

Dann gelten für alle $a > 0$:

$$E(exp(\frac{1}{2}\tau(a,1))) = exp(a) < +\infty$$

und

$$E(exp(B_{\tau(a,1)} - \frac{1}{2}\tau(a,1))) = 1 \ .$$

Wir wollen nun ein Gegenbeispiel zu Satz 5.1.1 zeigen. Dieses Beispiel haben wir dem Artikel von Stoyanov [Sto97], S.298 entnommen.

Gegenbeispiel 5.1.3. *Wir können für alle $\delta > 0$ und alle $0 < b < 1$ eine Stoppzeit*

$$\tau(1,b) = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq -1 + bt\}$$

finden, die die Bedingung

$$E(exp((\frac{1}{2} - \delta)\tau(1,b))) < \infty \tag{5.1.15}$$

erfüllt. Allerdings erfüllt diese Stoppzeit nicht die dritte Waldidentität:

$$E(exp(B_{\tau(1,b)} - \frac{1}{2}\tau(1,b)) = exp(2(b-1)) < 1 \ . \tag{5.1.16}$$

Insbesondere gilt:

$$E(exp(\frac{1}{2}\tau(1,b)) = +\infty \ . \tag{5.1.17}$$

Beweis:

Die Dichte von $\tau(1,b)$ hat die folgende Gestalt:

$$f_{\tau(1,b)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(-1+bu)^2}{2u})\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(u) \ .$$

Dann können wir mit Hilfe dieser Dichte den folgenden Erwartungswert ausrechnen:

$$\begin{aligned} E(exp(\frac{b^2\tau(1,b)}{2})) &= \int_0^\infty exp(\frac{b^2u}{2})\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} \cdot exp(-\frac{(1-bu)^2}{2u})\, du \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(\frac{b^2u}{2} + b - \frac{b^2u}{2} - \frac{1}{2u})\, du \\ &= exp(b)\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{1}{2u})\, du = exp(b) < +\infty \ . \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

Vierte Gleichung: Die Funktion unter dem Integral ist die Dichte der Stoppzeit τ_1. Nun erhalten wir, daß die beiden Parameter b und δ voneinander abhängen. Wegen $E(exp((\frac{1}{2} - \delta)\tau(1,b))) < +\infty$ ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\frac{b^2}{2} = \frac{1}{2} - \delta \Rightarrow b = \sqrt{1-2\delta} \ . \tag{5.1.19}$$

Aus der Definition der Stoppzeit $\tau(1,b)$ gilt: $B_{\tau(1,b)} = -1 + b\tau(1,b)$ f.s. Deswegen ist $B_{\tau(1,b)} - \frac{1}{2}\tau(1,b) = -1 + (b - \frac{1}{2})\tau(1,b)$ f.s. Mit Hilfe der Dichte von $\tau(1,b)$ (2.8.8) können wir nun das Exponentialmoment für $0 < b < 1$ ausrechnen:

$$\begin{aligned} E(exp(B_{\tau(1,b)} &- \frac{1}{2}\tau(1,b)) = E(exp(-1 + (b - \frac{1}{2})\tau(1,b))) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-1 + (b - \frac{1}{2})u) exp(-\frac{(-1+b\cdot u)^2}{2u})\, du \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-1 + bu - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2u} + b - \frac{b^2}{2}u)\, du \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(2(b-1)) exp(1 + bu - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2u} - b - \frac{b^2}{2}u)\, du \\ &= exp(2(b-1))\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{1}{2u}(-1 + (1-b)u)^2)\, du \\ &= exp(2(b-1)) < 1 \ . \end{aligned}$$

Vorletzte Gleichung: Die Funktion unter dem Integral ist die Dichte der Stoppzeit $\tau(1, 1-b)$. Somit ist die dritte Waldidentität nicht mehr erfüllt.

$$
\begin{aligned}
E(exp(\frac{1}{2}\tau(1,b)) &= \int_0^\infty exp(\frac{1}{2}u)\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}exp(-\frac{(-1+bu)^2}{2u})\,du \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}exp((-\frac{1}{2u}+b+\frac{u}{2}(1-b^2)))\,du \ .
\end{aligned}
$$

Die Stammfunktion für

$$
exp(\frac{1}{2}u)f_{\tau(1,b)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}exp(-\frac{1}{2u}+b+\frac{u}{2}(1-b^2))
$$

divergiert für $u \to +\infty$ gegen $+\infty$, da $(1-b^2) > 0$ ist. Somit erhalten wir für alle $0 < b < 1$ die Beziehung (5.1.17). $\square$

5.2 Verfeinerung der dritten Waldidentität

In dieser Sektion geht es darum den folgenden Satz 5.2.1, der aus dem Artikel von Novikov [Nov77], Satz 2, S. 822/823 stammt, für Funktionen g aus einer speziellen Klasse $\mathcal{G}$ zu beweisen. Diese Klasse $\mathcal{G}$ umfasst Funktionen, die spezielle Eigenschaften haben, die wir im Verlauf der Sektion noch angeben werden.

Satz 5.2.1. *Sei g eine stetige, positive, monotone Funktion, die auf $[0,+\infty[$ definiert ist. Weiter sei $g(t)/\sqrt{2tlog(log(t))}$ streng monoton fallend für alle $t \geq t_0$ und $g(t)/\sqrt{t}$ monoton wachsend für alle $t \geq t_0$. Außerdem soll g noch die Bedingung*

$$
\int_0^\infty \frac{g(t)}{t^{3/2}}exp(-\frac{g(t)^2}{2t})\,dt = +\infty \tag{5.2.1}
$$

erfüllen. Seien B die Brownsche Bewegung und τ eine Stoppzeit von B mit der Eigenschaft:

$$
E(exp(\frac{1}{2}\tau - g(\tau))) < \infty \ . \tag{5.2.2}
$$

Dann gilt die dritte Waldidentität:

$$
E(exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) = 1 \ . \tag{5.2.3}
$$

Definition 5.2.2. *Wir bezeichnen mit $\mathcal{G}$ die Klasse der Funktionen g, die die Eigenschaften aus dem Satz 5.2.1 erfüllen.*

Beispiel 5.2.3. *Sei g definiert durch $g(t) = \sqrt{t}$, für alle t. Dann gehört g zur Klasse $\mathcal{G}$.*

Beweis von 5.2.3:

Die Wurzelfunktion ist stetig, positiv und monoton. Außerdem gilt $\sqrt{t}/\sqrt{t} = 1$, für alle t und $\sqrt{t}/\sqrt{2tlog(log(t))}$ ist streng monoton fallend für $t \to \infty$. Außerdem divergiert das Integral aus (5.2.1). Das sehen wir jetzt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{g(t)}{t^{3/2}} exp(-\frac{g(t)^2}{2t})\,dt &= \int_0^\infty \frac{1}{t} exp(-\frac{1}{2})\,dt \\ &\geq \int_1^\infty \frac{1}{t} exp(-\frac{1}{2})\,dt = log(t)|_1^\infty exp(-\frac{1}{2}) = +\infty\end{aligned}$$

□

Wir wollen nun ein Gegenbeispiel für eine Funktion angeben, die nicht zu der Klasse $\mathcal{G}$ gehört.

Gegenbeispiel 5.2.4. *Die Identität gehört nicht zu $\mathcal{G}$.*

Beweis von Gegenbeispiel 5.2.4:

$$g(t)/\sqrt{2tlog(log(t))} = \sqrt{\frac{t}{2log(log(t))}} = +\infty \text{ für } t \to \infty$$

Somit ist $g(t)/\sqrt{2tlog(log(t))}$ nicht streng monoton fallend, für $t \to \infty$. □

Beweis von Satz 5.2.1:

Wir benötigen die nachfolgenden Lemmata. Sie stammen aus dem Artikel von Shepp [She69], (Lemma 5.2.5, Kapitel 2, Satz 2, S.996 und Lemma 5.2.6, Kapitel 9, Satz 4, S.1007-1008).

Lemma 5.2.5. *Sei f eine stetige Funktion, die auf $[0, +\infty[$ definiert ist und sei*

$$\tau_f = \inf\{t \geq 0 : B_t = f(t)\} \ .$$

Wenn $\lambda > 0$ ist, $f(0) > 0$ und $\frac{f(t)}{t} \to 0$ für $t \to \infty$, dann gilt:

$$E(exp(\lambda B_{\tau_f} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_f)) = E(exp(\lambda f(\tau_f) - \frac{\lambda^2}{2}\tau_f)) = 1 \ .$$

Beweis:
Weil $f(0) > 0$ ist, ist $\tau_f > 0$ f.s. Nun sei $Y_t := exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t)$. Dann haben wir:

$$E(Y_t \mathbf{1}_{\{\tau_f < t\}}) = E(E(Y_t \mathbf{1}_{\{\tau_f < t\}} | \mathcal{F}_{\tau_f})) = E(\mathbf{1}_{\{\tau_f < t\}} E(Y_t | \mathcal{F}_{\tau_f})) = E(\mathbf{1}_{\{\tau_f < t\}} Y_{\tau_f}) \ .$$

Erstes Gleichheitszeichen: Erwartungswerttreue.
Zweites Gleichheitszeichen: $\mathbf{1}_{\{\tau_f < t\}} \in \mathcal{F}_{\tau_f}$. Drittes Gleichheitszeichen: starke Markoveigenschaft von Y.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{\{\tau_f \geq t\}} Y_t) &= E(\mathbf{1}_{\{\tau_f \geq t\}} exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t)) \\ &\leq E(\mathbf{1}_{\{\tau_f \geq t\}} exp(\lambda f(t) - \frac{\lambda^2}{2} t)) \\ &\leq exp(\lambda f(t) - \frac{\lambda^2}{2} t) = exp(t(\lambda \frac{f(t)}{t} - \frac{\lambda^2}{2})) \\ &= exp(-\frac{\lambda^2}{2} t) \to 0 \quad \text{, für } t \to \infty \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Erstes Ungleichheitszeichen: $B_t \leq f(t)$ f.s., für $\tau_f \geq t$ f.s. und $\lambda > 0$. Zweites Ungleichheitszeichen: $\mathbf{1}_{\{\tau_f \geq t\}} \leq 1$ f.s. Drittes Gleichheitszeichen: $\frac{f(t)}{t} \to 0$, für $t \to \infty$.

Aus (5.2.4) folgt: $\lim_{t \to \infty} E(\mathbf{1}_{\{\tau_f \geq t\}} Y_t) = 0$. Außerdem wissen wir nach dem Beweis der Proposition 2.2.3, daß wir für alle festen Zeiten t die Gleichheit

$$E(Y_t) = E(exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t)) = 1$$

haben. Y ist Martingal. Nach Satz 2.4.1 ist $(Y_{t \wedge \tau_f})_t$ ein Martingal, für die Stoppzeit τ_f. Dann können wir den Stoppsatz von Doob anwenden und erhalten $1 = E(Y_{t \wedge \tau_f})$, für alle Zeiten t. Dann können wir weiterrechnen:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t \to \infty} E(Y_{t \wedge \tau_f}) = \lim_{t \to \infty} E(\mathbf{1}_{\{\tau_f \geq t\}} Y_t) + \lim_{t \to \infty} E(\mathbf{1}_{\{\tau_f < t\}} Y_{\tau_f}) \\ &= 0 + \lim_{t \to \infty} E(\mathbf{1}_{\{\tau_f < t\}} Y_{\tau_f}) = E(\lim_{t \to \infty} \mathbf{1}_{\{\tau_f < t\}} Y_{\tau_f}) \\ &= E(Y_{\tau_f}) \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

vorletztes Gleichheitszeichen: Satz von der monotonen Konvergenz. Wir erhalten mit (5.2.5) und aufgrund der Stetigkeit von den Trajektorien der Brownschen Bewegung:

$$1 = E(Y_{\tau_f}) = E(exp(\lambda B_{\tau_f} - \frac{\lambda^2}{2} \tau_f)) = E(exp(\lambda f(\tau_f) - \frac{\lambda^2}{2} \tau_f)) \ .$$

$\square$

Wie wir bereits in der Sektion 5.1 festgestellt haben, ist Y ein positives Supermartingal. Dann gilt für $\tau_f > 0$ f.s.:

$$E(exp(\lambda B_{\tau_f} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_f)) = E(Y_{\tau_f}) \leq E(Y_0) = 1 \ ,$$

für beliebige stetige Funktionen f und beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$.

Das nächste Lemma gibt den genauen Wert von $E(Y_{\tau_f})$ an.

Lemma 5.2.6. *Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und f eine stetige Funktion, die auf $[0, +\infty[$ definiert ist, mit $f(0) > 0$. Sei*

$$\tau_f = \inf\{t : B_t = f(t)\} \ .$$

Dann gilt

$$E(exp(\lambda B_{\tau_f} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_f)) = E(exp(\lambda f(\tau_f) - \frac{\lambda^2}{2}\tau_f)) = P(R_f < +\infty) \ , \quad (5.2.6)$$

wobei

$$R_f := \inf\{t \geq 0 : B_t = f(t) - \lambda t\} \quad (5.2.7)$$

ist.

Beweis:
Wie im Beweis von Lemma 5.2.5 erhalten wir $E(exp(\lambda B_{\tau_f} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_f)) = 1$, für $\lambda > 0$ und für Funktionen f mit $\lim_{t\to\infty} f(t)/t \to 0$. Wegen der Stetigkeit von f und B und dem Satz von der monotonen Konvergenz erhalten wir:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{1}_{\{\tau_f > t\}} Y_t) &= E(\mathbf{1}_{\{0 \leq s \leq t : B_s \leq f(s)\}} Y_t) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\lim_{n\to\infty} t_1 < \ldots < t_n < t : B_{t_i} \leq f(t_i)\}} Y_t) \\
&= E(\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\{t_1 < \ldots < t_n < t : B_{t_i} \leq f(t_i)\}} Y_t) \\
&= \lim_{n\to\infty} E(\mathbf{1}_{\{t_1 < \ldots < t_n < t : B_{t_i} \leq f(t_i)\}} Y_t) \ . \quad (5.2.8)
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\{0 < t_1 < \ldots < t_n < t\}$ eine Folge von Partitionen, die für $n \to \infty$ dicht in $[0, t]$ liegen. Wir betrachten nun den Erwartungswert auf der rechten Seite von (5.2.8):

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{\{B_{t_i}\le f(t_i),i=1,\ldots,n\}}exp(\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}t)) &= \int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{\{u_i\le f(t_i),i=1,\ldots,n\}}exp(\lambda u-\frac{\lambda^2}{2}t)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}exp(-\frac{u^2}{2t})\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{\{u_i\le f(t_i),i=1,\ldots,n\}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}exp(-\frac{1}{2t}(u-\lambda t)^2)\,du \end{aligned}$$

Erste Gleichung: Verwendung der Dichte der Brownschen Bewegung (2.2.1). Jetzt können wir substituieren, und zwar $s = u - \lambda t$. Dann bekommen wir

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{\{B_{t_i}\le f(t_i),i=1,\ldots,n\}}exp(\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}t) &= \int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{\{s_i+\lambda t_i\le f(t_i),i=1,\ldots,n\}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}exp(-\frac{s^2}{2t})\,ds \\ &= P(B_{t_i}+\lambda t_i\le f(t_i), i=1,\ldots,n) \end{aligned}$$

Wir können nun wieder den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{\{\tau_f>t\}}Y_t) &= \lim_{n\to\infty}E(\mathbf{1}_{\{B_{t_i}\le f(t_i),i=1,\ldots,n\}}Y_t) \\ &= \lim_{n\to\infty}P(B_{t_i}+\lambda t_i\le f(t_i), i=1,\ldots,n) \\ &= P(R_f>t)\ . \end{aligned}$$

Y ist Martingal. Nach Satz 2.4.1 ist $(Y_{t\wedge\tau_f})_t$ ein Martingal, für die Stoppzeit τ_f. Dann können wir den Stoppsatz von Doob anwenden und erhalten $1 = E(Y_{t\wedge\tau_f})$, für alle Zeiten t. Dann bekommen wir für alle t:

$$\begin{aligned} 1 &= E(Y_{t\wedge\tau_f}) = E(\mathbf{1}_{\{\tau_f\le t\}}Y_{\tau_f}) + E(\mathbf{1}_{\{\tau_f>t\}}Y_t) = E(\mathbf{1}_{\{\tau_f\le t\}}Y_{\tau_f}) + P(R_f>t) \\ &= E(\mathbf{1}_{\{\tau_f\le t\}}Y_{\tau_f}) + 1 - P(R_f\le t)\ . \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle t:

$$E(\mathbf{1}_{\{\tau_f\le t\}}Y_{\tau_f}) = P(R_f\le t) \quad \forall t \tag{5.2.9}$$

Die Ereignisse $\{\tau_f = t\}$ und $\{R_f = t\}$ für feste Zeiten t sind Nullmengen. Somit ändert sich die linke Seite nicht, wenn wir anstatt $\mathbf{1}_{\{\tau_f\le t\}}$ die Funktion $\mathbf{1}_{\{\tau_f<t\}}$ betrachten. Ebenso ändert sich die rechte Seite nicht, wenn wir anstatt $P(R_f \le t)$ die Wahrscheinlichkeit $P(R_f < t)$ betrachten. Also erhalten wir, daß die Gleichung (5.2.9) äquivalent ist zu:

$$E(\mathbf{1}_{\{\tau_f<t\}}Y_{\tau_f}) = P(R_f<t) \quad \forall t\ .$$

Wir können dann zum Grenzwert $t \to \infty$ übergehen und den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden. Wir erhalten dann das gewünschte Resultat:

$$
\begin{aligned}
E(exp(\lambda f(\tau_f) - \frac{\lambda^2}{2}\tau_f)) &= E(exp(\lambda B_{\tau_f} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_f)) = E(Y_{\tau_f}) \\
&= P(R_f < +\infty) \ . \qquad (5.2.10)
\end{aligned}
$$

□

Lemma 5.2.7. *Seien $a > 0$, $b \in \{0,1\}$ und $g \in \mathcal{G}$. Dann ist die Stoppzeit*

$$
T(a,b) := \inf\{t \geq 0 : B_t = bt - g(t) - a\} \qquad (5.2.11)
$$

fast sicher endlich.

Beweis:

Wir betrachten zuerst den Fall $b = 1$. Nach Definition von $\mathcal{G}$ ist $\frac{g(t)}{\sqrt{2tlog(log(t))}}$ streng monoton fallend für $t \to \infty$. Somit ist auch $g(t)/t$ streng monoton fallend für $t \to \infty$. Außerdem benutzen wir noch das Gesetz vom iterierten Logarithmus, das besagt $B_t = O(\sqrt{2tlog(log(t))})$ f.s., für $t \to \infty$. Somit ist $T(a,1) < +\infty$ f.s.

Aus der Definition von $\mathcal{G}$ folgt:

$$
\liminf_{t\to\infty} \frac{-g(t) - a}{\sqrt{2tlog(log(t))}} = \liminf_{t\to\infty} \frac{-g(t)}{\sqrt{2tlog(log(t))}} \geq -1 = \liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2tlog(log(t))}} \text{ f.s.}
$$

Somit ist f$T(a,0) = \inf\{t : B_t = -g(t) - a\} < +\infty$ f.s. □

Wir wollen nun den Beweis von Satz 5.2.1 fortsetzen. Wir haben in den vorigen Lemmata den Prozess $Y = (exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t))_t$ betrachtet. Wir wollen nun die dritte Waldidentität bekommen. Dazu setzen wir $\lambda = 1$. Außerdem betrachten wir die Funktion f, die durch $f(t) = t - g(t) - a$ für alle t definiert ist. Die Funktion f erfüllt allerdings nicht die Bedingungen von Lemma 5.2.6, weil

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} (1 - \frac{g(t)}{t} - \frac{a}{t}) = 1 \neq 0
$$

gilt. Hier haben wir benutzt, daß $\frac{g(t)}{\sqrt{2tlog(log(t))}}$ für $t \to \infty$ streng monoton fallend ist. Nach dem Lemma 5.2.6 und dem Lemma 5.2.7 gilt die dritte Waldidentität:

$$
\begin{aligned}
E(exp(B_{T(a,1)} - \frac{1}{2}T(a,1))) &= E(exp(f(T(a,1)) - \frac{1}{2}T(a,1))) \\
&= P(\exists t > 0 : B_t = t - g(t) - a - t) \\
&= P(T(a,0) < +\infty) = 1 \ . \qquad (5.2.12)
\end{aligned}
$$

Es gilt $0 \leq T(a,1) \wedge \tau \leq T(a,1)$. Der Prozess $(exp(B_t - \frac{1}{2}t))_t$ ist ein Supermartingal. Dann können wir die Proposition 2.1.2 anwenden und erhalten, wie in (5.1.9) gezeigt:

$$E(exp(B_{T(a,1)\wedge\tau} - \frac{1}{2}(T(a,1) \wedge \tau))) = 1 \ .$$

Analog zu dem Beweis von Satz 5.1.1 verfahren wir jetzt weiter und bekommen:

$$\begin{aligned} E(exp(B_{T(a,1)\wedge\tau} - \frac{1}{2}(T(a,1) \wedge \tau))) &= E(\mathbf{1}_{\{T(a,1)<\tau\}} exp(B_{T(a,1)} - \frac{1}{2}T(a,1))) \\ &+ E(\mathbf{1}_{\{T(a,1)\geq\tau\}} exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) \ . \end{aligned}$$

Aus der Definition der Stoppzeit $T(a,1)$ und der Stetigkeit der Pfade der Brownschen Bewegung erhalten wir die Gleichung $B_{T(a,1)} = T(a,1) - g(T(a,1)) - a$ f.s. und deswegen gilt auch $B_{T(a,1)} - \frac{1}{2}T(a,1) = \frac{1}{2}T(a,1) - g(T(a,1)) - a$ f.s. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &\leq E(\mathbf{1}_{\{T(a,1)<\tau\}} exp(B_{T(a,1)} - \frac{1}{2}T(a,1))) \\ &= E(\mathbf{1}_{\{T(a,1)<\tau\}} exp(\frac{1}{2}T(a,1) - g(T(a,1)) - a)) \end{aligned}$$

Wir brauchen das folgende Lemma und wollen es detailliert zeigen.

Lemma 5.2.8. *Sei $g \in \mathcal{G}$. Dann können wir ein $k \geq 0$ wählen, so daß für alle $0 \leq x \leq y$ die folgende Ungleichung*

$$\frac{1}{2}x - g(x) \leq \frac{1}{2}y - g(y) + k \quad \Leftrightarrow \quad g(y) - g(x) \leq \frac{1}{2}(y - x) + k \qquad (5.2.13)$$

erfüllt ist.

Beweis von Lemma 5.2.8:

Nach Definition der Klasse $\mathcal{G}$, ist g stetig, positiv und monoton. Dann kann g für $0 \leq x \leq y \leq x_0$ entweder monoton wachsend oder monoton fallend sein. Falls g monoton fallend ist, gilt für alle $0 \leq x \leq y \leq x_0$:

$$g(y) - g(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}(y - x) \ .$$

Falls g monoton wachsend ist, dann gilt $g(x) \leq g(y) \leq g(x_0)$. Somit ist $g(y) - g(x)$ beschränkt durch $g(x_0) - g(x)$. Dann können wir eine Konstante $k \geq 0$ wählen, so daß für alle $0 \leq x \leq y \leq x_0$ die Ungleichung (5.2.13) gilt. Nach

Definition von $\mathcal{G}$ ist $g(x)/\sqrt{2xlog(log(x))}$ streng monoton fallend für alle $x \geq x_0$. Somit ist $g(x)/x$ streng monoton fallend für alle $x \geq x_0$. Dann existiert ein $x_1 \geq x_0$, so daß für alle $x_1 \leq x \leq y$ das Folgende gilt:

$$g(y) - g(x) \leq \frac{1}{2}(y - x) \ .$$

Nach Definition der Klasse $\mathcal{G}$ ist $g(x)/\sqrt{x}$ monoton wachsend für alle $x \geq x_0$. Somit ist g eine streng monoton wachsende Funktion für alle $x \geq x_0$. Dann gilt für alle $x_0 \leq x \leq y \leq x_1$:

$$g(y) - g(x) > \frac{1}{2}(y - x) \ . \tag{5.2.14}$$

Die linke Seite von (5.2.14) ist beschränkt durch $g(x_1) - g(x)$. Wir können dann eine Konstante $k \geq 0$ finden, die die Ungleichung (5.2.13) für alle $x_0 \leq x \leq y \leq x_1$ erfüllt. □

Wir bekommen nach Lemma 5.2.8 die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty} E(\mathbf{1}_{\{T(a,1)<\tau\}} exp(\frac{1}{2}T(a,1) &- g(T(a,1)) - a)) \leq \lim_{a\to\infty} E(exp(\frac{1}{2}\tau - g(\tau) + k - a)) \\ &= c_1 E(exp(\frac{1}{2}\tau - g(\tau))) \cdot \lim_{a\to\infty} exp(-a) = 0 \ .\end{aligned}$$

Hier haben wir die Voraussetzung $E(exp(\frac{1}{2}\tau - g(\tau))) < +\infty$ benutzt. Wir können nun den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}1 &= \lim_{a\to\infty} E(\mathbf{1}_{\{\tau\leq T(a,1)\}} exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) = E(\lim_{a\to\infty} \mathbf{1}_{\{\tau\leq T(a,1)\}} exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) \\ &= E(exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) \ .\end{aligned}$$

□

5.3 Eine wichtige Voraussetzung für die Verfeinerung der dritten Waldidentität

Die nachfolgende Bemerkung stammt wieder von Novikov aus [Nov77], Sektion 3, S.823.

Satz 5.3.1. *Auf die Voraussetzung (5.2.1) kann im Satz 5.2.1 nicht verzichtet werden.*

Beweis:

Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen die Funktion g erfüllt die Bedingungen aus Satz 5.2.1, aber es gelte:

$$\int_0^\infty \frac{g(t)}{t^{3/2}} exp(-\frac{g(t)^2}{2t})\, dt < +\infty \ . \tag{5.3.1}$$

Wir wollen zeigen, daß die Stoppzeit

$$T(a,0) = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq g(t) + a\} \quad \forall a > 0 \ ,$$

nicht fast sicher endlich ist, d.h.

$$P(T(a,0) < \infty) < 1 \ . \tag{5.3.2}$$

Wir erhalten mit Hilfe der Eigenschaften der Funktionen $g \in \mathcal{G}$ die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} P(T(a,0) < t) &\leq P(\tau_{g(s)+a} \leq s) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty} P(t_{m-1} < \tau_{g(t_{m-1})+a} < t_m) \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Hierbei ist $0 < s < t < +\infty$ und $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Wir benutzen die Dichte von τ_a (2.8.2) und können die Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite der Ungleichung (5.3.3) bestimmen:

$$\begin{aligned} P(T(a,0) < t) &\leq \int_0^s \frac{g(s)+a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(g(s)+a)^2}{2u})\, du \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{g(t_{m-1})+a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(g(t_{m-1})+a)^2}{2u})\, du \\ &= \int_0^s \frac{g(s)+a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(g(s)+a)^2}{2u})\, du \\ &+ \int_s^t \frac{g(u)+a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(g(u)+a)^2}{2u})\, du \ , \end{aligned}$$

wobei $0 < s < t < +\infty$. Wir können dann im ersten Integral auf der rechten Seite eine Variablensubstitution machen und lassen im zweiten Integral auf der rechten Seite $t \to +\infty$ gehen:

$$\begin{aligned} P(T(a,0) < +\infty) &\leq \int_0^{\frac{s}{(g(s)+a)^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{1}{2u})\, du \\ &+ \int_s^\infty \frac{g(u)+a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(g(u)+a)^2}{2u})\, du \ . \end{aligned}$$

Außerdem haben wir für eine positive Funktion g und $s > 0$, daß $\frac{s}{(g(s)+a)^2} \leq \frac{s}{a^2}$ ist. Deswegen können wir das erste Integral nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} P(T(a,0) < +\infty) &\leq \int_0^{\frac{s}{a^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{1}{2u})\, du \\ &+ \int_s^{\infty} \frac{g(u)+a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(g(u)+a)^2}{2u})\, du\ . \end{aligned}$$

Nun lassen wir für festes s, $a \to \infty$ gehen. Dann geht $s/a^2 \to 0$, also verschwindet der erste Term. Wir hatten angenommen, daß für ein bestimmtes $t_0 \geq 0$ das Integral $\int_{t_0}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{3/2}} exp(-\frac{g(u)^2}{2u})\, du$ endlich ist. Somit wird für alle $a > 0$ und genügend große s, $\int_s^{\infty} \frac{g(u)+a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(g(u)+a)^2}{2u})\, du$ echt kleiner als 1. Wir erhalten dann:

$$P(T(a,0) < +\infty) \leq \lim_{a \to +\infty} \int_s^{\infty} \frac{g(u)+a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(g(u)+a)^2}{2u})\, du < 1 \qquad (5.3.4)$$

Für $(-B_t)_t$ haben wir dieselbe Verteilung wie für $(B_t)_t$.
Deswegen erhalten wir mit Hilfe von (5.2.12) und (5.3.4):

$$E(exp(B_{T(a,1)} - \frac{1}{2}T(a,1))) = P(T(a,0) < \infty) < 1\ . \qquad (5.3.5)$$

Die dritte Waldidentität ist also nicht mehr erfüllt. Dagegen ist die Voraussetzung (5.2.2) aus Satz 5.2.1 sehr wohl erfüllt, wie wir jetzt sehen werden. Aus der Definition von $T(a,1)$ folgt $B_{T(a,1)} = T(a,1) - g(T(a,1)) - a$ f.s. Deswegen erhalten wir für $0 < a < +\infty$:

$$E(exp(\frac{1}{2}T(a,1) - g(T(a,1)))) = E(exp(B_{T(a,1)} - \frac{1}{2}T(a,1) + a)) < 1 \cdot exp(a) < +\infty\ .$$

Hier haben wir die Ungleichung (5.3.5) benutzt. Demzufolge können wir auf die Voraussetzung (5.2.1) im Satz 5.2.1 nicht verzichten. □

5.4 Verfeinerung der dritten Waldidentität für spezielle Stoppzeiten der Brownschen Bewegung

Wir wollen nun eine spezielle Klasse von Stoppzeiten betrachten, für diese gilt die dritte Waldidentität und die Voraussetzung $E(exp(\frac{1}{2}\tau - g(\tau))) < +\infty$ von dem Satz 5.2.1 ist erfüllt.

Beispiel 5.4.1. *Für alle $a > 0$ und $b \in \{0,1\}$ sei*

$$\bar{\tau}(a,b) = \inf\{t : B_t = bt - t^{1/2} - a\} \qquad (5.4.1)$$

Dann gelten die dritte Waldidentität:

$$E(exp(B_{\bar{\tau}(a,1)} - \frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1))) = 1 \ ,$$

die Voraussetzung von Satz 5.2.1:

$$E(exp(\frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1) - \sqrt{\bar{\tau}(a,1)})) = exp(a) < +\infty \tag{5.4.2}$$

und

$$E(exp(\frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1))) = +\infty \ .$$

Beweis:

Die Stoppzeit $\bar{\tau}(a,0) := \inf\{t : B_t = -\sqrt{t} - a\}$ ist fast sicher endlich, weil $-\sqrt{t}$ langsamer fällt, als $-\sqrt{2tlog(log(t))}$, für $t \to \infty$, und der negative iterierte Logarithmus die untere Einhüllende der Pfade der Brownschen Bewegung ist. Dann gilt nach dem Lemma 5.2.6, für alle $a > 0$:

$$E(exp(B_{\bar{\tau}(a,1)} - \frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1)) = P(\bar{\tau}(a,0) < +\infty) = 1 \ .$$

Daher ist die dritte Waldidentität erfüllt. Nach Definition von $\bar{\tau}(a,1)$ erhalten wir dann für alle $a > 0$:

$$1 = E(exp(B_{\bar{\tau}(a,1)} - \frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1)) = E(exp(\frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1) - \sqrt{\bar{\tau}(a,1)} - a)) \ .$$

Daraus folgt für alle $a > 0$:

$$E(exp(\frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1) - \sqrt{\bar{\tau}(a,1)})) = exp(a) < +\infty \ .$$

Wir wollen nun zeigen, daß $E(exp(\frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1))) = +\infty$ gilt. Dazu beweisen wir die folgende Proposition.

Proposition 5.4.2. *Sei B die Brownsche Bewegung. Dann ist*

$$\tilde{X}_t := exp(B_t + \sqrt{t} - \frac{1}{2}t)$$

ein Submartingal bzgl. der Filtration der Brownschen Bewegung.

Beweis:

1. **Adaptiertheit von $\tilde{X}$:**
klar.

2. **Integrierbarkeit von $\tilde{X}$:** Um den folgenden Erwartungswert zu berechnen, verwenden wir die Dichte der Brownschen Bewegung (2.2.1). Dann gilt für alle $0 \leq t < +\infty$:

$$\begin{aligned} E(|\tilde{X}_t|) &= E(exp(B_t + \sqrt{t} - \frac{1}{2}t)) \\ &= exp(\frac{1}{2}t + \sqrt{t} - \frac{1}{2}t) \\ &= exp(\sqrt{t}) < +\infty \end{aligned}$$

3. **bedingter Erwartungswert:**

$$\begin{aligned} E(exp(B_t + \sqrt{t} - \frac{1}{2}t)|\mathcal{F}_s) &= exp(\sqrt{t})E(exp(B_t - \frac{1}{2}t)|\mathcal{F}_s) \\ &= exp(\sqrt{t})exp(B_s - \frac{1}{2}s) \\ &\geq exp(\sqrt{s})exp(B_s - \frac{1}{2}s) \\ &= exp(B_s + \sqrt{s} - \frac{1}{2}s) \quad \forall 0 \leq s < t \end{aligned}$$

Zweite Gleichung: $(exp(B_t - \frac{1}{2}t))_t$ ist $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal. Dritte Gleichung: Monotonie der Exponential- bzw. der Wurzelfunktion.

Mit (1), (2), (3) folgt nun, daß $\tilde{X}$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Submartingal ist. □

Nun betrachten wir die Stoppzeit $\tau(a,1) := \inf\{t : B_t = t - a\}$, für alle $a > 0$. Aus der Definition von $\bar{\tau}(a,1) := \inf\{t : B_t = t - \sqrt{t} - a\}$, für alle $a > 0$ folgt, daß $\tau(a,1) \leq \bar{\tau}(a,1)$ f.s. ist. Wir wenden die Proposition 2.1.2 auf das Submartingal $\tilde{X} := (exp(B_t + \sqrt{t} - \frac{1}{2}t))_t$ an und bekommen:

$$E(\tilde{X}_{\bar{\tau}(a,1)}) \geq E(\tilde{X}_{\tau(a,1)}) \ . \tag{5.4.3}$$

Die rechte Seite können wir mit Hilfe der Verteilung der Stoppzeit $\tau(a,1)$ direkt ausrechnen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_{\tau(a,1)}) &= E(exp(B_{\tau(a,1)} + \sqrt{\tau(a,1)} - \frac{1}{2}\tau(a,1))) \\ &= E(exp(\frac{1}{2}\tau(a,1) - a + \sqrt{\tau(a,1)})) \\ &= \int_0^\infty exp(\frac{1}{2}u - a + \sqrt{u}) \frac{a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(u-a)^2}{2u})\, du \\ &= \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{a^2}{2u} + \sqrt{u})\, du \ . \end{aligned}$$

Zweite Gleichung: Definition der Stoppzeit $\tau(a,1)$ eingesetzt. Der Integrand divergiert gegen $+\infty$, für $u \to +\infty$. Somit divergiert auch das Integral. Also erhalten wir für alle $a > 0$

$$E(\tilde{X}_{\tau(a,1)}) = +\infty \ .$$

Das setzen wir in die Ungleichung (5.4.3) ein und bekommen:

$$\begin{aligned} +\infty &= E(\tilde{X}_{\bar{\tau}(a,1)}) \\ &= E(exp(B_{\bar{\tau}(a,1)} + \sqrt{\bar{\tau}(a,1)} - \frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1))) = E(exp(\frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1) - a)) \\ &= E(exp(\frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1)))exp(-a) \ . \end{aligned}$$

$exp(-a)$ ist endlich für alle $a > 0$. Daraus folgt für alle $a > 0$:

$$E(exp(\frac{1}{2}\bar{\tau}(a,1))) = +\infty \ .$$

□

6 Waldidentitäten im Mehrdimensionalen

Wir wollen uns mit der Frage der Gültigkeit der Waldidentitäten im Mehrdimensionalen auseinandersetzen und müssen hier die Brownsche Bewegung im Mehrdimensionalen einführen. Die Brownsche Bewegung im Mehrdimensionalen hat spezielle Eigenschaften. Sie ist invariant unter Drehungen. Das heisst, falls Q eine Orthogonalmatrix ist (d.h. $Q^T = Q^{-1}$), dann hat $X_t = Q \cdot B_t$ dieselbe Verteilung, wie B_t. Die Brownsche Bewegung im Ein- bzw. Zweidimensionalen ist rekurrent, das heisst die Brownsche Bewegung trifft jede offene Umgebung um Null. Ab der Dimension Drei ist die Brownsche Bewegung aber transient. Dann besuchen die Trajektorien der Brownschen Bewegung nicht mehr jeden Punkt.

Definition 6.0.3 (**Mehrdimensionale Brownsche Bewegung**). *Eine Standard Brownsche Bewegung im $\mathbb{R}^n$ ist ein $n-Tupel$*

$$B_t = (B_{t,1}, \ldots, B_{t,n}) \quad \forall t \geq 0 \ ,$$

wobei $(B_{t,i})_t$ eine Standard Brownsche Bewegung im Eindimensionalen ist, und die $B_{t,i}$ unabhängig für alle $i = 1, \ldots, n$ sind. Für die Dichte von $B := (B_t)_t$ bekommen wir dann:

$$f_{B_t}(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} exp(-\frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{2t}) \quad \forall (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \ . \tag{6.0.4}$$

Wir werden nun für die Standard Brownsche Bewegung im $\mathbb{R}^n$ immer nur die n-dimensionale Brownsche Bewegung schreiben.

6.1 Erste Waldidentität im Mehrdimensionalen

Satz 6.1.1. *Sei τ eine Stoppzeit der eindimensionalen Brownschen Bewegung $(B_{t,i})_t$, für alle $i = 1, \ldots, n$, mit*

$$E(\tau^{1/2}) < +\infty \ .$$

Dann gelten für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(E(B_{\tau,1}), \ldots, E(B_{\tau,n})) = \mathbf{0} \ , \tag{6.1.1}$$

wobei $\mathbf{0}$ der Nullvektor ist und:

$$E(\sum_{i=1}^{n} B_{\tau,i}) = 0 \ . \tag{6.1.2}$$

Beweis:

Wir können den Satz 3.0.3 anwenden und erhalten für eine Stoppzeit τ mit der Eigenschaft $E(\tau^{1/2})$ die erste Waldidentität $E(B_{\tau,i})$, für alle $i = 1, \ldots, n$. Somit gelten die Gleichungen (6.1.1) und (6.1.2). □

Somit gilt also die erste Waldidentität auch im Mehrdimensionalen und zwar für alle Dimensionen.

6.2 Zweite Waldidentität im Mehrdimensionalen

Wir betrachten nun die Gültigkeit der zweiten Waldidentität im Mehrdimensionalen. Wir können nicht sagen, was das Quadrat von einem Vektor ist, somit macht B_t^2 keinen Sinn. Hätten wir eine Matrix zur Verfügung, dann könnten wir sagen, daß das Quadrat von einer Matrix existiert. Wir betrachten nun das euklidische Skalarprodukt $\|\cdot\|$ von der n-dimensionalen Brownschen Bewegung B. Wir erhalten dann in der folgenden Proposition ein interessantes Resultat:

Proposition 6.2.1. *Sei B die n-dimensionale Brownsche Bewegung und sei*

$$\|B_t\|^2 = \sum_{i=1}^{n} B_{t,i}^2$$

Dann ist $(\|B_t\|^2 - nt)_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal.

Beweis:

1. **Adaptiertheit:** klar.

2. **Integrierbarkeit:** Hierbei benutzen wir, daß $E(B_{t,i}^2) = t$ ist, für alle $i = 1, \ldots, n$. Somit erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$:

$$E(|(\sum_{i=1}^{n} B_{t,i}^2) - nt|) \leq \sum_{i=1}^{n} E(B_{t,i}^2) + nt = \sum_{i=1}^{n} t + nt = 2nt < +\infty \quad .$$

3. **bedingter Erwartungswert:** In Proposition 2.2.2 haben wir gezeigt, daß für alle $i = 1, \ldots, n$ der Prozess $(B_{t,i}^2 - t)_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal ist. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} E(\|B_t\|^2 - nt|\mathcal{F}_s) &= E((\sum_{i=1}^{n} B_{t,i}^2) - nt|\mathcal{F}_s) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(B_{t,i}^2 - t|\mathcal{F}_s) = \sum_{i=1}^{n} B_{s,i}^2 - s \\ &= \|B_s\|^2 - ns \quad \forall s < t \end{aligned}$$

□

Satz 6.2.2. *Sei τ eine Stoppzeit von $(B_{t,i})_t$, für alle $i = 1, \ldots, n$. Falls die Voraussetzung*

$$E(\tau) < +\infty$$

erfüllt ist. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$E(\|B_\tau\|^2) = nE(\tau) \ . \tag{6.2.1}$$

Beweis:

Nach Satz 4.1.1 haben wir, daß falls τ eine integrierbare Stoppzeit von $(B_t)_t$ ist, gilt im Eindimensionalen $E(B_\tau^2) = E(\tau)$. Nun können wir analog zu dem Beweis von Satz 4.1.1 verfahren und bekommen die Gleichung (6.2.1). □

6.3 Dritte Waldidentität im Mehrdimensionalen

Wir betrachten nun die Gültigkeit der dritten Waldidentität im Mehrdimensionalen. Wir stellen erneut fest, daß die Exponentialfunktion von einem Vektor B_t keinen Sinn macht. Die Exponentialfunktion von einer Matrix würde Sinn machen, aber wir haben keine Matrix zur Verfügung. Die eindimensionale dritte Waldidentität, lautet $E(exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)) = 1$, für beliebige Stoppzeiten τ von $(B_t)_t$. Wir betrachten nun die Summe $\sum_{i=1}^n B_{t,i}$ und wollen sagen, ob denn $(exp(\sum_{i=1}^n B_{t,i} - \frac{n}{2}t))_t$ ein Martingal ist. Wir können es auch in einer anderen Form schreiben:

$$P_t^n = exp(\sum_{i=1}^n B_{t,i} - \frac{n}{2}t) = \prod_{i=1}^n exp(B_{t,i} - \frac{1}{2}t) = \prod_{i=1}^n Y_{t,i} \ .$$

Nun ist $E(Y_{t,i}) = 1$, für alle $i \in \mathbb{N}$ und $(Y_{t,i})_i$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen.

Proposition 6.3.1. *Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $P_t^n(\lambda) = exp(\lambda \sum_{i=1}^n B_{t,i} - \frac{n\lambda^2}{2}t)$. Dann ist $(P_t^n(\lambda))_t$, für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$.*

Das ist klar, weil $(P_t^n(\lambda))_t$ ein Produkt von unabhängigen Martingalen ist.

Satz 6.3.2. *Sei τ eine Stoppzeit von $(B_{t,i})_t$, für alle $i = 1, \ldots, n$. Falls die Voraussetzung*

$$E(exp(\frac{1}{2}\tau)) < +\infty$$

erfüllt ist. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$E(exp(\sum_{i=1}^{n} B_{\tau,i} - \frac{n}{2}\tau)) = 1 \ . \tag{6.3.1}$$

Beweis:

Nach Satz 5.1.1 haben wir, daß falls τ die Voraussetzung $E(exp(\frac{1}{2}\tau)) < +\infty$ erfüllt, daß dann im Eindimensionalen die dritte Waldidentität im Eindimensionalen folgt. Nun können wir analog zu dem Beweis von Satz 4.1.1 verfahren und bekommen die Gleichung (6.3.1). □

Wir stellen somit fest, daß wir alle Sätze, Lemmata, Propositionen aus den vorigen Kapiteln auf die drei eindimensionalen Martingale

$$(\sum_{i=1}^{n} B_{t,i})_t \quad (\sum_{i=1}^{n} B_{t,i}^2 - nt)_t \quad (exp(\sum_{i=1}^{n} B_{t,i} - \frac{n}{2}t))_t$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ übertragen können.

7 Appendix

Legende von Stoppzeiten:

$$\tau_j = \inf\{t > \tau : t = \frac{k}{2^j} \text{ , für einige } k \in \mathbb{N}\} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (2.4.1)$$

$$S_n = \inf\{t : n+1 > |M_t| > n\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.6.1)$$

$$\tau_a = \inf\{t : B_t = a\} \quad \forall a \neq 0 \quad (2.8.1)$$

$$\tau(a,b) = \inf\{t \geq 0 : B_t = bt - a\} \quad \forall b > 0 \quad \forall a \neq 0 \quad (2.8.7)$$

$$R = \inf\{t : t \wedge \tau > x\} \quad \forall x > 0 \quad (3.1.10)$$

$$S = \inf\{t : \sup_{0 \leq s \leq t} |B_{s\wedge\tau}|^2 > x\} \quad \forall x > 0 \quad (3.1.11)$$

$$\tilde{\tau}(a,b) = \inf\{t : B_t = b\sqrt{t} - a\} \quad \forall a > 0 \quad \forall b \geq 0 \quad (3.2.3)$$

$$\tilde{R}_A = \inf\{t : \xi_t \geq A\} \quad \forall A > 0 \quad (3.3.16)$$

$$\tilde{R}_{-A} = \inf\{t : \xi_t \leq -A\} \quad \forall A > 0 \quad (3.3.19)$$

$$\sigma_{a,b} = \inf\{t \geq \tau_a : B_t = b\} \quad \forall a > b \quad \forall a > 0 \quad (3.5.3)$$

$$T_t = \inf\{s :< \xi >_s > t\} \quad (3.6.6)$$

$$\tau_f = \inf\{t : B_t = f(t)\} \quad (3.7.1)$$

$$\tau_{-a,b} = \inf\{t : B_t = -a \text{ oder } B_t = b\} \quad \forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad (4.2.3)$$

$$\tau_{-a,a} = \inf\{t : |B_t| = a\} \quad \forall a > 0 \quad (4.2.5)$$

$$\tau^{(n)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \inf\{t > \tau^{(n-1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} : B_t = B_{\tau^{(n-1)}_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}} \pm \frac{1}{2^n}\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.2.7)$$

$$R_f = \inf\{t : B_t + \lambda t = f(t)\} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.2.7)$$

$$T(a,b) = \inf\{t \geq 0 : B_t = bt - g(t) - a\} \quad \forall a > 0 \quad b \in \{0,1\} \quad (5.2.11)$$

$$\bar{\tau}(a,b) = \inf\{t : B_t = bt - \sqrt{t} - a\} \quad \forall a > 0 \quad \forall b \in 0,1 \quad (5.4.1)$$

Stoppzeit T	$E(B_T)$	$E(B_T^2)$	$E(T)$	$E(exp(B_T - \frac{1}{2}T))$
τ_a für $a > 0$	a	a^2	$+\infty$	1
τ_a für $a < 0$	a	a^2	$+\infty$	$exp(2a) < 1$
$\sigma(a,b)$ für $a > b$, $a > 0$	b	b^2	$+\infty$	$exp(2(b-a)) < 1$
$\tau_{-a,a}$ für $a \geq \pi/2$	0	a^2	a^2	$c(a) < 1$
$\tau_{-a,a}$ für $0 < a < \pi/2$	0	a^2	a^2	1
$\tau(a,b)$ für $a > 0$, $b \geq 1$	0	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	1
$\tau(a,b)$ für $a > 0$, $1 > b > 0$	0	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$exp(2a(b-1)) < 1$
$\tilde{\tau}(a,b)$ für $a > 0$, $b > 1$	0	$\frac{a^2}{b^2-1}$	$\frac{a^2}{b^2-1}$	$c(a,b) < 1$
$\tilde{\tau}(a,b)$ für $a > 0$, $1 \geq b > 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$c(a,b) < 1$

Dichten von Zufallsvariablen:

$$f_{B_t}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp(-\frac{u^2}{2t}) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (2.2.1)$$

$$f_{\tau_a}(u) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{a^2}{2u}) \quad \forall a \neq 0 \quad \forall u > 0 \quad (2.8.2)$$

$$f_{\tau(a,b)}(u) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} exp(-\frac{(bu-a)^2}{2u}) \quad \forall b > 0 \quad \forall a \neq 0 \quad \forall u > 0 \quad (2.8.8)$$

$$f_{(B_{t_1},\ldots,B_{t_n})}(u_1,\ldots,u_n) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} exp(-\frac{u_1^2 + \ldots + u_n^2}{2t}) \quad \forall (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n \quad (6.0.4)$$

Satz 7.0.3. *Sei $M := (M_t)_t$ ein lokales Martingal bzgl. der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$.*

1. *Falls $M \geq 0$, dann ist M ein Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$.*
2. *Wenn für alle $t \in \mathbb{R}_+$, $E(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|) < +\infty$ gilt, dann ist M ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$.*
3. *Wenn $E(\sup_s |M_s|) < +\infty$, dann ist M ein gleichgradig integrierbares Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$.*

Beweis:

M ist ein lokales $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal. Somit ist M, $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptiert. Nun wollen wir die Implikation (1) beweisen. Sei $(\tau_n)_n$ eine Folge von Stoppzeiten, mit $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$ und wofür $(M_{t\wedge\tau_n})_t$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist. Dann gilt für alle t:

$$E(|M_t|) = E(M_t) = E(\liminf_{n\to\infty} M_{t\wedge\tau_n}) \leq \liminf_{n\to\infty} E(M_{t\wedge\tau_n}) < +\infty \ .$$

Erste Gleichung: $M \geq 0$. Erste Ungleichung: Fatou-Lemma. M ist von unten durch Null beschränkt und somit folgt die Integrierbarkeit von M_t für alle t aus der gleichgradigen Integrierbarkeit von $M_{\bullet\wedge\tau_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $0 \leq s < t$ gilt:

$$E(M_t|\mathcal{F}_s) = E(\liminf_{n\to\infty} M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s) \leq \liminf_{n\to\infty} E(M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s) = \liminf_{n\to\infty} M_{s\wedge\tau_n} = M_s \text{ f.s.}$$

Erste Ungleichung: Fatou-Lemma für bedingte Erwartungswerte. Zweite Gleichung: $M_{\bullet\wedge\tau_n}$ ist ein gleichgradig integrierbares $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal.

Nun wollen wir die Implikation (2) beweisen. Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$E(|M_t|) \leq E(\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|) < +\infty \ .$$

Hier haben wir die Voraussetzung $E(\sup_{0\le s\le t}|M_s|) < +\infty$, für alle t benutzt. $M_{t\wedge\tau_n}$ wird durch eine integrierbare Zufallsvariable $\sup_{0\le s\le t}|M_s|$ dominiert. Somit folgt, daß der Grenzwert $M_t = \lim_{n\to\infty} M_{t\wedge\tau_n}$, für alle t existiert. Für alle $0 \le s < t$ gilt:

$$E(M_t|\mathcal{F}_s) = E(\lim_{n\to\infty} M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} E(M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} M_{s\wedge\tau_n} = M_s \text{ f.s.}$$

Zweite Gleichung: Lemma 2.4.4 mit $Y_j = M_{t\wedge\tau_n}$ und $Y = M_t$. Dritte Gleichung: $M_{\bullet\wedge\tau_n}$ ist ein gleichgradig integrierbares $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal.

Als Nächstes bleibt noch die Implikation (3) zu zeigen. Die Voraussetzung, daß $\sup_s|M_s|$ integrierbar ist, ist stärker, als die Voraussetzung $E(\sup_{0\le s\le t}|M_s|) < +\infty$. Somit folgt, nach der Implikation (2), daß M ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal ist. Nun ist M_t für alle t durch eine integrierbare Zufallsvariable $\sup_s|M_s|$ dominiert. Nach dem Satz 2.3.4 existiert dann der Grenzwert $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$. Somit ist M ein gleichgradig integrierbares $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal. $\square$

Literatur

[Bau91] Bauer, H., *Wahrscheinlichkeitstheorie*, De-Gruyter-Verlag, Berlin, (1991)

[Bil95] Billingsley, P., *Probability and Measure*, Wiley, New York, (1995)

[BurGun70] Burkholder, D. L. & Gundy, R. F., *Quasi-Linear Operators on Martingales.* , Acta Math. 124, (1970), pp. 249-304.

[ChuWil90] Chung, K. L. & Williams, R. J., *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhäuser, Boston, (1990)

[Doo53] Doob, J. L., *Stochastic Processes*, Wiley, New York, (1953)

[Doo84] Doob, J. L., *Classical Potential Theory and its probabilistic counterpart*, Springer-Verlag, New York, (1984)

[Fel71] Feller, W., *An Introduction to Probability theory and its applications*, vol. 2, Wiley, New York (1971)

[GalNov97] Galtchouk, L. & Novikov, A. A., *On Wald's equation. Discrete time case*, Séminaire de probabilités de Strasbourg 31 (1997), pp. 126-135.

[GikSko72] Gikhman, I. I. & Skorokhod, A. V., *Stochastic Differential equations*, Springer-Verlag, (1972)

[GikSko79] Gikhman, I. I. & Skorokhod, A. V., *Theory of stochastic Processes III*, Springer-Verlag, (1979)

[Gir60] Girsanov, I. V., *On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures*, Theory Prob. Applications, 5 (1960), pp. 285-301

[HacTha99] Hackenbroch, W. & Thalmaier, A., *Stochastische Analysis*, Teubner-Verlag, (1999)

[IkeWat81] Ikeda, N. & Watanabe, S., *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland Publications, (1981)

[Kar30] Karamata, J., *Sur certains " Tauberian theorems " de M. M. Hardy et Littlewood*, Comptes rendus du premièr congrès des mathématiciens roumains, Cluj. Mathematica (Cluj) 3, (1930), pp. 33-48

[KarShr91] Karatzas, I. & Shreve, S.E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, (1991)

[Kle07] Klenke, A., *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer-Verlag, (2007)

[LipShi72] Liptser, R. Sh. & Shiryaev, A. N., *On absolute continuity of measures associated with diffusion processes with respect to Wiener measure*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat., 36, 4 (1972), pp. 874-889 (In Russisch)

[LipShi01] Liptser, R. Sh. & Shiryaev, A. N., *Statistics of Random Processes*, Springer-Verlag, (2001)

[McK69] McKean Jr., H. P., *Stochastic Integrals*, Academic Press, New York (1969)

[Nev69] Neveu, J., *Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie*, R. Oldenbourg Verlag, München und Wien (1969)

[Nov71] Novikov, A. A., *On Stopping times for the Wiener Process*, Theory Prob. Applications, 16, Vol. 3, pp. 449-456 (Englische Übersetzung)

[Nov72] Novikov, A. A., *On an identity for stochastic integrals*, Theory Prob. Applications 17, (1972), pp. 717-720

[Nov77] Novikov, A. A., *On conditions for uniform integrability of continuous nonnegative martingales*, Theory of probability and its applications, 16,(1977) pp. 820-825

[Nov81] Novikov, A. A., *Martingale approach to first passage problems of nonlinear boundaries*, Proc. Steklov Inst. Math. 158, (1981), pp. 130-152

[Nov83] Novikov, A. A., *A martingale approach in problems on first crossing time of nonlinear boundaries*, Proceedings of the Steklov institute of mathematics, 4, (1983), pp. 141-163

[Nov96] Novikov, A. A., *Martingales, Tauberian Theorem and Strategies of Gambling*, Theory Prob. Applications 41, (1996), pp. 716-729.

[RevYor01] Revuz, D. & Yor, M., *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, (2001)

[RogWil94] Rogers, L. C. G. & Williams, D., *Diffusion, Markov Processes and Martingales*, Vol. 1, Foundations, 2nd Edition, Wiley and Sons, New York, (1994) [Sen76] Seneta, E., *Regularly Varying functions*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, (1976)

[She67] Shepp, A., *A first passage problem for the Wiener process* Annals Mathmetica Statistics 38, (1967) pp. 1912-1914

[She69] Shepp, A., *Expilicit Solutions to some problems of optimal stopping*, Ann. Math. Stat. 40, 3 (1969), pp. 993-1010

[Sto97] Stoyanov, J., *Counterexamples in Probability*, Springer-Verlag, (1997)

[Wil91] Williams, D., *Probability with martingales*, Cambridge University Press, Cambridge, (1991)

[Wol70] Wolfowitz, J., *Dictionary of Scientific Biography*, New York, (1970-1990)

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die von mir vorgelegte Diplomarbeit selbständig angefertigt, alle benutzten Quellen vollständig angegeben und die Stellen, die anderen Werken entnommen sind, entsprechend kenntlich gemacht habe. Außerdem versichere ich, daß diese Diplomarbeit noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegt worden ist.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis meiner Tätigkeit als Diplomand an der Universität Potsdam an der mathematischen Fakultät am Lehrstuhl Wahrscheinlichkeitstheorie. Ich möchte mich an dieser Stelle bei folgenden Personen bedanken:

- Frau Prof. Dr. Sylvie Roelly danke ich für das Geben des spannenden Themas und ihrer zuvorkommenden und hilfsbereiten Art. Ich danke ihr für ihre Geduld, und für ihre Anregungen und Ideen. Ich danke ihr, für ihre Betreuung, Unterstützung und für ihre Zeit. Ich danke Ihr für ihre hilfreichen und überaus anregenden Kommentare. Ich danke ihr, daß sie mich angetrieben hat und immer die richtigen Wörter gefunden hat, um mich zu motivieren. Außerdem danke ich ihr für die didaktisch ausgereiften Vorlesungen.

- Herrn Prof. Dr. Markus Klein danke ich für die spontane Hilfe bei der Suche nach den richtigen Ansätzen und Lösungswegen von unterschiedlichen Problemen.

- Herrn Dr. Pierre-Yves Louis danke ich für seine hilfreichen und motivierenden Ratschläge, und seinen stets munter formulierten Hinweisen.

Außerdem danke Ich meiner Familie, die mich seit Beginn meines Studiums finanziell, sowie liebevoll unterstützt hat und somit entscheidenden Einfluss auf das Gelingen meiner Diplomarbeit ausgeübt hat.