Universität Potsdam
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik

Diplomarbeit

Wolfgang Doeblin - Wegbereiter zum Itô Kalkül

vorgelegt von
Wioletta Magdalena Ruszel
am 27. Februar 2006

Gutachter
Prof. Dr. Sylvie Rœlly
Prof. Dr. Markus Klein

"J'ai le droit de donner mon avis, car je suis de ceux
qui savent mourir pour leurs idées."

("Ich habe das Recht meine Meinung zu sagen,
denn ich bin einer von denen,
der für seine Ideen sterben würde.")

Wolfgang Doeblin

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem versiegelten Brief von Wolfgang Doeblin *“Sur l’équation de Kolmogoroff ”*. Im Folgenden verwenden wir den ins Deutsche übersetzten Titel “Über die Gleichung von Kolmogoroff ”. Sie basiert auf dem dazugehörigen Sonderheft der Serie *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*. Das Ziel dieser Arbeit ist es, im Rahmen des heutigen Wissens und seiner Entwicklung, die außergewöhnliche Leistung Doeblins in den Kontext inhomogener Diffusionsprozesse einzuordnen. Zu Doeblins bekanntesten Resultaten zählt die sogenannte Coupling Methode, die beispielsweise in der Theorie der Markov Prozesse angewandt wird um Ergodizität zu studieren, vergleiche auch [LinRog86] oder [Elw00]. Die Ergebnisse, die Wolfgang Doeblin in [CRAS] entwickelt, waren noch vor einigen Jahren der mathematischen Gemeinschaft unbekannt.

Die Diffusionstheorie entstand im Zusammenspiel von Ergebnissen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik, zum Beispiel der Theorie der Partiellen Differentialgleichungen. Wolfgang Doeblin hatte zur Zeit der Entstehung zwar einige funktionalanalytische Methoden durch Arbeiten von Kolmogoroff, Feller und Lévy zur Verfügung, aber kaum trajektorielle. Nach Yor bildet diese Arbeit von Doeblin das “fehlende Glied zwischen der Repräsentation einer Feller-schen eindimensionalen Diffusion mithilfe der Brownschen Bewegung geändert in der Zeit und im Raum und der Repräsentation von Itô als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung ”.

Das erste Kapitel ist eine historische Einleitung in das Thema. Es handelt von Doeblins Biographie, den Umständen unter denen seine Arbeit *“Über die Gleichung von Kolmogoroff”* enstanden ist und gibt ein fundiertes Hintergrundwissen über die Prozedur der *versiegelten Briefe* der Académie des Sciences.

Im zweiten Kapitel nehmen wir funktionalanalytische Methoden, um einen stetigen Markov Prozess eindeutig durch seinen infinitesimalen Generator zu konstruieren. Wir werden sehen, dass sein Übergangskern bestimmte partielle Differentialgleichungen löst.

Das darauffolgende Kapitel handelt vom stochastischen Kalkül, das vollends erst nach Doeblins Tod ausgearbeitet wurde. Mit diesen Mitteln sind wir in der Lage, stochastische Integrale zu bauen und Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen zu beschreiben, welche ebenfalls die Markov Eigenschaft erfüllen. Diese beiden Kapitel sollen verdeutlichen, wie man sich der Theorie der Markov Prozesse aus verschiedenen Perspektiven nähern kann. Im Unterschied zu Doeblin schränken wir uns der Einfachheit halber vor allem auf homogene Prozesse ein. Sie zeigen bereits die generellen Ideen.

Schließlich widmen wir uns im vierten Kapitel der Arbeit von Wolfgang Doeblin *"Über die Gleichung von Kolmogoroff"*. Er geht von speziellen Lösungen der Chapman-Kolmogoroff Gleichung aus und arbeitet zuerst mit einer Familie von Verteilungsfunktionen F. Er nimmt an, dass ein stetiger Markov Prozess mit bestimmten infinitesimalen Charakteristiken existiert und versucht diesen Prozess unter gewissen Voraussetzungen zu beschreiben. Wir zeigen unter anderem, wie er den Martingalanteil seines Prozesses als zeittransformierte Brownsche Bewegung identifiziert und eine Transformationsformel entwickelt, die die Klasse dieser Typen von stetigen Markov Prozessen invariant lässt. Dieses Ergebnis von Doeblin ist besonders relevant. An dieser Stelle wird deutlich, in welchem Sinne Doeblin die Bruecke zwischen (den damals bekannten) stochastischen Prozessen aus der Sicht der partiellen Differentialgleichungen hin zu einer (zu seiner Zeit) noch nicht rigoros fassbaren stochastischen Integration geschlagen hat.

Da wir für diese Arbeit eine Auswahl treffen mussten, haben wir hier unter anderem das Thema " Große Abweichungen "sowie andere Eigenschaften der Familie von Verteilungsfunktionen F wie Regularität und Monotonie nicht entwickelt.

Kapitel 1

Historischer Teil

1.1 Biographie Wolfgang Doeblin

Im Folgenden beziehen wir uns auf den biographischen Teil von Bernard Bru im [CRAS] und eine Zusammenfassung in [DoeBio].
Wolfgang Doeblin war das zweite von drei Kindern von Erna und Alfred Döblin. Er wurde in Berlin am 17.März 1915 geboren und starb am 21.Juni 1940 in Housseras, Frankreich. Sein Vater Alfred (1878-1957), von Beruf Arzt in der Psychatrie, war einer der großen deutschen Schriftsteller in der Zeit zwischen den beiden Weltkriegen. Sein berühmtestes Werk *Berlin Alexanderplatz* erschien im Jahre 1929. Wolfgang verbrachte seine ersten drei Lebensjahre in Saargemünd (Sarreguemines), wo sein Vater freiwillig als Militärarzt tätig war. Am Ende des Ersten Weltkrieges zog die Familie zurück nach Berlin, wo die Anerkenung von Alfred Döblin als Schriftsteller und Teilnehmer an linken kulturellen und politischen Debatten wuchs. Als Jude und Linker war Alfred Döblin gezwungen samt seiner Familie nach dem Reichstagsbrand am 28.Februar 1933 zuerst in die Schweiz und dann nach Frankreich auszuwandern. Dort erhielten sie die französische Staatsbürgerschaft. Im Juni 1940 flohen Erna und Alfred Döblin in die Vereinigten Staaten. Nach dem Ende des Krieges kehrten sie nach Europa zurück. Erna starb im Jahre 1956, Alfred 1957 in Freiburg in der Schweiz.

Wolfgang besuchte die Oberschule in Berlin. Seine politische Meinung wurde inspiriert vom Marxismus und war radikaler als die seines Vaters. Im Juni 1933 erhielt er seine Allgemeine Hochschulreife und folgte seiner Familie nach Zürich. Im Jahre 1936 übersetzte er seinen Vornamen ins Französische und hieß *Vincent*. Seine Arbeit *" Über die Gleichung von Kolmogoroff"* unterschrieb er aber mit dem Namen " Wolfgang Doeblin". Er begann an der Sorbonne Volkswirtschaftslehre und Statistik unter Arnaud Denjoy (1884-1974), Maurice Fréchet (1878-1973) und Georges Darmois (1888-1960) zu studieren. Während dieser Zeit entdeckte er sein starkes Interesse an der Wahrscheinlichkeitstheorie. Diese erhielt neuen Aufschwung mit den Arbeiten von Kolmogoroff über Maßtheorie im Jahre 1933, siehe [Kol33]. Wolfgang arbeitete unter Maurice Fréchet und Paul Lévy (1886-1971) und erzielte sehr schnell tiefe Resultate, siehe auch die Arbeiten [Doe37], [Doe38a] und [Doe40]. Außerdem arbeitete er noch mit einer Pléaide von jungen Forschern wie Alexander Khintchine (1894-1959), William Feller (1906-1970), Robert Fortet (1912-1998), Joseph L. Doob (1910) sowie Jean Ville, einem der Initiatoren des Borelseminars, zusammen. Im Jahre 1938 verteidigte er seine Doktorarbeit in Wahrscheinlickeitstheorie an der Sorbonne. Wolfgang Doeblin veröffentlichte insgesamt 13 Artikel und 13 Beiträge in der Zeitschrift *Comptes Rendus*, einige davon erschienen posthum.

Im Oktober 1938 wurde Wolfgang in die französische Armee eingezogen.
Seine universitären Titel hätten es ihm erlaubt, als höherer Offizier anzufangen. Aber er verweigerte vier Mal dieses Angebot. Ab September des Jahres 1939 war er als Telegraphist im 291-ten Regiment der Infanterie der französischen Armee in den Ardennen tätig.
Vor seinen Kameraden präsentierte er sich als Elsäßer. Während seiner Zeit als Soldat setzte er seine Arbeit über die Gleichung von Chapman-Kologoroff fort. Tagsüber arbeitete er als Telegraphist und nachts arbeitete er an seinen mathematischen Theorien. Zweifellos befand sich Wolfgang Doeblin in Eile und wusste nicht wieviel Zeit ihm noch bleibt, um seine Arbeit fertigzustellen. Im Februar 1940 setzte er einen *versiegelten Brief* auf und schickte ihn zur Académie des Sciences nach Paris. Im Juni 1940 wurde sein Bataillon im Norden der Vogesen von den Deutschen umkreist und eingenommen. Wolfgang floh in der Nacht vom 20.Juni. Er kam bis Housseras. Als er die Ankunft der deutschen Soldaten bemerkte, verbrannte er einige seiner Papiere und Arbeiten auf einem Bauernhof und nahm sich am Morgen des 21.Juni 1940 das Leben. Housseras ist 100 km von Sarreguemines entfernt, der Ort an dem er seine ersten drei Lebensjahre verbrachte. Sein Körper wurde am Nachmittag in ein Massengrab mit deutschen und französischen Soldaten gelegt. Da er seine Papiere verbrannte, konnte er nicht sofort identifiziert werden. Dies

Abbildung 1.1: Wolfgang Doeblin im Herbst 1939, Quelle: [CRAS], S. 1032

gelang erst am 19.April 1944 mithilfe eines Armbandes. Am 20.Mai 1944 wurden Wolfgangs Eltern von seinem Tod unterrichtet. Sie erholten sich niemals mehr von diesem Schock. Erna wählte 1956 den Freitod, Alfred orientierte sich zur Religion und starb innerhalb eines Jahres nach seiner Frau. Beide ließen sich in Housseras neben ihrem Sohn begraben.

Die mathematische Gemeinschaft ehrte Wolfgang Doeblin in den darauf folgenden Jahren durch viele Stimmen. 1955 widmet ihm Paul Lévy einen Artikel, in dem er schrieb:

> *"On est [...] toujours frappé par la sûreté et la précision de ses raisonnements, et par son extraordinaire aptitude à résoudre les difficultés les plus variées, soit en les attaquant de front, soit en découvrant un chemin détourné. Je crois pouvoir dire, pour donner une idée du niveau où il convient de le situer, qu'on peut compter sur les doigts d'une seule main les mathématicients qui, depuis Abel et Galois, sont morts si jeunes en laissant une œuvre aussi importante".*

Übersetzung:

> " Man ist [...] stets beeindruckt von seiner Sicherheit und Argumentationsweise und von seiner außergewöhnlichen Fähigkeit, verschiedenartigste Probleme zu lösen, indem er sie direkt anpackte oder einen geschickten Weg entdeckte. Ich glaube sagen zu können, um eine Idee zu geben wo man sein Niveau platzieren kann, dass man an einer Hand die Mathematiker seit Abel und Galois abzählen kann, die zu früh gestorben sind und so wichtige Arbeiten hinterlassen haben."

Kai Lai Chung und Joseph Doob widmen 1991 den Arbeiten von Wolfgang Doeblin ein Kolloquium am Wissenschaftlichen Institut von Blaubeuren bei Ulm. Bernard Bru präsentierte unveröffentlichte Briefkorrespondenzen von Doeblin und Fréchet.

1.2 Über W. Doeblins versiegelten Brief

Die Prozedur der *versiegelten Briefe* geht, siehe Bru im [CRAS] S. 1147, sogar bis auf die Gründerzeit der Académie des Sciences zurück. Das erste bekannte Beispiel für das Deponieren eines versiegelten Briefes bildet Jean Bernoulli am 1.Februar 1701. Das Aufbewahren versiegelter Briefe dient dazu, das Urheberrecht der Entdeckung wissenschaftlicher Ergebnisse zu wahren, wenn der Verfasser zur Zeit der Einreichung verhindert ist das Ergebnis zu publizieren. Die geöffneten und zur Veröffentlichung ausgewählten Arbeiten werden von einer Komission der Académie in Serien der *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* gedruckt, die seit Gründung im Jahre 1835 immer noch regelmässig erscheinen. Jährlich gehen durchschnittlich 60-80 versiegelte Briefe bei der Académie ein, in den 30er Jahren waren es durchschnittlich 120. Das Regelwerk der Académie wurde zuletzt 1990 aktualisiert. Es versichert, dass **jede** Einsendung akzeptiert werden muss. Die Académie behält sich das Recht vor, 100 Jahre nach Erhalt eines versiegelten Briefes diesen öffnen zu dürfen und über dessen weitere Verwendung frei zu entscheiden. Der Besitzer hat jederzeit Einsichtsrecht und das Recht seinen eingeschickten Brief wieder in Besitz zu nehmen. Bei der Einsendung darf eine bestimmte Größe und Gewicht nicht überschritten werden und es sind pro Person zwei Briefe jährlich zum Aufbewahren erlaubt. Bei Tod des Besitzers können Angehörige die Öffnung, aber nicht die Herausgabe, beauftragen.

Wolfgang Doeblins versiegelter Brief kam am 26.Februar 1940 in der Académie an und wurde unter der Nummer 11-668 registriert. Dank Pierre Dugac, einem Mitglied der Komission, konnte Doeblins Brief schließlich am 18.Mai 2000 geöffnet werden. Er überzeugte Wolfgangs Bruder Claude Doblin, der heute in Nizza lebt, die Erlaubnis zu erteilen. Darin befand sich ein kritzelig geschriebenes Manuskript von etwa hundert Seiten unter dem Titel " Sur l'équation de Kolmogoroff", verfasst in einem Schulheft der Serie "Villes et paysages de France"(Städte und Landschaften Frankreichs).

Abbildung 1.2: Doeblins Manuskript, Quelle: [DoeBio]

Das Manuskript wurde zur wissenschaftlichen Untersuchung Marc Yor und Jean-Pierre Kahane anvertraut. Bernard Bru "übersetzte" Doeblins Notizen, die teilweise schwer leserlich sind, und vervollständigte die Ausgabe der Comptes Rendus *"Sur l'équation de Kolmogoroff"* durch sowohl historische als auch wissenschaftliche Kommentare. Die folgende Abbildung ist eine Kopie einer Seite aus Wolfgangs Manuskript. Wir bekommen eine Idee, unter welchen Umständen Wolfgang seine Arbeit aufgeschrieben hatte und wie schwierig es sein musste sie zu "übersetzen".

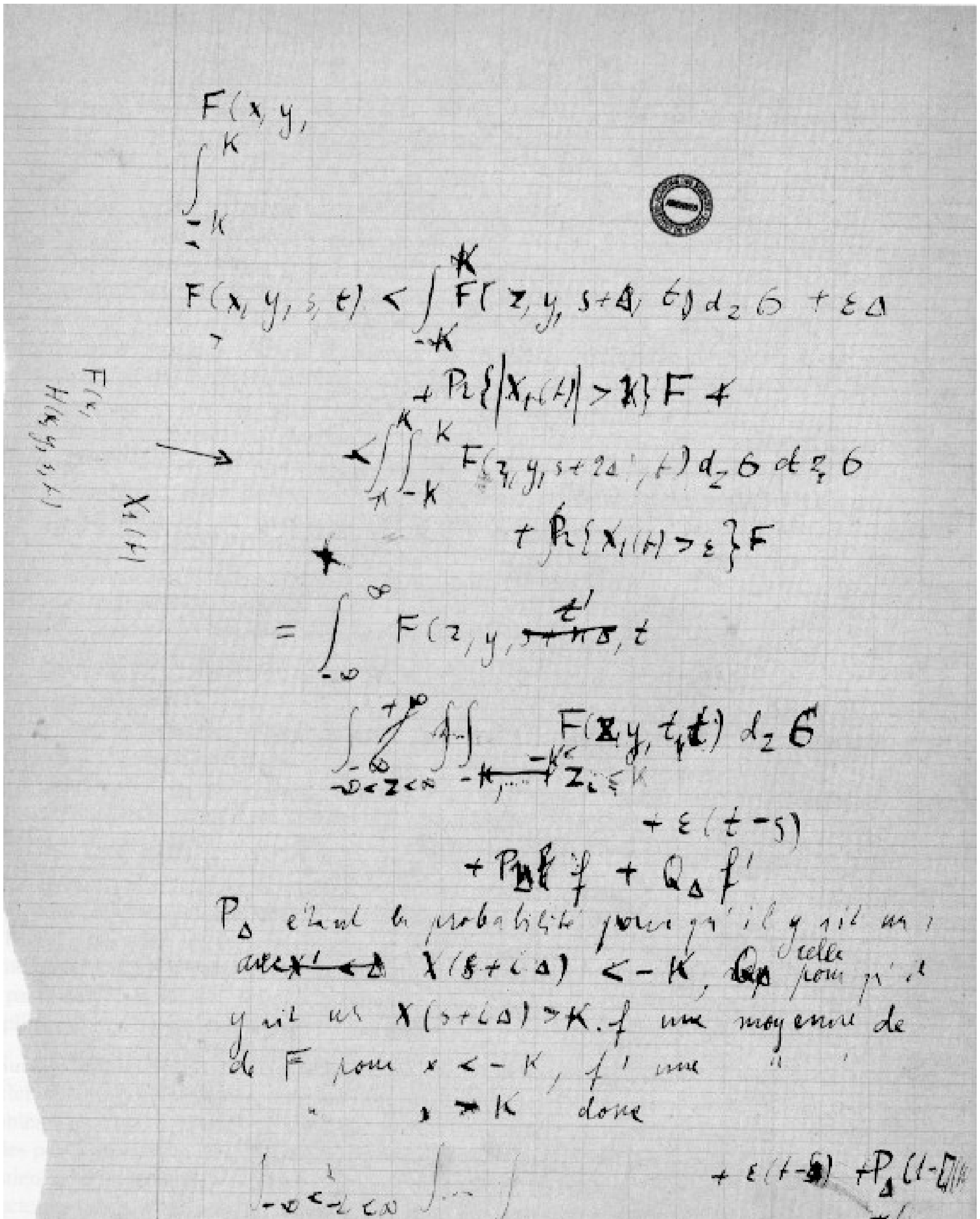

Abbildung 1.3: Eine Seite aus Doeblins Manuskript, Quelle: [CRAS], S. 1101

Kapitel 2

Funktionalanalytischer Zugang

Einleitung

Wir wollen die Verbindung zwischen stetigen Markov Prozessen, bestimmten Halbgruppen von Operatoren, infinitesimalen Generatoren und einem Cauchy-Problem herstellen. Wir beziehen uns hauptsächlich auf die Bücher [RevYor01], [Kal02] und [EthKur86]. Es soll beleuchtet werden, wie diese Objekte zusammenhängen. Halbgruppen und Generatoren kommen ursprünglich aus der Funktionalanalysis und dienen beispielsweise dazu, Existenz von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zu etablieren. Wir werden sie benutzen, um Markov Prozesse eindeutig zu charakterisieren.
Zu einem gegebenen Markov Prozess werden wir in eindeutiger Weise eine Feller Halbgruppe assoziieren. Eine Halbgruppe kann eindeutig durch ihren infinitesimalen Generator beschrieben werden. Schließlich konstruieren wir einen kanonischen Markov Prozess. Es soll veranschaulicht werden, wie das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) & = \mathrm{A} u(x,t) \\ u(x,0) & = f(x) \end{cases}$$

wobei A ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung ist, stochastisch gelöst werden kann.

2.1 Vom Markov Prozess zur Halbgruppe

2.1.1 Übergangsoperatoren

Wir betrachten den messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$. Ein *Wahrscheinlichkeitskern* ist eine Abbildung

$$\mu : S \times \mathcal{S} \to [0, 1]$$

mit den Eigenschaften:

(i) für alle $x \in S$ ist $B \mapsto \mu(x, B)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf S und

(ii) für alle $B \in \mathcal{S}$ ist $x \mapsto \mu(x, B)$ messbar bezüglich $\mathcal{S}$.

Ein Wahrscheinlichkeitskern wird *Übergangswahrscheinlichkeit* genannt, wenn $\mu(x, S) = 1$ für alle $x \in S$ gilt. Geht man von einem Wahrscheinlichkeitskern μ auf einem messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$ aus, so kann man auf natürliche Weise einen Operator P assoziieren. Gegeben ist eine $\mathcal{S}$-messbare, beschränkte oder nicht-negative Funktion f und $x \in S$. Sei

$$\mathrm{P}f(x) := (\mathrm{P}f)(x) = \int f(y)\mu(x, dy).$$

Bleibt $\mathrm{P}f$ messbar? f kann durch *einfache* Funktionen wie z. B. Treppenfunktionen approximiert werden. P, auf eine Treppenfunktion angewendet, bleibt messbar. Aus der monotonen Konvergenz folgt dann, dass $\mathrm{P}f$ $\mathcal{S}$-messbar ist. Was hat dieser Operator für Eigenschaften? Wenn μ eine Übergangswahrscheinlichkeit ist und $0 \leq f \leq 1$, dann ist auch $0 \leq \mathrm{P}f \leq 1$. P heißt in diesem Fall *positiver Kontraktionsoperator*.

Sei umgekehrt P ein gegebener Übergangsoperator auf einem messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$ und sei $x \in S$ sowie $B \in \mathcal{S}$. Dann erhalten wir durch $\mu(x, B) := \mathrm{P}\mathbb{1}_B(x)$ wieder einen Wahrscheinlichkeitskern.

Sei X ein stochastischer Prozess. Betrachte die Übergangswahrscheinlichkeit

$$\mathrm{P}_{s,t}(X_t, A) = \mathbb{P}(X_t \in A | \sigma(X_u; u \leq s)) \text{ f.s.},$$

wenn $0 \leq s < t$. Die zugehörige Operatorhalbgruppe ist

$$\mathrm{P}_{s,t}f(x) := \int f(y)\mathrm{P}_{s,t}(x,dy).$$

Definition 2.1.1 (Übergangsoperator) *Ein Übergangsoperator auf einem messbaren Raum $(S,\mathcal{S})$ ist eine Familie $(\mathrm{P}_{s,t})_{t>s\geq 0} =: (\mathrm{P}_{s,t})_{s,t}$ von Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}_{s,t}$ auf $(S,\mathcal{S})$, so dass für jedes $x \in S$, $A \in \mathcal{S}$ und $0 \leq s < v < t$ gilt*

$$\mathrm{P}_{s,t}(x,A) = \int \mathrm{P}_{v,t}(y,A)\mathrm{P}_{s,v}(x,dy). \tag{2.1}$$

(2.1) wird *Chapman-Kolmogoroff Gleichung* genannt. Wir werden nochmal näher auf diese Gleichung im Kapitel über Doeblins Arbeit eingehen. Der Übergangsoperator ist *homogen*, wenn $\mathrm{P}_{s,t}$ nur von der Differenz $t-s$ abhängt. In diesem Fall reduziert sich (2.1) zu

$$\mathrm{P}_{t+s}(x,A) = \int \mathrm{P}_t(y,A)\mathrm{P}_s(x,dy).$$

Mit anderen Worten, die Halbgruppeneigenschaft für Operatoren, sprich $\mathrm{P}_{s+t} = \mathrm{P}_s\mathrm{P}_t = \mathrm{P}_t\mathrm{P}_s$, ist äquivalent zur Chapman-Kolmogoroff Gleichung für homogene Übergangsoperatoren. $(\mathrm{P}_t)_t$ bildet also eine Halbgruppe.
Wir kommen nun zur

Definition 2.1.2 (Markov Prozess) *Sei X ein Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(S,(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$. Dann heisst X Markov Prozess, wenn f.s. für $B \in \mathcal{S}$, $s < t$ und f nicht-negativ, messbar gilt*

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathfrak{F}_\mathfrak{s}) = \mathrm{P}_{s,t}f(X_s).$$

Ein Markov Prozess wird auch *gedächtnisloser* Prozess genannt. Er macht Voraussagen für die Zukunft nur mit der Information zum gegenwärtigen Zeitpunkt s, ohne die ganze Vergangenheit vor s zu kennen.
Der Prozess ist *homogen*, wenn

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathfrak{F}_\mathfrak{s}) = \mathrm{P}_{t-s}f(X_s) \text{ f.s.}$$

Als Beispiel betrachten wir die Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R},(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$. Wir wissen, dass B ein homogener Markov Prozess ist, d.h., für jedes beschränkte f und $s,t \geq 0$ ist

$$\mathbb{E}(f(B_{s+t})|\mathfrak{F}_s) = \mathbb{E}(f(B_{s+t})|B_s) = \mathrm{P}_t f(B_s).$$

Die Dichte der Verteilungsfunktion von B_t gegeben $B_0 = x$ f.s. ist der Übergangskern $y \mapsto p_t(x, y)$ vermöge

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right).$$

Dann wird die dazugehörige Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ definiert durch

$$\mathrm{P}_t f(x) := \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} p_t(x, y) f(y) dy, \text{ wenn } t > 0, \\ f(x), \text{ wenn } t = 0 \end{cases}$$

und $B_0 = x$ f.s.
In der weiteren Betrachtung richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den homogenen Fall mit stetigen Pfaden.

2.1.2 Feller Halbgruppen und Infinitesimale Generatoren

Wir haben den Zusammenhang von Markov Prozessen und Halbgruppen gesehen. Im Folgenden schauen wir uns spezielle Halbgruppen an und führen den Begriff des Generators ein. Wir werden zeigen, dass der Generator alle Informationen über den Prozess enthält und die Halbgruppe eindeutig bestimmt.

Sei S ein lokal kompakter, polnischer Raum. Wir kompaktifizieren S und erweitern ihn um einen Punkt $\{\infty\}$, d.h. $S' = S \cup \{\infty\}$. Sei $C_0(S)$ definiert als

$$C_0(S) := \left\{ g : \; g \in C(S), \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \right\}.$$

$f(\infty) := 0$ erweitert die Funktionen $f \in C_0(S)$ auf $C_0(S')$.
Versehen mit der Norm $\|g\| = \sup_{x \in S} |g(x)|$, wird $C_0(S)$ zu einem Banachraum erweitert.

Definition 2.1.3 *Eine positive Kontraktionshalbgruppe heisst Feller Halbgruppe, wenn gilt*

(F1) $\forall\, t \geq 0 : \mathrm{P}_t C_0(S) \subset C_0(S)$

(F2) $\forall\, x \in S, \forall\, f \in C_0(S) : \lim_{t\to 0} \mathrm{P}_t f(x) = f(x)$.

Als nächstes bestimmen wir den Generator einer Feller Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ auf $C_0(S)$. Dazu definieren wir

Definition 2.1.4 (Resolvente) *Die Resolvente* R_λ, $\lambda > 0$, *zu der Halbgruppe* $(\mathrm{P}_t)_{t\geq 0}$ *ist ihre Laplace Transformation*

$$\mathrm{R}_\lambda f = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)(\mathrm{P}_t f)dt$$

mit $f \in C_0(S)$.

Da $\mathrm{P}_t f(x)$ für fixiertes $x \in S$ beschränkt und rechtsseitig stetig in t ist, ist das Integral $\mathrm{R}_\lambda f$ wohldefiniert. Das nächste Theorem gibt uns die Existenz eines Operators A, der die Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ eindeutig generieren wird.

Theorem 2.1.1 (Existenz eines Generators) *Sei* $(\mathrm{P}_t)_t$ *eine Feller Halbgruppe auf* $C_0(S)$ *mit der Resolvente* R_λ, $\lambda > 0$. *Dann bilden die Operatoren* $(\lambda \mathrm{R}_\lambda)_\lambda$ *eine Familie von injektiven Kontraktionsoperatoren auf* $C_0(S)$, *mit* $\lambda \mathrm{R}_\lambda \to Id$, *wenn* $\lambda \to \infty$. *Weiterhin ist* $\mathcal{D} = \mathrm{R}_\lambda C_0(S)$ *unabhängig von* λ *und dicht in* $C_0(S)$. *Es existiert ein Operator* A *mit Definitionsbereich* $\mathcal{D}$, *so dass*

$$\mathrm{A} := \lambda Id - \mathrm{R}_\lambda^{-1}$$

auf $\mathcal{D}$ *für jedes* $\lambda > 0$. *Der Operator* A *kommutiert mit jedem* P_t *auf* $\mathcal{D}$.

Für den vollständigen Beweis verweisen wir auf Theorem 19.4 in [Kal02]. Wir geben an dieser Stelle einige Beweisideen.

Beweisskizze:
Die Aussage $\mathrm{R}_\lambda f \in C_0(S)$ folgt aus der Eigenschaft (F1) der Feller Halbgruppe (Definition 2.1.3) sowie $\mathrm{P}_t f \in C_0(S)$ für $f \in C_0(S)$. Die Kontraktionseigenschaft der Resolvente rührt aus derjenigen der Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ her. Man kann berechnen, dass für $\mu, \lambda > 0$ die Resolventengleichung

$$\mathrm{R}_\lambda - \mathrm{R}_\mu = (\mu - \lambda)\mathrm{R}_\lambda \mathrm{R}_\mu,$$

gilt. Daraus folgert man einerseits, dass die Familie der Operatoren $(\mathrm{R}_\lambda)_\lambda$ kommutiert, d.h. $\mathrm{R}_\lambda \mathrm{R}_\mu = \mathrm{R}_\mu \mathrm{R}_\lambda$ für $\lambda, \mu > 0$ und andererseits $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \mathrm{R}_\lambda = Id$. Um zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ dicht ist, betrachtet man die Kompaktifizierung $C_0(S')$. Durch einen Widerspruchsbeweis zeigt man schließlich, dass $\overline{\mathcal{D}} = C_0(S)$ gilt. Injektivität von R_λ lässt sich mit der Resolventengleichung zeigen. Es existiert demzufolge ein inverser Operator R_λ^{-1} auf $\mathcal{D}$ und man erhält die Unabhängigkeit des Operators $\mathrm{A} := \lambda Id - \mathrm{R}_\lambda^{-1}$ auf $\mathcal{D}$ von λ.

□

Der konstruierte Operator A wird *infinitesimaler Generator* der Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ genannt. Da $\mathrm{A} = \lambda Id - \mathrm{R}^{-1}$ ist, existiert der Operator A nur auf dem Wertebereich $\mathcal{D}$ der Resolvente. Das folgende Korollar sagt aus, dass eine Feller Halbgruppe eindeutig durch ihren infinitesimalen Generator bestimmt wird.

Korollar 2.1.1 (Eindeutigkeit) *Sei* $(\mathrm{P}_t)_t$ *eine Feller Halbgruppe und* R_λ, $\lambda > 0$ *die Resolvente mit Wertebereich* $\mathcal{D}$. *Dann gibt es genau einen Operator* $\mathrm{A} = \lambda Id - \mathrm{R}_\lambda^{-1}$ *auf* $\mathcal{D}$, *der* $(\mathrm{P}_t)_t$ *bestimmt.*

Das Korollar ist eine Folgerung aus dem vorigen Theorem. Eindeutigkeit des Operators folgt aus der Eindeutigkeit der Laplace Transformation und Injektivität von R_λ.
Eine Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ wird *stark stetig* genannt, wenn für jedes $f \in C_0(S)$ gilt

$$\lim_{t\to 0} \|\mathrm{P}_t f - f\|_\infty = 0.$$

Das nächste Theorem zeigt, dass jede Feller Halbgruppe auf ihrem Definitionsbereich stark stetig ist und die Halbgruppe und ihr Generator kommutieren.

Theorem 2.1.2 *Sei* $(\mathrm{P}_t)_t$ *eine Feller Halbgruppe. Sei* A *ihr infinitesimaler Generator mit Definitionsbereich* $\mathcal{D}$. *Dann ist* $(\mathrm{P}_t)_t$ *stark stetig und für alle* $f \in \mathcal{D}$ *und* $t \geq 0$ *gilt*

$$\mathrm{P}_t f - f = \int_0^t \mathrm{P}_s \mathrm{A} f ds.$$

$\mathrm{P}_t f$ *ist in 0 differenzierbar genau dann, wenn* $f \in \mathcal{D}$. *In diesem Fall gilt die Gleichung für* $t \geq 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{P}_t f) = \mathrm{P}_t \mathrm{A} f = \mathrm{A}\mathrm{P}_t f. \tag{2.2}$$

Beweisskizze:
Kallenberg beweist dieses Theorem, vergleiche [Kal02] Theorem 19.6., mittels sogenannter *Yosida-Approximationen* A^λ vermöge

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^\lambda &:= \lambda \mathrm{A}\mathrm{R}_\lambda \\ &= \lambda(\lambda \mathrm{R}_\lambda - Id), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\lambda > 0$. Mit der Darstellung (2.3) kann man zeigen, dass die Operatoren A^λ beschränkt sind. Somit ist $\exp(t\mathrm{A}^\lambda)$ für $t > 0$ wohldefiniert. Schließlich kann man mithilfe $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \mathrm{R}_\lambda = Id$ zeigen, dass A^λ gegen A läuft für $\lambda \longrightarrow \infty$ und damit

$$\exp(t\mathrm{A}^\lambda) \overset{\lambda \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}_t.$$

$\square$

Wir haben den infinitesimalen Generator A als inversen Operator der Resolvente R_λ konstruiert. Das Theorem 2.1.2 zeigt eine andere Möglichkeit, den Generator einer Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ zu definieren. Aus der Eigenschaft $(F2)$ aus der Definition 2.1.3 und (2.2) folgt für $f \in C_0(S)$

$$\mathrm{A}f = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathrm{P}_t f - f}{t} \tag{2.4}$$

Der Definitionsbereich $\mathcal{D} \subset C_0(S)$ von A beinhaltet alle Funktionen $f \in C_0(S)$, für die der Limes (2.4) existiert.

Sei andererseits A ein linearer Operator auf $C_0(S)$. Wann erzeugt A eine Feller Halbgruppe auf $C_0(S)$? Das Theorem 2.6 aus [EthKur86] gibt uns Bedingungen, wann eine solche Halbgruppe existiert.

Theorem 2.1.3 (Hille-Yosida) *Ist* A *ein linearer Operator auf* $C_0(S)$ *mit Definitionsbereich* $\mathcal{D}$. *Dann ist* A *der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe* P *auf* $C_0(S)$ *genau dann, wenn die folgenden Bedingungen (i)-(iii) erfüllt sind:*

(i) $\mathcal{D}$ *ist dicht in* $C_0(S)$*.*

(ii) *Für jedes* $\lambda > 0$*,* $f \in \mathcal{D}$ *gilt* $\|\lambda f - \mathrm{A}f\| \geq \lambda \|f\|$*.*

(iii) *Es existiert ein* $\lambda_0 > 0$*, so dass der Wertebereich von* $(\lambda_0 Id - \mathrm{A})$ *dicht in* $C_0(S)$ *liegt.*

Für unser **Beispiel** der Halbgruppe der Brownschen Bewegung aus dem Abschnitt 2.1.1 soll der Generator berechnet werden. Sei $B_0 = x$ f.s. , f beschränkt und zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt f.s.

$$\mathrm{P}_t f(x) = \mathbb{E}(f(x + \sqrt{t} B_1)),$$

wenn $t > s \geq 0$. Für den Generator bekommen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}f(x) &= \lim_{t \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x + y\sqrt{t}) - f(x)}{t} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&\overset{z \in (0;1)}{=} \lim_{t \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} [y\sqrt{t} f'(x) + \frac{1}{2} y^2 t f''(x + zy\sqrt{t})] \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{2} f''(x).
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass der infinitesimale Generator der Brownschen Bewegung $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\Delta$ ist.

2.1.3 Zu Feller Halbgruppen assoziierte Halbgruppen von Markov Übergangskernen

Die abstrakte Theorie der Kontraktionshalbgruppen wurde unabhängig voneinander von Hille in [Hil48] und Yosida in [Yos48] entwickelt. Beide erkannten ihre Wichtigkeit für die Theorie der Markov Prozesse. Die Reichhaltigkeit des Zuganges über Halbgruppen wurde noch klarer durch die Arbeiten von Feller, [Fel52] und [Fel54], der eine komplette Beschreibung der infinitesimalen Generatoren von stetigen homogenen Markov Prozessen gab.
Ausgehend von einer Feller Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ wollen wir einen homogenen Markov Prozess konstruieren. Anstatt von den Übergangskernen μ_t zu verlangen, dass sie die Gesamtmasse 1 haben, verlangen wir von den Halbgruppen, dass sie *konservativ* sind, d.h., für $x \in S$ soll $\sup_{f \leq 1} \mathrm{P}_t f(x) = 1$ gelten. Wir

betrachten die 1-Punkt-Kompaktifizierung von S. Die ursprüngliche Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ auf $C_0(S)$ wird zu einer konservativen Halbgruppe $(\mathrm{P}'_t)_t$ auf dem kompaktifizierten Raum $C_0(S')$ erweitert.

$$\mathrm{P}'_t f(x) := \begin{cases} \mathrm{P}_t f(x) & , x \in S \\ 0 & , x = \infty \end{cases}$$

Sei $(\mathrm{P}_t)_t$ eine Feller Halbgruppe und $(\mu_t)_t$ eine Folge von Markov Übergangskernen auf $C(S')$. Sei für $f \in C_0(S)$

$$\mathrm{P}_t f(x) = \int f(y)\mu_t(x, dy).$$

Proposition 2.1.1 (Existenz) *Zu jeder Feller Halbgruppe* $(\mathrm{P}_t)_t$ *auf* $C_0(S)$ *existiert eine eindeutige Halbgruppe von Markov Übergangskernen* $(\mu_t)_t$ *auf* S'*, so dass*

$$\mathrm{P}_t f(x) = \int f(y)\mu_t(x, dy)$$

und zu jeder Zeit t *ist* $\mu_t(\infty, \{\infty\}) = 1$*, d.h. der Zustand* ∞ *ist absorbierend.*

Proposition 19.14 in [Kal02] wird begleitet von einem ausführlichen Beweis.

2.1.4 Existenz eines Markov Prozesses

Angenommen es existiert eine Familie von Übergangsoperatoren $(\mathrm{P}_t)_t$ auf einem polnischen, messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$. Wir konstruieren als nächstes eine kanonische Version eines homogenen Markov Prozesses. Das folgende Theorem ist ein Spezialfall des Theorem 3.1.5 in [RevYor01].

Theorem 2.1.4 (Existenz) *Sei ein Übergangsoperator* $(\mathrm{P}_t)_t$ *und ein Wahrscheinlichkeitsmaß* ν *auf einem Raum* $(S, \mathcal{S})$ *gegeben. Dann gibt es ein einziges Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}_\nu$ *auf dem Pfadraum* $(S^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{S}^{\mathbb{R}_+})$*, so dass* X *der kanonische Markov Prozess bezüglich* $(\sigma\{X_u; u \leq t\})_t$ *mit Übergangsoperator* $(\mathrm{P}_t)_t$ *und Anfangsverteilung* ν *ist.*

Beweisskizze:
Revuz und Yor definieren eine projektive Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen durch

$$\mathbb{P}_\nu(X_{t_0} \in A_0, X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_n} \in A_n) =$$
$$\int_{A_0} \nu(dx) \int_{A_1} \mathrm{P}_{t_1}(x, dx_1) \int_{A_2} \mathrm{P}_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) ... \int_{A_n} \mathrm{P}_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)$$

Dann wenden sie *Kolmogoroff's Fortsetzungstheorem* an, vergleiche [RevYor01] Theorem 1.3.2. , um von der Existenz von endlichdimensionalen Randverteilungen auf die Existenz des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_\nu$ zu schließen. $\square$

Revuz und Yor zeigen die Existenz für gegebene Übergangsoperatoren $(\mathrm{P}_{s,t})_{s,t}$. Der Beweis für diesen allgemeineren inhomogenen Fall erfolgt analog.

2.2 Verbindung zu Partiellen Differentialgleichungen

2.2.1 Elliptische Differentialoperatoren

Bisher haben wir Halbgruppen und ihre Generatoren betrachtet und eine Halbgruppe von Markov Übergangskernen assoziiert. Jetzt wollen wir den Generator einer Markov Halbgruppe näher bestimmen. Sei $C_K^\infty(\mathbb{R})$ der Raum der glatten Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger K.

Theorem 2.2.1 *Sei $(\mathrm{P}_t)_t$ eine Feller Halbgruppe zu einem Markov Prozess X auf $\mathbb{R}$ mit stetigen Pfaden. Sei A ihr zugehöriger Generator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}$ und $C_K^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$. Dann gelten*

(i) $C_K^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$*;*

(ii) für jede relativ kompakte offene Menge $O \subset \mathbb{R}$ existieren Funktionen b, $\sigma > 0$ und c auf O, unabhängig von der Wahl der Menge O, so dass für $f \in C_K^2$ und $x \in O$

$$\mathrm{A}f(x) = b(x)\frac{\partial}{\partial x}f(x) + \sigma^2(x)\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) + c(x)f(x). \qquad (2.5)$$

Das Theorem 2.2.1 ist ein Spezialfall des Theorems 7.1.13 im Buch von Revuz und Yor, [RevYor01]. Revuz und Yor sind sich nicht sicher über den

Ursprung dieses Theorems. Sie sagen aber, dass es sich um einen Spezialfall der Ergebnisse von Kunita und Roth handelt, vergleiche [Kun69] bzw. [Rot76]. Die ursprüngliche Version des Theorems aus [RevYor01] betrachtet Prozesse auf $\mathbb{R}^d$ mit nicht unbedingt stetigen Pfaden. Deshalb tauchen dort Sprungterme auf. Die Gleichung (2.5) beschreibt, wie ein Prozess mit assoziiertem Generator A infinitesimal sich von der Position x_0 wegbewegt, indem man zu einem Translationsterm $b(x_0)$ die Varianz $\sigma^2(x_0)$ einer normalverteilten Zufallsvariable addiert. Zusätzlich stirbt der Prozess mit Rate $c(x_0)$. Die Sterberate oder *killing* eines Prozesses bedeutet, dass er mit einer bestimmten Rate c, die vom Ort x abhängt, in einen zusätzlichen *Friedhofszustand* übergeht und diesen nicht mehr verläßt. Wir haben gesehen, dass der Generator der Brownschen Bewegung $\frac{1}{2}\Delta$ ist. Es ist also nicht überraschend, dass eine normalverteilte Zufallsvariable daran beteiligt ist.
Der Generator A einer homogenen Markov Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ wird also mit einem elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung identifiziert. Im weiteren Verlauf betrachten wir Prozesse, die niemals sterben, d.h., für alle x ist $c(x) = 0$.

Nach Theorem 5.1 in [StrVar00] existiert eine stetige Version des homogenen Markov Prozess mit Generator A, wenn die messbaren Funktionen b und σ folgenden Bedingungen für ein $K < \infty$ unterliegen

(i) $\sup_x |b(x)| < K$

(ii) $\sup_x |\sigma(x)| < K$

(iii) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}\ |\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|$

Dieses Theorem gilt sogar für den inhomogenen Fall, wenn b und σ entsprechend zusätzlich in der Zeit beschränkt bleiben.

2.2.2 Partielle Differentialgleichungen

Wir erschließen die Verbindung zu partiellen Differentialgleichungen (PDG) und wollen eine stochastische Lösung des Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) & = \mathrm{A}u(x,t) \\ u(x,0) & = f(x) \end{cases} \tag{2.6}$$

angeben.
Das nächste Theorem sagt aus, dass eine Lösung des Cauchy-Problems (2.6) existiert, wenn es einen stark stetigen Markov Prozess mit assoziierter Halbgruppe $(\mathrm{P}_t)_t$ und Generator A gibt. Es handelt sich um einen Spezialfall des Theorems 24.1 aus [Kal02].

Theorem 2.2.2 *Sei* A *der Generator eines stetigen Markov Prozesses mit assoziierter Halbgruppe* $(\mathrm{P}_t)_t$ *in* $\mathbb{R}$. *Sei* $\mathcal{D}$ *der Definitionsbereich von* A *und* f *eine beschränkte stetige Funktion. Dann ist jede beschränkte Lösung* $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ *von* (2.6) *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $t \geq 0$ *eindeutig gegeben durch*

$$u(x,t) = \mathrm{P}_t f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_t)),$$

wobei $\mathbb{E}_x(f(X_t))$ *der Erwartungswert des Prozesses* $(f(X_t))_t$ *ist, der f.s. in* $f(X_0) = x$ *startet.*

Der Raum $C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ ist der Raum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, die in der ersten Variable mindestens zweimal stetig differenzierbar sind und in der zweiten mindestens einmal.

2.2.3 Kolmogoroffs Rückwärts- und Vorwärtsgleichung

Das zentrale Thema des Artikels von Kolmogoroff in [Kol31] ist, lokale Charakteristiken b und σ zu finden, die Übergangswahrscheinlichkeiten durch ein System von Differentialgleichungen, die nach ihm benannte *Vorwärtsgleichung und Rückwärtsgleichung*, bestimmen. Sie wurden von Kolmogoroff und Feller, siehe [Kol31] und [Fel36], mittels Halbgruppentheorie gelöst. Es wird auf die historische Einordnung noch einmal im Kapitel 4 eingegangen.
Wir wollen uns in diesem Abschnitt inhomogene Prozesse anschauen. Sei A ein elliptischer Differentialoperator der Form

$$\mathrm{A}f(x,s) = b(x,s)\frac{\partial f}{\partial x}(x,s) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,s)$$

für f aus dem Definitionsbereich von A. Wir definieren, vergleiche auch Kapitel 5.7. B in [KarShr91]:

Eine *Fundamentallösung* des Systems

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s}(x,s) & = \mathrm{A}u(x,s) \\ \lim_{s \nearrow t} u(x,s) & = f(x) \end{cases} \tag{2.7}$$

ist eine nicht-negative Funktion $G(x,s;y,t)$ definiert für $0 \le s < t \le T$ und $x, y \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Funktion u gegeben durch

$$u(x,s) := \int_{\mathbb{R}} G(x,s;y,t) f(y) dy \tag{2.8}$$

beschränkt, ein Element der Klasse $C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ ist und (2.7) löst. Im Rahmen der Distributionentheorie kann man die Fundamentallösung des Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s}(x,s) & = \mathrm{A}u(x,s) \\ \lim_{s \nearrow t} u(x,s) & = \delta_0(x-y) \end{cases} \tag{2.9}$$

auffassen.
Die Lösung des allgemeinen Cauchy-Problems (2.7) folgt aus der Lösung von (2.9) mittels Integration mit f, siehe (2.8).

Unterliegen b und σ den Bedingungen

(i) es existiert ein $c > 0$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ und $(x,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$$\sigma^2(x,s) \ge c,$$

(ii) $\sigma^2(x,s)$, $b(x,s)$ sind beschränkt auf $\mathbb{R} \times [0,T]$,

(iii) $\sigma^2(x,s)$, $b(x,s)$ sind gleichmäßig Hölder-stetig in $\mathbb{R} \times [0,T]$,

so existiert nach Friedman, siehe [Fri75], eine Fundamentallösung von (2.7). Für jedes feste Paar $(y,t) \in \mathbb{R} \times (0,T]$ ist

$$\varphi_{y,t}(x,s) := G(x,s;y,t)$$

ein Element der Klasse $C^{2,1}([0,t) \times \mathbb{R})$ und erfüllt die *Rückwärtsgleichung* von Kolmogoroff (2.9).

Sind zusätzlich $\frac{\partial}{\partial x} b(x,s)$, $\frac{\partial}{\partial x}\sigma(x,s)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma(x,s)$ beschränkt und Hölder-stetig so folgt für jedes feste Paar $(x,s) \in \mathbb{R} \times [0,T)$, dass die Funktion

$$\psi_{x,s}(y,t) := G(x,s;y,t)$$

aus der Klasse $C^{2,1}(\mathbb{R} \times (s,T])$ der *Vorwärtsgleichung* von Kolmogoroff

$$\frac{\partial}{\partial t} u(y,t) = \mathrm{A}^* u(y,t)$$

genügt, wobei A^* definiert ist durch

$$\mathrm{A}^* f(y,t) = -\frac{\partial}{\partial y}(b(y,t)f(y,t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(y,t)f(y,t)).$$

A^* ist der formal adjungierte Operator von A. Daraus folgt, dass jede Fundamentallösung $G(x,s;y,t)$ gleichzeitig eine Übergangsdichte eines Markov Prozesses X ist. Nach Theorem 5.1 in [StrVar00] ist die Lösung eindeutig, wenn zusätzlich folgende Wachstumsbedingung gilt: es existiert ein $K < \infty$ mit

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}, t \geq 0 : |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| + |b(x,t) - b(y,t)| \leq K|x-y|.$$

Wo kommt die Vorwärts- bzw. Rückwärtsgleichung her? Bei der Vorwärtsgleichung wird die Endposition (y,t) des Prozesses festgehalten und die Anfangsbedingung (x,s) perturbiert und bei der Rückwärtsgleichung hält man die Anfangsposition fest und betrachtet die Perturbation der Endposition.

Im homogenen Fall ist $p_t(x,y)$ die Fundamentallösung der Rückwärtsgleichung oder *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \mathrm{A} u(x,t).$$

In dem Beispiel der Brownschen Bewegung haben wir festgestellt, dass $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\Delta$ ist. Bei geeigneter Wahl des Definitionsbereiches ist dann $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$ und die Vorwärts- und Rückwärtsgleichung stimmen überein.
Bereits Laplace fand 1809 in [Lap09] heraus, dass die Fundamentallösung dieser Gleichung mithilfe von Gauß-Kernen dargestellt werden kann. Ein Jahrhundert später entdeckte Bachelier in [Bac01] die Verbindung zwischen der Wärmeleitungsgleichung und Brownschen Bewegung.

Für den Fall wo b und σ unbeschränkt sind, verweisen wir zum Beispiel auf Korollar 10.1.2. in [StrVar00].

Wir haben gesehen, wie man mittels Halbgruppentheorie einen homogenen Markov Prozess charakterisieren kann. Er wird eindeutig beschrieben durch

seinen infinitesimalen Generator, der durch die lokalen Charakteristiken b und σ bestimmt wird.
Im nächsten Abschnitt konzentrieren wir uns auf das Studium von Markov Prozessen mit trajektoriellen Methoden.

Kapitel 3

Trajektorieller Zugang

Einleitung

Dieses Kapitel soll einen Einblick in den trajektoriellen Zugang zu Markov Prozessen als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung geben. Zuerst wird ein stochastisches Integral konstruiert. Anschließend zwei wichtige Sätze aus der Martingaltheorie vorgestellt, die *Itô-Formel* und der *Satz von Dambis, Dubins und Schwarz*, denen wir im Kapitel 4 nochmal begegnen werden. Im letzten Teil kommen wir schließlich zu einer speziellen Klasse von Semimartingalen, den stochastischen Differentialgleichungen. Wir studieren deren Existenz, Eindeutigkeit sowie Markov Eigenschaft. Die trajektorielle Betrachtungsweise wurde stärker in den 50-60er Jahren entwickelt, mit dem Ergebnis, dass feine probabilistische Resultate mit reinen funktionalanalytischen Methoden bewiesen werden konnten, vergleiche wichtige Arbeiten dazu von Doob in [Doo53], [Doo71] und Itô und McKean in [ItoMcK65].

3.1 Stochastische Integration und Itô Formel

Wir wollen ein Integral bezüglich eines zufälligen Integrators bauen. Wie würde man zum Beispiel einen Prozess H bezüglich der Brownschen Bewegung integrieren? Eine natürliche Idee wäre es, Riemann Summen

$$\sum_i H_{u_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

zu betrachten, wobei $u_i \in [t_i; t_{i+1}]$ ist. Diese Summen konvergieren aber nicht pfadweise, weil die Trajektorien der Brownsche Bewegung unbeschränkte Variation haben.

Stochastische Integration hat eine lange Geschichte und geht mindestens auf Paley, Wiener und Zygmund im Jahre 1933, siehe [PalWieZyg33], zurück, die deterministische Funktionen bezüglich der Brownschen Bewegung integrierten. Das erste stochastische Integral mit zufälligen Integranden und Brownschen Bewegung als Integrator wurde von Itô 1942 in [Ito42] definiert. Itô setzte voraus, dass der Integrand progressiv messbar ist.

3.1.1 Stochastische Integration unter L^2-beschränkten Martingalen

Wir wollen uns eine Klasse der Integratoren definieren, für die wir ein stochastisches Integral bauen. Betrachte den Raum

$$\mathcal{M}^2 := \left\{ M : \ M \text{ stetiges Martingal}, M_0 = 0, \sup_t \mathbb{E}(M_t^2) < \infty \right\}$$

der L^2-beschränkten Martingale. Es wird ein stochastisches Integral bezüglich der Elemente von $\mathcal{M}^2$ gebaut. Alle Betrachtungen unterliegen einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, wobei die Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ vollständig ist.

Proposition 3.1.1 *Der Raum* $(\mathcal{M}^2, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^2})$ *mit* $\|M\|^2_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}(M^2_\infty)$ *ist ein Hilbertraum.*

Beweisskizze:
Wir definieren auf natürliche Weise das Skalarprodukt auf $\mathcal{M}^2$. Seien $M, N \in \mathcal{M}^2$ und

$$(M, N)_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}(M_\infty N_\infty).$$

Mit der Ungleichung von Kunita-Watanabe, siehe Korollar 4.1.16 in [RevYor01], zeigt man leicht, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^2}$ eine Norm ist.
Für die Vollständigkeit sei $M^{(n)}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{M}^2$. Dann wissen wir, dass $(M^{(n)}_\infty)_n$ eine Cauchy-Folge in L^2 ist und somit ein M_∞ existiert, so dass $M_\infty \stackrel{L^2}{=} \lim_n M^{(n)}_\infty$. Man rekonstruiert das Martingal M vermöge $M_t := \mathbb{E}(M_\infty | \mathfrak{F}_t)$. Anschließend zeigt man mithilfe der Doob-Ungleichung, dass $(M^{(n)}_\bullet)_n$ gleichmässig in t gegen das Martingal $M_\bullet$ konvergiert.

$\square$

3.1.2 Die Klasse der Integranden

Welche Prozesse können wir intergrieren? Zunächst müssen sie progressiv messbar sein. Diese Bedingung ist stärker als normale Messbarkeit. Ein Prozess H ist progressiv messbar, wenn für jedes t die Abbildung $(s,\omega) \mapsto H_s(\omega)$ messbar bezüglich $\mathfrak{B}([0,t]) \times \mathfrak{F}_t$ ist. Da wir vollständige Filtrationen und stetige Prozesse betrachten, ist jeder adaptierte Prozess bereits progressiv messbar.
Wir definieren den Raum der Integranden

$$\mathcal{L}^2(M) := \left\{ H : \; H \textit{ progressiv messbar }, \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s \right) < \infty \right\},$$

wobei $\langle \cdot \rangle$ die quadratische Variation ist und erweitern ihn auf natürliche Weise zu einem Hilbertraum. Sei
$H \in \mathcal{L}^2(M)$, dann wird durch

$$\|H\|^2_{\mathcal{L}^2(M)} = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s \right)$$

eine Norm auf $\mathcal{L}^2(M)$ definiert. Analog erhält man für $H, K \in \mathcal{L}^2(M)$ ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}^2(M)}$ auf $\mathcal{L}^2(M)$ welches vermöge

$$(H,K)_{\mathcal{L}^2(M)} = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s K_s d\langle M \rangle_s \right).$$

3.1.3 Isometrie und Stochastische Integrale

Wir haben die beiden Klassen definiert, für die wir jetzt ein stochastisches Integral bauen können. Das nächste Theorem gibt uns eine Isometrie.

Theorem 3.1.1 (Isometrie) *Sei $M \in \mathcal{M}^2$. Für jeden Prozess $H \in \mathcal{L}^2(M)$ existiert ein einziges Martingal in $\mathcal{M}^2$, notiert $H \cdot M$, so dass für alle $N \in \mathcal{M}^2$ gilt*

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle,$$

wobei

$$H \cdot \langle M, N \rangle|_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M, N \rangle_s.$$

Die Abbildung $H \mapsto H \cdot M$ ist eine Isometrie von $\mathcal{L}^2(M)$ nach $\mathcal{M}^2$, d.h.

$$\|H \cdot M\|_{\mathcal{M}^2} = \|H\|_{\mathcal{L}^2(M)}.$$

Beweisskizze:
Die Eindeutigkeit wird durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt. Angenommen es existieren zwei Prozesse L, L', so dass $\langle L, N\rangle = \langle L', N\rangle$ für alle $N \in \mathcal{M}^2$. Insbesonders gilt, dass $\langle L - L'\rangle = 0$ und somit $L = L'$ f.s. Für den Beweis der Existenz definieren wir dann eine Abbildung $\varphi : N \mapsto \mathbb{E}(H \cdot \langle M, N\rangle)$. Mithilfe der Ungleichung von Kunita-Watanabe zeigt man, dass φ ein Skalarprodukt ist. Ergo existiert ein $H \cdot M \in \mathcal{M}^2$ mit

$$\varphi(N) = (N, H \cdot M)_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}(\langle H \cdot M, N\rangle_\infty).$$

Weiterhin läßt sich zeigen, dass für jede beschränkte Stoppzeit T gilt

$$\mathbb{E}[(H \cdot M)_T N_T - (H \cdot \langle M, N\rangle)_T] = 0,$$

also ist

$$(H \cdot M)N - H \cdot \langle M, N\rangle$$

ein Martingal und a fortiori

$$\langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle. \tag{3.1}$$

Die Isometrie bekommt man aus (3.1) für $N = H \cdot M$.

□

Wir können jetzt definieren

Definition 3.1.1 (Itô Integral) *Das Martingal $H \cdot M$ heißt Itô Integral von H bezüglich M. Man notiert*

$$H \cdot M = \int_0^{\cdot} H_s dM_s.$$

Ein stochastisches Integral kann auch unter schwächeren Bedingungen gebaut werden. Wir definieren vorher den Begriff des *lokalen Martingals*. Sei dazu $(T_n)_n$ eine Folge von Stoppzeiten bezüglich einer fixierten Filtration $(\mathfrak{F}_t)_t$ mit $T_n \to \infty$ f.s. M wird *lokales Martingal* genannt, wenn $M^{T_n} - M_0$

ein Martingal für jedes n ist. Es reicht, dass der Integrator X ein stetiges *Semimartingal* ist. Ein *Semimartingal* X ist eine Summe aus einem lokalen Martingal M und einem Prozess A mit beschränkter Variation.

Der Begriff des lokalen Martingals taucht das erste Mal bei Itô und Watanabe 1965 in [ItoWat65] auf. Doléans-Dade und Meyer entwickeln in [DolDadMey70] die Theorie der Semimartingale. Dellacherie und Meyer vertieften die Theorie der Semimartingale und präsentierten 1980 in [DelMey80] eine detaillierte und umfassende Beschreibung.

Die Klasse der Integranden wird die Menge der lokal beschränkten Prozesse $L^2_{loc}(M)$, d.h. für den progressiv messbaren Prozess H und jedes $t > 0$ gilt

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty \text{ f.s.}$$

Man erhält für $H \in L^2_{loc}(M)$ und $X = M + A$, dass

$$H \cdot X := \int_0^{\cdot} H_s dX_s = \int_0^{\cdot} H_s dM_s + \int_0^{\cdot} H_s dA_s$$

wieder ein Semimartingal ist, vergleiche dazu [RevYor01] Definition 4.2.9.

3.1.4 Itô-Formel

Betrachtet wird die Klasse der Semimartingale. Wir werden sehen, dass diese Klasse stabil unter Transformation durch eine zweimal stetig differenzierbare Funktion φ ist. Diese Stabilität der Klasse für allgemein d-dimensionale Semimartingale folgt aus

Theorem 3.1.2 (Itô Formel) *Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Sei weiterhin angenommen, $X = (X^1, X^2)$ sei ein stetiges Semimartingal in $\mathbb{R}^2$. Dann ist auch $Y = \varphi(X)$ ein Semimartingal. $\varphi(X)$ vermöge*

$$\varphi(X_t) - \varphi(X_0) = \sum_{i=1,2} \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_s^i) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j\rangle_s.$$

Dadurch wird eine ganze Klasse von Semimartingalen in $\mathbb{R}^2$ definiert.

Das Theorem ist ein Spezialfall für $d = 2$. Für einen ausführlichen Beweis verweisen wir auf [RevYor01] Theorem 4.3.3. Ist die i-te Koordinate des d-dimensionalen Semimartingales X von beschränkter Variation, so braucht φ in dieser Koordinate nur einmal stetig differenzierbar zu sein.

Itô bewies die erste Version der Itô-Formel im Jahre 1951 in [Ito51]. Das Ergebnis wurde von vielen Autoren anschließend verallgemeinert. Die Erweiterung der Formel auf Semimartingale verdanken wir Doléans-Dade und Meyer in [DolDadMey70].

3.1.5 Ein Anwendungsbeispiel

Wir wenden die Itô-Formel auf das Semimartingal $(t \mapsto (X_t, t))_t$ an. Sei $\varphi \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.
Dann ist $(Y_t)_t = (\varphi(X_t, t))_t$ definiert durch

$$\begin{aligned}&\varphi(X_t, t) = \\ &\varphi(X_0, 0) + \int_0^t \varphi_x(X_s, s) dX_s + \int_0^t \varphi_s(X_s, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_{xx}(X_s, s) d\langle X, X\rangle_s.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Wir wollen uns einen speziellen Prozess X anschauen.
Seien $b, \sigma \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, $\sigma \neq 0$. X vermöge

$$X_t = \int_0^t b(X_u, u) du + \int_0^t \sigma(X_u, u) dB_u, \tag{3.3}$$

wobei B die Brownsche Bewegung ist. X ist ein Semimartingal mit lokalem Martingalanteil $\int_0^t \sigma(X_u, u) dB_u$ und Prozess mit beschränkter Variation $\int_0^t b(X_u, u) du$. Sei weiterhin φ gegeben durch

$$\varphi(x, t) = \int_0^x \frac{1}{\sigma(y, t)} dy.$$

Offenbar ist $\varphi \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Wir transformieren den Prozess (3.3) durch φ. Die partiellen Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x,t) &= \frac{1}{\sigma(x,t)}, \\
\varphi_{xx}(x,t) &= -\frac{\sigma_x(x,t)}{\sigma^2(x,t)}, \\
\varphi_t(x,t) &= -\int_0^x \frac{\sigma_t(y,t)}{\sigma^2(y,t)} dy
\end{aligned}$$

gegeben. Weiterhin gilt für (3.3)

$$\begin{aligned}
d\langle X, X\rangle_s &= d\left\langle \int_0^\cdot \sigma(X_u, u) dB_u \right\rangle_s \\
&= \sigma^2(X_s, s) ds.
\end{aligned}$$

und

$$\int_0^t \varphi_x(X_s, s) dX_s = \int_0^t \varphi_x(X_s, s) b(X_s, s) ds + \int_0^t \varphi_x(X_s, s)\sigma(X_s, s) dB_s,$$

da $\langle B\rangle_s = s$ ist. Mit (3.2) erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
\varphi(X_t, t) &= \int_0^t 1 dB_s + \int_0^t \frac{b(X_s, s)}{\sigma(X_s, s)} ds - \int_0^t \int_0^{X_s} \frac{\sigma_s(y, s)}{\sigma(y, s)} dy ds \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_x(X_s, s) ds
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\varphi(X_t, t) = \\
&B_t + \int_0^t \left\{ \frac{b(X_s, s)}{\sigma(X_s, s)} - \int_0^{X_s} \frac{\sigma_s(y, s)}{\sigma(y, s)} dy - \frac{1}{2}\sigma_x(X_s, s) \right\} ds.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

φ transformiert offenbar den ursprünglichen Prozess (3.3) in eine Brownsche Bewegung mit Drift.

3.1.6 Satz von Dambis, Dubins und Schwarz

Die Anwendung des Zeitwechsels im stochastischen Kontext geht nach Revuz und Yor mindestens auf Hunt und Itô und McKean, siehe [Hun58], [ItoMcK65] und wie wir später sehen werden sogar auf Doeblin zurück. Das folgende Theorem wurde von Dambis, Dubins und Schwarz in [DubSch65] und [Dam65] im Jahre 1965 für Martingale, die keine konstanten Intervalle besitzen, bewiesen. Dieses Repräsentationstheorem ist sehr stark, da es zeigt, dass sich hinter **jedem stetigen lokalen Martingal M eine zeittransformierte Brownsche Bewegung verbirgt**. Es sagt leider nichts über die Verteilung von M aus.

Theorem 3.1.3 *Sei M ein $(\mathfrak{F}_t)_t$-stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$ und $\langle M\rangle_\infty = \infty$. Sei weiterhin B eine Brownsche Bewegung. Dann existiert ein Zeitwechsel $T_t := \inf\{u : \langle M\rangle_u > t\}$, so dass für jedes t f.s. gilt*

$$\begin{aligned} M_{T_t} &= B_t \text{ oder} \\ B_{\langle M\rangle_t} &= M_t, \end{aligned}$$

d.h., $(M_{T_t})_t$ ist eine $(\mathfrak{F}_{T_t})_t$-Brownsche Bewegung.

Einen ausführlichen Beweis kann man unter anderem in [RevYor01], Theorem 5.1.6 finden.
Wir wollen das Theorem auf das lokale Martingal $\left(\int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s\right)_t$ aus dem vorigen Abschnitt anwenden. Offenbar sind die Voraussetzungen erfüllt. Somit haben wir das lokale Martingal durch den Zeitwechsel

$$T_t = \inf\left\{s : \int_0^s \sigma^2(X_u, u)du > t\right\}$$

in eine $(\mathfrak{F}_{T_t})_t$ - Brownsche Bewegung umgewandelt.

3.2 Stochastische Differentialgleichungen

Wir führen die Klasse der homogenen stochastischen Differentialgleichungen (SDG) in $\mathbb{R}$ bezüglich der Brownschen Bewegung ein. Der Begriff *stochastische Differentialgleichung* taucht das erste Mal in dem Artikel [Ber34] von Bernstein auf. Er interessierte sich für Markov Prozesse in einem Differenzschema und untersuchte die Verteilung des Grenzwertes. Er konnte zeigen, dass die Grenzverteilung eine Dichte hat und den Differentialgleichungen von Kolmogoroff genügt. Mit der Aufstellung der ersten Version des stochastischen Integrals von Itô war der Weg frei für die Behandlung von SDGen. Eine SDG wird durch ihre Koeffizienten b und σ und die Anfangsbedingung X_0 bestimmt.

Sei $(\mathfrak{F}_t)_t$ eine vollständige Filtration. Seien weiterhin b und σ so gewählt, dass f.s.

$$\begin{aligned}\int_0^t |b(X_s)|ds &< \infty \\ \int_0^t \sigma^2(X_s)ds &< \infty.\end{aligned}$$

Unter diesen Bedingungen ist das folgende stochastische Integral wohldefiniert.

Definition 3.2.1 (Lösung (b, σ, x)-SDG) *Seien b, σ zwei Funktionen auf $\mathbb{R}$. Eine Lösung X einer homogenen (b, σ)-SDG ist ein adaptierter Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$ bezüglich einer $(\mathfrak{F}_t)_t$-Brownschen Bewegung B. X ist definiert als*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \tag{3.5}$$

f.s. für alle $t \geq 0$.

Es ist wichtig zu bemerken, dass X, dargestellt als (3.5), offenbar ein Semimartingal ist.

3.2.1 Starke Lösung

Es soll Itôs Theorie zur Lösung von (b, σ)-SDGen im starken Sinne entwickelt werden. Auf einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$ wird die Existenz einer Lösung X einer (b, σ)-SDG bewiesen.

Definition 3.2.2 (Starke Lösung) *Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$ bezüglich einer fixierten Brownschen Bewegung B gegeben. Eine starke Lösung X^x einer (b, σ)-SDG ist ein stetiger Prozess mit den Eigenschaften*

(i) *X^x ist adaptiert bezüglich $(\mathfrak{F}_t)_t$,*

(ii) *$X_0^x = x$ f.s,*

(iii) *für alle $0 \leq t < \infty$ gilt $\mathbb{P}\left(\int_0^t (|b(X_s^x)| + \sigma^2(X_s^x))ds < \infty \right) = 1$*

(iv) (3.5) *gilt für alle $t > 0$ f.s.*

Ist $\sigma = 0$ so verschwindet der zufällige Rauschterm "dB_s" und die (b, σ)-SDG reduziert sich zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds.$$

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, dass wenn b gewissen Lipschitz-Bedingungen genügt, eine Lösung mit dem Kontraktionstheorem von Picard-Lindelöf garantiert werden kann. Itô hat bei dieser Idee angesetzt und versucht sie für den Fall, wenn zufälliges Rauschen eine Rolle spielt, zu verallgemeinern .

Das folgende Theorem von Itô, vergleiche [Ito42], gibt uns Bedingungen für die Existenz einer starken Lösung. Für einen vollständigen Beweis verweisen wir auf [RogWil90], Theorem V.12.1.

Theorem 3.2.1 *Wenn für b und σ^2 gilt:*

(i) *(globale Lipschitz-Bedingung) $\exists\ 0 < K < \infty, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} |b(x) - b(y)| &\leq K|x - y|, \\ |\sigma^2(x) - \sigma^2(y)| &\leq K|x - y| \end{aligned}$$

(ii) *(Wachstumsbedingung) $|b(x)|^2 + |\sigma^2(x)| \leq K^2(1 + |x|^2)$,*

dann hat die SDG (3.5) *eine eindeutige starke Lösung.*

Beweisskizze:
Die Idee ist, eine deterministische Situation zu simulieren und den Prozess rekursiv zu konstruieren. Sei $\{X_t^{x,(n)} : 0 \leq t < \infty\}$ eine Folge von sukzessiven Approximationen, die durch

$$
\begin{aligned}
X_t^{x,(0)} &= X_0^x && (3.6)\\
X_t^{x,(n+1)} &= X_0^x + \int_0^t b(X_s^{x,(n)})ds + \int_0^t \sigma(X_s^{x,(n)})dB_s. && (3.7)
\end{aligned}
$$

definiert ist. Der Grenzwert von $X^{x,(n)}$ für grosse n konvergiert gegen eine eindeutige Lösung X^x der SDG.

□

Das Theorem 3.2.1 ist ein Spezialfall des Theorems V.12.1. in [RogWil90]. Die Existenz einer starken Lösung erhält man sogar im inhomogenen Fall

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s,$$

wenn die Wachstumsbedingung und globale Lipschitzstetigkeit entsprechend für $b(x,s)$ und $\sigma(x,s)$ gelten. Die Bedingungen an b und σ lassen sich abschwächen. Man erhält eine starke Lösung schon bei lokaler Lipschitzstetigkeit von b, σ und

$$
\begin{aligned}
x|b(x)| &\leq c(1+x^2)\\
|\sigma(x)| &\leq c(1+|x|)
\end{aligned}
$$

für ein $c > 0$.

3.2.2 Markov Eigenschaft und Infinitesimaler Generator

Es sollen in diesem Abschnitt Lösungen X von (b,σ)-SDG näher charakterisiert werden. Wir werden feststellen, dass sie einen Markov Prozess bilden und man somit ihren infinitesimalen Generator berechnen kann.

Proposition 3.2.1 (Markov Eigenschaft) *Sei X Lösung der (b,σ)-SDG auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$. Dann ist X ein Markov Prozess.*

Für den Beweis siehe [Oks98] Theorem 7.1.2. Man weisst nach, dass für jede beschränkte messbare Funktion f, $t, h \geq 0$ und fast sicher gilt:

$$\mathbb{E}_x(f(X_{t+h})|\mathfrak{F}_t) = \mathbb{E}_{X_t}(f(X_h)).$$

Wir haben gesehen, dass man den Generator A eines Markov Prozesses durch

$$\mathrm{A}f(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}_x(f(X_t)) - f(x)}{t}$$

berechnen kann. Dann folgt direkt

Theorem 3.2.2 (Generator) *Sei X Lösung der (b, σ)-SDG. Dann ist der infinitesimale Generator* A *von X gegeben durch*

$$\mathrm{A}f(x) = b(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

für $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit beschränktem Träger und f im Definitionsbereich von A.

Man findet das Theorem in [Oks98], Theorem 7.3.3.

Es ist nicht überraschend, wenn man sich die Voraussetzungen anschaut, dass wir den gleichen Generator A wie in Theorem 2.2.1 aus dem Kapitel 2 finden. Es wird deutlich, welche Rolle die Koeffizienten b und σ bei dem Prozess X spielen. b reguliert den deterministischen Anteil, d.h., b gibt die *Drift* der Bewegung und σ den zufälligen Rauschterm (*Diffusionsanteil*) an.

Wir verfügen nun über ein reiches Arsenal an Methoden, Sätzen und Begriffen, die heute in der Theorie der stetigen Markov Prozesse bekannt sind. Vor diesem Hintergrund wollen wir uns im nächsten Kapitel Doeblins Arbeit anschauen und interpretieren.

Kapitel 4

“Sur l’équation de Kolmogoroff“- von Wolfgang Doeblin

Einleitung

In diesem Kapitel werden einige wichtige Auszüge aus der Arbeit von Wolfgang Doeblin *“Sur l’équation de Kolmogoroff”* (Über die Gleichung von Kolmogoroff) vorgestellt und seine Resultate historisch eingeordnet.

Wenn nicht gesondert darauf hingewiesen wird, sind die Begriffe von Doeblin eingeführt worden. Die Notation ist an die heutige angepasst. Beispielsweise benutzen wir den Begriff des *Martingals*, der zu Doeblins Zeit noch nicht verwendet wurde. Seine Beweise sind skizzenhaft und teilweise werden Sachverhalte mit Worten beschrieben ohne sie zu formulieren. Wir präzisieren die Beweise und fügen die notwendigen Wahrscheinlichkeitsräume und Filtrationen hinzu.

Die große Errungenschaft des Autors ist es, mit wenig mathematischen Werkzeugen Ergebnisse zu erzielen, die unter diesen schwachen Bedingungen von anderen erst Jahre später gefunden wurden. In seiner Betrachtung kommt der trajektorielle Standpunkt der Lösung der Chapman-Kolmogoroff Gleichung vollends zur Geltung. Er schafft es, die Methoden von Bernstein, Kolmogoroff, Khinchin und Lévy zu vereinen und unter schwachen Bedingungen seine Bewegungen in Wahrscheinlichkeit zu kontrollieren. Methoden wie Zeitwechsel erlauben Doeblin, sich auf den bekannten Fall der Brownschen Bewegungen zu beziehen. Insgesamt kann er einen inhomogenen Markov Prozess eindeutig durch Koeffizienten b und σ charakterisieren. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung von Chapman-Kolmogoroff mit Koeffizienten b und σ ohne starke Voraussetzungen wurde erst in den 60-70er Jahren mittels Martingaltheorie gelöst, siehe dazu [StrVar69] sowie [IkeWat81].

Im ersten Abschnitt geben wir Doeblins Definition der Gleichung von Chapman-Kolmogoroff an und stellen seine Voraussetzungen an den assoziierten Prozess X dar. Anschließend zeigen wir, wie er den Prozess trunkiert und zeigt, dass der Martingalanteil eine zeittransformierte Brownschen Bewegung ist. Schließlich schauen wir uns Doeblins vorangehende Version der Itô-Formel an und studieren im letzten Teil Existenz- und Eindeutigkeitssätze für die Familie von Verteilungsfunktionen F.

4.1 Definition der Gleichung von Chapman-Kolmogoroff

Basierend auf [CRAS], Seite 1059-1060, stellen wir in diesem Abschnitt Doeblins mathematische Motivation und Voraussetzungen dar, von der er seine weiteren Studien entwickelt.
Doeblin betrachtet ein “zufälliges Teilchen”, das sich auf einer Gerade bewegt. Sein Aufenthaltsort zu einer Zeit $t \geq 0$ wird durch die Zufallsvariable X_t beschrieben. Er nimmt an, die Bewegung $X = (X_t)_t$ sei ein inhomogener Markov Prozess. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen in $x \in \mathbb{R}$ zur Zeit s startet und sich zur Zeit t vor y befindet, ist gegeben durch

$$F(x, s; y, t) = \mathbb{P}_{x,s}(X_t \leq y).$$

Die Funktion $F(x, s; \bullet, t)$ ist messbar bezüglich x, s und t. Die Familie der Verteilungsfunktionen $F = (F(x, s; \bullet, t))_{x,s,t}$ mit $s < t$ löst die Chapman-Kolmogoroff Gleichung

$$F(x, s; y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z, u; y, t) d_z F(x, s; z, u). \tag{4.1}$$

Weiterhin nimmt Doeblin an, dass die folgenden Limiten in jedem endlichen Intervall bis auf endlich viele einzelne Punkte, an denen die Funktionen singulär sind, existieren.

$$
\begin{aligned}
b(x,s) &:= \lim_{t\to s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<1} (y-x) d_y F(x,s;y;t) && (4.2)\\
\sigma^2(x,s) &:= \lim_{t\to s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<1} (y-x)^2 d_y F(x,s;y,t), && (4.3)\\
& \lim_{t\to s} \int_{|y-x|>\eta} d_y F(x,s;y,t) = o(t-s). && (4.4)
\end{aligned}
$$

(4.4) gelte für beliebiges $\eta > 0$ und sei gleichmäßig in x. Seien die Limiten (4.2) und (4.3) gleichmäßig in der Zeit, $b(x,s)$ und $\sigma^2(x,s)$ stetig bezüglich (x,s) in jedem endlichen Intervall ohne singuläre Punkte. Wenn zusätzlich die folgenden Bedingungen

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to s} \limsup_{x\to-\infty} \frac{1-F(x,s;y,t)}{t-s} &= 0 && (4.5)\\
\lim_{t\to s} \limsup_{x\to+\infty} \frac{F(x,s;y,t)}{t-s} &= 0 && (4.6)
\end{aligned}
$$

gelten, so spricht Doeblin von *regulären Bewegungen*. Das System der Gleichungen (4.1)-(4.6) bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_{b,\sigma}$. Wir sagen der Prozess $X = (X_t)_t$ löst $\mathcal{E}_{b,\sigma}$, wenn die assoziierte Familie der Verteilungsfunktionen F die Gleichung von Chapman-Kolmogoroff löst sowie den Bedingungen (4.2)-(4.6) für festes b, σ genügt. Doeblins *reguläre Bewegungen* X sind also Lösungen solcher Systeme. Die Klasse aller Gleichungssysteme $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ für beliebiges b, σ nennen wir $\mathcal{K}$. (4.4) garantiert die Existenz einer stetigen Version von X, vergleiche dazu Theorem 1.7. in [Var68].

Die Terminologie ist bis heute nicht eindeutig. Die Gleichung (4.1) ohne Bedingungen (4.2), (4.3), (4.4) von Kolmogoroff-Feller nannte Doeblin im März 1938 in seiner Arbeit [Doe38] *Chapman Gleichung* und im April 1940 *Chapman-Kolmogoroff Gleichung*, nach einem Vorschlag von Fréchet. Im Jahre 1938 bezeichnete er die Gleichung (4.1) mit den Nebenbedingungen (4.2), (4.3), (4.4) als *Kolmogoroff Gleichung*, wobei er zwei Jahre später die Kolmogoroff Gleichung für die Rückwärtsgleichung von Kolmogoroff verwendete. Bei (4.2) und (4.3) werden die Integrale auf der Menge $|X_t - X_s| < 1$ f.s. betrachtet. Diese Bedingungen wurden schon 1906 von Bachelier in [Bac06] interpretiert als

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,s}(X_t - X_s) &= b(x,s)(t-s) + o(t-s) && (4.7)\\ \mathbb{E}_{x,s}([X_t - X_s]^2) &= \sigma^2(x,s)(t-s) + o(t-s), && (4.8)\end{aligned}$$

wenn $t{-}s$ klein ist und $\mathbb{E}_{x,s}(X_t)$ ist der Erwartungswert von X_t mit $X_s = x$ f.s. Diese Gleichungen führten Kolmogoroff dazu für fixiertes (y,t) die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -b(x,s)\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2(x,s)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \tag{4.9}$$

und für festes (x,s)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(b(y,t)F) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(y,t)F) \tag{4.10}$$

aufzustellen. Kolmogoroff selbst bezeichnete die Gleichungen (4.9) bzw. (4.10) als *erste* bzw. *zweite Differentialgleichung*. 1933 bemerkte er, dass seine fundamentalen Gleichungen in der Physik seit 1910 klassisch sind. Dort sind sie unter dem Namen *Smoluchowski Gleichung* bzw. *Fokker-Planck Gleichung* bekannt. Die heute in der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendeten Namen Rückwärts-bzw. Vorwärtsgleichung gehen nach Bru wahrscheinlich auf Feller in seiner Arbeit [Fel50] im Jahre 1950 zurück.
Kolmogoroff setzte voraus, dass die ersten drei Momente existieren und nahm noch weitere zusätzliche Bedingungen an, um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Chapman-Kolmogoroff Gleichung zu garantieren. Somit werden auch die partiellen Differentialgleichungen gelöst. Wenn $F(x,s;\bullet,t)$ eine Dichte in y hat, so löst die Dichte die Vorwärtsgleichung. Dieses Ergebnis konnte Kolmogoroff 1931 in [Kol31] zeigen. Zwei Jahre später tauschte er die Bedingungen (4.7) und (4.8) gegen Bedingungen (4.2) und (4.3) aus. Die Existenz des dritten Moments schwächte er durch eine Bedingung für das zweite Moment des Zuwachses $X_t - X_s$ ab. Die Bedingung (4.4), wie sie bei Doeblin auftaucht, bekommt ihre Form 1936 von Feller in [Fel36].
Die Idee, dass man eine Familie von Operatoren an einen Markov Prozess assoziiert, findet man bereits bei Hostinský in [Hos28]. Kolmogoroff untersuchte den stetigen Fall in [Kol35]. Dort betrachtete er Übergangskerne als Operatoren mit assoziiertem Generator.
Nach Bru ist nicht bekannt, ob Voraussetzungen im Unendlichen, (4.5) und (4.6), auch von anderen Autoren verwendet wurden. Sie erlauben eine gewisse Allgemeinheit in Doeblins Betrachtungen, da seine regulären Bewegungen

explodieren können, aber niemals sterben. Nach einer Explosion wird die Bewegung fortgesetzt und ist auf ihrem Definitionsbereich stetig. Doeblins Existenztheoreme stimmen mit denen der heutigen Literatur nur in dem Fall überein, in dem die Bewegungen X nicht explodieren.

4.2 Zugrundeliegende Brownsche Bewegung

Angenommen es existiert ein Prozess X, der das System $\mathcal{E}_{b,\sigma} \in \mathcal{K}$ löst. Wir stellen in diesem Abschnitt systematisch vor, wie Doeblin die Bewegung X manipuliert, um deren Eigenschaften zu studieren. Zuerst schaut er sich an, wie sich X infinitesimal verhält. Dadurch bekommt er eine Idee, welche Art von Bewegung sich hinter X verbirgt. Anschließend identifiziert er einen anderen Teil von X, indem er für bestimmte Zeiten t, X_t um $\int_0^t b(X_u, u)du$ *korrigiert* und feststellt, dass dieser *korrigierte Prozess* gaußsches Verhalten zeigt. Schließlich kann er durch einen geschickten Zeitwechsel zeigen, dass der korrigierte Prozess sogar das Bild einer Brownschen Bewegung unter einem Zeitwechsel ist.

4.2.1 Infinitesimales Gaußsches Verhalten

Sei $\mathcal{E}_{b,\sigma} \in \mathcal{K}$ und X eine reguläre Bewegung, die $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ löst. Doeblin studiert die infinitesimalen Zuwächse von X in [CRAS], Seite 1062-1063. Er zeigt, dass die zentrierten Zuwächse in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable konvergieren.

Theorem 4.2.1 *Sei X Lösung von $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$. Sei $X_s = x$ f.s. ein regulärer Punkt zum Zeitpunkt s, $\sigma(x, s) > 0$. Dann gilt unter der Bedingung $X_s = x$:*

$$\frac{(X_{s+\triangle} - X_s) - \triangle b(x, s)}{\sqrt{\triangle}} \xrightarrow[\triangle \to 0]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x, s)).$$

Beweis:
Sei $\triangle > 0$. Doeblin betrachtet die Teleskopsumme

$$X_{s+\triangle} - X_s = \sum_{i=1}^{n} (X_{s+\frac{i}{n}\triangle} - X_{s+\frac{i-1}{n}\triangle}).$$

Wir setzen $s_i^n := s + \frac{i}{n}\triangle$. X habe eine stetige Version, somit kann man für alle $\varepsilon > 0$ ein hinreichend kleines $\triangle$ wählen, so dass

$$\mathbb{P}(|X_{s_i^n} - X_s| > \triangle) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.11}$$

Analog findet er ein geeignetes n, so dass

$$\mathbb{P}(|X_{s_i^n} - X_{s_{i-1}^n}| > \varepsilon\triangle) < \varepsilon.$$

Diese Argumentationsweise taucht häufiger bei Doeblin auf. Er zeigt eine Eigenschaft für eine Menge ausserhalb einer verschwindend kleinen Wahrscheinlichkeit ε und argumentiert, dass die Charakteristiken des Prozesses an sich nicht durch Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit ε verändert werden. Doeblin setzt

$$Z_i := X_{s_i^n} - X_{s_{i-1}^n}.$$

Auf der Menge $\{|X_{s_{i-1}^n} - X_s| < \triangle\}$ f.s. definiert er

$$\tilde{Z}_i := \begin{cases} Z_i & \text{für } |Z_i| < \varepsilon\triangle \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases} \tag{4.12}$$

Der andere Fall $|X_{s_{i-1}^n} - X_s| > \triangle$ f.s. tritt nach (4.11) mit geringer Wahrscheinlichkeit auf. Dort setzt er $\tilde{Z}_i$ als eine beliebige Zufallsvariable mit den Momenten

(i) $\mathbb{E}_{x,s}(\tilde{Z}_i) = b(x,s)\frac{\triangle}{n}$

(ii) $\mathbb{E}_{x,s}(\tilde{Z}_i^2) = \sigma^2(x,s)\frac{\triangle}{n}$

(iii) $\mathbb{E}_{x,s}(|\tilde{Z}_i|^3) < \varepsilon\frac{\triangle^2}{n}\sigma^2(x,s)$.

Wir bemerken, dass diese Momente so gewählt sind, dass sie f.s. auf der Menge $|X_{s_{i-1}^n} - X_s| < \triangle$ mit denen von (4.12) übereinstimmen. (i) und (ii) folgen direkt aus (4.2) und (4.3). Die Abschätzung in (iii) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,s}(|\tilde{Z}_i|^3) &= \mathbb{E}_{x,s}(|\tilde{Z}_i| \cdot \tilde{Z}_i^2 \mathbb{1}_{|Z_i|<\varepsilon\triangle}) \\ &< \mathbb{E}_{x,s}(\varepsilon\triangle\tilde{Z}_i^2) \\ &\overset{(ii)}{=} \varepsilon\frac{\triangle^2}{n}\sigma^2(x,s). \end{aligned}$$

$\tilde{Z}_i$ und Z_i unterscheiden sich also nur auf einer verschwindend kleinen Menge mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner ε. Seien $\eta, \eta' > 0$ ausreichend klein, so dass die Suprema der bedingten Erwartungswerte von $\tilde{Z}_i$ für alle i unter der Bedingung $X_{s_1^n}, ..., X_{s_{i-1}^n}$ abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned}
\sup_{X_{s_1^n},...,X_{s_{i-1}^n}} \mathbb{E}_{x,s}(\tilde{Z}_i | X_{s_1^n}, ..., X_{s_{i-1}^n}) &\leq (b(x,s)+\eta)\frac{\triangle}{n} \\
\sup_{X_{s_1^n},...,X_{s_{i-1}^n}} \mathbb{E}_{x,s}(\tilde{Z}_i^2 | X_{s_1^n}, ..., X_{s_{i-1}^n}) &\leq (\sigma^2(x,s)+\eta')\frac{\triangle}{n} \\
\sup_{X_{s_1^n},...,X_{s_{i-1}^n}} \mathbb{E}_{x,s}(\tilde{Z}_i^3 | X_{s_1^n}, ..., X_{s_{i-1}^n}) &< \varepsilon \triangle \mathbb{E}_{x,s}(\tilde{Z}_i^2).
\end{aligned}$$

Doeblin wendet an dieser Stelle das *fundamentale Lemma* von Bernstein, siehe [Ber26], an. Es handelt sich dabei um einen Zentralen Grenzwertsatz für schwach abhängige Zufallsvariablen. Bernstein kontrolliert die Abhängigkeit durch Suprema der bedingten Momente. Um dieses Lemma anzuwenden, zeigen wir die Aussagen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{n(b(x,s)+\eta)\frac{\triangle}{n}}{\sqrt{\mathbb{E}_{x,s}([\sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i]^2)}} = 0 \tag{4.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{n(\sigma^2(x,s)+\eta)\frac{\triangle}{n}}{\mathbb{E}_{x,s}([\sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i]^2)} = 0 \tag{4.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\varepsilon \triangle \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{x,s}(\tilde{Z}_i^2)}{[\mathbb{E}_{x,s}([\sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i]^2)]^{\frac{3}{2}}} = 0. \tag{4.15}$$

Wie man mit der Jensen'schen Ungleichung sieht, gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \frac{n(b(x,s)+\eta)\frac{\triangle}{n}}{\sqrt{\mathbb{E}_{x,s}([\sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i]^2)}} &\leq \frac{1}{n} \frac{(b(x,s)+\eta)\triangle}{|\mathbb{E}_{x,s}(\sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i)|} \\
&\overset{(i)}{=} \frac{1}{n} \frac{(b(x,s)+\eta)\triangle}{|b(x,s)\triangle|} \\
&= \frac{1}{n} \frac{b(x,s)+\eta}{|b(x,s)|}
\end{aligned}$$

und folglich erhält man die Voraussetzung (4.13). Analog zeigen wir (4.14) durch

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2(x,s)+\eta)\frac{\triangle}{n}}{\mathbb{E}_{x,s}([\sum_{i=1}^{n}\tilde{Z}_i]^2)} &\leq \frac{1}{n}\frac{(\sigma^2(x,s)+\eta)\triangle}{(\mathbb{E}_{x,s}(\sum_{i=1}^{n}\tilde{Z}_i))^2}\\
&\overset{(i)}{=} \frac{1}{n}\frac{(\sigma^2(x,s)+\eta)\triangle}{b^2(x,s)\triangle^2}\\
&= \frac{1}{n}\frac{\sigma^2(x,s)+\eta}{b^2(x,s)\triangle},
\end{aligned}$$

und schließlich können wir (4.15) aus

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\frac{\varepsilon\triangle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}_{x,s}(\tilde{Z}_i^2)}{[\mathbb{E}_{x,s}([\sum_{i=1}^{n}\tilde{Z}_i]^2)]^{\frac{3}{2}}} &\leq \frac{1}{n}\frac{\varepsilon\triangle^2\sigma^2(x,s)}{[\mathbb{E}_{x,s}^2(\sum_{i=1}^{n}\tilde{Z}_i)]^{\frac{3}{2}}}\\
&\overset{(i)}{=} \frac{1}{n}\frac{\varepsilon\triangle^2\sigma^2(x,s)}{|b^3(x,s)|\triangle^3}\\
&= \frac{1}{n}\frac{\varepsilon\sigma^2(x,s)}{|b^3(x,s)|\triangle}
\end{aligned}$$

folgern. Nach dem fundamentalen Lemma von Bernstein konvergiert

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{Z}_i-\triangle\ b(x,s)\right)}{\sqrt{\triangle}} \xrightarrow[\triangle\to 0]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2(x,s)).$$

Da nach Definition von $\tilde{Z}_i$ die Zufallsvariable $\sum_{i=1}^{n}\tilde{Z}_i$ auf einer verschwindend kleinen Menge von $\sum_{i=1}^{n}Z_i$ abweicht, konvergiert auch

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}Z_i-\triangle\ b(x,s)\right)}{\sqrt{\triangle}} \xrightarrow[\triangle\to 0]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2(x,s)),$$

was zu beweisen war.

$\square$

Doeblin bemerkt am Ende des Beweises, dass wenn $\sigma \neq 0$ ist, die infinitesimale Bewegung $\triangle X$ aus einer Überlagerung einer nicht-zufälligen Größe mit Geschwindigkeit $b(x,s)\triangle$ und einer zentrierten normalverteilten Zufallsvariable mit Varianz $\sigma^2(x,s)$ resultiert. Infinitesimal ist also der nicht-zufällige Term von der Ordnung $\triangle$ vernachläßigbar bezüglich der Gauß-Variable der Ordnung $\sqrt{\triangle}$. Diese Dekomposition ist nach Doeblin nicht invariant unter Variablenwechsel.

4.2.2 Verstärkte Bedingungen von Kolmogoroff-Feller

In einigen Fällen betrachtet Doeblin verstärkte Bedingungen von Kolmogoroff-Feller. Er beschränkt sich auf Pfade von X, die in einem Intervall verlaufen. Im [CRAS], Seite 1064, schaut er sich den bedingten Erwartungswert der Differenzen $X_t - X_s$ bzw. $(X_t - X_s)^2$ unter den Bedingungen $X_s = x$ und $|X_{t'} - X_s| \leq 1$ f.s. für alle $t' \in (s,t)$ an. Asymptotisch bekommt er die gleichen Limiten b und σ wie ohne zusätzliche Hypothesen. Der Vorteil wird sein, die Trajektorien von X in einem kompakten Intervall studieren zu können, ohne dabei das lokale Verhalten zu verändern. Sei dazu

$$H := \{\forall\ t' \in (s,t) : |X_{t'} - X_s| \leq 1, X_s = x\},$$

entsprechend ist das Komplement

$$\overline{H} := \{\exists\ t' \in (s,t) : |X_{t'} - X_s| > 1, X_s = x\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,s}((X_t - X_s)\mathbb{1}_{|X_t - X_s| \leq 1}) &= \mathbb{P}(H)\mathbb{E}_{x,s}((X_t - X_s)\mathbb{1}_{|X_t - X_s| \leq 1}|H) \\ &+ \mathbb{E}_{x,s}((X_t - X_s)\mathbb{1}_{|X_t - X_s| > 1}|\overline{H})\mathbb{P}(\overline{H}).\end{aligned}$$

Da $\lim_{t\to s} \mathbb{P}(H) = 1$ ist, verschwindet der Term $\mathbb{E}_{x,s}((X_t - X_s)\mathbb{1}_{|X_t - X_s| > 1}|\overline{H})$ und Doeblin erhält asymptotisch

$$\begin{aligned}\lim_{t\to s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x|<1} (y-x) d_y F(x,s;y,t) &= \\ \lim_{t\to s} \frac{1}{t-s} \mathbb{E}_{x,s}((X_t - X_s)\mathbb{1}_{|X_t - X_s| \leq 1}|H) &= b(x,s).\end{aligned}$$

Analog folgt für das zweite Moment

$$\begin{aligned}\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int_{|y-x|<1}(y-x)^2 d_yF(x,s;y,t) &= \\ \lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\mathbb{E}_{x,s}((X_t-X_s)^2\mathbb{1}_{|X_t-X_s|\le 1}|H) &= \sigma^2(x,s).\end{aligned}$$

4.2.3 Definition und Eigenschaft eines korrigierten Prozesses

Betrachtet wird eine Lösung X von $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,(\mathfrak{F}_t)_t,\mathbb{P})$. O.B.d.A. sei $X_0=0$. Doeblin nimmt an, dass b, σ stetig sind und $\sigma>0$. Er schränkt sich auf Trajektorien von X ein, die das Intervall $[-1;1]$ nicht verlassen. Bedingt man auf diese Einschränkung, so zeigte der letzte Abschnitt, dass dies b und σ nicht beeinflußt. Wir konstruieren nach Doeblin, vergleiche [CRAS], Seiten 1065-1067, einen Prozess Z^T auf folgende Weise. Sei $T:=\inf\{u:|X_u|=1\}$ eine $(\mathfrak{F}_t)_t$-Stoppzeit. Dann setzt man für $s\ge 0$

$$\begin{aligned}Z_s^T &:= Z_s\mathbb{1}_{s<T}+\tilde{Z}_s\mathbb{1}_{s\ge T}\\ &:= \left(X_s-\int_0^s b(X_u,u)du\right)\mathbb{1}_{s<T}+\tilde{Z}_s\mathbb{1}_{s\ge T}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Für alle Zeitpunkte $t'\ge T$ seien die Zuwächse von $(\tilde{Z}_{t'})_{t'\ge T}$

$$\tilde{Z}_t-\tilde{Z}_{t'}\sim\mathcal{N}(0,c^2(t-t')),$$

wobei $c>0$ konstant ist und $t>t'$. Der zusammengesetzte Prozess Z^T ist fast sicher stetig nach Konstruktion. Doeblin bemerkt, dass Z^T nicht der Chapman-Kolmogoroff Gleichung genügt. Dies lässt sich folgendermaßen begründen. Z^T hat ein Gedächtnis und weiss, wann X das Intervall $(-1;1)$ verlässt, deshalb ist er kein Markov Prozess und genügt a fortiori nicht der Chapman-Kolmogoroff Gleichung.

Proposition 4.2.1 *Der zusammengesetzte Prozess Z^T ist zentriert.*

Beweis:
Doeblin zeigt, dass $(Z_t)_{t<T}$ zentriert ist. Für $0\le t<T$ schreibt er Z_t als

$$Z_t = \sum_{i=1}^{n} Z_{t_i^n} - Z_{t_{i-1}^n},$$

wobei $t_i^n := \frac{it}{n}$. Sei $\varepsilon > 0$. Doeblin betrachtet die Pfade $|Z_{t_i^n} - Z_{t_{i-1}^n}| < \varepsilon$ f.s. für beliebige n, i. Es werden nur Trajektorien ausgeschlossen, wo die Wahrscheinlichkeit von $\{|Z_{t_i^n} - Z_{t_{i-1}^n}| > \varepsilon\}$ verschwindet, wenn die Unterteilung feiner wird, d.h. n groß. Setze $D_\varepsilon^n := \{\forall\ i = 1...n\ |Z_{t_i^n} - Z_{t_{i-1}^n}| < \varepsilon\}$. Schrittweise beweist Doeblin, dass $\mathbb{E}(Z_t \mathbb{1}_{D_\varepsilon^n}) = 0$ für alle $0 \leq t < T$ ist.

$$\mathbb{E}(Z_t \mathbb{1}_{D_\varepsilon^n} | X_{t_1^n}, ..., X_{t_{j-1}^n}, Z_{t_1^n}, ..., Z_{t_{j-1}^n}) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((Z_{t_i^n} - Z_{t_{i-1}^n}) \mathbb{1}_{D_\varepsilon^n} | X_{t_1^n}, ..., X_{t_{j-1}^n}, Z_{t_1^n}, ..., Z_{t_{j-1}^n})$$

Sind $X_{t_j^n}$ und $Z_{t_j^n}$ bekannt für $j < i$, so existiert eine $\sigma(X_{t_j}, Z_{t_j}, j < i)$ - messbare Funktion φ_j, so dass

$$\mathbb{E}((Z_{t_j^n} - Z_{t_{j-1}^n}) \mathbb{1}_{D_\varepsilon^n} | X_{t_1^n}, ..., X_{t_{j-1}^n}, Z_{t_1^n}, ..., Z_{t_{j-1}^n}) =$$
$$\varphi_j(X_{t_1^n}, ..., X_{t_{j-1}^n}, Z_{t_1^n}, ..., Z_{t_{j-1}^n})$$

und damit

$$\mathbb{E}(Z_t \mathbb{1}_{D_\varepsilon^n} | X_{t_1^n}, ..., X_{t_{j-1}^n}, Z_{t_1^n}, ..., Z_{t_{j-1}^n}) =$$
$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(X_{t_1^n}, ..., X_{t_{j-1}^n}, Z_{t_1^n}, ..., Z_{t_{j-1}^n}).$$

Doeblin schätzt die Zuwächse von X und Z geschickt ab und erhält für den bedingten Erwartungswert

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(X_{t_1^n}, ..., X_{t_{j-1}^n}, Z_{t_1^n}, ..., Z_{t_{j-1}^n}) = \Xi(n),$$

wobei $\Xi(n)$ gegen 0 für n gegen unendlich läuft.
Insgesamt führt das zum Ergebnis

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_t \mathbb{1}_{D_\varepsilon^n}) = 0. \tag{4.17}$$

also

$$\mathbb{E}(Z_t) = 0.$$

In dem anderen Fall, wenn $t \geq T$ ist, wurden die Zuwächse $\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_{t'}$ für $t > t' \geq T$ als zentriert vorausgesetzt. Zusammen genommen bekommt man schließlich

$$\mathbb{E}(Z_t^T) \equiv 0,$$

für alle t.

□

4.2.4 Zeitwechsel

Doeblin führt eine Familie von Stoppzeiten $\theta = (\theta(t))_t$ ein und wendet diesen Zeitwechsel auf den zusammengesetzten Prozess Z^T an, siehe dazu auch [CRAS], Seite 1068-1069. Die Idee einen Zeitwechsel zu benutzen und damit die Trajektorien zu verändern, ist originell für diese Zeit. Bis in die 50er Jahre findet man in der Literatur nicht viel Anwendung eines Zeitwechsels auf eine Bewegung X mit Bedingungen von Kolmogoroff-Feller. Zwar bediente sich schon Lévy in [Lev39] und [Lev48] der Stoppzeit, verwendete sie aber um die starke Markov Eigenschaft der Brownschen Bewegung zu benutzen und mit deren Hilfe Formeln für eine Dekomposition zu entwickeln. Feller in [Fel54] verbesserte später die Idee X auf Z zu reduzieren und führte einen globalen *natürlichen* Zeitwechsel ein, ohne, wie Doeblin, den Prozess stückchenweise zu betrachten und diese Teile des Bildes einer Brownschen Bewegung unter einem Zeitwechsel am Ende wieder zu dem Prozess zusammenzusetzen. Für $\sigma \equiv 1$ und b regulär ist der Prozess Z aus (4.16) ohne Zeitwechsel schon eine Brownsche Bewegung. Was passiert für allgemeines nicht beschränktes σ? Der Prozess Z kann explodieren. Die folgenden Ergebnisse gelten sogar in diesem Fall.

Sei X ein Prozess auf $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$, $\theta = (\theta(t))_t$ eine Familie von $(\mathfrak{F}_t)_t$ - Stoppzeiten mit den Eigenschaften, dass $\theta(t)$ wachsend in t ist, $\theta(0) = 0$ und $\theta(\infty) = \infty$. Die Familie der Stoppzeiten θ wird als neue *Uhr* des zusammengesetzten Prozess Z^T fungieren. Deshalb muß Doeblin zwei Fälle unterscheiden, einmal alle Zeiten $0 < t \leq T$ und die Zeiten nach T. Für $t < T$ vermöge $\theta(t)$

$$\theta(t) := \inf\left\{ s > 0 : \int_0^s \sigma^2(X_u, u)du \geq t \right\}. \tag{4.18}$$

$\theta(t)$ ist der inverse Prozess von

$$\left\langle \int_0^{\cdot} \sigma(X_s, s)dB_s \right\rangle_t.$$

In dem anderen Fall, wenn $t \geq T$, setzt er

$$\theta(t) := \inf\left\{ s > 0 : \int_0^T \sigma^2(X_u, u)du + c^2(s - T) \geq t \right\}, \tag{4.19}$$

sonst nehmen wir $\inf \emptyset = \infty$. Doeblin studiert zuerst die ersten beiden Momente des gestoppten Prozesses Z_θ^T, um anschließend durch Standardisierung eine Aussage über die Verteilung der Zuwächse von Z_θ^T zu treffen. Er zeigt in der nächsten Proposition insbesonders, dass $(Z_{\theta(t)}^T)_t$ und $((Z_{\theta(t)}^T)^2 - t)_t$ Martingale sind.

Proposition 4.2.2 *Sei X eine Lösung von $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ auf $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$, Z^T der zusammengesetzte Prozess aus* (4.16) *und θ ein $(\mathfrak{F}_t)_t$-Zeitwechsel, definiert in* (4.18) *und* (4.19). *Dann gilt für alle $t > t' > 0$*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{\theta(t)}^T - Z_{\theta(t')}^T | Z_{\theta(s)}^T, s \leq t') &= 0 \textit{ und} \\ \mathbb{E}((Z_{\theta(t)}^T - Z_{\theta(t')}^T)^2 | Z_{\theta(s)}^T, s \leq t') &= t - t'. \end{aligned}$$

Beweis:
Zuerst zeigt Doeblin, dass das erste Moment von $Z_{\theta(t)}^T - Z_{\theta(t')}^T$ gleich 0 ist sowie das zweite gleich $t - t'$. Dann argumentiert er, dass das Analoge für die bedingten Erwartungswerte gilt.

$$Z_{\theta(t)}^T = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \left(Z_{\frac{i}{n}}^T - Z_{\frac{i-1}{n}}^T \right) h_i,$$

wobei

$$h_i = \begin{cases} 1 & \text{, wenn } \theta(t) < \frac{i-1}{n} \\ 0 & \text{, wenn } \theta(t) \geq \frac{i-1}{n} \end{cases}$$

Wir haben gesehen, dass Z^T integrierbar ist. Der Erwartungwert von $Z^T_{\theta(t)}$ ergibt sich dann aus

$$\mathbb{E}(Z^T_{\theta(t)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big((Z^T_{\frac{i}{n}} - Z^T_{\frac{i-1}{n}}) h_i \Big).$$

Nach Proposition 4.2.1 folgt

$$\mathbb{E}\Big(Z^T_{\frac{i}{n}} - Z^T_{\frac{i-1}{n}} \Big) = 0,$$

also insgesamt $\mathbb{E}(Z^T_{\theta(t)}) = 0$. A fortiori

$$\mathbb{E}\Big(Z^T_{\theta(t)} - Z^T_{\theta(t')} \Big) = 0,$$

für $t' \le t$. Doeblin merkt am Ende seines Beweises an, dass der zweite Teil der Behauptung analog bewiesen werden kann.

$\square$

4.2.5 Darstellung als Bild einer Brownschen Bewegung unter einem Zeitwechsel

Es folgt das wichtigste Resultat von Doeblin, welches in diesem Abschnitt gezeigt wird, zu finden als IX.Lemma im [CRAS], Seite 1068. Eine reguläre Bewegung, die zentriert und für große Werte korrigiert wurde, ist das Bild einer Brownschen Bewegung unter einem Zeitwechsel $(\theta(t))_t$. Doeblin zeigt somit einen Spezialfall des Satzes von Dambis, Dubins und Schwarz, vergleiche Theorem 3.1.3. Von der Wichtigkeit her, kann zu der Zeit nur ein Ergebnis mit dem von Doeblin verglichen werden: die von Lévy 1937 bewiesene Charakterisierung der Brownschen Bewegung, siehe dazu auch [Lev37].

Theorem 4.2.2 *Die Zuwächse des zeittransformierten Prozesses* Z^T_θ

$$\frac{Z^T_{\theta(t)} - Z^T_{\theta(t')}}{\sqrt{t - t'}}$$

sind standardnormalverteilt für $t > t' > 0$.

Beweis:
Doeblin beweist das Theorem für $(Z_{\theta(t)})_{t<T}$. Für alle $t \geq T$ sind die Zuwächse nach Konstruktion normalverteilt. Da Z_t und $\theta(t)$ f.s. stetig in t sind, ist $Z_{\theta(t)}$ ebenfalls stetig in t. Sei $t > t'$. Doeblin betrachtet die Differenz

$$Z_{\theta(t)} - Z_{\theta(t')} = \sum_{j=1}^{n} \Big(Z_{\theta(t_j)} - Z_{\theta(t_{j-1})} \Big)$$

mit der Konvention $t_0 = t'$, $t_n = t$ und $t_j - t_{j-1} = \frac{t-t'}{n}$ für alle $1 \leq j \leq n$. Er argumentiert, dass für alle j

$$\mathbb{P}(|Z_{\theta(t_j)} - Z_{\theta(t_{j-1})}| < \varepsilon) > 1 - \Xi(n).$$

Der Term $\Xi(n)$ ist so gewählt, dass er mit grösser werdendem n verschwindet. Im Folgendem definiert Doeblin $\overline{Z} = \sum_{j=1}^{n} \triangle\overline{Z_j}$ durch

$$\triangle\overline{Z_j} = \begin{cases} Z_{\theta(t_j)} - Z_{\theta(t_{j-1})} & \text{, wenn } |Z_{\theta(t_j)} - Z_{\theta(t_{j-1})}| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{, wenn } |Z_{\theta(t_j)} - Z_{\theta(t_{j-1})}| > \varepsilon \end{cases}$$

Er möchte mithilfe des Lemmas von Bernstein zeigen, dass die Verteilung von $\overline{Z}$ gegen die Gauß-Verteilung konvergiert. Schließlich will Doeblin

$$\mathbb{P}(Z \neq \overline{Z}) < \varepsilon \tag{4.20}$$

für $\varepsilon > 0$ benutzen, um die Aussage des Theorems zu beweisen.
Sei $G_j := \{i \leq j-1 : \ Z_{\theta(t_i)}\}$. Mithilfe der Proposition 4.2.2 und ähnlichen Argumenten wie im Beweis von Theorem 4.2.1 läßt sich zeigen, dass für alle $j \leq n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\triangle\overline{Z_j}|G_j) &= o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \mathbb{E}((\triangle\overline{Z_j})^2|G_j) &= \frac{t-t'}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \mathbb{E}((\triangle\overline{Z_j})^3|G_j) &< \varepsilon\mathbb{E}((\triangle\overline{Z_j})^2|G). \end{aligned}$$

Nach Bernstein konvergiert also die Verteilung der schwach abhängigen Zufallsvariablen $\sum_{i=1}^{n} \triangle\overline{Z_j} = \overline{Z}$ gegen eine Normalverteilung zu den Parametern $(0, t-t')$. Mit (4.20) folgt dann die Behauptung.

$\square$

4.3 Ein Zentraler Grenzwertsatz

Wir haben gesehen, dass die infinitesimalen Zuwächse von Doeblins regulären Bewegungen X normalverteilt sind. Wir betrachten nun die Brownsche Bewegung B auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$. Sei Φ die Verteilungsfunktion des Maximums der Brownschen Bewegung vermöge

$$\Phi(x) := \mathbb{P}\left(\max_{0<u<1} |B_u| \leq x\right)$$

Sie wurde bereits von Bachelier, [Bac01], in seinen Arbeiten berechnet und im Jahre 1939 von Lévy in [Lev39] veröffentlicht. Doeblin beweist im nächsten Theorem zunächst, vergleiche dazu XIV.Theorem im [CRAS] auf Seite 1076, dass die Verteilung von $\frac{|X_{s+u}-X_s|}{\sqrt{\varepsilon}\sigma(x,s)}$ für $X_s = x$ f.s. gegen Φ konvergiert. Es handelt sich um *einen Zentralen Grenzwertsatz.*

Theorem 4.3.1 *Sei eine reguläre Bewegung X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$ gegeben. X löse das System $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ mit $\sigma > 0$, $X_s = x$ f.s. Dann gilt für $K > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}\left(\exists\ 0 < u < \varepsilon : \frac{|X_{s+u} - X_s|}{\sqrt{\varepsilon}\sigma(x,s)} > K\right) = 1 - \Phi(K).$$

Beweis:
Doeblin nimmt zuerst an, dass b, σ und $\frac{1}{\sigma}$ beschränkt sind. Sei $\varepsilon > 0$ und $s < u < s + \varepsilon$. Man wählt $0 < \varepsilon_2 \leq 1$ so, dass für den Diffusionskoeffizienten σ von X gilt

$$\sigma^2(x,s)\varepsilon(1-\varepsilon_2) \leq \int_s^{s+\varepsilon} \sigma^2(X_r, r)dr$$

Andererseits, da b beschränkt ist, findet man eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\left|\int_s^{s+u} b(X_r, r)dr\right| < c\varepsilon.$$

Sei τ eine Stoppzeit bezüglich $(\mathfrak{F}_t)_t$ und τ vermöge

$$\tau_\nu := \inf\left\{r \geq s : \int_s^r \sigma^2(X_u, u)du = \nu\right\},$$

mit der Konvention $\inf \emptyset = \infty$.

Doeblin wählt ν so, dass f.s.

$$\nu = \sigma^2(x,s)\varepsilon(1-\varepsilon_2). \tag{4.21}$$

Sei $K > 0$. Er deduziert

$$\mathbb{P}\Bigg(\max_{s<u<\tau_\nu}\Bigg(X_u - X_s - \int_s^{s+u} b(X_r,r)dr\Bigg) > \sqrt{\nu}\Bigg(K + \frac{c\varepsilon}{\sqrt{\nu}}\Bigg)\Bigg) = 1 - \Phi\Bigg(K + \frac{c\varepsilon}{\sqrt{\nu}}\Bigg)$$

aus Betrachtungen in seinem Abschnitt *Wahrscheinlichkeit für große Werte*, vergleiche Kapitel XIII [CRAS], Seite 1072, den wir nicht betrachten werden. Er benutzt Φ, um große Werte seiner regulären Bewegungen zu kontrollieren und entwickelt dort unter anderem eine Abschätzung des Terms

$$\left|X_u - X_s - \int_s^{s+u} b(X_r,r)dr\right|.$$

A fortiori für ν wie in (4.21), $\eta > 0$

$$\mathbb{P}\Bigg(\exists\ s < u < s+\varepsilon : \frac{|X_u - X_s|}{\sqrt{\varepsilon}\sigma(x,s)} > K\sqrt{1-\varepsilon_2}\Bigg) > 1 - \Phi\Bigg(K + \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}\sigma(x,s)}\Bigg) - \eta.$$

Analog bekommt er

$$\mathbb{P}\Bigg(\exists\ s < u < s+\varepsilon : \frac{|X_u - X_s|}{\sqrt{\varepsilon}\sigma(x,s)} > K\sqrt{1-\varepsilon_2}\Bigg) < 1 - \Phi\Bigg(K - \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{(1-\varepsilon_2)}\sigma(x,s)}\Bigg) + \eta.$$

Doeblin wählt ε_2 und η genügend klein und erhält

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}\Bigg(\exists\ 0 < u < \varepsilon : \frac{|X_{s+u} - X_s|}{\sqrt{\varepsilon}\sigma(x,s)} > K\Bigg) = 1 - \Phi(K).$$

Weiterhin argumentiert er, dass sich die Voraussetzung der Beschränktheit für die Funktionen b, σ und $\frac{1}{\sigma}$ am Anfang des Beweises leicht entfernen lässt und er erhält insgesamt das Ergebnis. $\square$

Im Anschluß an den Beweis bemerkt Doeblin, dass man aus dem vorigen Theorem

$$\mathbb{P}\left(\max_{s \leq u \leq s+\varepsilon} \frac{|X_u - X_s|}{\sqrt{\varepsilon}\sigma(x,s)} > K\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_K^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \tag{4.22}$$

folgern kann.

Insbesonders findet man die Resultate des Theorems 4.3.1 und (4.22) heute in einem anderen Zusammenhang zum Beispiel als *Folgerung aus dem Reflexionsprinzip der Brownschen Bewegung* in der Proposition 3.3.7. in [RevYor01]. Dort geht vor allem die starke Markov Eigenschaft der Brownschen Bewegung B ein. Sei $a > 0$ und $t \geq 0$ gegeben, dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq s \leq t} |B_s| \geq a\right) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a).$$

Doeblin hatte schon ein gutes Gefühl, welche Eigenschaften die infinitesimalen Zuwächse von X erfüllen.

4.4 Frühere Version der Itô-Formel

Das Theorem im Abschnitt *Variablentransformation* bildet nach Yor den wichtigsten Teil von Doeblins Arbeit. Es handelt sich um eine frühere Version der Itô-Formel, vergleiche Theorem 3.1.2 im Kapitel 3. Im [CRAS] auf den Seiten 1077-1078, Kapitel XV, stellt Doeblin das Theorem vor und beweist es. Anschließend wendet er es auf einen Spezialfall an und zeigt, wie er eine Lösung von $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ in eine Brownsche Bewegung mit Drift transformiert. Diese Brownsche Bewegung mit Driftterm löst das System $\mathcal{E}_{\tilde{b},1}$ mit entsprechenden Koeffizienten $\tilde{b}$ und $\tilde{\sigma} \equiv 1$.

4.4.1 Variablentransformation

Doeblin betrachtet die Klasse $\mathcal{K}$ aller Gleichungssysteme $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ für beliebige b, σ. Sei $\mathcal{E}_{b,\sigma} \in \mathcal{K}$ und X eine Lösung davon. Weiterhin sei φ eine in x wachsende Funktion $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, die noch zusätzliche Eigenschaften erfüllt. Die Transformation von X mit φ liefert wieder eine Lösung der Chapman-Kolmogoroff Gleichung, die sich nur in ihren Drift- und Diffusionskoeffizienten von X unterscheidet. $\mathcal{K}$ ist also invariant unter Transformationen durch geeignete Funktionen φ.

Theorem 4.4.1 (Variablentransformation) *Sei X Lösung von $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$. Sei $\varphi \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$. Man definiert den transformierten Prozess Y auf $(\Omega, (\tilde{\mathfrak{F}}_t)_t, \mathbb{P})$ durch $Y_t := \varphi(X_t, t)$ für $t \geq 0$. Auf der Menge, auf der X f.s. regulär ist und die partiellen Ableitungen beschränkt sind, löst Y das System $\mathcal{E}_{\tilde{b},\tilde{\sigma}}$. Der neue Driftkoeffizient $\tilde{b}$ und Diffusionskoeffizient $\tilde{\sigma}$ des Prozesses Y ergibt sich aus:*

$$\begin{aligned}
\tilde{b}(x,t) &= \varphi_x(x,t)b(x,t) + \varphi_t(x,t) + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x,t)\sigma^2(x,t) \\
\tilde{\sigma}^2(x,t) &= (\varphi_x)^2(x,t)\sigma^2(x,t)
\end{aligned}$$

Beweis:
Sei $G = (G(x,s;\bullet,t))_{x,s,t}$ für $s < t$ eine Familie von Verteilungsfunktionen von $(Y_t)_t$. Dann ist für $x, y \in \mathbb{R}$ und $s, t \geq 0$
$G(x,s;y,t) = \mathbb{P}_{x,s}(Y_t \leq y)$. Da $Y_t = \varphi(X_t,t)$ und φ stetig sowie wachsend in x ist, existiert ein x', y', so dass

$$\mathbb{P}_{x,s}(Y_t \leq y) = \mathbb{P}_{x',s}(X_t \leq y').$$

Mit der Familie von Verteilungsfunktionen von X, löst G also die Chapman-Kolmogoroff Gleichung

$$G(x,s;y,t) = \int_{\varphi(-\infty,s)}^{\varphi(\infty,s)} G(z,u;y,t)d_zG(x,s;z,u).$$

Sei $\varepsilon > 0$. Doeblin betrachtet die Differenz

$$\begin{aligned}
Y_{t+\varepsilon} - Y_t &= \varphi(X_{t+\varepsilon}, t+\varepsilon) - \varphi(X_t, t) \\
&= \varphi(X_{t+\varepsilon}, t+\varepsilon) - \varphi(X_t, t+\varepsilon) + \varphi(X_t, t+\varepsilon) - \varphi(X_t, t)
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung existieren φ_x, φ_{xx} und sind stetig in (x,t). Die Taylor-Zerlegung erster Ordnung mit dem Restglied zweiter Ordnung nach Lagrange von φ in x ergibt

$$\begin{aligned}&\varphi(X_{t+\varepsilon}, t+\varepsilon) - \varphi(X_t, t+\varepsilon) \stackrel{\text{f.s.}}{=} \\ &\varphi_x(X_t, t+\varepsilon)(X_{t+\varepsilon} - X_t) + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(\xi, t+\varepsilon)(X_{t+\varepsilon} - X_t)^2\end{aligned} \tag{4.23}$$

wobei $X_t < \xi < X_{t+\varepsilon}$ oder $X_{t+\varepsilon} < \xi < X_t$ f.s.
Wir zerlegen die Funktion φ in der Zeit: $\exists\ r \in (t, t+\varepsilon)$ so, dass

$$\varphi(X_t, t+\varepsilon) - \varphi(X_t, t) = \varphi_t(X_t, r)\varepsilon. \tag{4.24}$$

Insgesamt erhalten wir aus (4.23) und (4.24) die Darstellung

$$\begin{aligned}&Y_{t+\varepsilon} - Y_t \stackrel{\text{f.s.}}{=} \\ &\varphi_x(X_t, t+\varepsilon)(X_{t+\varepsilon} - X_t) + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(\xi, t+\varepsilon)(X_{t+\varepsilon} - X_t)^2 + \\ &\varphi_t(X_t, r)\varepsilon.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Seien die partiellen Ableitungen von φ durch c beschränkt und $\eta > 0$. Das liefert uns

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(|Y_{t+\varepsilon} - Y_t| > \eta) \le \\ &\mathbb{P}\left(c|X_{t+\varepsilon} - X_t| + \frac{1}{2}c(X_{t+\varepsilon} - X_t)^2 + c\varepsilon > \eta\right) \le \\ &\mathbb{P}\left(|X_{t+\varepsilon} - X_t| > \frac{\eta}{2c}\right) + \mathbb{P}\left((X_{t+\varepsilon} - X_t)^2 > \frac{\eta}{c}\right) \le o(\varepsilon)\end{aligned}$$

nach Eigenschaft (4.4) des Prozesses X. Somit folgt gleichmäßig in (y, t) mit $y = \varphi(x, t)$

$$\int_{|y-x|>\eta} d_y G(x, s; y, t) = o(\varepsilon). \tag{4.26}$$

Die neuen Koeffizienten $\tilde{b}$ und $\tilde{\sigma}$ erhalten wir aus der folgenden Berechnung. Sei $\eta > 0$.

$$\begin{aligned}\tilde{b}(y, t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{|z-y|<\eta} (z - y) d_z G(y, t; z, t+\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{y,t}((Y_{t+\varepsilon} - Y_t)\mathbb{1}_{|Y_{t+\varepsilon} - Y_t| < \eta}) \\ &\stackrel{(4.26)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{y,t}(Y_{t+\varepsilon} - Y_t)\end{aligned}$$

Mit der Darstellung aus (4.25) bekommen wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{y,t}(Y_{t+\varepsilon} - Y_t) = \\
&\mathbb{E}_{y,t}(\varphi_x(X_t, t+\varepsilon)(X_{t+\varepsilon} - X_t)) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_{y,t}(\varphi_{xx}(\xi, t+\varepsilon)(X_{t+\varepsilon} - X_t)^2) + \\
&\mathbb{E}_{y,t}(\varphi_t(X_t, r))\varepsilon.
\end{aligned}$$

Man bedingt das erste Moment

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{y,t}(\varphi_x(X_t, t+\varepsilon)(X_{t+\varepsilon} - X_t)) &= \\
\mathbb{E}[\mathbb{E}_{y,t}(\varphi_x(X_t, t+\varepsilon)(X_{t+\varepsilon} - X_t)|\mathfrak{F}_t)] &= \\
\mathbb{E}(\varphi_x(X_t, t+\varepsilon)\mathbb{E}_{y,t}(X_{t+\varepsilon} - X_t)|\mathfrak{F}_t)) &= \\
\mathbb{E}_{y,t}(X_\varepsilon - y)\mathbb{E}(\varphi_x(X_t, t+\varepsilon))
\end{aligned}$$

und erhält schließlich

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_{y,t}(\varphi_x(X_t, t+\varepsilon)(X_{t+\varepsilon} - X_t)) &\overset{(4.2)}{=} \\
b(y,t)\varphi_x(y,t) & \qquad .
\end{aligned}$$

Gleichermaßen gilt für das zweite Moment

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(\varphi_{xx}(\xi, t+\varepsilon)\mathbb{E}_{y,t}((X_{t+\varepsilon} - X_t)^2|\mathfrak{F}_t)) &\overset{(4.3)}{=} \\
\sigma^2(y,t)\varphi_{xx}(y,t)
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_{y,t}(\varphi_t(X_t, r))\varepsilon \overset{t<r\leq t+\varepsilon}{=} \varphi_t(y,t)$$

i.e.

$$\tilde{b}(x,t) = \varphi_x(x,t)b(x,t) + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x,t)\sigma^2(x,t) + \varphi_t(x,t).$$

Analog folgt für den Diffusionskoeffizienten $\tilde{\sigma}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2(y,t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{|z-y|<\eta}(z-y)^2 G(y,t;dz,t+\varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_{y,t}((Y_{t+\varepsilon}-Y_t)^2 \mathbb{1}_{|Y_{t+\varepsilon}-Y_t|<\eta}) \\
&= \varphi_x^2(y,t)\sigma^2(y,t).
\end{aligned}$$

□

Doeblin zeigt damit, dass Y das System $\mathcal{E}_{\tilde{b},\tilde{\sigma}}$ löst. Wir bekommen die gleichen neuen Drift- und Diffusionskoeffizienten wie im Anwendungsbeispiel 3.1.5.

4.4.2 Anwendung: Brownsche Bewegung mit Drift

Einen wichtige Anwendung der Formel aus dem vorigen Abschnitt bildet nach Doeblin, siehe [CRAS] Seite 1078, die Transformation

$$\varphi(x,t) = \int_0^x \frac{1}{\sigma(y,t)}dy,$$

für $\sigma > 0$. Wir haben diese Transformation als Anwendung der Itô Formel bereits in 3.1.4 gesehen.

Angenommen σ_x, σ_t und φ_t existieren und σ_x ist stetig bezüglich (x,t). Seien zusätzlich $\frac{1}{\sigma}$, σ_x und σ_t beschränkt. φ ist nach Konstruktion monoton wachsend in x.
Die Voraussetzungen für σ ergeben, dass φ_x sowie φ_{xx} existieren und σ stetig in (x,t) ist. Zur Erinnerung schreiben wir die partiellen Ableitungen von φ nochmals auf:

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x,t) &= \frac{1}{\sigma(x,t)} \\
\varphi_{xx}(x,t) &= -\frac{\sigma_x(x,t)}{\sigma^2(x,t)} \\
\varphi_t(x,t) &= -\int_0^x \frac{\sigma_t(y,t)}{\sigma^2(y,t)}dy.
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von σ und σ_x in (x,t) folgt die Stetigkeit von φ_x und φ_{xx} in den beiden Variablen.
X löse das System $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ auf $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_t, \mathbb{P})$. Nach Theorem 4.4.1 aus dem vorigen Abschnitt existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\tilde{\mathfrak{F}}_t)_t, \mathbb{P})$ auf dem der transformierte Prozess Y das System $\mathcal{E}_{\tilde{b},\tilde{\sigma}}$ löst. Y vermöge

$$Y_t = \varphi(X_t, t) = \int_0^{X_t} \frac{1}{\sigma(y,t)} dy$$

für $t \geq 0$. Der dazugehörige Driftkoeffizient $\tilde{b}$ bzw. Diffusionskoeffizient $\tilde{\sigma}$ ergibt sich nach Theorem 4.4.1 aus

$$\begin{aligned}
\tilde{b}(x,t) &= \frac{b(x,t)}{\sigma(x,t)} - \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\sigma_x(x,t)}{\sigma^2(x,t)} - \int_0^x \frac{\sigma_t(y,t)}{\sigma^2(y,t)} dy \\
&= \frac{b(x,t)}{\sigma(x,t)} - \frac{1}{2}\sigma_x(x,t) - \int_0^x \frac{\sigma_t(y,t)}{\sigma^2(y,t)} dy \\
\tilde{\sigma}^2(x,t) &= \frac{1}{\sigma^2(x,t)}\sigma^2(x,t) = 1
\end{aligned}$$

Der *Spezialfall* nach Doeblin zeigt eine Möglichkeit, wie eine Lösung X der Gleichung von Chapman-Kolmogoroff $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ bezüglich b und σ in eine Brownsche Bewegung mit Drift $\tilde{b}$ transformiert werden kann. Insbesondere ist diese Transformation wieder eine Lösung der Chapman-Kolmogoroff Gleichung mit den Bedingungen von Kolmogoroff-Feller.
Dieser Fall wurde bereits von Feller in [Fel36] betrachtet und von Fortet in [For41] benutzt, um sich auf $\sigma \equiv 1$ zu beschränken, wenn b und σ sehr regulär sind. Kolmogoroff und Feller benutzen die Variablentransformation bei der Chapman-Kolmogoroff Gleichung, um sie mit funktionalanalytischen Argumenten zu manipulieren. Im Gegensatz betrachtet Doeblin die transformierte Bewegung Y selbst, um auf der trajektoriellen Ebene ihre Eigenschaften zu studieren.

4.5 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Im Folgenden wenden wir uns Doeblins Existenz- und Eindeutigkeitstheoremen für die Lösung der Chapman-Kolmogoroff Gleichung unter den Bedingungen von Kolmogoroff-Feller und einer Anfangsbedingung zu. Doeblin zeigt die Existenz seiner Bewegungen unter allgemeineren Bedingungen an b und σ, als zu seiner Zeit bekannt waren. Sie wurden noch im Jahre 1953 von Blanc-Lapierre und Fortet, siehe [BlaFor53], als nicht vergleichbar angesehen. Zuerst zeigt Doeblin, dass, wenn eine Lösung der Chapman-Kolmogoroff Gleichung F bezüglich b und σ existiert, sie eindeutig in Verteilung ist und die Rückwärtsgleichung

$$-\frac{\partial F}{\partial s} = b(x,s)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,s)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

für $X_s = x$ und festes (y,t) löst. Dann zeigt er die Existenz einer solchen Lösung F bei vorgegebenen b und σ, die bestimmte Eigenschaften erfüllen.

4.5.1 Eindeutigkeit

Das Theorem ist ein Teil des XIX Theorems von Doeblin, siehe dazu [CRAS] Seite 1083, und gibt hinreichende Bedingungen für die Eindeutigkeit einer Lösung der Chapman-Kolmogoroff Gleichung in Verteilung. Es zeigt außerdem eine Verbindung zur Rückwärtsgleichung von Kolmogoroff.

Theorem 4.5.1 *Angenommen die Familie von Verteilungsfunktionen F löst das System $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ für $\sigma \neq 0$ und $\lim_{y\to-\infty} F(x,s;y,t) = 0$ sowie $\lim_{y\to\infty} F(x,s;y,t) = 1$ für alle $s < t$. Angenommen es existieren Konstanten S_1 und S_2, so dass die Limiten gleichmäßig in s für $S_1 < s, t < S_2$ sind. Seien b, σ und $\frac{1}{\sigma}$ stetig und beschränkt. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial F}{\partial s}$ seien stetig und beschränkt auf kompakten Mengen, wenn $t - s$ von unten beschränkt ist.*
Dann gilt:

(i) F ist die einzige reguläre Lösung mit Driftkoeffizient b und Diffusionskoeffizient σ,

(ii) sie genügt der Rückwärtsgleichung für $X_s = x$ f.s. und (y,t) fest

$$-\frac{\partial F}{\partial s} = b(x,s)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,s)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Beweisskizze:
Die zweite Aussage des Theorems wurde bereits in dem Artikel von Feller in [Fel36] bewiesen. Die restlichen Aussagen beweist Doeblin mithilfe von

Kolmogoroff's Übertragungssatz. Dabei diskretisiert er das Zeitintervall $[s, t)$ und definiert für jedes n einen Prozess $X^{(n)}$, der sich zu den Zeitpunkten $t_0^{(n)}, ..., t_m^{(n)}$ bewegt. Er bekommt anschließend eine Familie von Familien von Verteilungsfunktionen $(G_n(x, t_0^{(n)}; \bullet, t_m^{(n)}))_{n,x,t_0^{(n)},t_m^{(n)}}$ bezüglich neuer Familien von Driftkoeffizienten $(b_n)_n$ und Diffusionskoeffizienten $(\sigma_n)_n$. Diese Familie lässt er gleichmässig in (x, s) gegen die gesuchte Familie von Verteilungsfunktionen F konvergieren.

$\square$

Hier erkennen wir die Forderung von gleichmässiger Straffheit der Familie von Familien von Verteilungsfunktionen $(G_n(x, t_0^{(n)}; \bullet, t_m^{(n)}))_{n,x,t_0^{(n)},t_m^{(n)}}$ versteckt, die im allgemeinen für unbeschränkte b und σ nicht gilt.

4.5.2 Existenz

Wir beschäftigen uns in dem letzten Abschnitt mit der Existenz einer Familie von Verteilungsfunktionen F, die der Chapman-Kolmogoroff Gleichung genügt, nach Doeblin, siehe [CRAS] Seite 1092ff. Er nähert sich der Existenz zuerst durch beschränkte Koeffizienten b und σ an und approximiert sie schließlich durch Folgen. In seinem Paragraph XXV beweist er sein *Erstes Existenztheorem*:

Theorem 4.5.2 *Seien b, σ und $\frac{1}{\sigma}$ stetige und global beschränkte Funktionen. Dann existiert eine Familie von Verteilungsfunktionen F, die $\mathcal{E}_{b,\sigma}$ löst.*

Doeblins funktionalanalytische Methoden bei dem Beweis dieses Theorems sind nach Bru zu der Zeit wohlbekannt.
Strook und Varadhan benutzen zum Beispiel in [StrVar69] diese funktionalanalytischen Zugänge, um die Existenz von stetigen Markov Prozessen als Lösung von SDGen zu zeigen. Die Ergebnisse von Doeblin sind nach Bru in der heutigen Theorie schwierig einzuordnen. Sie enthalten allgemeinere Ergebnisse als Feller und Bernstein zu ihrer Zeit gezeigt haben. Beispielsweise brauchen sie Koeffizientenfunktionen, die 4 oder 5 mal differenzierbar sind, um die Existenz zu zeigen. Sie enthalten auch alle Bewegungen ohne Explosionen. Doeblin dagegen geht nur von global beschränkten und stetigen Funktionen b, σ und $\frac{1}{\sigma}$ aus.
Am Ende des Paragraphen bekommt Doeblin sein stärkstes Existenztheorem

Theorem 4.5.3 *Angenommen die Funktionen $b(x,s)$ und $\sigma(x,s)$ sind stetig bez. (x,s), es existiert eine dichte Menge von Zeitpunkten s, an denen für beliebiges x die Funktion $\sigma(x,s) \neq 0$. Sei $(\mathbb{P}^{(n)}_{x,s})_{n,x,s}$ eine Familie von Lösungen der Systeme $\mathcal{E}_{b_n,\sigma_n}$. $(b_n)_n$ bzw. $(\sigma_n)_n$ sei eine Familie von beschränkten Driftkoeffizienten bzw. Diffusionskoeffizienten, die gegen b bzw. σ konvergieren. Wenn es zusätzlich für festes (x,s), t für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$\mathbb{P}^{(n)}_{x,s}(X_t \notin K_\varepsilon) < \varepsilon \tag{4.27}$$

gleichmässig in n ist, dann existiert mindestens eine Lösung von $\mathcal{E}_{b,\sigma}$.

Die Bedingung (4.27) ist eine Straffheitsbedingung an die Familie der Masse $(\mathbb{P}^{(n)}_{x,s})_{n,x,s}$. Man braucht sie, damit der Limes ein Maß bleibt. Doeblin konstruiert somit die Existenz und Eindeutigkeit einer Familie von Verteilungsfunktionen F.

Abschlussbemerkungen

Wir haben gesehen inwieweit Wolfgang Doeblin Wegbereiter zum Itô Kalkül hätte sein können. Sein Wissen lag 60 Jahre in der *Académie des Sciences.* Es dauerte 11 Jahre nach Doeblins Tod bis Itô die erste Version seiner Itô-Formel entwickelte. Ein viertel Jahrhundert musste vergehen bis Dambis, Dubins und Schwarz den gleichnamigen Satz bewiesen. Der Begriff des stochastischen Integrales kommt in Doeblins Arbeit *"Über die Gleichung von Kolmogoroff"* nicht vor und ist nicht angedacht. Doeblin schafft es trotzdem, viele Aspekte und Eigenschaften der Prozesse, die sich später als bestimmte stochastische Integrale bezüglich der Brownschen Bewegung herausstellen, direkt aufzudecken. Die schwierigen Umstände sieht man am ehesten darin, dass viele Details in Doeblins Arbeit fehlen oder Teile unvollständig sind. Es wird aber deutlich, dass er bereits eine sehr gute Vorstellung des komplexen Zusammenhangs zwischen partiellen Differentialgleichungen, stochastischen Prozessen und Halbgruppen hatte. Diffusionen kann man also einerseits als Lösungen einer stochastischen Differentialgleichung, als einen bestimmten Markov Prozess oder als eine bestimmte Halbgruppe, die gewisse partielle Differentialgleichungen löst, studieren.
Man möchte gerne wissen, was für Schätze noch in der Académie vergraben sind.

Literaturverzeichnis

[Bac01] L. Bachelier, 1901, *Théorie mathématique du jeu*, Ann.scient. École Normale Supérieure 27, S.143-210

[Bac06] L. Bachelier, 1906, *Théorie des probabilités continues*, J. Math. Pures Appl. 6-te Serie 2, S. 59-327

[Ber26] S. Bernstein, 1926, *Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes*, Math. Ann. 97, S. 1-59

[Ber34] S. Bernstein, 1934, *Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques*, Trudy Fiz.-Mat., Steklov Inst. Akad. Nauk. 5, S.95-124

[BlaFor53] A. Blanc-Lapierre und R. Fortet, 1953, *Théorie des fonctoins aléatoires. Applications à divers phénomènes de fluctuation*, Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens, ed. von G. Darmois und A. Lichnérowicz, Paris: Masson

[CRAS] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 2000, *Sur l'équation de Kolmogoroff*, Serie 1, Tome 331, N Spécial, Éditions Elsevier

[Dam65] K. E. Dambis, 1965, *On the decomposition of continuous martingales*, Theor. Prob. Appl. 10, S.401-10

[DelMey80] C. Dellacherie und P.A. Meyer, 1980, *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris

[Doe37] W. Doeblin, 1937, *Sur l'équation de Smoluchowsky*, Praktika der Academie von Athen 12, S. 116-119

[Doe38] W. Doeblin, 1938, *Sur l'équation de Kolmogoroff*, C. R. Acad. Sci. Paris 207, S.705-707

[Doe38a] W. Doeblin, 1938, *Exposé de la théorie des chaînes simples constantes de Markoff à un nombre fini d'états*, Rev. Math. Franc 66, S. 210-220

[Doe40] W. Doeblin, 1940, *Sur l'ensemble des puissance d'une loi de probabilité*, Studia Math. 9, S.71-96

[DoeBio] Internetseite Lycée Claude Fauriel, *http://mathematiques.-fauriel.org./bio-doeblin.pdf*, Saint-Étienne

[DolDadMey70] C. Doléans-Dade und P.A. Meyer, 1970, *Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales*, Lect. Notes in Math. 124,S.77-107, Springer, Berlin

[Doo53] J.L. Doob, 1953, *Stochastic Processes*, New York, Wiley

[Doo71] J.L. Doob, 1971, *William Feller and 20th century probability*, Sixth Berkeley Symposium, vol. 1, S. XV-XX, Berkeley, University of California Press

[DubSch65] L. Dubins und G. Schwarz, 1965, *On continuous martingales*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 53, S.913-6

[Elw00] D.K. Elworthy, 2000, *Geometric aspects of stochastic analysis*, Pier, S. 437-484

[EthKur86] S. N. Ethier und T.G. Kurtz, 1986, *Markov Processes*, John Wiley & Sons

[Fel36] W. Feller, 1936, *Zur Theorie der stochastischen Prozesse*, Math. Ann., S. 113-160

[Fel50] W. Feller, 1950, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, New York, Wiley

[Fel52] W. Feller, 1952, *The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations*, Ann. Math. 55, S. 468-519

[Fel54] W. Feller, 1954, *The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. 77, S. 1-31

[For41] R. Fortet, 1941, *Sur des fonctions aléatoires définies par leurs équations aux dérivées partielles*, C.R. Acad. Sci. Paris 212, S. 325-326

[Fri75] A. Friedman, 1975, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Vol. 1, Academic Press, New York

[Hil48] E. Hille, 1948, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Colloq. Publ. 31, New York

[Hos28] B. Hostinský, 1928, *Sur les probabilités relatives aux transformations répétées*, C.R. Acad. Sci. Paris 1986, S. 59-61

[Hun58] G.A. Hunt, 1958, *Markov Processes and potentials*, I, II und III, J. of Math. 1 (1957), S-44-93, S. 316-369, III J. Math. 2 (1958), S. 151-213

[IkeWat81] N. Ikeda und S. Watanabe, 1981, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, Amsterdam: North-Holland

[Ito42] K. Itô, 1942, *Differential equations determining Markov processes*, Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai 244: 1077, S. 1352-1400

[Ito51] K. Itô, 1951, *On a formula concerning stochastic differentials*, Nagoya Math. J. 3, S. 55-65

[ItoMcK65] K. Itô und H.P. McKean, 1965, *Diffusion Processes and their Sample Paths*, New York, Academic Press

[ItoWat65] K. Itô und S. Watanabe, 1965, *Transformation of Markov Processes by multiplicative functionals*, Ann. Inst. Fourier 15, S. 15-30

[Kal02] O. Kallenberg, 2002, *Foundations of Modern Probability*, Springer Verlag

[KarShr91] I. Karatzas und S.S. Shreve, 1991, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, New York

[Kol31] A.N. Kolmogoroff, 1931, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Ann. 104, S.149-160

[Kol33] A.N. Kolmogoroff, 1933, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol.2, Nr.3*, Springer Verlag, Berlin

[Kol35] A.N. Kolmogoroff, 1935, *On some modern trends in probability theory*, Proc. 2te All-Union Math. Congress Leningrad 24-30. 6. 1934, S. 349-358

[Kun69] H. Kunita, 1969, *Absolute continuity of Markov processes and generators*, Nagoya Math. J. 36, S. 1-26

[Lap09] P.S. Laplace, 1809, *Mémoire sur divers points d'analyse*, Repr. in Œvres Complètes de Laplace 14, S. 178-214, Gauthier-Villars, Paris 1886-1912

[Lev37] P. Lévy, 1937, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Fascicule I der Kollektion von Wahrscheinlichkeitstheoretischen Monographen, veröffentlich unter Émile Borel, Paris: Gauthier-Villars, Nr. 52

[Lev39] P. Lévy, 1939, *Sur certains processus stochastiques homogènes*, Compositio Mathematica 7, S. 283-339

[Lev48] P. Lévy, 1948, *Processus stochastiques et Mouvement brownien*, Fascicule VI der Kollektion von Wahrscheinlichkeitstheoretischen Monographen, veröffentlich unter Émile Borel, Paris: Gauthier-Villars

[LinRog86] T. Lindvall und L.C.G. Rogers, 1986, *Coupling of multidimensional diffusions by reflection*, Ann. Probab. 14, S. 860-872

[Mon78] I. Monroe, 1978, *Processes that can be imbedded in Brownian motion*, Ann. Prob 6, 1, S. 42-56

[Oks98] B. Øksendal, 1998, *Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag, Berlin

[PalWieZyg33] R. Paley, N. Wiener und A. Zygmund, 1933, *Note on random functions*, Math. Z. 37, S. 647-668

[RevYor01] D. Revuz und M. Yor, 2001, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer Verlag Berlin

[RogWil90] L.C.G. Rogers und D. Williams, 1990, *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, John Wiley & Sons

[Rot76] J.P. Roth, 1976, *Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctions continues*, Ann. Inst. Fourier 26, S. 1-97

[StrVar69] D. Strook und S. Varadhan, 1969, *Diffusion Processes with Continuous Coefficients*,I , II Commun. Pure Appl. Math. 22, S. 345-400 und S. 479-530

[StrVar00] D. Strook und S. Varadhan, 2000, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer Verlag Berlin

[Var68] S. Varadhan, 1968, *Stochastic Processes*, Aufzeichnungen basierend auf gehaltener Vorlesung an der New York University während des Studienjahres 1967/68, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York 1968 v + 190 pp.

[Yos48] K. Yosida, 1948, *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators*, J. Math. Soc. Japan 1, S. 244-253

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die von mir vorgelegte Diplomarbeit selbständig angefertigt, alle benutzten Quellen vollständig angegeben und die Stellen, die anderen Werken entnommen sind, entsprechend kenntlich gemacht habe. Außerdem versichere ich, dass diese Diplomarbeit noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegt worden ist.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis meiner Tätigkeit als Diplomandin am Lehrstuhl für Wahrscheinlichkeitstheorie des Institutes für Mathematik an der Universität Potsdam.

Mein Dank gilt allen, die mich hierbei betreut, unterstützt und gefördert haben. Insbesondere möchte ich an dieser Stelle folgendenden Personen besonders danken:

- Frau Prof. Dr. Sylvie Rœlly danke ich für das Überlassen des spannenden Themas, für ihre interessanten Vorlesungen, für ihre stets hilfreiche und unterstützende Betreuung und zahlreichen Anregungen und Ideen.

- Herrn Dr. Pierre-Yves Louis danke ich für das Korrekturlesen, für seine hilfreichen und motivierenden Ratschläge während des Entstehens und die freundliche Arbeitsatmosphäre.

- Bei Herrn Norman Wolff möchte ich mich ebenfalls für die schnelle Überprüfung meiner Arbeit auf Tippfehler bedanken sowie für den Ausflug in die Welt der Nebensätze.

- Schließlich gilt mein herzlicher Dank Herrn Matthias an der Heiden für die fruchtbaren fachlichen Diskussionen und Gespräche.

Nicht zuletzt und besonders herzlich gilt dieser Dank meiner Familie, die mich in meinem Universitätsstudium beständig liebevoll unterstützt und somit entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.