Mathematik für Wirtschaftsinformatiker

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Weihnachtszettel **Abgabe 07.01.2016**

(1) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Summe der kleinsten n ungeraden Zahlen natürlichen gleich n^2, das heißt, zeigen Sie die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

(2) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$ genau 2^n Elemente, das heißt, zeigen Sie die Gleichung

$$\#\mathcal{P}(\{1,\dots,n\}) = 2^n.$$

(3) (Fibonacci Zahlen) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f(1) = 1, f(2) = 1$ und

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

für $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

gilt.
Hinweis: Wenden Sie Induktion auf die Aussagen
$A(n) =$ "Die Gleichung $f(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$ gilt für alle $1 \leq k \leq n$"
an. Überprüfen Sie als Induktionsanfang die Aussage $A(2)$.

(4) Sei $M = \{1\}$ und $N = \{1,2\}$. Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(M \times N)$ an.

(5) Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen injektiv sowie surjektiv sind:

(a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto z^2$.

(b) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, q \mapsto -q$.

(c) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, q \mapsto \lceil q \rceil$, wobei für eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ der Ausdruck $\lceil q \rceil$ definiert ist als die kleinste ganze Zahl größer oder gleich q.

(d) $\mathbb{N} \to \mathbb{P}, n \mapsto$ (kleinster Primfaktor von n). Hier bezeichne $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen.

(6) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegung $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ gegeben, wobei $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{P}, k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass n eine Quadratzahl ist, genau dann wenn alle Exponenten k_i gerade sind.

(7) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $N, P \in K$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$P = NP$$

genau dann gilt, wenn $P = 0$ oder $N = 1$ ist.

(8) Existiert eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in die Menge der Primzahlen? (Begründung!)

(9) Zeigen Sie, dass für $X \neq \emptyset$ keine Bijektion $X \to \mathcal{P}(X)$ existiert.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass eine solche Bijektion f existiert und betrachten Sie die Teilmenge von X gegeben durch $\{x \in X : x \notin f(x)\}$.

(10) (a) Beweisen Sie für positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ die Implikation

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \implies x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion. Um die Aussage für $n+1$ zu zeigen, können Sie ohne Einschränkung (Warum?) annehmen $x_n \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$ und anschließend die Induktionsvoraussetzung auf die Zahlen $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}$ anwenden.

(b) Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_1, \ldots, x_n > 0$ gilt

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

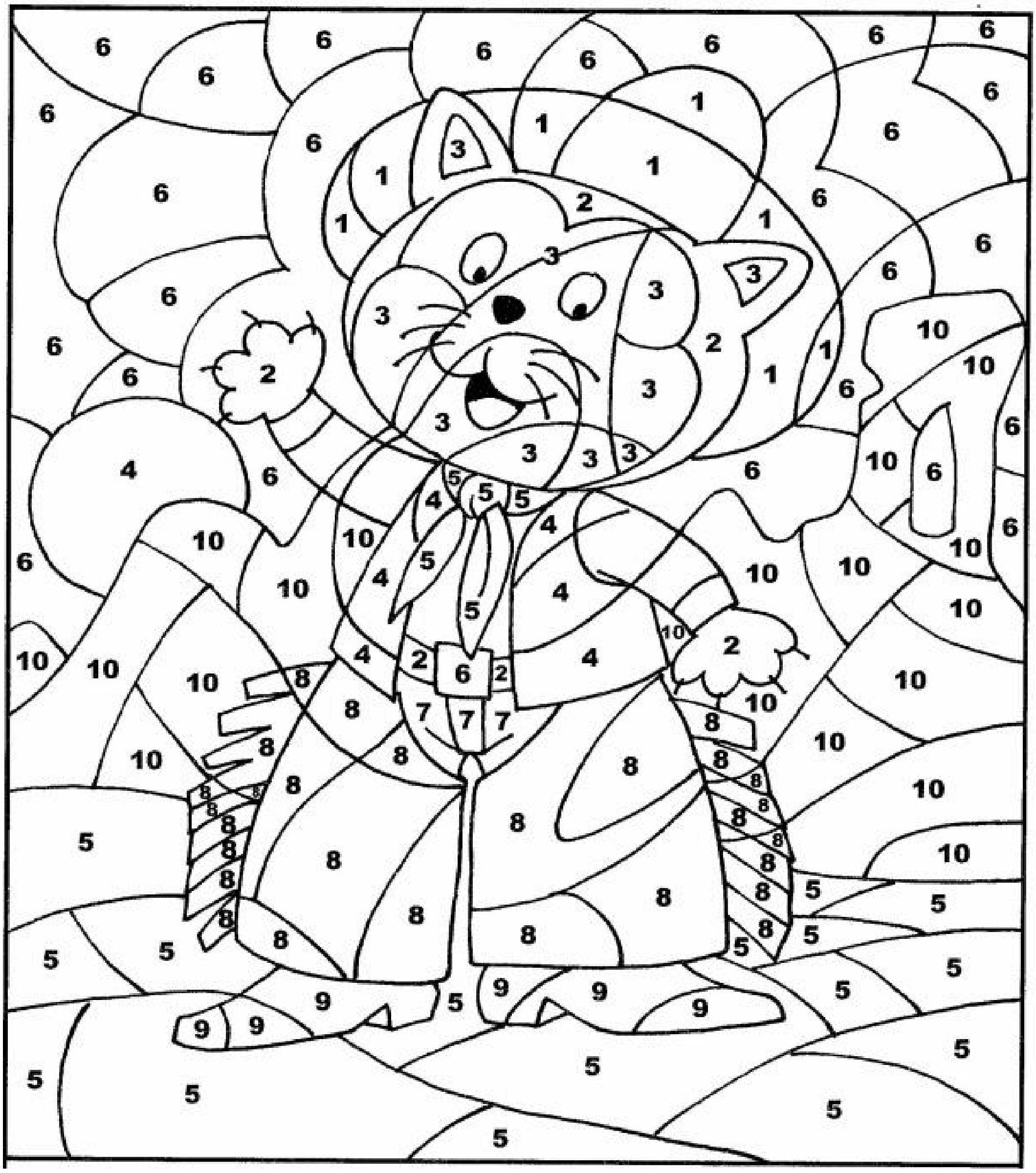
Hinweis: Nutzen Sie (a). Es gilt $\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} = 1$.

(11) Skizzieren Sie die folgende Menge komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene

$$\begin{aligned} &\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 4,\ |z+2i| \geq 2,\ |z+2-2i| \geq 4-2\sqrt{2},\ |z-2-2i| \geq 4-2\sqrt{2}\} \\ \cup &\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 4,\ \operatorname{Im} z \geq -2\operatorname{Re} z - 8,\ \operatorname{Im} z \leq -\tfrac{1}{2}\operatorname{Re} z + 4,\ \operatorname{Re} z \leq 0,\ \operatorname{Im} z \geq 0\} \\ \cup &\{z \in \mathbb{C} \mid |z+8-8i| \leq 1\} \cup \{-2+2i,\ 2+2i\} \end{aligned}$$

(12) Malen nach Zahlen:

(a) Ignorieren Sie die Zahlen auf der Zeichnung und färben Sie die Flächen mit vier Farben, so dass zwei Flächen, die sich in mehr als einem Punkt berühren, nie die selbe Farbe besitzen.



(b*) Beweisen Sie (ohne Zuhilfenahme computeralgebraischer Mittel!), dass eine solche Färbung für ein beliebiges "Malen nach Zahlen" Bild möglich ist.

Hinweis: Jede Aufgabe bringt 4 Punkte. Alle Punkte, die Sie erreichen, zählen als Bonuspunkte. Frohe Weihnachten!