Analysis auf Graphen

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Blatt 1 **Abgabe 20.10.2015**

(1) Sei $X = \{1, \dots, n\}$ und (b_n, c_n) der *vollständige Graph* über X mit Standargewichten, d.h. $b_n(x, y) = 1$ falls $x \neq y$, $b(x, y) = 0$, falls $x = y$ und $c_n \equiv 0$. Wählen Sie drei Ihrer Lieblingszahlen n aus $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Geben Sie für diese n jeweils die Matrix l_{b_n,c_n}, die Wirkung des Laplaceoperators L_{b_n,c_n} an und skizzieren Sie den Graph.

(2) Sei X eine Menge mit der diskreten Topologie ausgestattet welche durch die diskrete Metrik d, d.h., $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$ und $d(x, y) = 0$ für $x = y$, gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Betrachten Sie die Menge $C(X)$ der stetigen reellwertigen Funktion auf X. Geben Sie eine Addition und skalare Multiplikation an mit der $C(X)$ ein reeller Vektorraum ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer Basis von $C(X)$ an.

(3) Sei (b, c) ein Graph über einer endlichen Menge X. Zeigen Sie, dass die Form, die gegeben ist durch $Q_{b,c} : C(X) \to [0, \infty)$, $f \mapsto Q_{b,c}(f) := Q_{b,c}(f, f)$ mit

$$Q_{b,c}(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in X} b(x, y)(f(x) - f(y))^2 + \sum_{x \in X} c(x)f(x)^2,$$

eine quadratische Form ist, d.h. $Q_{b,c}$ erfüllt

$$Q_{b,c}(\alpha f) = \alpha^2 Q_{b,c}(f) \quad \text{and} \quad Q_{b,c}(f + g) + Q_{b,c}(f - g) = 2(Q_{b,c}(f) + Q_{b,c}(g))$$

für alle $f, g \in C(X)$.

(4) Sei (b, c) ein Graph über einer endlichen Menge X. Definiere weiterhin $\deg : X \to [0, \infty)$

$$\deg(x) = \sum_{x \in X} b(x, y) + c(x),$$

und für $W \subseteq X$

$$E_W := \{(x, y) \in W \times W \mid b(x, y) > 0\}.$$

sowie

$$\partial_E W = (W \times X \setminus W) \cup ((X \setminus W \times W)) \cap E_X.$$

Zeigen Sie, dass einen Graph mit Standardgewichten und für alle $W \subseteq X$ gilt

$$\deg(W) := \sum_{x \in W} \deg(x) = \#E_W + \frac{1}{2}\#\partial_E W.$$

und insbesondere

$$\deg(X) = \#E_X.$$

Geben Sie eine Interpretation der Gleichung in Worten an.