Analysis auf Graphen

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Blatt 7 **Abgabe 08.12.2015**

(1) Sei L ein selbstadjungierter Operator auf $\ell^2(X,m)$ für einen endlichen Maßraum (X,m) mit positivitätserhaltender Halbruppe $T_t = e^{-tL}$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Halbgruppe T_t, $t \geq 0$, ist positivitätsverbessernd, d.h. $T_t f(x) > 0$, $x \in X$, falls $f \geq 0$ und $f \neq 0$.

(ii) Die Halbruppe T_t, $t \geq 0$, ist ergodisch, d.h. falls ein Unterraum V von $\ell^2(X,m)$ invariant unter T_t, $t \geq 0$, und Multiplikation mit beliebigen Funktionen auf X ist (d.h. $T_t V \subseteq V$, $t \geq 0$, und $\varphi V \subseteq V$ für alle $\varphi \in \ell^2(X,m)$), dann folgt $V = \{0\}$ oder $V = \ell^2(X,m)$.

(2) Sei b der vollständige Graph mit Standardgewichten über (X,m) mit $X = \{1,\ldots,n\}$ und $m \equiv 1$. Lösen Sie explizit die Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsbedingung $u_0 = 1_{\{n\}}$.

(3) Sei (b,c) ein Graph über einem endlichen (X,m) und betrachte den Hilbertraum $\ell^2_{\mathbb{C}}(X,m)$ der komplexwertigen Funktionen und $L = L_{b,c,m}$ der Laplaceoperator, der auf $\ell^2_{\mathbb{C}}(X,m)$ als $Lf = L\Re f + iL\Im f$, $f \in \ell^2_{\mathbb{C}}(X,m)$ operiert. Zeigen Sie mittels des Spektralsatzes aus der Vorlesung, dass

$$u = e^{-itL}u_0 \quad \text{mit } e^{-itL} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-itL)^k$$

die Schrödingergleichung

$$\partial_t u_t = -iLu_t$$

zur Anfangsbedingung u_0 löst. Zeigen Sie weiterhin, dass

$$P_t := \sum_{x\in X} |u_t(x)|^2 m(x)$$

konstant in t ist.

(4) Sei b ein Graph über einem endlichen (X,m), sei $(\mathbb{X}_t)$ der Prozess zu b und sei $L = L_{b,m}$ der Laplaceoperator auf $\ell^2_{\mathbb{C}}(X,m)$ und

$$N(t) = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid t \leq J_n\}$$

die Zufallsvariable der Anzahl der Sprünge bis zum Zeitpunkt t. Skizzieren Sie den Beweis, dass

$$u_t(x) = \mathbb{E}_x(i^{N(t)} f(\mathbb{X}_t)), \quad t \geq 0, x \in X,$$

die Schrödingergleichung $\partial_t u_t = -iLu_t$ löst. (Sie dürfen selbstverständlich alle Abschätzungen aus der Vorlesung über den Beweis der Feynman-Kac Formel verwenden).