Analysis auf Graphen

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Blatt 5 **Abgabe 24.11.2015**

(1) Sei L ein selbstadjungierter Operator auf $\ell^2(X,m)$ für einen endlichen Maßraum (X,m) mit positivitätserhaltender Halbgruppe e^{-tL} und Form Q. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $Q(f \wedge 1) \leq Q(f)$ falls $f \geq 0$.
(ii) $e^{-tL} f \leq 1$ falls $f \leq 1$.

(1*) Sei L ein selbstadjungierter Operator auf $\ell^2(X,m)$ für einen endlichen Maßraum (X,m) mit Halbgruppe e^{-tL}. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $e^{-tL} f \leq e^{-tL}|f|$ für alle f.
(ii) e^{-tL} positivitätserhaltend. falls $f \leq 1$.

(2) Sei b ein Graph über einem endlichen X und $\#E = \{(x,y) \in X \times X \mid b(x,y) > 0\}$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

(i) b ist zusammenhängend und enthält keinen Kreis.
(ii) Jeweils zwei Vertices sind durch einen eindeutigen Pfad verbunden.
(iii) Es gilt $2\#X = \#E + 2$ und b ist zusammenhängend.
(iv) Jeder Fluss ist induziert durch ein Potential, d.h. für jedes antisymmetrische $\varphi : E \to \mathbb{R}$ existiert ein $f \in C(X)$ mit $\varphi(x,y) = b(x,y)(f(y) - f(x))$.

Ein solcher Graph heißt *Baum*.

(3) Sei (b,c) ein Graph über einem endlichen X und $Q = Q_{b,c}$ die dazugehörige Form und

$$W_{\text{eff}}(x,y) := \sup\{\frac{1}{Q(h)} \mid h \in C(X), h(x) = 0, h(y) = 1\}$$

der *effektive Widerstand*. Zeigen Sie, dass gilt

$$W_{\text{eff}}(x,y) = \max\{|f(x) - f(y)|^2 \mid Q(f) \leq 1\}$$

sowie dass

$$\varrho(x,y) := W_{\text{eff}}^{1/2}(x,y) \text{ for } x \neq y \text{ and } \varrho(x,y) = 0 \quad \text{for } x = y$$

eine Metrik definiert.

(4) Sei b ein Baum über einem endlichen X (sh. Aufgabe (2)). Zeigen Sie, dass für die Metrik ϱ aus Aufgabe (3) gilt

$$\varrho(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{b(x_i, x_{i+1})}$$

wobei $(x_0, \dots, x_n)$ der eindeutige Pfad von x nach y ist.