Analysis auf Graphen

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Blatt 3 **Abgabe 03.11.2015**

(1) Sei (b, c) ein Graph über einer endlichen Menge X. Sei

$$H = \{f \in C(X) \mid L_{b,c}f = 0\}$$

der Unterraumes der harmonischen Funktionen. Zeigen Sie, dass $\dim H$ gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von (b, c) ist, auf denen c verschwindet.

(2) Bestimmen und beweisen Sie für welche $n \in \mathbb{N}$ der vollständige Graph über $X = \{1, \ldots, n\}$ mit Standardgewichten (sh. Aufgabe 1, Blatt 1) planar ist, d.h. eine stetige Einbettung in $\mathbb{R}^2$ ohne Selbstüberschneidung erlaubt. (Für die planaren Fälle genügt eine Skizze als Beweis.)

(3) Sei X endlich und L ein Operator auf X. Zeigen Sie, folgende Äquivalenz

(i) L bijektiv.

(ii) L injektiv.

(iii) L surjektiv.

(4) Sei L ein injektiver Operator auf $C(X)$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

(i) L^{-1} ist positivitivätsverbessernd, d.h., $L^{-1}f > 0$ falls $f \geq 0$ mit $f \neq 0$.

(ii) Für jede Funktion u mit $\max_{x \in X} u(x) \geq 0$ und $Lu \geq 0$ gilt $u \equiv 0$.

Zusatzaufgabe

(Z1) Bestimmen und beweisen Sie für welche $n, k \in \mathbb{N}$ der k-dimensionale zyklische Graph mit Standardgewichten (sh. Aufgabe 1, Blatt 2) planar ist, d.h. eine stetige Einbettung in $\mathbb{R}^2$ ohne Selbstüberschneidung erlaubt.