Übungen Topologische (Vektor-)Räume

Blatt 9

38. Es sei X ein komplexer Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein Untervektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\tau\colon X \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(x) = \tau(x) - i\tau(ix)$ für alle $x \in X$.

Nun sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter komplexer Vektorraum, $Y \subseteq X$ ein Untervektorraum und X^* und Y^* die Menge aller stetigen linearen Funktionale auf X bzw. Y.

(b) Es sei $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ genau dann, wenn $|\operatorname{Re}\varphi(x)| \leq \|x\|$.

(c) Es sei $\varphi \in Y^*$. Zeigen Sie, dass es ein $\Phi \in X^*$ gibt mit $\Phi|_Y = \varphi$ und $\|\Phi\| = \|\varphi\|$.

Bemerkung: $\mathbb{K}$-linear bedeutet additiv und $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

39. Es sei E ein reeller Banachraum und E_+ ein abgeschlossener Kegel in E, d.h. $\emptyset \neq E_+ \subseteq E$ abgeschlossen mit $\lambda E_+ \subseteq E_+$ für alle $\lambda \geq 0$ und $E_+ + E_+ \subseteq E_+$. Ein Funktional $\varphi \in E^*$ heißt *positiv (bzgl. E_+)*, falls $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in E_+$.

(a) Zeige, dass die Abbildung $p_E\colon E \to [0,\infty)$, $p_E(x) := \operatorname{dist}(x, -E_+)$ konvex ist.
Bemerkung: Es ist $\operatorname{dist}(x, Y) := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$.

(b) Zeige, dass ein Funktional $\varphi \in E^*$ genau dann positiv ist, wenn es ein $c > 0$ gibt mit $\varphi(x) \leq c p_E(x)$ für alle $x \in E$.

(c) Es sei $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Unterraum und $F_+ := F \cap E_+$. Für alle $x \in F$ gelte zudem $p_F(x) := \operatorname{dist}(x, -F_+) = p_E(x)$. Zeige, dass jedes bzgl. F_+ positive Funktional $\varphi \in F^*$ zu einem bzgl. E_+ positiven Funktional $\Phi \in E^*$ mit $\|\Phi\| = \|\varphi\|$ fortgesetzt werden kann.

40. Es sei X ein Hausdorff topologischer Vektorraum und $C \subseteq X$ konvex.

(a) Geben Sei ein Beispiel für X und C, so dass C interne aber keine inneren Punkte enthält.

(b) Zeigen Sie: Ist $\dim X < \infty$, so ist jeder interne Punkt von C auch ein innerer Punkt von C.

41. Es sei X ein reeller topologischer Vektorraum, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, die nicht identisch verschwindet, $c \in \mathbb{R}$ und $H := \{x \in X : \varphi(x) = c\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Hyperebene H ist genau dann abgeschlossen, wenn φ stetig ist.

(b) Die Hyperebene H ist genau dann dicht in X, wenn φ unstetig ist.