Übungen Topologische (Vektor-)Räume

Blatt 8

34. Es sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Zeigen Sie, dass durch

$$\big\|[x]\big\| := \inf\{\|z\| : z \in [x]\}$$

eine Norm auf X/Y definiert wird, welche die Quotiententopologie erzeugt.

35. Geben Sie – falls möglich – jeweils eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ an, welche die euklidische Topologie erzeugt, so dass d vollständig/nicht vollständig und gleichzeitig translationsinvariant/nicht translationsinvariant ist. Geben Sie andernfalls eine Begründing an, weshalb eine solche Metrik nicht exisiert.

36. Es sei X ein topologischer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für beschränkte Teilmengen $A, B \subseteq X$ auch die Mengen $A + B$ und $A \cup B$ beschränkt sind. Zeigen Sie außerdem, dass die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ einer jeden Cauchyfolge $(x_n) \subseteq X$ beschränkt ist. Gilt entsprechendes auch für die Glieder eines Cauchy-Netzes?

37. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $C(\mathbb{R})$ aller reellwertigen stetigen Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$|f| := \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1 + |f(t)|}$$

eine Pseudonorm auf $C(\mathbb{R})$ definiert. Entscheiden Sie, ob die Metrik $d(f, g) := |f - g|$ den Raum $C(\mathbb{R})$ zu einem topologischen Vektorraum macht.