Dr. M. Gerlach
Sommersemester 2017

Übungen Topologische (Vektor-)Räume

Blatt 5

18. Geben Sie ein Beispiel eines Teilnetzes $(y_i)_{i\in I}$ mit der Indexmenge $I := (\mathbb{N}, \leq)$ einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum X, das keine Teilfolge ist.

19. Geben Sie ein Beispiel eines konvergenten Netzes $(x_i)_{i\in I}$ in einem Hausdorffraum X und einer bzgl. der Ordnung von I gerichteten Teilmenge $J \subseteq I$, so dass das Netz $(x_j)_{j\in J}$ ebenfalls konvergiert aber $\lim_J x_j \neq \lim_I x_i$.

20. Es sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum X und $x \in X$. Zeigen Sie, dass (x_i) genau dann gegen x konvergiert, wenn jedes Teilnetz von (x_i) ein gegen x konvergentes Teilnetz besitzt.

21. Es sei $(x_i)_{i\in I} \subseteq K$ ein Netz und $x \in K$ für einen kompakten Raum K. Zeigen Sie, dass (x_i) genau dann gegen x konvergiert, wenn x der einzige Häufungspunkt von (x_i) ist.

22. Es seien $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ Hausdorff-Topologien auf X und $(X, \mathscr{T}_1)$ kompakt. Zeigen Sie, dass $\mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{T}_1$ bereits $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$ impliziert.

23. Es sei $X = \{u \in \mathscr{F}([0,1]) : u(x) \in [0,1]\}$ versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz und

$$M := \{u \in X : u(x) \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } x \in [0,1]\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge M ist folgenkompakt.

(b) Die Menge M ist nicht kompakt.

(c) Der Raum X ist nicht folgenkompakt. **Hinweis:** Betrachten Sie $u_n(x) := 10^n x - \lfloor 10^n x \rfloor$, wobei $\lfloor y \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq y\}$ das *größte Ganze* der Zahl y bezeichne.

Bemerkung: Wir werden in der Vorlesung sehen, dass der Raum X kompakt ist.