Übungen Topologische (Vektor-)Räume

Blatt 4

14. Es seien $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen X und Y. Zeigen Sie, dass X genau dann metrisierbar ist, wenn Y metrisierbar ist.

15. Es sei $d \in \mathbb{N}$ und X ein Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass X genau dann normal ist, wenn sich für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ jede bzgl. der Relativtopologie auf A stetige Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}^d$ stetig auf X fortsetzen lässt.

16. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raums X heißt G_δ*-Menge*, wenn sich Y als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen schreiben lässt.

Nun sei X normal und $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass es genau dann eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f^{-1}(\{0\}) = A$ gibt, wenn A eine G_δ-Menge ist.

Vollständigkeit halber: Eine Menge heißt F_σ-Menge, wenn sie sich als Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen darstellen lässt.

17. Es sei $(X, \mathscr{T})$ ein Hausdorffraum. Dann heißt X *vollständig regulär*, falls es für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq X$ und $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ gibt, so dass $f(x) = 1$ und $f(A) = \{0\}$.

Für eine Familie $\mathscr{F}$ von Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ bezeichne $\sigma(X, \mathscr{F})$ die von $\mathscr{F}$ auf X induzierte Topologie. Wir schreiben $C(X)$ für die Menge aller $\mathscr{T}$-stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Zeigen Sie:

(a) Falls X vollständig regulär ist, so gilt $\mathscr{T} = \sigma(X, C(X))$.

(b) Falls $\mathscr{T} = \sigma(X, C(X))$, so ist X vollständig regulär.

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung einer Basis der Initialtopologie um eine trennende Funktion zu konstruieren.

(c) Der Raum X ist genau dann vollständig regulär, wenn es eine Familie $\mathscr{F}$ reellwertiger Funktionen auf X gibt mit $\mathscr{T} = \sigma(X, \mathscr{F})$.