Übungen Topologische (Vektor-)Räume

Blatt 3

10. Bestimmen Sie alle stetigen und folgenstetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$, wenn $X := [0,1]$

(a) mit der $X \setminus F$–Topologie aus Aufgabe 8

(b) mit der $O \setminus C$–Topologie aus Beispiel 2.2.8

versehen ist.

11. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $d_b(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $d_b\colon X \times X \to [0,\infty)$ ist eine Metrik auf X.

(b) Für alle $x, y \in X$ gilt $\frac{1}{2}\min\{1, d(x,y)\} \le d_b(x,y) \le d(x,y)$.

(c) Die Metriken d und d_b sind äquivalent, d.h. sie erzeugen die gleiche Topologie.

12. Es sei J eine Indexmenge, X_α topologische Räume für $\alpha \in J$ und $X := \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ der Produktraum. Zeigen Sie:

(a) X ist genau dann ein Hausdorffraum, wenn alle X_α Hausdorffräume sind.

(b) Es seien X_α Hausdorffräume, die aus mehr als einem Punkt bestehen. Wenn J überabzählbar ist, so ist X nicht metrisierbar.

13. Es bezeichne $\mathbb{R}_s$ die reelle Achse versehen mit der Sorgenfrey-Topologie und $X := \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ den Produktraum mit der entsprechenden Produkttopologie. Aus der vorherigen Aufgabe folgt bereits, dass X ein Hausdorffraum ist. Zeigen Sie:

(a) X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

(b) X ist separabel.

(c) Die Spurtopologie auf $Y := \{(x,y) \in X : x = -y\}$ ist die diskrete Topologie. Insbesondere ist Y nicht separabel.