Christian Bär (Potsdam)
Bernhard Hanke (Augsburg)

Blockseminar im Sommersemester 2017
Indextheorie

1. Ablauf

Das Blockseminar findet in der Abtei Frauenwörth auf der Fraueninsel im Chiemsee statt. Anreise ist am Sonntag, dem 11.6.2017, bis 18 Uhr. Nach dem gemeinsamen Abendessen beginnen wir mit dem einführenden Vortrag. Die Abreise ist am Freitag, dem 16.6.2017, nach dem Mittagessen.
Jeder Vortrag dauert 60 Minuten plus Diskussion. Mitunter reicht diese Zeit nicht aus, alle Details vorzurechnen. Daher unbedingt bei der Vortragsplanung überlegen, welche Teile gegebenenfalls nur gekürzt dargestellt werden.
Aus Ermangelung einer Tafel werden die Vorträge mit zwei Overheadprojektoren gehalten. Wichtig ist hierbei, dass die Folien nicht vorbereitet mitgebracht werden, sondern - wie an einer Tafel - während des Vortrags live beschrieben werden.

2. Inhalt

Indextheorie gibt es schon lange, auch wenn den Mathematikern das lange nicht bewusst war. So können das Gauß-Bonnet-Theorem oder der Satz von Riemann-Roch als Indexsätze verstanden werden. Den Durchbruch brachte die Arbeit von Atiyah und Singer [1], in der der mittlerweile klassische Indexsatz formuliert wurde, der die genannten Resultate als Spezialfälle enthält. Indextheorie hat sich mittlerweile zu einem eigenen mathematischen Teilgebiet entwickelt mit vielen Querverbindungen und Anwendungen in Analysis, Geometrie, Topologie und der mathematischen Physik.
Wir werden neben dem klassischen Atiyah-Singer-Indexsatz die Variante für kompakte riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Rand, die für Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit raumartigem Rand sowie Indextheorie für nichtkompakte Mannigfaltigkeiten kennenlernen.
Von allen Teilnehmern wird vorausgesetzt, dass sie Grundkenntnisse über elliptische lineare Differentialoperatoren und Spinoren auf Mannigfaltigkeiten haben. Das beinhaltet insbesondere

- die Definition von linearen Differentialoperatoren und ihres Hauptsymbols [8, Ch. III, § 1], Elliptizität, lokale elliptische Regularitätstheorie und Diskretheit des Spektrums auf kompakten Mannigfaltigkeiten [8, Ch. III, § 4];
- Spin-Strukturen, Spinorbündel, Clifford-Multiplikation, der klassische Dirac-Operator und seine getwisteten Vettern [8, Ch. II, §§ 1–5].

3. Vortragsthemen

0. (Christian Bär, Bernhard Hanke) Einführung.

Vorbereitungen und der Atiyah-Singer-Indexsatz auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten

1. (Franziska Beitz) Charakteristische Klassen

Charakteristische Klassen werden mittels der Chern-Weil-Konstruktion eingeführt, also als deRham-Kohomologieklassen. Dabei ist die Sprache der Superzusammenhänge bequem. Die Transgressionsformel besonders betonen, da wir die Transgressionsform in Vortrag 6 nochmal brauchen. Wichtige Beispiele sind die $\hat{A}$-Klasse und der Chern-Charakter [6, 1.4–1.5].

2. (Alexei Kudryashov, Meru Alagalingam) Wärmekernasymptotik

Den Wärmekern wie in [8, Ch. III, § 6] diskutieren und die Verbindung zum Index herstellen. Die Kurzzeitasymptotik etwas genauer angeben, z.B. wie in [6, Thm. 2.30]. Es reicht aber, die Diagonale, d.h. den Fall $x = y$, zu betrachten, für den sich die asymptotische Formel vereinfacht.

3. (Eric Schlarmann) Atiyah-Singer-Indexsatz

Die Vereinfachung des Integranden für den Index aus der Wärmekernasymptotik zur entsprechenden charakteristischen Klasse mittels Getzlerreskalierung herleiten [6, pp. 139–143 sowie 4.2 und 4.3].

Der Atiyah-Patodi-Singer-Indexsatz auf kompakten Mannigfaltigkeiten mit Rand

4. (Max Lewandowski) Zylinderanalysis

Zur Vorbereitung des Indexsatzes für Mannigfaltigkeiten mit Rand eine Parametrix auf dem Zylinder konstruieren [2, Abschn. 2].

5. (Christian Lange) Der Fall von Rand mit metrischer Produktstruktur und APS-Randbedingung

Die Atiyah-Patodi-Singer-Randbedingungen erklären und den Indexsatz beweisen [2, Abschn. 3].

6. (Gregor Weingart) Der allgemeine Fall

Zunächst wie in [7, 8.3] zeigen, wie man die Produktbedingung am Rand los wird und sich dafür einen zusätzlichen Randterm einfängt (Transgressionsterm). Dann die Randbedingungen verallgemeinern: D-elliptische Randbedingungen wie in [4, Def. 4.7] einführen. Dann Theorem 4.9 und Theorem 4.10 (ohne Beweis) sowie die Ergebnisse aus Abschnitt 6.1 in [4] (mit Beweisen soweit zeitlich möglich) erläutern. Alle Details finden sich in [3].

7. (Michael Wiemeler) Beispiele und der relative Indexsatz von Gromov und Lawson

Zunächst die Beispiele für D-elliptische Randbedingungen aus [3, 7.6] und [4, 4.7] erklären. Dann mit Hilfe der Transmissionsbedingung den relativen Indexsatz von Gromov und Lawson beweisen [3, 8.4].

8. (Claudia Grabs) Spektralfluss

Den Spektralfluss wie in [9] einführen. Dann zeigen, wie der Index des Dirac-Operators auf einer Mannigfaltigkeit der topologischen Form $X \times [a,b]$ (mit APS-Randbedingungen) mit dem Spektralfluss der Familie der Dirac-Operatoren auf den „Slices“ $X \times \{t\}$ zusammenhängt [10, Thm. A].

Der Indexsatz für Lorentz-Mannigfaltigkeiten

9. (Viktoria Rothe) Global hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeiten und das Cauchy-Problem für Dirac-Operatoren

Als Vorbereitung werden grundlegende Defintionen und Eigenschaften für global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeiten und Spinoren auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten zusammengefasst. Das Material von Seite 3–8 Mitte von [5] ist abzudecken. Abschnitt 1.3 dabei erst mal noch weglassen. Ggfs. weiterführende Referenzen in [5] benutzen.

10. (Sebastian Hannes, Florian Hanisch) Fredholm-Eigenschaft des Lorentz'schen Dirac-Operators und APS-Bedingungen

Abschnitt 1.3 sowie Abschnitt 2.1 bis Ende des zweiten Kapitels in [5] besprechen. Den Beweis von Lemma 2.6 ggfs. weglassen.

11. (Oliver Lindblad Petersen) Der Lorentz'sche Indexsatz

Abschnitt 4 und, falls Zeit bleibt, Abschnitt 5 in [5] besprechen.

Roes Indexsatz für nichtkompakte Mannigfaltigkeiten

12. (Moritz Meisel) Grundlagen zu nichtkompakten Mannigfaltigkeiten

Der Diracoperator auf vollständigen Mannigfaltigkeiten [11, Abschnitt 1], Spingeometrie und Chern-Weil-Kalkül auf Mannigfaltigkeiten beschränkter Geometrie [11, Abschnitte 2–3].

13. (Manuel Amann) Verallgemeinerte Indizes

Indizes abstrakter elliptischer Operatoren einführen [11, Abschnitt 4]. Die Definition der K_0- und K_1-Gruppen sollte kurz wiederholt werden. Ein instruktives Beispiel erhält man mit A gleich der Algebra der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum und B gleich dem Ideal der kompakten Operatoren darin: Mit Hilfe der kanonischen Spur auf $K_0(B) \cong \mathbb{Z}$ erhält man den klassischen, ganzzahligen Index von Fredholm-Operatoren. Denn diese definieren in kanonischer Weise Elemente in $K_1(A/B)$, die mittels des verbindenden Homomorphismus nach $K_0(B)$ abgebildet werden können. In unserem Kontext werden die kompakten Operatoren durch die uniformen Glättungsoperatoren ersetzt, siehe [11, Abschnitt 5].

14. (Matthias Ludewig) Reguläre Ausschöpfungen

Man erhält numerische (nicht-ganzzahlige) Indizes mittels Spuren auf der Algebra der uniformen Glättungsoperatoren, die dann auf abstrakten Indexklassen in K_0 ausgewertet werden können. Dies kann mittels regulärer Ausschöpfungen erreicht werden, wie sie auf amenablen Mannigfaltigkeiten existieren. Inhalt dieses Vortrages ist Abschnitt 6 in [11], eventuell mit zusätzlichen Erläuterungen zum Begriff der Amenabilität.

15. (Markus Upmeier) Der Indexsatz von Roe I

Definition der abstrakten Indexklasse eines verallgemeinerten Dirac-Operators über einer Mannigfaltigkeit mit beschränkter Geometrie mittels "good embeddings", [11, Abschnitt 7]. Formulierung und Beweis des Indexsatzes, [11, Abschnitt 8].

16. (Christopher Wulff) Der Indexsatz von Roe II

Der Indexsatz kann nur dann geometrisch angewendet werden, wenn der numerische Index des Diracoperators mit dessen Kern in Verbindung gebracht werden kann. Dies setzt uniforme Konvergenz von Wärmekernen voraus. Abschnitt 1 in [12] soll skizziert und eine oder mehrerer Anwendungen aus Abschnitt 2 (L^2-Gauß-Bonnet-Formel, Existenz nicht-negativer Skalarkrümmung, Hirzebruch-Riemann-Roch) vorgestellt werden. Interessant ist auch der Zusammenhang zu Atiyahs L^2-Index-Satz [12, Abschnitt 5]

Literatur

[1] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 422–433, DOI 10.1090/S0002-9904-1963-10957-X.

[2] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975), 43–69, DOI 10.1017/S0305004100049410.

[3] Christian Bär and Werner Ballmann, *Boundary value problems for elliptic differential operators of first order*, in: H.-D. Cao and S.-T. Yau (eds.), Surveys in differential geometry. Vol. XVII, Int. Press, Boston, MA, 2012, pp. 1–78.

[4] ———, *Guide to boundary value problems for Dirac-type operators*, in: W. Ballmann et al (eds.), Arbeitstagung Bonn 2013, Prog. Math. 319, Birkhäuser, Cham, 2016, pp. 43–80.

[5] Christian Bär and Alexander Strohmaier, *An index theorem for Lorentzian manifolds with compact spacelike Cauchy boundary*, arXiv:1506.00959 (2015).

[6] Nicole Berline, Ezra Getzler, and Michèle Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren Text Editions, Springer-Verlag, Berlin, 2004. Corrected reprint of the 1992 original.

[7] Tohru Eguchi, Peter B. Gilkey, and Andrew J. Hanson, *Gravitation, gauge theories and differential geometry*, Phys. Rep. **66** (1980), no. 6, 213–393, DOI 10.1016/0370-1573(80)90130-1.

[8] H. Blaine Lawson and Marie-Louise Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, vol. 38, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[9] John Phillips, *Self-adjoint Fredholm operators and spectral flow*, Canad. Math. Bull. **39** (1996), no. 4, 460–467, DOI 10.4153/CMB-1996-054-4.

[10] Joel Robbin and Dietmar Salamon, *The spectral flow and the Maslov index.*, Bull. Lond. Math. Soc. **27** (1995), no. 1, 1–33, DOI 10.1112/blms/27.1.1.

[11] John Roe, *An index theorem on open manifolds, I*, J. Differential Geometry **27** (1988), 87–113.

[12] ———, *An index theorem on open manifolds, II*, J. Differential Geometry **27** (1988), 115–136.