Universität Augsburg University

SPP 2026 GEOMETRY AT INFINITY

Universität Potsdam

Blockseminar 2020
Dirac-Operatoren und Skalarkrümmung

Christian Bär und Bernhard Hanke

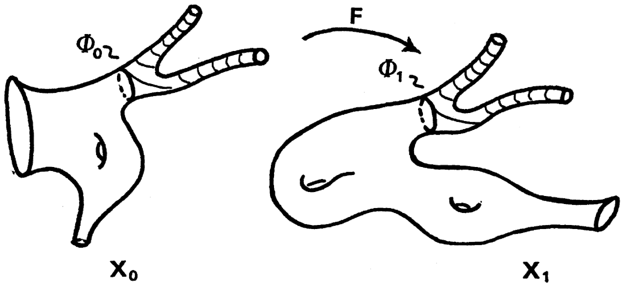

Illustration zum Φ-relativen Indexsatz aus [2]

Wann:

Anreise ist am Sonntag, dem 18. Oktober, zum Abendessen um 18:00 Uhr. Im Anschluss findet der Einführungsvortrag statt. Die Abreise ist am Freitag, dem 23. Oktober, nach dem Mittagessen.

Wo:

Das Blockseminar wird im Hotel Bollmannsruh im Havelland veranstaltet. Für Details siehe `http://www.hotel-bollmannsruh.de`.

Was:

Analytische Eigenschaften von Dirac-Operatoren auf riemannschen Spin-Mannigfaltigkeiten stehen in enger Beziehung zur Skalarkrümmung der unterliegenden Mannigfaltigkeit. Wir studieren diesen Zusammenhang anhand der wegweisenden Arbeit [2].

Ein wichtiges Hilfsmittel ist eine Verallgemeinerung des Atiyah-Singer-Indexsatzes auf nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten. Dieser relative Indexsatz führt auf Hindernisse gegen die Existenz von riemannschen Metriken positiver Skalarkrümmung auf vielen nicht-kompakten Mannigfaltigkeiten und kompakten Mannigfaltigkeiten mit unendlicher Fundamentalgruppe, zum Beispiel auf Tori beliebiger Dimension.

Weitere Anwendungen betreffen die Klassifikation kompakter 3-Mannigfaltigkeiten, die Metriken positiver Skalarkrümmung zulassen, sowie die Topologie minimaler Hyperflächen.

Wie:

Die Vorträge sollten eine Dauer von 60 Minuten (plus Zeit für Diskussion) nicht überschreiten. Diese Zeitvorgabe bitte einhalten und bei der Planung der Vorträge berücksichtigen. Für den Notfall sollte man schon bei der Planung Passagen vorsehen, die wegfallen können, ohne dass der restliche Vortrag darunter allzu sehr leidet.

Für einige Themen sind wegen der Stofffülle zwei oder drei Vorträge vorgesehen. Hier sollten sich die Sprecher sehr gut abstimmen.

Aus Ermangelung einer Tafel werden die Vorträge mit zwei Dokumentenkameras und angeschlossenen Beamern gehalten. Wichtig ist dabei, dass die Blätter nicht vorbereitet mitgebracht werden, sondern - wie an einer Tafel - während des Vortrags live beschrieben werden.

Wer:

Um sinnvoll teilnehmen zu können, muss man über Kenntnisse der riemannschen Geometrie und der Spin-Geometrie verfügen. Was Skalarkrümmung und Spin-Strukturen sind, sollte man also wissen.

Vortragsprogramm:

(0.) Einführung *(Bernhard Hanke)*: Darstellung des Themas und kompetenter Überblick

(1.) Verallgemeinerte Dirac-Operatoren *(Matthias Ludewig)*:

Definitionen und grundlegende Eigenschaften, wesentliche Selbstadjungiertheit auf vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeiten, Indexberechnung auf kompakten Mannigfaltigkeiten mittels Atiyah-Singer-Indexsatz [2, Kap. 1]

(2.) Verschwindungssätze und Schranken für Kern und Kokern *(Christopher Wulff)*:

Bochner-Weitzenböck-Formel und Verschwindungssätze, Berechnung des Krümmungsterms für verallgemeinerte Spinorbündel, Endlichkeit der Dimensionen von Kern und Kokern sowie Beschränktheit des Green-Operatores für uniform positive Skalarkrümmung im Unendlichen, Anwendung auf Räume von Metriken positiver Skalarkrümmung [2, Kap. 2 und 3]

(3.) Der relative Indexsatz I *(Alberto Richtsfeld)*:

Definition und Wohldefiniertheit des topologischen relativen Index, Interpretation mittels Symbolabbildung und Chern-Weil-Theorie [2, Kap. 4 bis S. 333, K-theoretische Interpretation nur kurz ansprechen oder weglassen]

(4.) Der relative Indexsatz II *(Jonas Rungenhagen)*:

Definition des analytischen relativen Index, Formulierung und Beweis des relativen Indexsatzes [2, Kap. 4, S. 334 – 338]

(5.) Der relative Indexsatz III *(Lashi Bandara)*:

Φ-relativer Index, Folgerung für Indexdifferenz und den Raum positiver Skalarkrümmungsmetriken, Beispiele [2, Kap. 4 ab S. 339]

(6.) Hypersphärische und vergrößerbare Mannigfaltigkeiten I *(Panagiotis Konstantis)*:

Definitionen, erste Eigenschaften, Beispiele: Mannigfaltigkeiten nicht-positiver Schnittkrümmung, Solvmannigfaltigkeiten, 3-Mannigfaltigkeiten mit $K(\pi, 1)$-Summanden [2, Kap. 5 bis Cor. 5.9. auf S. 347], [3, Kap. 4 und 6; für uns ist „$\pi_1 X$ residuell endlich“ verzichtbar]

(7.) Hypersphärische und vergrößerbare Mannigfaltigkeiten II *(Alexander Engel)*:

Beweis von Theorem 5.8 (Vergrößerbarkeit verhindert positive Skalarkrümmung), Verallgemeinerung von Vergrößerbarkeit mittels $\hat{A}$-Grad [2, Kap. 5 ab S. 347 unten]

(8.) Hindernisse gegen vollständige Metriken positiver Skalarkrümmung *(Saskia Roos)*:

Definition von Λ^2-vergrößerbaren Mannigfaltigkeiten, Hindernisse gegen vollständige Metriken (nicht notwendig gleichmäßig) positiver Skalarkrümmung [2, Kap. 6]

(9.) Hindernisse gegen vollständige Metriken gleichmäßig positiver Skalarkrümmung I *(Artem Nepechiy)*:

Definition von Λ^2-vergrößerbaren Metriken, Hindernisse gegen vollständige Metriken gleichmäßig positiver Skalarkrümmung durch Kodimension-2-Untermannigfaltigkeiten, [2, Kap. 7 bis S. 362 Mitte]

(10.) Hindernisse gegen vollständige Metriken gleichmäßig positiver Skalarkrümmung II *(Moritz Meisel)*:

Beweis von Theorem 7.5 Teil (B), [2, Kap. 7, S. 362 Mitte – 368]

(11.) Hindernisse gegen vollständige Metriken gleichmäßig positiver Skalarkrümmung III *(Jian Wang)*:

Beweis von Theorem 7.5 Teil (C), Anwendung des Ballon-Tricks auf Mannigfaltigkeiten mit schlimmen Enden und auf kompakte $K(\pi, 1)$-Mannigfaltigkeiten [2, Kap. 7 ab S. 369]

(12.) 3-Mannigfaltigkeiten I *(Penelope Gehring)*:

Klassifikation kompakter 3-Mannigfaltigkeiten mit positiver Skalarkrümmung (die Annahme an die X_j nach Theorem 8.1 gelten nach Thurston-Perelman), Hindernisse gegen vollständige Metriken gleichmäßig positiver Skalarkrümmung auf 3-Mannigfaltigkeiten mit straffen, bzw. inkompressiblen Hyperflächen und auf offenen 3-Mannigfaltigkeiten mit kleinen Kreisen [2, Kap. 8, bis Beweis von Theorem 8.7], der Satz “This will follow immediately ...“am Ende dieses Beweises muss durch eine

Referenz auf Theorem 8.8 ersetzt werden; die Regularitätstheorie minimaler Hyperflächen im Beweis von Theorem 8.7 kann aus der Literatur zitiert werden.

(13.) 3-Mannigfaltigkeiten II und 4-Mannigfaltigkeiten *(Rubens Longhi)*:

Vollständige stabil-minimale Flächen mit endlichem Inhalt in 3-Mannigfaltigkeiten positiver Skalarkrümmung sind homöomorph zu S^2 (dies vervollständigt auch den Beweis von Theorem 8.7). Anwendungen der Resultate aus Abschnitt 7 auf 4-Mannigfaltigkeiten [2, Kap. 8 ab Theorem 8.8, Kap. 9]

(14.) Topologie minimaler Hyperflächen *(Thorsten Hertl)*:

Durch Kombination der zweiten Variationsformel mit Hindernissen gegen Metriken positiver Skalarkrümmung ergeben sich weitreichende Folgerungen für die Topologie minimaler Hyperflächen [2, Kap. 11], Details zum „Verdopplungstrick" nur andeuten, vgl. [3, Theorem 5.7] und [1, Theorem 1.1]

(15.) Homologieklassen in Mannigfaltigkeiten nicht-negativer Schnittkrümmung *(Markus Upmeier)*:

Wir wissen bereits, dass kompakte $K(\pi, 1)$-Mannigfaltigkeiten nicht-negativer Schnittkrümmung keine positive Skalarkrümmungsmetriken zulassen. Hier verallgemeinern wir diese Folgerung auf glatte Repräsentaten nicht-verschwindender Homologieklassen in solchen Mannigfaltigkeiten [2, Kap. 13]

(16.) Llarull's Theorem *(Rudolf Zeidler)*:

Wir kehren zur Idee der Hypersphärizität zurück. Llarull's Theorem macht folgende optimale Aussage: Ist M^n eine kompakte Spin-Mannigfaltigkeit und $f : M \to S^n$ eine 1-Lipschitz-Abbildung von Grad ungleich 0, so ist die Skalarkrümmung von M irgendwo kleiner als die Skalarkrümmung von S^n oder f ist eine Isometrie. Die Ergebnisse aus [4] sollen geeignet zusammengefasst werden.

Literatur:

[1] S. Almeida, *Minimal hypersurfaces of a positive scalar curvature manifold*, Math. Z. **190** (1985), 73–82.

[2] M. Gromov and H.B. Lawson, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **58** (1983), 83–196 (1984).

[3] M. Gromov and H. B. Lawson, *Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group. I*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 2, 209–230.

[4] M. Llarull, *Sharp estimates and the Dirac operator*, Math. Ann. **310** (1998), no. 1, 55–71.