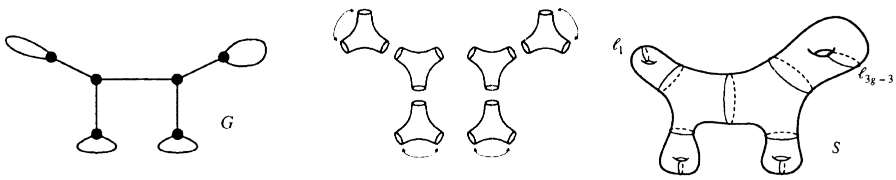
Blockseminar 2018
Selberg'sche Spurformel

Christian Bär und Bernhard Hanke



Wann:

Anreise ist am Sonntag, dem 24.6.2018, zum Abendessen um 18:00 Uhr. Im Anschluss findet der Einführungsvortrag statt. Die Abreise ist am Freitag, dem 29.6.2018, nach dem Mittagessen.

Wo:

Das Blockseminar wird im Hotel Bollmannsruh im Havelland veranstaltet. Für Details siehe http://www.hotel-bollmannsruh.de/

Was:

Die Mathematik der riemannschen Flächen, speziell die derjenigen vom Geschlecht ≥ 2, ist außerordentlich reichhaltig. Solche Flächen besitzen hyperbolische Strukturen, d.h. Metriken mit konstanter Krümmung $\equiv -1$. Wir werden tiefe Zusammenhänge zwischen analytischen Größen (Laplace-Eigenwerte), geometrischen Größen (Längen geschlossener Geodätischer) und arithmetischen Aspekten erkunden. Ein Höhepunkt wird dabei die Selberg'sche Spurformel sein, in der diese Aspekte zusammenfließen. Wir werden dabei im Wesentlichen dem Buch von Peter Buser [1] folgen.

Wie:

Die Vorträge sollten eine Dauer von 60 Minuten (plus Zeit für Diskussion) nicht überschreiten. Einige Vorträge sind als Kurzvorträge gekennzeichnet. Für diese ist eine Dauer von 40 Minuten plus Zeit für Diskussion vorgesehen. Diese Zeitvorgaben bitte einhalten und bei der Planung der Vorträge berücksichtigen. Für den Notfall sollte man Passagen vorsehen, die wegfallen können, ohne dass der restliche Vortrag darunter allzu sehr leidet.

Für einige Themen sind wegen der Stofffülle zwei Vorträge vorgesehen. Hier sollten sich die Sprecher sehr gut abstimmen.

Aus Ermangelung einer Tafel werden die Vorträge mit zwei Overheadprojektoren gehalten. Wichtig ist hierbei, dass die Folien nicht vorbereitet mitgebracht werden, sondern - wie an einer Tafel - während des Vortrags live beschrieben werden.

Vortragsprogramm:

(0.) Einführung *(Bernhard Hanke)*:

Vorstellung des Themas und Überblick

(1./2.) Das Laplace-Spektrum I & II *(Jonas Rungenhagen und Sebastian Hannes)*:

Übersicht über grundlegende Eigenschaften des Laplace-Spektrums einer geschlossenen riemannschen Mannigfaltigkeit: Spektralsatz, Wärmekern, Greenfunktion, Minimaxprinzip (teilweise ohne Beweise) [1, Abschnitte 7.2 und 8.2].

(3.) Das Hyperboloid-Modell und hyperbolische Trigonometrie *(Moritz Meisel)*:

Beschreibung des Hyperboloidmodells der hyperbolischen Ebene. Geometrische Eigenschaften verschiedener Figuren in der hyperbolischen Ebene (Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke). Beweise exemplarisch auswählen [1, Abschnitte 2.1–2.4], [2, Abschnitt X.1].

(4.) Geschlossene Geodätische *(Michael Jung)*:

Zunächst erfolgt eine Präszisierung des Begriffs der geschlossenen Geodätischen. Dann werden einige ihrer Eigenschaften auf hyperbolischen Flächen diskutiert. So wird z.B. gezeigt, dass es zu jeder Zahl $L > 0$ nur endlich viele geschlossene Geodätische mit Länge $\leq L$ gibt [1, Abschnitt 1.6].

(5.) Kragensatz *(Mauricio Bustamante)*:

Der Kragensatz besagt, dass kurze geschlossene Geodätische in hyperbolischen Flächen breite Kragenumgebungen haben, [1, Abschnitt 4.1] und die dazu nötigen Teile von [1, Abschnitt 3.1].

(6.) Kontrollierte Triangulierungen *(Benedikt Hunger)*:

Zentrales Resultat dieses Vortrags ist Theorem 4.5.2, das die Existenz von Triangulierungen mit kontrollierter Seitenlänge und Fläche der Dreiecke sicherstellt [1, Abschnitt 4.5].

(7.) Die Abel-Transformation *(Ariane Beier)*:

Die Abel-Transformation ist ein Hilfsmittel, das wir für die Beschreibung des Wärmekerns der hyperbolischen Ebene brauchen als auch für die Beweise von Hubers Theorem und der Selberg'schen Spurformel [1, Abschnitt 7.3].

(8.) Der Wärmekern der hyperbolischen Ebene *(Thorsten Hertl)*:

Konstruktion und elementare Eigenschaften des Wärmekerns der hyperbolischen Ebene [1, Abschnitt 7.4], [2, Abschnitt X.2].

(9.) Der Wärmekern kompakter hyperbolischer Flächen *(Kurzvortrag, Eric Schlarmann)*:

Durch Mittelung über die Decktransformationsgruppe wird aus dem Wärmekern der hyperbolischen Ebene derjenige eines Quotienten gewonnen [1, Abschnitt 7.5].

(10.) Cheegers Ungleichung *(Kurzvortrag, Saskia Roos)*:

Cheegers Ungleichung liefert eine untere Schranke an die Laplace-Eigenwerte in Termen einer isoperimetrischen Größe. Wir führen den Beweis unter einer Regularitätsannahme, die es erlaubt einige technische Komplikationen zu vermeiden [1, Abschnitt 8.3].

(11.) Kleine Eigenwerte *(Christopher Wulff)*:

Laplace-Eigenwerte unterhalb von $\frac{1}{4}$ spielen auf riemannschen Flächen eine Sonderrolle und werden dort „kleine Eigenwerte" genannt. Schneide-/Klebeargumente und Cheegers Ungleichung werden benutzt, kleine Eigenwerte abzuschätzen [1, Abschnitte 8.1 und 8.4], vgl. auch [2, Abschnitt X.4].

(12./13.) Hubers Theorem I & II *(Max Lewandowski und Lashi Bandara)*:

Hubers Theorem besagt, dass zwei kompakte riemannsche Flächen genau dann dieselben Laplace-Eigenwerte haben, wenn ihr Längenspektrum übereinstimmt, d.h. wenn ihre geschlossenen Geodätischen dieselben Längen haben [1, Abschnitt 9.2].

(14.) Die Präspurformel *(Alexander Engel)*:

Hier werden wichtige Regularitätseigenschaften von Integralkernen auf einer riemannschen Fläche unter Annahme geeigneter Bedingungen an die erzeugende Funktion hergeleitet [1, Abschnitt 9.3].

(15./16.) Der Primzahlsatz für kompakte riemannsche Flächen I & II *(2 Kurzvorträge, Sara Azzali und Florian Hanisch)*:

Die Längen geschlossener Geodätischer auf einer riemannschen Fläche sind asymptotisch genauso verteilt wie die Primzahlen in den ganzen Zahlen; eine bemerkenswerte Übereinstimmung [1, Abschnitt 9.4].

(17.) Die Selberg'sche Spurformel *(Markus Upmeier)*:

Formulierung und Beweis der Selberg'schen Spurformel für beliebige zulässige Transformationspaare. Die Spurformel stellt eine Beziehung zwischen den Laplace-Eigenwerten einer riemannschen Fläche und den Längen ihrer geschlossener Geodätischen her [1, Abschnitt 9.5].

(18.) Der Primzahlsatz mit Fehlertermen *(Matthias Ludewig)*:

Der Primzahlsatz für riemannsche Flächen wird durch eine präzisere Beschreibung des Fehlers verfeinert [1, Abschnitt 9.6].

Literatur:

[1] Peter Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Reprint of the 1992 original, Boston, MA: Birkhäuser, 2010.

[2] Isaac Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Orlando etc.: Academic Press, 1984.