Blockseminar 2024
Starrheitsphänomene für Skalarkrümmung

Christian Bär und Bernhard Hanke

Wann:

Anreise ist am Sonntag, dem 28. April 2024, zum Abendessen um 18:00 Uhr. Im Anschluss findet der Einführungsvortrag statt. Die Abreise ist am Freitag, dem 3. Mai 2024, nach dem Mittagessen.

Wo:

Das Blockseminar wird im Bildungszentrum Kloster Banz veranstaltet.

Was:

Skalarkrümmungsvoraussetzungen sind im Vergleich zu Voraussetzungen an die Schnittkrümmung oder die Riccikrümmung eigentlich recht schwach. So kann man z.B. aus einer unteren Skalarkrümmungsschranke keine Schranke an den Durchmesser herleiten, im Gegensatz zur Riccikrümmung. Dennoch gibt es einige sehr starke Starrheitsphänomene für Skalarkrümmung.

Aus dem Satz von Gauß-Bonnet wissen wir, dass es auf dem 2-Torus keine positiv gekrümmte Metrik gibt. Wie ist das in höheren Dimensionen? Es stellt sich heraus, dass jede Metrik mit scal ≥ 0 auf T^n flach sein muss. Kann man auf der Standard-Sphäre die Skalarkrümmung vergrößern ohne die Metrik zu verkleinern (z.B. durch eine Reskalierung)? Es stellt sich heraus, dass das nicht möglich ist. Diese und ähnliche Fragen, die teilweise Gegenstand der aktuellen Forschung sind, werden wir untersuchen. Dabei konzentrieren wir uns methodisch auf den Zugang mittels Spingeometrie und Dirac-Operatoren.

Wie:

Die Vorträge sollten eine Dauer von 50 Minuten (plus Zeit für Diskussion) nicht überschreiten. Diese Zeitvorgabe bitte einhalten und bei der Planung der Vorträge berücksichtigen. Für den Notfall sollte man schon bei der Planung Passagen vorsehen, die wegfallen können, ohne dass der restliche Vortrag darunter allzu sehr leidet.

Bei den Doppelvorträgen (5+6 und 13+14) sollten sich die Sprecher gut abstimmen.

Aus Ermangelung einer Tafel werden die Vorträge mit zwei Dokumentenkameras und angeschlossenen Beamern gehalten. Wichtig ist dabei, dass die Blätter nicht vorbereitet mitgebracht werden, sondern - wie an einer Tafel - während des Vortrags live beschrieben werden.

Wer:

Um sinnvoll teilnehmen zu können, muss man über Kenntnisse der riemannschen Geometrie verfügen. Einige Grundkonzepte der Spingeometrie sollte man auch kennen: Spinstrukturen, Spinorbündel und Dirac-Operator (mit Twistbündel), die Aussage der Lichnerowicz-Formel und des Atiyah-Singer-Indexsatzes. Siehe z.B. Abschnitte 2.1–2.4 und Kapitel 4 in [2] oder Kapitel 2 und 3 sowie Theorem 184 in [10].

Die Finanzierung erfolgt durch das Schwerpunktprogramm „Geometrie im Unendlichen“. Die Teilnahme ist nur für den gesamten Zeitraum des Seminars möglich.

Vortragsprogramm:

0. Einführung *(NN)*: Darstellung des Themas und Überblick

1. Satz von Llarull in geraden Dimensionen *(NN)*:

   Starrheitssatz für die Standardmetrik der gerade-dimensionalen Sphäre nach [15, S. 60–66]. Für die Berechnung und Abschätzung des Krümmungsendomorphismus des Twistbündels richtet man sich besser nach [4, Appendix A].

2. Llarull für Räume $\neq S^n$ *(NN)*:

   Theorem 2.1 in [8] soll erläutert und bewiesen werden. Wichtig sind vor allem die Abschätzungen in Abschnitt 1b. Korollar 2.2 liefert die wichtigsten Beispiele.

3. Listings Verbesserung *(NN)*:

   Theorem 1 in [14] verbessert die bisherigen Resultate und soll bewiesen werden.

4. Spektralfluss *(NN)*:

   Ziel ist ein gutes Verständnis des Spektralflusses gemäß der Definition auf Seite 462 in [17]. Das Beispiel auf S. 489–490 in [7] anführen. Die Propositionen 2 und 3 in [17] sollen bewiesen werden.

5.+6. Getzlers Formel *(NN)*:

   Der ungerade Chern-Charakter soll eingeführt werden. Ziel ist der Beweis von Theorem 2.8 in [7].

7. Satz von Llarull in ungeraden Dimensionen *(NN)*:

   Der Satz von Llarull für ungerade-dimensionale Sphären wird wie in Abschnitt 3 von [13] durchgeführt.

8. Stabilitätsversion für den Satz von Llarull *(NN)*:

   Das zentrale Resultat ist Lemma 3.1 in [11], das ausführlich bewiesen werden soll. Das Lemma impliziert Theorem A, das als Motivation genannt werden soll, ohne jedoch näher auf „intrinsch-flache Konvergenz" einzugehen.

9. Überblick über Randwertprobleme für Dirac-Operatoren *(NN)*:

   In diesem Vortrag wird ein Arbeitswissen über Randwertprobleme für Dirac-Operatoren bereitgestellt. Die Beweise würden ein eigenes Blockseminar füllen. Wir folgen dabei [3]. Statt des allgemeineren Setups 4.1 betrachten wir nur die Situation, dass M kompakt ist, dass D ein getwisteter spinorieller Dirac-Operator ist und dass A der entsprechende getwistete spinorielle Dirac-Operator des Randes ist.

   Wir starten mit der Definition 4.7 einer D-elliptischen Randbedingung, gefolgt von Remark 4.8 (2) und (3). Es folgt Randregularität (Theorem 4.9), wobei der Subindex „loc" an den Sobolevräumen weggelassen werden kann, da M kompakt ist. Nach Korollar 4.18 werden die Beispiele 4.20, 4.21 und 4.23 erläutert. Theorem 5.3 wird formuliert als die Aussage, dass $D_{B,\max}$ ein Fredholmoperator ist (da M kompakt ist, ist die Koerzivität automatisch erfüllt). Zum Abschluss werden noch Korollar 6.2 und Theorem 6.4 genannt.

10. Llarull für Mannigfaltigkeiten mit Rand *(NN)*:

    Korollar 1.2 und Theorem 1.3 auf [16] sollen detailliert erläutert werden. Die Allgemeinheit aus Theorem 1.1, wo N höhere Dimension als M haben kann, brauchen wir nicht zu diskutieren.

11. Gromov und Lawsons Beweis der Geroch-Vermutung *(NN)*:

    Zeige Theorem 5.5 in Kapitel IV in [12] für kompakt-vergrößerbare Mannigfaltigkeiten (Definition 5.2) und folgere: jede Metrik mit nicht-negativer Skalarkrümmung auf dem n-Torus T^n ist flach. Zum Beweis des „Bourguignon-Tricks" (Theorem 5.7) siehe Lemma 18 in [5] angewandt auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Die Tatsache, dass Eigenfunktionen zum ersten Eigenwert des Yamabe-Operators nirgends verschwinden, kann ohne Beweis benutzt werden. Ebenso kann der Spaltungssatz von Cheeger-Gromoll ohne Beweis benutzt werden.

12. Positives-Masse-Theorem für Mannigfaltigkeiten mit Lipschitz-Metriken *(NN)*:

    Abschnitt 3 in [18] soll geeignet zusammengefasst werden. Die Wohldefiniertheit der ADM-Masse (siehe Seite 102 oben) kann ohne Beweis benutzt werden.

13.+14. Starrheit konvexer euklidischer Gebiete *(NN)*:

    Ziel ist der Beweis von Theorem 4.1 in [18]. Im ersten Teil des Vortrages soll der Beweis unter Annahme von Abschnitten 2 und 3 geführt werden. Im zweiten Teil des Vortrags soll Abschnitt 2 geeignet zusammengefasst werden.

15. Starrheit hyperbolischer Gebiete *(NN)*:

    Ziel ist der Beweis von Theorem 4.8 in [1]. Wir begnügen uns mit dem Spezialfall, dass $\Gamma = 1$ vorausgesetzt ist („asymptotisch hyperbolisch" statt „asymptotisch lokal hyperbolisch"). Damit entfällt z.B. die Diskussion in Abschnitt 2.1.

16. Ricci-Starrheit der Hemisphäre *(NN)*:

    Die Min-Oo-Vermutung postuliert eine Skalarkrümmungsstarrheit für die Hemisphäre. Theorem 2 in [9] beweist die Vermutung unter einer stärkeren Annahme an die Ricci-Krümmung.

17. Deformationstheorie für Skalarkrümmung *(NN)*:

    Die Aussage von Theorem 3.8 in [5] soll erläutert werden. Den Beweis können wir aus Zeitgründen nicht führen. Dann wird erklärt, wie folgende Anwendungen aus Theorem 3.8 folgen: Theorem 4.1, Theorem 4.11 und, am wichtigsten, Abschnitt 4.5 über die Min-Oo-Vermutung.

18. Widerlegung der Min-Oo-Vermutung *(NN)*:

    Das Hauptresultat ist Theorem 4 aus [6]. Zusammen mit Theorem 5, dessen Resultat wir schon aus dem vorangegangenen Vortrag kennen, ergibt sich die Existenz von Gegenbeispielen zur Min-Oo-Vermutung (Korollar 6).

Literatur:

[1] Andersson, L.; Dahl, M.: Scalar curvature rigidity for asymptotically locally hyperbolic manifolds. *Ann. Global Anal. Geom.* **16** (1998), 1–27.

[2] Bär, C.: Spin geometry, Lecture notes (2018).

[3] Bär, C.; Ballmann, W.: Guide to elliptic boundary value problems for Dirac-type operators. Arbeitstagung Bonn 2013., Progr. Math., vol. 319, Birkhäuser/Springer, Cham, 43–80, 2016.

[4] Bär, C.; Brendle, S.; Hanke, B.; Wang, Y.: Scalar curvature rigidity of warped product metrics. *ArXiv preprint:* https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.04015 (2023).

[5] Bär, C.; Hanke, B.: Boundary conditions for scalar curvature. Perspectives in scalar curvature. Vol. 2., World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 325–377, 2023.

[6] Brendle, S.; Marques, F. C.; Neves, A.: Deformations of the hemisphere that increase scalar curvature. *Invent. Math.* **185** (2011), 175–197.

[7] Getzler, E.: The odd Chern character in cyclic homology and spectral flow. *Topology***32** (1993), 489–507.

[8] Goette, S.; Semmelmann, U.: Scalar curvature estimates for compact symmetric spaces. *Differential Geom. Appl.* **16** (2002), 65–78.

[9] Hang, F.; Wang, X.: Rigidity theorems for compact manifolds with boundary and positive Ricci curvature. *J. Geom. Anal.* **19** (2009), 628–642.

[10] Hanke, B.: Spin geometry, Lecture notes (2021).

[11] Hirsch, S.; Zhang, Y.: Stability of Llarull's theorem in all dimensions. *ArXiv preprint:* https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.14412 (2023).

[12] Lawson, Jr. H. Blaine; Michelsohn, M.-L.: *Spin geometry.* Princeton Mathematical Series, vol. 38. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[13] Li, Y.; Su, G.; Wang, X.: Spectral flow, Llarull's rigidity theorem in odd dimensions and its generalization. *ArXiv preprint:* https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.06906 (2023).

[14] Listing, M.: Scalar curvature on compact symmetric spaces. *ArXiv preprint:* https://doi.org/10.48550/arXiv.1007.1832 (2010).

[15] Llarull, M.: Sharp estimates and the Dirac operator. *Math. Ann.* **310** (1998), 55–71.

[16] Lott, J.: Index theory for scalar curvature on manifolds with boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.* **149** (2021), 4451–4459.

[17] Phillips, J.: Self-adjoint Fredholm operators and spectral flow. *Canad. Math. Bull.* **39** (1996), 460–467.

[18] Shi, Y.; Tam, L.-F.: Positive mass theorem and the boundary behaviors of compact manifolds with nonnegative scalar curvature. *J. Differential Geom.* **62** (2002), 79–125.