

Christian Bär

# Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2009/10



Version vom 7. Februar 2011

Heat Equation Mug design Copyright ©Paolo Amoroso and Mauro Arpino of Nostromics, used with permission - Science gifts and merchandising [www.nostromics.com](http://www.nostromics.com)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Die drei wichtigsten Prototypen</b>	<b>7</b>
2.1. Die Laplace-Gleichung . . . . .	7
2.2. Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	35
2.3. Die Wellengleichung . . . . .	62
<b>3. Transformationsmethoden</b>	<b>89</b>
3.1. Fouriertransformation . . . . .	89
3.2. Anwendungen . . . . .	97
3.3. Laplacetransformation . . . . .	102
3.4. Eine Wellen-Wärmeleitungs-Transformation . . . . .	105
3.5. Cole-Hopf-Transformation . . . . .	108
<b>4. Elliptische Theorie</b>	<b>111</b>
4.1. Vorbemerkungen . . . . .	111
4.2. Das Maximumprinzip . . . . .	112
4.3. Schwache Lösungen . . . . .	123
4.4. Die Fredholm-Alternative und adjungierte Gleichungen . . . . .	129
4.5. Differenzenquotienten . . . . .	136
4.6. Innere Regularität . . . . .	140
4.7. Randregularität . . . . .	149
4.8. Eigenwerte und Eigenfunktionen . . . . .	155
<b>A. Anhang</b>	<b>163</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>177</b>
<b>Index</b>	<b>179</b>



# Vorwort

Dies ist das Skript zu der Vorlesung über partielle Differentialgleichungen, die ich im Wintersemester 2009/10 an der Universität Potsdam gehalten habe. Da das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen riesig ist und die Vorlesung nur auf ein Semester angelegt war, war die Stoffauswahl sehr wichtig. Für die drei wichtigsten Typen von partiellen Differentialgleichungen habe ich zunächst jeweils das bedeutendste Beispiel untersucht; die Laplace-Gleichung als Prototyp für eine elliptische Gleichung, die Wärmeleitungsgleichung als parabolische und die Wellengleichung als hyperbolische Gleichung. Dabei kann man noch sehr viel mit expliziten Lösungsformeln arbeiten. Anschließend haben wir uns den Transformationsmethoden zugewandt, insbesondere der Fouriertransformation und der Laplacetransformation. Im letzten Kapitel haben wir die Laplace-Gleichung zu elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten verallgemeinert. Da nun keine expliziten Lösungsformeln mehr existieren, muss man qualitative Methoden verwenden, wie etwa das Konzept schwacher Lösungen und Regularitätstheorie.

Neben den üblichen Grundvorlesungen über lineare Algebra und Analysis wurde lediglich ein wenig Funktionalanalysis vorausgesetzt, nämlich das Konzept von Hilberträumen sowie Sobolevräume. Resultate, die in den Vorlesungen über Funktionalanalysis eher nicht besprochen werden, wie z.B. der Satz von Lax-Milgram, werden im Anhang diskutiert.

Mein herzlicher Dank geht an Immanuel Asmus, der die Erstversion dieses Skriptes in hervorragender Qualität verfasst hat.

Potsdam, Februar 2011,

Christian Bär



# 1. Einleitung

## Definition 1.1 (Notation)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Für eine  $C^1$ -Funktion  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  bezeichnen wir mit

$$Du(x) := \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right) \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

die Jacobimatrix oder Ableitung von  $u$  an der Stelle  $x \in U$ . Allgemeiner sei

$$D^k u(x) := \left( \frac{\partial^k u_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x) \right) \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j_1, \dots, j_k = 1, \dots, n \end{matrix}$$

die  $k$ -te Ableitung von  $u$  an der Stelle  $x \in U$ .

Aus Gründen der Übersichtlichkeit verwenden wir ferner die Konvention

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} =: u_{x_i}, \quad \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} =: u_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}.$$

## Beispiel 1.2

Für  $m = 1$ ,  $k = 2$  ist

$$D^2 u(x) = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & u_{x_1 x_2} \\ u_{x_2 x_1} & u_{x_2 x_2} \end{pmatrix},$$

und das ist einfach die Hessematrix von  $u$ .

## Definition 1.3

Eine **partielle Differentialgleichung (PDG) der Ordnung  $k$**  ist eine Gleichung der Form

$$F(x, u(x), Du(x), \dots, D^k u(x)) = 0,$$

## 1. Einleitung

wobei  $F : U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \cdot n} \times \dots \times \mathbb{R}^{m \cdot n^k} \rightarrow \mathbb{R}^l$  vorgegeben und  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  gesucht ist.

### Bemerkung 1.4

Ist  $l > 1$  oder  $m > 1$ , so spricht man auch von einem **System partieller Differentialgleichungen**.

### Beispiel 1.5

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ , sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben. Dann lautet die **Poisson-Gleichung**:

$$\Delta u + f = 0,$$

wobei  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  der **Laplace-Operator** ist.

Die Funktion  $F$  aus Definition 1.3 lautet für diese PDG:

$$F(x, y, z, w) = f(x) + \text{tr}(w).$$

### Beispiel 1.6

Die **Korteweg-deVries-Gleichung (KdV)** ist die folgende PDG an eine Funktion  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in den Variablen  $t$  und  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

### Beispiel 1.7

An eine Funktion  $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stellen wir die **Minimalflächengleichung für Funktionsgraphen**:

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$$

### Beispiel 1.8

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Die **Monge-Ampère-Gleichung** an  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  lautet

$$\det(D^2 u) = f.$$



**Definition 1.9**

Eine partielle Differentialgleichung heißt **linear**, falls die Abbildung

$$F(x, \cdot, \cdot, \dots, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \cdot n} \times \dots \times \mathbb{R}^{m \cdot n^k} \rightarrow \mathbb{R}^l$$

für jedes  $x \in U$  linear ist.

**Bemerkung 1.10**

Sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  ein Multiindex. Wir definieren

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}.$$

Eine PDG ist genau dann linear, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \cdot D^\alpha u(x) = 0$$

besitzt.

**Bemerkung 1.11**

Die Lösungsmenge einer linearen PDG bildet einen Vektorraum.

**Beispiel 1.12**

Die Poisson-Gleichung ist linear, falls  $f = 0$ . In diesem Falle heißt sie **Laplace-Gleichung**.

Die übrigen PDGen aus den Beispielen 1.6 bis 1.8 sind nicht linear.

**Definition 1.13**

Eine PDG heißt **semilinear**, falls sie von der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + F(x, u(x), \dots, D^{k-1} u(x)) = 0$$

ist.

## 1. Einleitung

### Bemerkung 1.14

Jede lineare PDG ist auch semilinear.

### Beispiel 1.15

Die Poisson-Gleichung und die KdV sind semilinear; die Minimalflächen- und die Monge-Ampère-Gleichung nicht.

### Definition 1.16

Eine PDG der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha}(x, u(x), \dots, D^{k-1}u(x)) \cdot D^{\alpha}u(x) + F(x, u(x), \dots, D^{k-1}u(x)) = 0$$

heißt **quasilinear**.

### Bemerkung 1.17

Jede semilineare PDG ist auch quasilinear.

### Beispiel 1.18

Die Poisson-Gleichung, die KdV sowie die Minimalflächengleichung sind quasilinear; die Monge-Ampère-Gleichung hingegen nicht.

### Definition 1.19

Eine PDG, die nicht quasilinear ist, heißt **voll nichtlinear**.

Nun, da wir die wichtigsten Begriffe definiert haben, wollen wir PDGen auch lösen können. Dabei sind die folgenden Fragen zu klären:

- Existiert eine Lösung?
- Ist die Lösung eindeutig?

- Welche Eigenschaften hat die Lösung? Hierzu zählen insbesondere Regularitätsaussagen.
- Können wir die Lösung explizit angeben?

Bei allem, was wir über gewöhnliche Differentialgleichungen wissen, könnten wir versucht sein, naiv anzunehmen, dass auch jede PDG lösbar ist. Dies ist jedoch leider nicht der Fall, wie der deutschstämmige Mathematiker Hans Lewy 1957 an folgendem Beispiel zeigte:

**Beispiel 1.20**

Es gibt  $C^\infty$ -Funktionen  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ , für die die semilineare PDG

$$-u_x - i \cdot u_y + 2i(x + iy) \cdot u_z = f$$

keinerlei Lösungen (nicht einmal lokale) besitzt.

Wir werden also einzelne Beispiele für (oder Klassen von) PDGen betrachten müssen, um unsere Fragen zufriedenstellend beantworten zu können.



## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

### 2.1. Die Laplace-Gleichung

**Definition 2.1.1.** Die Laplace-Gleichung lautet  $\Delta u = 0$ , ist also eine PDE zweiter Ordnung. Ihre Lösungen heißen **harmonische Funktionen**.

**Bemerkung 2.1.2.** Harmonische Funktionen beschreiben physikalische Gleichgewichtszustände.

Da wir bislang noch keine Lösungstheorie für PDGen besitzen, machen wir einen speziellen Ansatz, der die Laplace-Gleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführt. Dazu betrachten wir zunächst nur radialsymmetrische Funktionen  $u$ , d.h.

$$u(x) = v(r), \text{ wobei } r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Wir berechnen für  $r \neq 0$  (d.h.  $x \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \cdot 2x_i \\ &= \frac{x_i}{r}; \\ u_{x_i}(x) &= v'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \\ &= v'(r) \cdot \frac{x_i}{r}; \\ u_{x_i x_i}(x) &= v''(r) \cdot \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \cdot \left( \frac{r - x_i \cdot \frac{x_i}{r}}{r^2} \right) \\ &= v''(r) \cdot \frac{x_i^2}{r^2} + \frac{v'(r)}{r} \left( 1 - \frac{x_i^2}{r^2} \right). \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Mit  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2$  ergibt sich dann

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x) = v''(r) + v'(r) \cdot \frac{n-1}{r}, \quad (2.1)$$

und das können wir lösen!

**Definition 2.1.3.** Die Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  vermöge

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(|x|), & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} |x|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

wobei  $\alpha(n) := \text{vol}_n(B(0,1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel ist, heißt **Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung**.

**Bemerkung 2.1.4.** Tatsächlich ist  $\Phi$  eine Lösung der Laplace-Gleichung auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , wie man mittels Gleichung (2.1) leicht verifiziert.

**Bemerkung 2.1.5.** Die Funktion  $\Phi$  ist nicht integrierbar ( $\Phi \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ ), aber lokal integrierbar ( $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ).

Dazu bestimmen wir für den Fall  $n \geq 3$ :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} |\Phi(x)| dx &= c_1 \cdot \int_{B(0,R)} |x|^{2-n} dx \\ &= c_2 \cdot \int_0^R r^{2-n} \cdot r^{n-1} dr \\ &= c_3 \cdot R^2. \end{aligned}$$

Dies ist offenbar endlich für alle  $R$ , während das Integral für  $R \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$  strebt. Die Rechnung für den Fall  $n = 2$  ist ähnlich.

### Bemerkung 2.1.6

1. Wir bestimmen die erste Ableitung von  $\Phi$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = c_4 \cdot r^{1-n} \cdot \frac{x_i}{r},$$

somit lässt sich der Betrag abschätzen durch  $|\Phi_{x_i}| \leq c_4 \cdot r^{1-n}$ .

Wie oben folgt dann  $\Phi_{x_i} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ .

2. Analog erhalten wir für die zweiten Ableitungen die Abschätzung  $|\Phi_{x_i x_j}| \leq c_5 \cdot r^{-n}$ . Daraus ergibt sich jedoch

$$\int_{B(0,R)} |\Phi_{x_i x_j}(x)| dx \leq c_5 \cdot \int_{r=0}^R r^{-n} \cdot r^{n-1} dr = c_5 \log(r) \Big|_0^R = \infty,$$

demnach kann nicht geschlossen werden, dass  $\Phi_{x_i x_j}$  lokal integrierbar ist. Das ist auch nicht der Fall.

**Bemerkung 2.1.7.** Für ein festes  $y \in \mathbb{R}^n$  ist die Funktion  $x \mapsto \Phi(x - y)$  harmonisch auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ . Ebenso ist eine endliche Linearkombination solcher Funktionen mit verschiedenen  $y$  harmonisch.

Der nächste logische Schritt wäre, von der Summe einzelner  $y \in \mathbb{R}^n$  zum Integral über ganz  $\mathbb{R}^n$  überzugehen. Wir halten also eine Funktion  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$  fest und setzen

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) dy.$$

Nun schauen wir, ob  $u$  tatsächlich harmonisch ist. Dazu „berechnen“ wir:  $\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \Phi(x - y) f(y) dy = 0$ . Sieht gut aus – ist aber leider falsch!

Wir müssen nämlich die Bedingungen für die Differentiation unter das Integral (Anhang A.1) beachten. Dabei stellen wir fest, dass wir zwar die erste Differentiation mit dem Integral vertauschen dürfen, nicht jedoch die zweite: Denn  $|\Phi_{x_i x_i}(x - y)|$  lässt sich nicht unabhängig von  $x$  nach oben durch eine (lokal) integrierbare Funktion abschätzen.

Also müssen wir einen anderen Weg gehen: Wir haben ja eine Regularitätsbedingung an  $f$  gestellt – diese können wir nun nutzen. Wir wollen darum  $u$  so umschreiben, dass  $\Phi$  im Integral nicht mehr von  $x$  abhängt. Wir substituieren zu diesem Behufe  $z := x - y$ .

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z) f(x - z) dz.$$

Die Kompaktheit des Trägers von  $f$  liefert die erforderliche Abschätzbarkeit des Integranden durch integrierbare Funktionen:

$$|\Phi(z) f_{x_i}(x - z)| \leq c_1 |\Phi(z)| \cdot \chi_{\text{supp } f+x}, \quad (2.2)$$

$$|\Phi(z) f_{x_i x_j}(x - z)| \leq c_2 |\Phi(z)| \cdot \chi_{\text{supp } f+x}. \quad (2.3)$$

Nun bestimmen wir

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z) \Delta_x f(x - z) dz \\ &= \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(z) f(x - z) dz}_{=: I_1(\varepsilon)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(z) f(x - z) dz}_{=: I_2(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Das erste Integral haben wir sehr gut im Griff:

$$|I_1(\varepsilon)| \leq c_3 \cdot \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(z)| dz = c_4 \cdot \begin{cases} \varepsilon^2 |\log(\varepsilon)|, & n = 2 \\ \varepsilon^2, & n \geq 3 \end{cases},$$

und das konvergiert gegen 0 für  $\varepsilon \searrow 0$ .

Dem zweiten Integral helfen wir mit der Green'schen Formel bei.

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(z) \Delta_x f(x-z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(z) \Delta_z f(x-z) dz \\ &= \underbrace{- \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \langle D\Phi(z), D_z f(x-z) \rangle dz}_{=: I_3(\varepsilon)} + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(z) \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-z) dS(z)}_{=: I_4(\varepsilon)} \end{aligned}$$

Wieder haben wir eines der beiden Integrale gut im Griff, dieses Mal das zweite: Denn wir können ja den Integranden wie in Gleichung 2.2 nach oben abschätzen.

$$\begin{aligned} |I_4(\varepsilon)| &\leq c_5 \cdot \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(z)| dS(z) \\ &= c_6 \cdot \varepsilon^{n-1} \cdot \begin{cases} |\log(\varepsilon)|, & n = 2 \\ \varepsilon^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases} \\ &= c_6 \cdot \begin{cases} \varepsilon |\log(\varepsilon)|, & n = 2 \\ \varepsilon, & n \geq 3 \end{cases} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0 \end{aligned}$$

Nun bleibt noch ein Integral übrig, auf das wir wieder die Green'sche Formel anwenden – denn wir wollen schließlich am Ende die Harmonizität von  $\Phi$  ausnutzen, und dafür benötigen wir den Ausdruck  $\Delta\Phi$ . Wir berechnen also:

$$\begin{aligned} I_3(\varepsilon) &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \langle D\Phi(z), D_z f(x-z) \rangle dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \underbrace{\Delta\Phi(z)}_{=0} \cdot f(x-z) dz - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z) \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(z)}_{=-\Phi'} dS(z) \\ &= - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z) \varepsilon^{1-n} \cdot \frac{1}{n\alpha(n)} dS(z) \\ &= - \frac{1}{\underbrace{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}_{=\text{vol } \partial B(0,\varepsilon)}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z) dS(z) \end{aligned}$$



$$= - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z) dS(z) \\ \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} -f(x).$$

(Das  $\int$ -Zeichen bezeichnet das Mittelwertintegral, d.i. der Quotient aus dem gewöhnlichen Integral und dem Volumen des Integrationsbereiches.)

Aha,  $\Delta u$  ist nicht 0, sondern  $\Delta u(x) = -f(x)$ . Also löst  $u$  die Poisson-Gleichung!

Wir fassen unsere Erkenntnis noch einmal in folgendem Satz zusammen:

**Satz 2.1.8**

Sei  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy$ . Dann ist  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  und es gilt  $\Delta u + f = 0$ .

**Bemerkung 2.1.9.** Dieser Satz lässt sich mit Hilfe von Distributionen folgendermaßen formulieren:

$$\Delta \Phi = -\delta_0.$$

Um dies zu sehen, wenden wir  $\Delta \Phi$  auf eine Funktion  $f$  an und erhalten:

$$\Delta \Phi[f] = \Phi[\Delta f] = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\Delta f(y) dy = \Delta \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(y) dy = -f(0) = -\delta_0[f].$$

**Satz 2.1.10 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $u \in C^2(U)$  harmonisch. Dann gilt

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \int_{B(x,r)} u(y) dy \quad (2.4)$$

für alle  $x \in U$ ,  $r > 0$  mit  $\bar{B}(x,r) \subset U$ .

*Beweis.*

1. Setze  $\varphi(r) := \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz) dS(z)$ . Um zu sehen, dass  $\varphi$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

nicht von  $r$  abhängt, bestimmen wir die erste Ableitung:

$$\begin{aligned}
 \varphi'(r) &= \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial}{\partial r} u(x + rz) dS(z) \\
 &= \int_{\partial B(0,1)} \langle Du(x + rz), z \rangle dS(z) \\
 &= \int_{\partial B(x,r)} \langle Du(y), \underbrace{\frac{y-x}{r}}_{=\nu} \rangle dS(y) \\
 &= \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \\
 &= \frac{1}{\text{vol } \partial B(x,r)} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \\
 &\stackrel{\text{A.2}}{=} \frac{1}{\text{vol } \partial B(x,r)} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Wenn wir nun  $r \rightarrow 0$  gehen lassen, geht  $\varphi(r) \rightarrow u(x)$ ; und da  $\varphi$  konstant ist, ist damit die erste Gleichheit aus dem Satz bewiesen.

2. Die zweite Gleichheit folgt leicht aus der ersten:

$$\begin{aligned}
 \int_{B(x,r)} u(y) dy &= \frac{1}{\text{vol } B(x,r)} \int_{B(x,r)} u(y) dy \\
 &= \frac{1}{\text{vol } B(x,r)} \int_0^r \left( \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) dS(y) \right) d\rho \\
 &= \frac{1}{\underbrace{\text{vol } B(x,r)}_{=\alpha(n)r^n}} \int_0^r \left( \underbrace{\text{vol } \partial B(x,\rho)}_{=n\alpha(n)\rho^{n-1}} \cdot \underbrace{\int u(y) dS(y)}_{=u(x)} \right) d\rho \\
 &= \frac{u(x)}{r^n} \int_0^r n\rho^{n-1} d\rho \\
 &= u(x).
 \end{aligned}$$

□

### Satz 2.1.11 (Charakterisierung durch die Mittelwerteigenschaft)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $u \in C^2(U)$ . Es gelte die Mittelwerteigenschaft

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

für alle  $x \in U$  und  $r > 0$  mit der Eigenschaft, dass  $\bar{B}(x,r) \subset U$ .

Dann gilt  $\Delta u = 0$ .

*Beweis.* Angenommen, es gäbe ein  $x_0 \in U$  mit  $\Delta u(x_0) \neq 0$ . OBdA sei dann  $\Delta u(x_0) > 0$ . Wähle nun  $r > 0$  so klein, dass  $\Delta u(x) > 0$  auf ganz  $B(x_0, r)$ . Wie im Beweis von Satz 2.1.10 setzen wir

$$\varphi(r) := \int_{\partial B(x_0, r)} u(y) dS(y).$$

Im Beweis von Satz 2.1.10 haben wir auch schon gezeigt, dass

$$\varphi'(r) = \frac{1}{\text{vol } \partial B(x_0, r)} \int_{B(x_0, r)} \Delta u(y) dy$$

gilt. Nun haben wir aber  $r$  so gewählt, dass der Integrand – und somit auch das Integral – positiv ist; während aus der Mittelwerteigenschaft (2.4) hingegen  $\varphi' = 0$  folgt. Hier haben wir den gewünschten Widerspruch.  $\square$

### Satz 2.1.12 (Maximumprinzip)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$  harmonisch in  $U$ . Dann gilt:

1. (Schwach Maximumprinzip.) Ist  $U$  beschränkt, dann nimmt  $u$  sein Maximum auf dem Rand von  $U$  an:

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

2. (Starkes Maximumprinzip.) Ist  $U$  zusammenhängend und gibt es ein  $x_0 \in U$  mit  $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$ , dann ist  $u$  konstant.

*Beweis.*

zu 2. Setze  $u_0 := \max_{\bar{U}} u$ . Wir betrachten die Menge

$$V := \{x \in U \mid u(x) = u_0\}.$$

Da  $u(x_0) = u_0$ , ist  $x_0 \in V$ , also  $V \neq \emptyset$ . Weil  $u$  stetig ist, ist  $V = u^{-1}(u_0)$  abgeschlossen in  $U$ . Nun bleibt zu zeigen, dass  $V$  auch offen ist, denn dann muss  $V = U$  sein, also  $u(x) = u_0$  für alle  $x \in U$ .

Sei  $x \in V$ . Wähle  $r > 0$  so, dass  $\bar{B}(x, r) \subset U$  ist. Dann gilt

$$\max_{\bar{U}} u = u(x) = \int_{B(x, r)} \underbrace{u(y)}_{\leq \max_{\bar{U}} u} dy \leq \int_{B(x, r)} \max_{\bar{U}} u dy = \max_{\bar{U}} u.$$

Somit muss in der Ungleichung die Gleichheit gelten, also  $u(y) = \max_{\bar{U}} u$  für alle  $y \in B(x, r)$ , d.h.  $B(x, r) \subset V$ .

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

zu 1. Diese Aussage folgt leicht aus 2.: Nimmt  $u$  das Maximum im Inneren von  $U$  an, so ist  $u$  konstant und hat dadurch dasselbe Maximum auf  $\partial U$ .

□

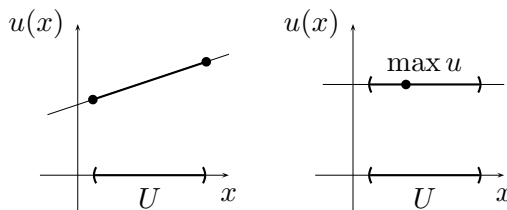
**Bemerkung 2.1.13 (Minimumprinzip).** Indem wir das Maximumprinzip auf  $-u$  anwenden, erhalten wir analoge Aussagen über das Minimum einer harmonischen Funktion  $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ :

1. Ist  $U$  beschränkt, so nimmt  $u$  sein Minimum auf dem Rand an:

$$\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u.$$

2. Ist  $U$  zusammenhängend und gibt es ein  $x_0 \in U$  mit  $u(x_0) = \min_{\bar{U}} u$ , so ist  $u$  konstant.

**Bemerkung 2.1.14.** Für Dimension  $n = 1$  lässt sich das Maximumprinzip besonders gut nachvollziehen. Dort lautet die Bedingung für Harmonizität  $u'' \equiv 0$ , und dies beschreibt genau die affin-linearen Funktionen. Offenbar nehmen diese Funktionen tatsächlich ihr Maximum und Minimum auf dem Rand des Definitionsbereiches an, und wenn im Inneren ein Maximum oder Minimum liegt, so sind sie konstant.



**Bemerkung 2.1.15.** Ist  $U$  nicht zusammenhängend, so gilt Aussage 2 des Maximum- bzw. Minimumprinzips nicht. Die Aussage „ $u$  ist konstant“ lässt sich dann nur für die Zusammenhangskomponente von  $U$  treffen, die das  $x_0$  mit  $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$  enthält.

**Bemerkung 2.1.16.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Die Funktion  $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$  erfülle

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } U, \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

mit  $g \geq 0$ , aber  $g \not\equiv 0$ . Dann folgt leicht aus dem starken Minimumprinzip, dass  $u > 0$  auf  $U$  gilt.

**Satz 2.1.17 (Eind. von Lösungen des Randwertproblems zur Poisson-Gl.)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $g \in C^0(\partial U)$  und  $f \in C^0(U)$ . Dann gibt es höchstens eine Lösung  $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$  von

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{auf } U, \\ u = g & \text{auf } \partial U. \end{cases}$$

*Beweis.* Seien  $u_1, u_2$  Lösungen. Dann gilt für  $u := u_1 - u_2$ :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } U, \\ u = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases}$$

Aus Maximum- und Minimumprinzip folgt hiermit

$$\max_{\bar{U}} u = \min_{\bar{U}} u = 0,$$

also  $u_1 = u_2$ . □

**Satz 2.1.18 (Regularität)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Für  $u \in C^0(U)$  gelte die Mittelwerteigenschaft

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

für alle  $x \in U$  und  $r > 0$  mit  $\bar{B}(x,r) \subset U$ . Dann ist  $u \in C^\infty(U)$ .

*Beweis.* Für  $\varepsilon > 0$  seien  $U_\varepsilon$  und  $u_\varepsilon$  wie in A.3 definiert. Nach A.4 ist  $u_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ . Für

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

alle  $x \in U_\varepsilon$  gilt:

$$\begin{aligned}
 u_\varepsilon(x) &= \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy \\
 &= \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy \\
 &= \int_0^\varepsilon \eta_\varepsilon(r) \left( \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \right) dr \\
 &= \int_0^\varepsilon \eta_\varepsilon(r) (u(x) \cdot \text{vol } \partial B(x,r)) dr \\
 &= u(x) \int_0^\varepsilon \eta_\varepsilon(r) \text{vol } \partial B(x,r) dr \\
 &= u(x) \int_{B(x,r)} \eta_\varepsilon(y) dy \\
 &= u(x).
 \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $u|_{U_\varepsilon} = u_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$  für alle  $\varepsilon > 0$  ist. Da nun zu jedem  $x \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $x \in U_\varepsilon$ , heißt dies, dass  $u$  in jedem Punkt glatt ist, also  $u \in C^\infty(U)$ .  $\square$

**Bemerkung 2.1.19.** Für eine Funktion  $u \in C^0(U)$  sind somit äquivalent:

1.  $u \in C^\infty(U)$  und  $u$  ist harmonisch;
2.  $u \in C^2(U)$  und  $u$  ist harmonisch;
3. für  $u$  gilt die Mittelwerteigenschaft.

### Satz 2.1.20

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $u \in C^\infty(U)$  harmonisch. Dann gilt für  $x_0 \in U$ ,  $r > 0$  mit  $\bar{B}(x_0, r) \subset U$  und für Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$ :

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \cdot \|u\|_{L^1(B(x_0, r))},$$

wobei  $C_k = \frac{(2^{n+1} \cdot n \cdot k)^k}{\alpha(n)}$ .

Diese Ungleichung gilt auch für die Funktion  $u$  selbst (also  $k = 0$ ), wobei wir die Konvention  $0^0 = 1$  verwenden.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz mittels vollständiger Induktion nach  $k$ .

$k = 0$ . Hierfür nutzen wir die Mittelwerteigenschaft.

$$\begin{aligned}
 |u(x_0)| &= \left| \int_{B(x_0, r)} u(y) dy \right| \\
 &= \frac{1}{\text{vol } B(x_0, r)} \left| \int_{B(x_0, r)} u(y) dy \right| \\
 &\leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0, r)} |u(y)| dy \\
 &= \frac{C_0}{r^n} \cdot \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}. \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$k = 1$ . Wegen  $\Delta(D^\alpha u) = D^\alpha(\Delta u) = 0$  sind alle  $D^\alpha u$  harmonisch, es gilt also wieder die Mittelwerteigenschaft. Bezeichne mit  $e_i$  den  $i$ -ten Einheitsvektor. Dann ist

$$\begin{aligned}
 |u_{x_i}(x_0)| &= \left| \int_{B(x_0, \frac{r}{2})} u_{x_i}(y) dy \right| \\
 &= \frac{1}{\alpha(n) \left(\frac{r}{2}\right)^n} \left| \int_{B(x_0, \frac{r}{2})} \langle e_i, Du \rangle(y) dy \right| \\
 &= \frac{1}{\alpha(n) \left(\frac{r}{2}\right)^n} \left| \int_{B(x_0, \frac{r}{2})} \langle Dx_i, Du \rangle(y) dy \right| \\
 &\stackrel{\text{A.2}}{=} \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \left| - \int_{B(x_0, \frac{r}{2})} \underbrace{\Delta x_i}_{=0} \cdot u(y) dy + \int_{\partial B(x_0, \frac{r}{2})} \frac{\partial x_i}{\partial \nu} \cdot u(y) dS(y) \right| \\
 &\leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0, \frac{r}{2})} \underbrace{|\langle e_i, \nu \rangle|}_{\leq 1} \cdot |u(y)| dS(y) \\
 &\leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \cdot n\alpha(n) \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} \cdot \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{2}))} \\
 &= \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{2}))}.
 \end{aligned}$$

Für alle  $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{2})$  ist  $\bar{B}(x, \frac{r}{2}) \subset \bar{B}(x_0, r) \subset U$ , also können wir den Fall  $k = 0$  anwenden und erhalten

$$|u(x)| \leq \frac{C_0}{\left(\frac{r}{2}\right)^n} \cdot \|u\|_{L^1(B(x, \frac{r}{2}))} \leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \cdot \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}.$$

Damit gilt natürlich auch fürs Supremum

$$\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{2}))} \leq \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}.$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Hiermit führen wir unsere begonnene Berechnung fort:

$$\begin{aligned}
 |u_{x_i}(x_0)| &\leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{2}))} \\
 &\leq \frac{2^{n+1} \cdot n}{r^{n+1} \alpha(n)} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \\
 &= \frac{C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}. \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$k \geq 2$ . Die Formel sei für alle Multiindizes  $\beta$  mit  $|\beta| = k - 1$  bewiesen. Wähle nun einen Multiindex  $\beta$  so, dass

$$D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta$$

gilt. Wie im Fall  $k = 1$  berechnen wir dann

$$\begin{aligned}
 |D^\alpha u(x_0)| &= \left| \int_{B(x_0, \frac{r}{k})} D^\alpha u(y) dy \right| \\
 &= \left| \int_{B(x_0, \frac{r}{k})} (D^\beta u(y))_{x_i} dy \right| \\
 &\leq \frac{kn}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{k}))}.
 \end{aligned}$$

Da für alle  $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{k})$  gilt:

$$\bar{B}\left(x, \frac{k-1}{k} \cdot r\right) \subset \bar{B}(x_0, r) \subset U,$$

liefert die Induktionsannahme die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |D^\beta u(x)| &\leq \frac{C_{k-1}}{\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x, \frac{k-1}{k}r))} \\
 &\leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{n+k-1} \frac{1}{r^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}.
 \end{aligned}$$

Dies gilt natürlich auch für das Supremum all dieser  $x$ , und damit können wir die



begonnene Ungleichung fortsetzen:

$$\begin{aligned}
 |D^\alpha u(x_0)| &\leq \frac{kn}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{k}))} \\
 &\leq \frac{kn}{r} \cdot \frac{(2^{n+1}nk)^{k-1}}{\alpha(n) \left(\frac{k-1}{k}\right)^n} \cdot \frac{1}{r^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \\
 &= \underbrace{\frac{(2^{n+1} \cdot n \cdot k)^k}{\alpha(n)}}_{=C_k} \cdot \underbrace{\frac{\overbrace{\left(\frac{k}{k-1}\right)^n}^{\leq 2}}{2^{n+1}}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \\
 &\leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \cdot \|u\|_{L^1(B(x_0, r))},
 \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

**Satz 2.1.21 (Liouville)**

Sei  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  harmonisch. Ist  $u$  beschränkt, so ist  $u$  konstant.

*Beweis.* Sei  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für alle  $r > 0$ :

$$\begin{aligned}
 |u_{x_i}(x)| &\leq \frac{C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x, r))} \\
 &\leq \frac{C_1}{r^{n+1}} \cdot \underbrace{\text{vol}(B(x, r))}_{=\alpha(n)r^n} \cdot \|u\|_{L^\infty(B(x, r))} \\
 &= \frac{C'}{r} \|u\|_{L^\infty(B(x, r))} \\
 &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \cdot \underbrace{\|u\|_{L^\infty(B(x, r))}}_{< \infty} = 0.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $u_{x_i}(x) = 0$  für alle  $x_i$  ist und somit auch  $Du \equiv 0$ . Wenn die Ableitung konstant verschwindet, muss aber die Funktion  $u$  selbst konstant sein. □

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

### Satz 2.1.22 (Darstellungsformel für die Poisson-Gleichung)

Sei  $n \geq 3$ , sei  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist jede beschränkte Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  der Poisson-Gleichung  $\Delta u + f = 0$  von der Form

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

*Beweis.*

1. Zeige zunächst, dass

$$\tilde{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy$$

tatsächlich beschränkt ist. Wähle dazu ein  $R \geq 0$  derart, dass  $\text{supp } f \subset \bar{B}(0, R)$ .

Da  $\tilde{u}$  stetig ist, muss die Funktion auf  $\bar{B}(0, 2R)$  beschränkt sein. Wir brauchen also nur zu zeigen, dass  $\tilde{u}$  auch auf  $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2R)$  beschränkt ist.

Sei deshalb  $|x| \geq 2R$ . Für alle  $y \in \text{supp } f \subset \bar{B}(0, R)$  gilt dann  $|x-y| \geq R$  und, weil  $\Phi$  für  $n \geq 3$  streng monoton fallend ist,  $\Phi(x-y) \leq \Phi(R)$ . Nun berechnen wir

$$|\tilde{u}(x)| \leq \int_{\text{supp } f} \underbrace{|\Phi(x-y)|}_{\leq \Phi(R)} |f(y)| dy \leq \Phi(R) \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = C(n)R^{2-n} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Die Funktion  $\tilde{u}$  ist also tatsächlich beschränkt.

2. Sei  $u$  eine beschränkte Lösung der Poisson-Gleichung. Dann ist  $u - \tilde{u}$  ebenfalls beschränkt und löst die Laplace-Gleichung. Satz 2.1.21 sagt dann, dass  $u - \tilde{u} = C$  konstant ist.

□

### Satz 2.1.23 (Harnack-Ungleichung)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $V \subset\subset U$  offen und zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante  $C > 0$  derart, dass für jede harmonische Funktion  $u \in C^\infty(U)$  mit  $u \geq 0$  gilt:

$$\sup_V u \leq C \cdot \inf_V u.$$

Die Konstante  $C$  hängt dabei nur von  $V$ , nicht von  $u$  ab.

## 2.1. Die Laplace-Gleichung

*Beweis.* Wähle ein  $r > 0$  mit  $4r \leq \text{dist}(\bar{V}, \partial U)$ . Dies ist möglich, weil  $\bar{V}$  kompakt ist,  $\partial U$  abgeschlossen und  $\bar{V} \cap \partial U = \emptyset$ .

1. Für  $x, y \in V$  mit  $|x - y| \leq r$  gilt  $\bar{B}(y, r) \subset \bar{B}(x, 2r) \subset U$  und damit

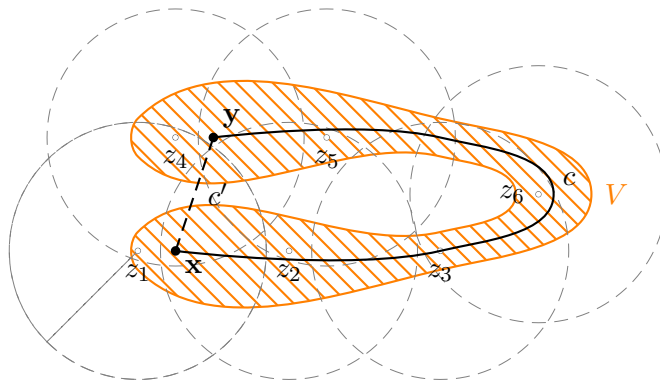
$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{B(x, 2r)} u(z) dz \\ &= \frac{1}{\alpha(n)(2r)^n} \int_{B(x, 2r)} u(z) dz \\ &\geq \frac{1}{\alpha(n)r^n \cdot 2^n} \int_{B(y, r)} u(z) dz \\ &= \frac{1}{2^n} \int_{B(y, r)} u(z) dz \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot u(y) \\ \Rightarrow u(y) &\leq 2^n u(x). \end{aligned}$$

Wählen wir zwei Folgen von Punkten  $x_i, y_i \in V$  so, dass  $u(x_i) \rightarrow \inf_V u$  und  $u(y_i) \rightarrow \sup_V u$ , so gilt die obige Abschätzung für jedes Paar  $(u(x_i), u(y_i))$  und somit auch für den Grenzwert.  $\checkmark$

2. Seien nun  $x, y \in V$  beliebig. Überdecke die kompakte Menge  $\bar{V}$  mit Bällen  $\{B(z, \frac{r}{4}) \mid z \in \bar{V}\}$  und wähle daraus eine endliche Teilüberdeckung  $\{B(z_i, \frac{r}{4}) \mid i = 1, \dots, N\}$ .

Betrachte nun die Menge  $V' := \bigcup_{i=1}^N B(z_i, \frac{r}{4}) \supset V$ . Nun gilt immerhin  $\text{dist}(\bar{V}', \partial U) \geq \text{dist}(\bar{V}, \partial U) - \frac{r}{4} > 3r$ , weshalb nach wie vor  $\bar{B}(x, 2r) \subset U$  für alle  $x \in V'$  gilt. Wir können also Beweisteil 1 auch auf Punkte aus  $V'$  mit Abstand kleiner oder gleich  $r$  anwenden.

Wähle einen Weg  $c$  von  $x$  nach  $y$  in  $V$ . Dies ist möglich, da  $V$  zusammenhängend ist. In  $V'$  lässt sich dieser Weg so zu einem Weg  $c'$  modifizieren, dass jedes des  $B(z_i, \frac{r}{4})$  höchstens einmal durchlaufen wird (indem wir überflüssige „Schleifen“ entfernen).



## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

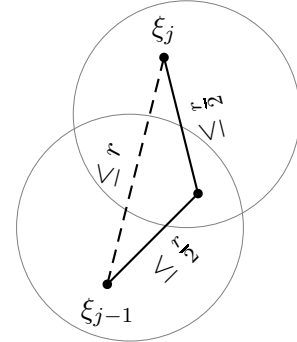
Seien  $z_{i_1}, \dots, z_{i_M}$  die Mittelpunkte der Bälle, die entlang  $c'$  durchlaufen werden, und zwar in der Durchlaufreihenfolge. Der Schnitt zweier solcher Bälle mit aufeinanderfolgenden Indizes ist nicht leer. Da jeder Ball höchstens einmal durchlaufen wird, ist  $M \leq N$ . Setze  $\xi_1 := x$ ,  $\xi_2 := z_{i_2}, \dots, \xi_{M-1} := z_{i_{M-1}}, \xi_M := y$ .

Da der Durchmesser eines dieser Bälle  $\frac{r}{2}$  ist, können Punkte in zwei aufeinanderfolgenden Bällen höchstens den Abstand  $r$  haben. Insbesondere gilt

$$|\xi_{j-1} - \xi_j| \leq r \quad \forall j,$$

woraus mit Beweisteil 1 folgt:

$$\begin{aligned} u(y) &= u(\xi_M) \\ &\leq 2^n u(\xi_{M-1}) \\ &\leq 2^n \cdot (2^n u(\xi_{M-2})) = 2^{2n} u(\xi_{M-1}) \\ &\vdots \\ &\leq 2^{n(M-1)} u(\xi_1) \\ &= 2^{n(M-1)} u(x) \\ &\leq 2^{n(N-1)} u(x). \end{aligned}$$



Damit gilt auch für das Supremum respektive Infimum:

$$\sup_V u \leq 2^{n(N-1)} \inf_V u.$$

□

**Bemerkung 2.1.24.** Die Harnack-Ungleichung gilt tatsächlich nur für  $V \subset\subset U$ , im Allgemeinen nicht für  $U$  selbst. Der Beweis geht schief, weil wir für größer werdendes  $V$  auch  $r \searrow 0$  gehen lassen müssen, dabei dann aber die Anzahl  $N$  der zur Überdeckung von  $V$  notwendigen Bälle gegen  $\infty$  strebt.

### Satz 2.1.25

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $u \in C^2(U)$  harmonisch. Dann ist  $u$  analytisch auf  $U$ .

## 2.1. Die Laplace-Gleichung

*Beweis.* Wir wissen bereits aus Satz 2.1.18, dass  $u$  glatt ist. Wir können also  $u$  um ein  $x_0 \in U$  in eine Taylorreihe entwickeln:

$$\sum_{\alpha} \frac{D^{\alpha}u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^{\alpha},$$

wobei  $\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$  und  $\xi^{\alpha} := \xi_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{\alpha_n}$ .

Wir betrachten das Restglied  $k$ -ter Ordnung:

$$\begin{aligned} R_k(x) &:= u(x) - \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{D^{\alpha}u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^{\alpha} \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^{\alpha}u(x_0 + \theta \cdot (x - x_0))}{\alpha!} (x - x_0)^{\alpha} \end{aligned}$$

für ein  $\theta \in [0, 1]$ , welches von  $x$  abhängt.

Setze  $\eta := \frac{1}{2^{n+1} \cdot n^2 \cdot e} < 1$ . Wähle  $r > 0$  so, dass  $\bar{B}(x_0, 2r) \subset U$ . Für  $x$  mit  $|x - x_0| < \eta \cdot r < r$  ist dann auch  $\bar{B}(x_0 + \theta(x - x_0), r) \subset \bar{B}(x_0, 2r) \subset U$  und es gilt:

$$\begin{aligned} |R_k(x)| &\leq \sum_{|\alpha|=k} \frac{|D^{\alpha}u(x_0 + \theta(x - x_0))|}{\alpha!} |(x - x_0)^{\alpha}| \\ &\stackrel{2.1.20}{\leq} \sum_{|\alpha|=k} \frac{C_k \|u\|_{L^1(B(x_0 + \theta(x - x_0), r))}}{r^{n+k} \alpha!} |(x - x_0)^{\alpha}| \\ &\leq \sum_{|\alpha|=k} \frac{C_k \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))}}{r^{n+k} \alpha!} |(x - x_0)^{\alpha}|. \end{aligned}$$

Auch den Term  $|(x - x_0)^{\alpha}|$  können wir abschätzen, denn es gilt für einen beliebigen Vektor  $\xi \in \mathbb{R}^n$ :

$$|\xi^{\alpha}| = \prod_{i=1}^n \underbrace{|\xi_i|}_{\leq |\xi|}^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^n |\xi|^{\alpha_i} = |\xi|^{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = |\xi|^{|\alpha|}.$$

Damit setzen wir unsere begonnene Abschätzung fort:

$$\begin{aligned} |R_k| &\leq \sum_{|\alpha|=k} \frac{C_k \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))}}{r^{n+k} \alpha!} \underbrace{|x - x_0|^k}_{\leq \eta r} \\ &\leq \frac{(2^{n+1} \cdot n \cdot k)^k}{\alpha(n)} \cdot \eta^k \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))} \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}. \end{aligned}$$

An dieser Stelle wäre es hilfreich, wenn wir die Summe explizit kennen könnten. Aber das tun

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

wir ja, nämlich durch den Multinomialssatz:

$$\begin{aligned}
 n^k &= \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n\text{-mal}}^k \\
 &= \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} (1, \dots, 1)^\alpha \\
 &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \cdot 1 \\
 &= k! \cdot \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \\
 \Rightarrow \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} &= \frac{n^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

Setzen wir dies in unsere Abschätzung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 |R_k(x)| &\leq \frac{(2^{n+1} \cdot n^2 \cdot \eta \cdot k)^k}{\alpha(n) \cdot r^n \cdot k!} \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))} \\
 &= \underbrace{(2^{n+1} \cdot n^2 \cdot \eta \cdot e)^k}_{=1} \cdot \frac{k^k}{k! \cdot e^k} \cdot \frac{\|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))}}{\alpha(n) \cdot r^n} \\
 &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,
 \end{aligned}$$

weil nach der Stirling'schen Formel  $\frac{k^{k+1/2}}{k!e^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (2\pi)^{-1/2}$  gilt. (Deren Beweis ist nachzulesen z.B. in [4, S.244].)  $\square$

### Korollar 2.1.26 (Starke Eindeutigkeitseigenschaft)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend. Seien  $u, \tilde{u} \in C^\infty(U)$  harmonisch. Falls für einen Punkt  $x_0 \in U$  gilt:

$$D^\alpha u(x_0) = D^\alpha \tilde{u}(x_0) \quad \forall \alpha,$$

dann ist  $u = \tilde{u}$ .

*Beweis.* Die starke Eindeutigkeitseigenschaft ist eine Eigenschaft aller analytischen Funktionen: Aus  $D^\alpha(u - \tilde{u})(x_0) = 0$  für alle  $\alpha$  folgt, dass die Taylorreihe von  $u - \tilde{u}$  um  $x_0$  gegen die Nullfunktion konvergiert, und demnach ist  $u - \tilde{u} \equiv 0$ .  $\square$

Wir wollen im Folgenden noch einmal das Randwertproblem für die Poisson-Gleichung untersuchen:

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & \text{auf } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases} \quad (2.5)$$

Aus Satz 2.1.17 wissen wir bereits, dass dieses Randwertproblem höchstens eine Lösung besitzt. Nun interessiert uns, ob diese Lösung tatsächlich existiert und ob wir diese für konkrete  $U, f, g$  sogar explizit angeben können.

Sei also  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und mit stückweise glattem Rand. Sei  $u \in C^2(U)$ ,  $x \in U$ . Sei  $\varepsilon > 0$  so gewählt, dass  $\bar{B}(x, \varepsilon) \subset U$ . Setze  $V_\varepsilon := U \setminus B(x, \varepsilon)$ . Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_{V_\varepsilon} \Phi(y-x) \cdot \Delta u(y) dy &\stackrel{\text{A.2}}{=} - \int_{V_\varepsilon} \langle D\Phi(y-x), Du(y) \rangle dy \\ &\quad + \int_{\partial V_\varepsilon} \Phi(y-x) \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \\ &\stackrel{\text{A.2}}{=} \int_{V_\varepsilon} \underbrace{\Delta \Phi(y-x)}_{=0} \cdot u(y) dy - \int_{\partial V_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) u(y) dS(y) \\ &\quad + \int_{\partial V_\varepsilon} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \\ &= \int_{\partial V_\varepsilon} \left( \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) u(y) \right) dS(y). \end{aligned}$$

Der Rand von  $V_\varepsilon$  besteht aus zwei Komponenten:  $\partial U$  und  $\partial B(x, \varepsilon)$ , wobei ein äußerer Normalenvektor von  $\partial V_\varepsilon$  an  $\partial B(x, \varepsilon)$  ins Innere des Balles weist. Wir wollen am Ende  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen lassen, weil dann das Integral über  $V_\varepsilon$  gegen das Integral über  $U$  konvergiert. Deshalb untersuchen wir die Abhängigkeit des obigen Integrals von  $\varepsilon$ , und diese steckt ausschließlich in der Randkomponente  $\partial B(x, \varepsilon)$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \right| &\leq C_1 \cdot \int_{\partial B(x, \varepsilon)} |\Phi(y-x)| dS(y) \\ &= C_2 \cdot \varepsilon^{n-1} \cdot \begin{cases} |\log(\varepsilon)|, & n = 2; \\ \varepsilon^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0, \text{ und} \\ \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)}_{=-\Phi'(\varepsilon)} u(y) dS(y) &= \frac{\varepsilon^{1-n}}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) dS(y) \\ &= \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u(x). \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Beim Grenzübergang  $\varepsilon \searrow 0$  erhalten wir also

$$\begin{aligned} \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy &= \int_{\partial U} \left( \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) u(y) \right) dS(y) - u(x) \quad (2.6) \\ \Rightarrow u(x) &= - \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) dy \\ &\quad + \int_{\partial U} \left( \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) u(y) \right) dS(y). \end{aligned}$$

für alle  $u \in C^2(U)$ .

Das ist ja schon fast das, was wir haben wollten: Um das Integral über das Innere von  $U$  zu bestimmen, benötigen wir lediglich  $\Delta u$ , und das ist uns beim Randwertproblem (2.5) gegeben. Im Randintegral brauchen wir zwar  $u$  selbst – aber auch hier gibt uns (2.5) vor, welche Werte  $u$  auf dem Rand annimmt.

Leider genügt dies aber nicht, denn der Randterm enthält auch noch die Normalenableitung von  $u$ , und um die zu kennen, müssten auch Werte von  $u$  in einer Umgebung des Randes bekannt sein. Die Normalenableitung ist also noch zu eliminieren.

Nehmen wir an, wir haben eine Korrekturfunktion  $\varphi^x : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$\begin{cases} \varphi^x(y) = \Phi(y-x) & \forall y \in \partial U, \\ \Delta_y \varphi^x(y) = 0 & \text{auf } U. \end{cases}$$

Im Gegensatz zur Fundamentallösung  $\Phi(y-x)$  hat  $\varphi^x$  keinen Pol in  $x$ . Deshalb können wir ohne Umweg über  $V_\varepsilon$  direkt durch zweimalige Anwendung der Green-Formel bestimmen:

$$\int_U \varphi^x(y) \Delta u(y) dy = \int_{\partial U} \left( \varphi^x(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu}(y) u(y) \right) dS(y). \quad (2.7)$$

Subtrahieren wir nun Gleichung (2.7) von Gleichung (2.6) und setzen der besseren Lesbarkeit wegen die Differenz  $\Phi(y-x) - \varphi^x(y) =: G(x,y)$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_U G(x,y) \Delta u(y) dy &= - \int_{\partial U} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) u(y) dS(y) - u(x) \\ \Rightarrow u(x) &= - \int_U G(x,y) \Delta u(y) dy \\ &\quad - \int_{\partial U} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) u(y) dS(y). \end{aligned}$$

Wir haben die gewünschte Gleichung erhalten. (Allerdings nur unter der Voraussetzung, dass solch eine Korrekturfunktion  $\varphi^x$  existiert.)



**Definition 2.1.27.** Sei  $\varphi^x$  eine Korrekturfunktion für  $U$ , und zwar existiere eine solche Funktion für alle  $x \in U$ . Dann heißt

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \varphi^x(y)$$

**Greenfunktion von  $U$ .**

Wir fassen unsere Erkenntnisse aus obiger Herleitung zusammen:

**Satz 2.1.28**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und mit stückweise glattem Rand. Sei  $G$  eine Greenfunktion für  $U$ . Dann gilt für  $u \in C^2(U)$  mit  $\Delta u + f = 0$  auf  $U$  und  $u = g$  auf  $\partial U$ :

$$u(x) = \int_U G(x, y)f(y) dy - \int_{\partial U} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)g(y) dS(y) \quad \forall x \in U.$$

**Bemerkung 2.1.29.** In Distributionenschreibweise gilt für  $G$ :

$$\begin{cases} \Delta_y G(x, \cdot) + \delta_x = 0 & \text{auf } U, \\ G(x, \cdot) = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases}$$

**Satz 2.1.30 (Symmetrie der Greenfunktionen)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und mit stückweise glattem Rand. Sei  $G$  eine Greenfunktion von  $U$ . Dann gilt für alle  $x, y \in U$  mit  $x \neq y$ :

$$G(x, y) = G(y, x).$$

*Beweis.* Seien  $x, y \in U$ ,  $x \neq y$ . Wähle  $0 < \varepsilon < \min\{\text{dist}(x, \partial U), \text{dist}(y, \partial U), \frac{1}{2}|x - y|\}$ . Durch diese Wahl sind die  $\varepsilon$ -Bälle um  $x$  bzw.  $y$  disjunkt und liegen vollständig in  $U$ . Setze  $v(z) := G(x, z)$  und  $w(z) := G(y, z)$ . Die Funktion  $v$  ist auf  $\bar{U} \setminus \{x\}$  definiert, die Funktion  $w$  auf  $\bar{U} \setminus \{y\}$ . Sowohl  $v$  also auch  $w$  sind harmonisch und verschwinden

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

auf  $\partial U$ . Setze  $V_\varepsilon := U \setminus (B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon))$ . Nun liefert uns die Harmonizität zusammen mit der Green'schen Formel:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{V_\varepsilon} v(z) \Delta w(z) \, dz \\
&\stackrel{\text{A.2}}{=} - \int_{V_\varepsilon} \langle Dv(z), Dw(z) \rangle \, dz + \int_{\partial V_\varepsilon} v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) \, dS(z) \\
&\stackrel{\text{A.2}}{=} \int_{V_\varepsilon} \underbrace{\Delta v(z)}_{=0} \cdot w(z) \, dz - \int_{\partial V_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) w(z) \, dS(z) + \int_{\partial V_\varepsilon} v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) \, dS(z) \\
&= \int_{\partial V_\varepsilon} \left( v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) w(z) \right) \, dS(z) \\
&= \int_{\partial U} \underbrace{\left( v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) w(z) \right)}_{=0} \, dS(z) \\
&\quad + \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \left( v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) w(z) \right) \, dS(z) \\
&\quad + \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \left( v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) w(z) \right) \, dS(z) \\
&\Rightarrow \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \left( \frac{\partial v}{\partial \nu} w - \frac{\partial w}{\partial \nu} v \right) \, dS = \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \left( \frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w \right) \, dS. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Nun untersuchen wir für alle auftretenden Terme das Verhalten beim Grenzübergang  $\varepsilon \searrow 0$ :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) v(z) \, dS(z) \right| &\leq C_1 \cdot \int_{\partial B(x, \varepsilon)} |v(z)| \, dS(z) \\
&\leq C_1 \int_{\partial B(x, \varepsilon)} (|\Phi(z-x)| + |\varphi^x(z)|) \, dS(z) \\
&\leq C_2 \cdot \varepsilon^{n-1} \cdot \left( \begin{cases} |\log \varepsilon|, & n=2 \\ \varepsilon^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases} + C_3 \right) \\
&\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\int_{\partial B(y, \varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} \cdot w \, dS \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0.$$

Für die übrigen zwei Terme bestimmt man

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} \cdot w \, dS &= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left( -\Phi'(\varepsilon) + \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu} \right) \cdot w \, dS \\ &= \underbrace{\frac{\varepsilon^{1-n}}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} w \, dS}_{= f_{\partial B(x,\varepsilon)} w \, dS} + \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \underbrace{\frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu} \cdot w \, dS}_{\in C^\infty(U)} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} w(x) + 0 \end{aligned}$$

und analog

$$\int_{\partial B(y,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} \cdot v \, dS \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} v(y).$$

In Gleichung (2.8) eingesetzt ergibt dies

$$w(x) = v(y),$$

was zu zeigen war. □

**Bemerkung 2.1.31 (Eigenschaften der Greenfunktion).**

1. Weil die Lösungen des Randwertproblems für die Poisson-Gleichung gemäß Satz 2.1.17 eindeutig sind, gibt es für jedes beschränkte offene  $U \subset \mathbb{R}^n$  höchstens eine Greenfunktion.
2. Der Definitionsbereich der Greenfunktion  $G$  ist  $(\bar{U} \times \bar{U}) \setminus \{(x, x) \mid x \in \bar{U}\}$ .
3. Nach Definition ist  $G$  harmonisch (und damit auch analytisch) in  $y$ , d.h. die Funktion  $y \mapsto G(x, y)$  ist für festes  $x$  harmonisch auf  $U \setminus \{x\}$ .
4. Wegen Satz 2.1.30 ist  $G$  auch harmonisch in  $x$ .

**Beispiel 2.1.32.** Wir bestimmen die Greenfunktion für  $U = B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ .

1. Betrachte zunächst  $x = 0$ . Für  $y \in \partial U$  ist

$$\Phi(y - 0) = \Phi(R) = \begin{cases} -\frac{\log|R|}{2\pi}, & n = 2; \\ \frac{R^{2-n}}{n(n-2)\alpha(n)}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Die Funktion  $\varphi^0(y) \equiv \Phi(R)$  ist offensichtlich harmonisch auf  $U$  und stimmt auf  $\partial U$  mit  $\Phi(y - 0)$  überein. Wir erhalten also für die Greenfunktion:

$$G(0, y) = \Phi(y) - \Phi(R) \quad \forall y \in B(0, R).$$

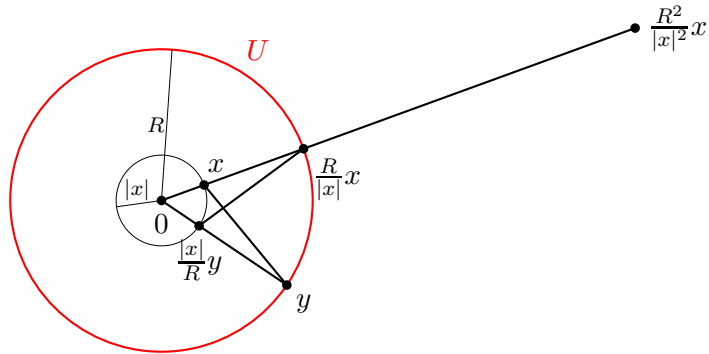
## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Somit gilt für eine Lösung  $u$  des Randwertproblems (2.5) in Dimension  $n \geq 3$ :

$$\begin{aligned} u(0) &= - \int_{\partial B(0,R)} \Phi'(R) \cdot g(y) dS(y) + \int_{B(0,R)} (\Phi(y) - \Phi(R)) f(y) dy \\ &= \frac{R^{1-n}}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,R)} g(y) dS(y) + \int_{B(0,R)} \frac{y^{2-n} - R^{2-n}}{n(n-2)\alpha(n)} f(y) dy \\ &= \int_{\partial B(0,R)} g(y) dS(y) + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0,R)} (y^{2-n} - R^{2-n}) f(y) dy. \end{aligned}$$

Hier sehen wir eine Verallgemeinerung der Mittelwertegenschaft harmonischer Funktionen: Das zweite Integral ist ein Korrekturterm, der für harmonische Funktionen verschwindet.

2. Sei nun  $x \neq 0$ .



Eine rein geometrische Überlegung bringt uns zu dem Schluss, dass für jedes  $y \in \partial B(0, R)$

$$|y - x| = \left| \frac{|x|}{R} y - \frac{R}{|x|} x \right|$$

gilt, und dies lässt sich auch algebraisch schnell verifizieren. Damit erhalten wir aber

$$\Phi(y - x) = \Phi \left( \frac{|x|}{R} y - \frac{R}{|x|} x \right) = \Phi \left( \frac{|x|}{R} \left( y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right) \right),$$

und diese Funktion ist harmonisch in  $y$  auf ganz  $U$ , da der Pol bei  $y = \frac{R^2}{|x|^2} x$  außerhalb von  $U$  liegt. Wir wählen also für  $x \neq 0$

$$\varphi^x(y) = \Phi \left( \frac{|x|}{R} \left( y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right) \right),$$

was, wie eben beründet, auf  $U$  harmonisch ist und auf  $\partial U$  mit  $\Phi(y - x)$  übereinstimmt. Für  $x \neq 0$  ist somit die Greenfunktion von  $U$  gegeben durch

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi \left( \frac{|x|}{R} \left( y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right) \right).$$

Wenn wir nun das Randwertproblem lösen möchten, benötigen wir dazu die Normalenableitung von  $G$ . Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y-x) &= \Phi'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial y_i} \text{ mit } r = |y-x| \\
 &= -\frac{r^{1-n}}{n\alpha(n)} \cdot \frac{y_i - x_i}{r} \\
 &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n}; \\
 \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi\left(\frac{|x|}{R} \left(y - \frac{R^2}{|x|^2} x\right)\right) &= \frac{|x|}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \left(\frac{|x|}{R} \left(y - \frac{R^2}{|x|^2} x\right)\right) \\
 &= \frac{|x|}{R} \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{-\frac{|x|}{R} \left(y_i - \frac{R^2}{|x|^2} x_i\right)}{\left|\frac{|x|}{R} y - \frac{R}{|x|} x\right|^n} \\
 &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{-\frac{|x|^2}{R^2} y_i + x_i}{|x-y|^n} \\
 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_i} G(x,y) &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i - y_i + \frac{|x|^2}{R^2} y_i - x_i}{|x-y|^n} \\
 &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\frac{|x|^2}{R^2} - 1}{|x-y|^2} y_i.
 \end{aligned}$$

Nun können wir die Normalenableitung von  $G$  bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \nu} G(x,y) &= \langle \nabla_y G(x,y), \nu \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} G(x,y) \cdot \frac{y_i}{R} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{R} \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\frac{|x|^2}{R^2} - 1}{|x-y|^2} y_i \\
 &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\frac{|x|^2}{R^2} - 1}{|x-y|^2} \frac{R^2}{R} \\
 &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^n \cdot R}.
 \end{aligned}$$

Also gilt für Lösungen des Randwertproblems (2.5) mit  $f = 0$ , d.h. für harmonische  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u|_{\partial U} = g$ :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= - \int_{\partial B(0,R)} \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^n R} g(y) dS(y) \\
 &= \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)R} \int_{\partial B(0,R)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y)
 \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

$$= \int_{\partial B(0,R)} K(x,y) \cdot g(y) dS(y) \quad (2.9)$$

mit

$$K(x,y) := \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n) \cdot R} \frac{1}{|x-y|^n}. \quad (2.10)$$

Auch diese Gleichung lässt sich als Verallgemeinerung der Mittelwerteigenschaft interpretieren: Der Funktionswert von  $u$  an einer beliebigen Stelle  $x$  im Inneren eines Balles ist ein mit  $K$  gewichtetes Mittel über die Funktionswerte von  $u$  auf dem Rand des Balles. Dabei werden die Randpunkte, die sich näher an  $x$  befinden, stärker gewichtet als die weiter entfernten.

**Definition 2.1.33.** Die in Gleichung (2.10) definierte Funktion

$$K : (\bar{U} \times \bar{U}) \setminus \{(x,x) \mid x \in U\} \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt **Poissonkern von  $B(0,R)$** .

**Bemerkung 2.1.34.** Für eine gegebene Funktion  $g \in C^0(\partial B(0,R))$  definiert

$$u(x) := \int_{\partial B(0,R)} K(x,y)g(y) dS(y)$$

eine Funktion  $u : B(0,R) \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktion  $u$  ist glatt auf  $B(0,R)$ , da die Differentiation unter das Integral unendlich oft möglich ist.
2. Die Funktion  $u$  ist harmonisch auf  $B(0,R)$ , da die Greenfunktion harmonisch ist.
3. Für alle  $x \in \partial B(0,R)$  gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x' \\ x \in B(0,R)}} u(x) = g(x'),$$

d.h.  $u$  besitzt eine stetige Fortsetzung  $\tilde{u}$  auf  $B(0,R)$  derart, dass  $\tilde{u}|_{\partial B(0,R)} = g$ . Dies lässt sich anschaulich nachvollziehen, wenn man die gewichtete Mittelwerteigenschaft 2.9 betrachtet: Kommt  $x$  in die Nähe eines Randpunktes von  $\partial B(0,R)$ , wird der Wert von  $g$  an diesem Randpunkt bei der Mittelung zunehmend stärker gewichtet, bis schließlich andere Randwerte keine Rolle mehr spielen.

Am Ende dieses Abschnittes wollen wir noch eine Verbindung zum Variationskalkül herstellen.

**Definition 2.1.35.** Sei  $U \in \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und mit stückweise glattem Rand. Sei  $g \in C^0(\partial U)$  und  $f \in C^0(U)$ . Setze

$$\mathcal{F}_g := \{u \in C^2(\bar{U}) \mid u|_{\partial U} = g\}$$

und definiere die **Dirichlet-Energie** für  $u \in \mathcal{F}_g$ :

$$E[u] := \int_U \left( \frac{1}{2} |Du|^2 - uf \right) dx.$$

**Satz 2.1.36 (Dirichlet-Prinzip)**

Seien  $U, f, g$  wie in Definition 2.1.35,  $u \in C^2(\bar{U})$ . Dann sind äquivalent:

1. Die Funktion  $u$  löst das Randwertproblem (2.5), d.h.

$$\Delta u + f = 0 \text{ auf } U \text{ und } u|_{\partial U} = g;$$

2. Die Funktion  $u$  hat unter allen Funktionen aus  $\mathcal{F}_g$  die kleinste Dirichlet-Energie, d.h.

$$u \in \mathcal{F}_g \text{ und } E[u] = \min_{v \in \mathcal{F}_g} E[v].$$

*Beweis.*

2.  $\Rightarrow$  1.

Ist  $u \in \mathcal{F}_g$ , so ist  $u|_{\partial U} = g$  nach Definition von  $\mathcal{F}_g$ . Bleibt also nur  $\Delta u + f = 0$  zu zeigen. Sei  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ . Setze  $u_t := u + t \cdot \varphi$ . Dann ist  $u_t \in \mathcal{F}_g$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Wir bestimmen die Dirichlet-Energie von  $u_t$ :

$$\begin{aligned} E[u_t] &= \int_U \left( \frac{1}{2} |Du + tD\varphi|^2 - (u + t\varphi)f \right) dx \\ &= t^2 \int_U \frac{1}{2} |D\varphi|^2 dx + t \int_U (\langle Du, D\varphi \rangle - \varphi f) dx + \int_U \left( \frac{1}{2} |Du|^2 - uf \right) dx. \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Nach Voraussetzung besitzt die Funktion  $t \rightarrow E[u_t]$  in  $t = 0$  ein Minimum, d.h.

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} E[u_t]|_{t=0} \\
 &= \int_U (\langle Du, D\varphi \rangle - \varphi f) dx \\
 &\stackrel{\text{A.2}}{=} - \int_U \varphi \Delta u dx + \int_{\partial U} \underbrace{\varphi}_{=0 \text{ auf } \partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(x) - \int_U \varphi f dx \\
 &= - \int_U \underbrace{(\Delta u + f)}_{\in C^0(U)} \cdot \varphi dx. \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

Wäre nun  $\Delta u + f \not\equiv 0$  auf  $U$ , dann gäbe es ein  $x_0 \in U$  mit  $(\Delta u + f)(x_0) \neq 0$ . Sei o.B.d.A.  $(\Delta u + f)(x_0) > 0$ . Aufgrund der Stetigkeit ist dann auch in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$  die Funktion  $\Delta u + f$  positiv.

Wähle ein  $\varphi \in C_c^\infty(U)$  mit  $\varphi > 0$  auf  $B(0, \varepsilon)$  und  $\varphi \equiv 0$  auf  $U \setminus B(0, \varepsilon)$ . Dann ist

$$\int_U (\Delta u + f) \varphi dx = \int_{B(0, \varepsilon)} (\Delta u + f) \varphi dx > 0,$$

und das steht im Widerspruch zu (2.11). Somit erfüllt  $u$  die Gleichung  $\Delta u + f = 0$ . ✓

1.  $\Rightarrow$  2.

Wieder folgt  $u \in \mathcal{F}_g$  qua Definition aus  $u|_{\partial U} = g$  und der Regularitätsvoraussetzung an  $u$ . Bleibt zu zeigen, dass für alle  $v \in \mathcal{F}_g$  gilt:  $E[v] \leq E[u]$ .

Sei dazu  $v \in \mathcal{F}_g$  beliebig. Dann ist  $(u - v)|_{\partial U} = 0$ , und deshalb folgt mit der Green'schen Formel:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_U (\Delta u + f) \cdot (u - v) dx \\
 &\stackrel{\text{A.2}}{=} - \int_U (\langle Du, D(u - v) \rangle - f \cdot (u - v)) dx \\
 &= - \int_U (|Du|^2 - \langle Du, Dv \rangle - f \cdot (u - v)) dx
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 \int_U (|Du|^2 - fu) dx &= \int_U (\langle Du, Dv \rangle - f \cdot v) dx \\
 &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_U \underbrace{(|Du| \cdot |Dv| - fv)}_{\leq \frac{1}{2}(|Du|^2 + |Dv|^2)} dx \\
 &\leq \int_U \left( \frac{1}{2}|Du|^2 + \frac{1}{2}|Dv|^2 - f \cdot v \right) dx,
 \end{aligned}$$



und daraus liest man direkt das gewünschte Resultat ab:

$$E[u] = \int_U \left( \frac{1}{2} |Du|^2 - fu \right) dx \leq \int_u \left( \frac{1}{2} |Dv|^2 - fv \right) dx = E[v]. \quad \square$$

## 2.2. Die Wärmeleitungsgleichung

**Definition 2.2.1.** Für  $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$  heißt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = 0$$

**Wärmeleitungsgleichung** oder **Diffusionsgleichung**.

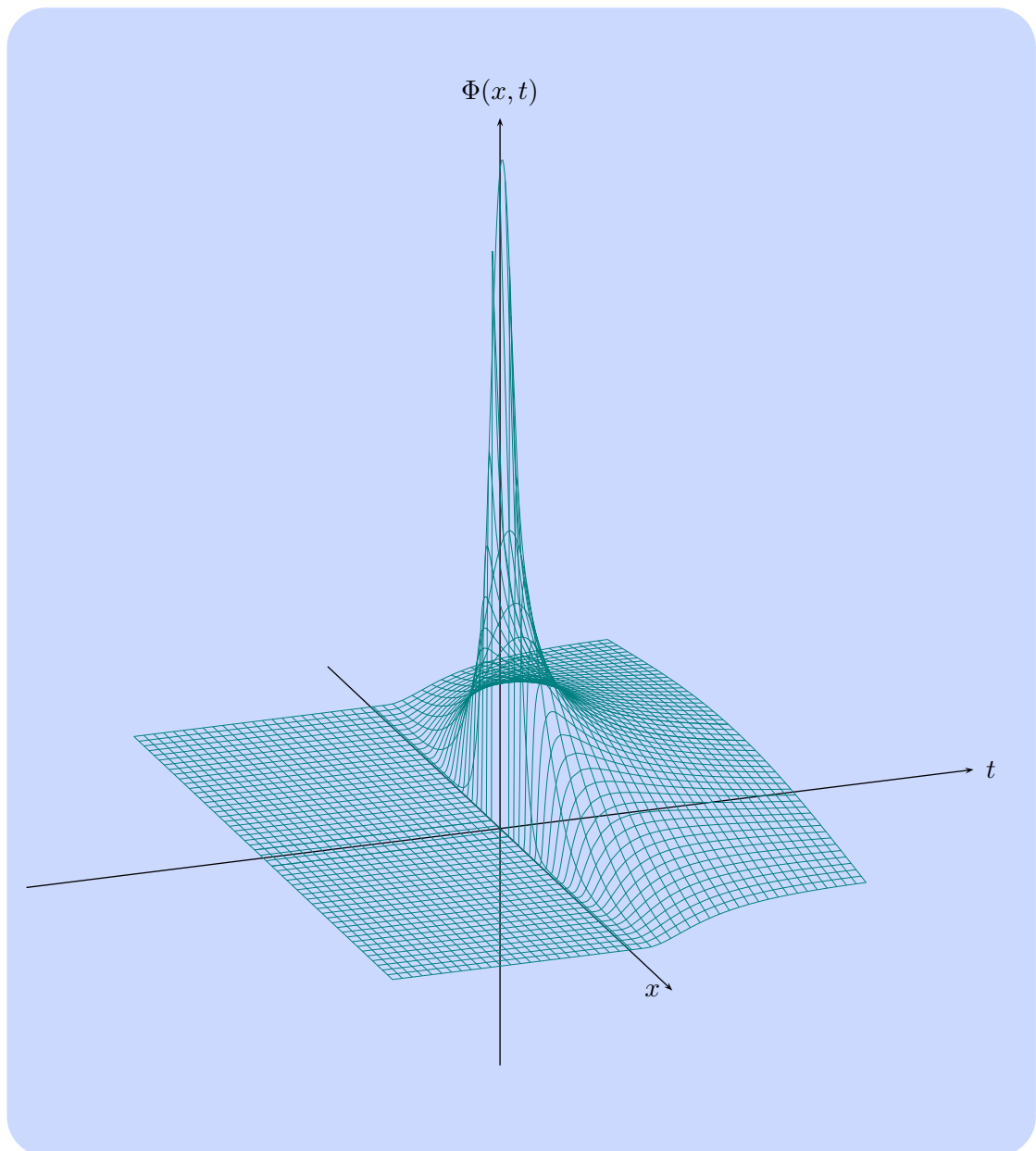
**Bemerkung 2.2.2.** Die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung beschreiben Diffusionsvorgänge, z.B. die Konzentration eines Gases in einem Gasgemisch oder die Temperatur eines Materials zum Zeitpunkt  $t$ . Demnach erwarten wir, dass sich für eine Lösung  $u(x, t)$  die Werte für verschiedene  $x$  mit fortschreitender Zeit immer weiter angleichen.

**Definition 2.2.3.** Die Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  vermöge

$$\Phi(x, t) := \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \text{ oder } t = 0, x \neq 0 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung**.

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen



**Bemerkung 2.2.4.** Die Fundamentallösung  $\Phi$  ist glatt auf ihrem Definitionsbereich.

**Bemerkung 2.2.5.** Die Fundamentallösung ist tatsächlich eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ : Für  $t < 0$  ist die Aussage ohnehin

klar, und für  $t > 0$  kann man schnell nachrechnen:

$$\begin{aligned}\Delta_x \Phi &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \right) \\ &= \Phi(r, t) \cdot \left( \left( \frac{2r}{4t} \right)^2 - \frac{2}{4t} - \frac{n-1}{r} \frac{2r}{4t} \right) \\ &= \Phi(r, t) \cdot \left( \left( \frac{r}{2t} \right)^2 - \frac{n}{2t} \right), \text{ während} \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi &= \Phi(r, t) \cdot \left( -\frac{n}{2t} + \frac{r^2}{4t^2} \right),\end{aligned}$$

also gilt für  $t > 0$ :  $\Delta \Phi = \Phi_t$ .

**Bemerkung 2.2.6.** Wir können die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung so interpretieren, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Temperatur überall auf dem  $\mathbb{R}^n$  gleich 0, außer im Ursprung, wo sie unendlich ist. Die Fundamentallösung beschreibt dann, wie sich die Temperatur ausbreitet. Wegen

$$\Phi(x, t) > 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit unendlich groß; bereits nach beliebig kurzer Zeit  $t > 0$  hat sich etwas Wärme in beliebig weit vom Ursprung entfernte Punkte ausgebreitet. Insbesondere ist die Wärmeleitungsgleichung nicht mit der Relativitätstheorie verträglich.

**Bemerkung 2.2.7.** Für festes  $t > 0$  können wir die Fundamentallösung integrieren:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{4t}} dx_1 \cdots dx_n \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{x_i^2}{4t}} dx_1 \cdots dx_n \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi \right)^n \\ &= \left( (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi \right)^n.\end{aligned}$$

Substituieren wir  $\eta := \frac{\xi}{2\sqrt{t}}$ , dann erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = \left( \pi^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta}_{=\sqrt{\pi}} \right)^n = 1.$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

**Bemerkung 2.2.8.** Für festes  $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t - s)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(y, s)\}$ .

Sei  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Wir wollen nun eine Lösung des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung finden, also eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty); \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.12)$$

### Satz 2.2.9

Sei  $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann definiert für  $t > 0$  die Funktion

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) \cdot g(y) dy$$

eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ , und für alle  $x' \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x',0) \\ t > 0}} u(x, t) = g(x').$$

*Beweis.*

1. Sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) =: (\tilde{\alpha}, \alpha_{n+1})$  ein Multiindex. Sei  $\delta > 0$ . Die partiellen Ableitungen von  $\Phi$  haben für  $t > 0$  die Form

$$D^\alpha \Phi(x, t) = t^{-|\tilde{\alpha}| - 2\alpha_{n+1}} \cdot P_\alpha(x, t) \cdot \Phi(x, t),$$

wobei  $P_\alpha(x, t)$  ein Polynom ist. Die maximal auftretende  $t$ -Potenz in  $P_\alpha(x, t)$  ist dabei kleiner als  $|\tilde{\alpha}| + 2\alpha_{n+1}$ . Demnach ist  $D^\alpha \Phi$  auf  $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$  beschränkt und wir dürfen beim Ableiten von  $u$  auf diesem Bereich unendlich oft unter dem Integral differenzieren. Deshalb ist  $u$  glatt auf  $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ .

Da dies für jedes  $\delta > 0$  gilt, ist  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ .

2. Da wir unter dem Integralzeichen differenzieren dürfen, tun wir dies einfach:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Phi(x - y, t) g(y)}_{=0} dy = 0,$$

also löst  $u$  die Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ .

## 2.2. Die Wärmeleitungsgleichung

3. Wir wollen noch zeigen, dass sich  $u$  in der gewünschten Weise auf  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  fortsetzen lässt. Sei dazu  $x' \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Wähle ein  $\delta > 0$  so, dass

$$|g(y) - g(x')| < \varepsilon \quad \forall y \in B(x', \delta).$$

Dies ist möglich, da wir  $g$  als stetig auf  $\mathbb{R}^n$  vorausgesetzt haben. Für  $x \in B(x', \frac{\delta}{2})$ ,  $t > 0$  gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x')| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) (g(y) - g(x')) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x')| dy \\ &= \int_{B(x', \delta)} \underbrace{\Phi(x - y, t) |g(y) - g(x')|}_{< \varepsilon} dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x', \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x')| dy \\ &< \varepsilon \int_{B(x', \delta)} \Phi(x - y, t) dy \\ &\quad + 2\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x', \delta)} \Phi(x - y, t) dy. \end{aligned}$$

Nun ist sicher  $\int_{B(x', \delta)} \Phi(x - y, t) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) dy = 1$ . Außerdem ist  $B(x, \frac{\delta}{2}) \subset B(x', \delta)$ , da für  $\xi \in B(x, \frac{\delta}{2})$  gilt:

$$|\xi - x'| = |(\xi - x) + (x - x')| \leq |\xi - x| + |x - x'| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Demnach ist  $\mathbb{R}^n \setminus B(x', \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(x, \frac{\delta}{2})$ , und wir können die Abschätzung fortführen:

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x')| &< \varepsilon \int_{B(x', \delta)} \Phi(x - y, t) dy \\ &\quad + 2\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x', \delta)} \Phi(x - y, t) dy \\ &\leq \varepsilon + 2\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \frac{\delta}{2})} \Phi(x - y, t) dy. \end{aligned}$$

Wenn wir nun noch das Integral kennen, ist die Abschätzung perfekt. Wir berech-

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

nen also

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \frac{\delta}{2})} \Phi(x-y, t) dy &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \frac{\delta}{2})} \Phi(y, t) dy \\
 &= c_1 \cdot \int_{\frac{\delta}{2}}^{\infty} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1} dr \\
 &= c_1 \cdot (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \cdot \int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} \cdot (2\sqrt{ts})^{n-1} \cdot 2\sqrt{t} ds \\
 &= c_2 \cdot \int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} \cdot s^{n-1} ds \\
 &\xrightarrow{t \searrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir im dritten Schritt  $s := \frac{r}{2\sqrt{t}}$  substituiert. Demzufolge gibt es ein  $\tau > 0$  derart, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \frac{\delta}{2})} \Phi(x-y, t) dy < \frac{\varepsilon}{2\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}$$

für alle  $t \in (0, \tau)$  und  $x \in B(x', \frac{\delta}{2})$ . Für solche  $x$  und  $t$  gilt damit auch

$$|u(x, t) - g(x')| < 2\varepsilon,$$

und das ist gerade die gewünschte Aussage. □

**Bemerkung 2.2.10.** In Distributionenschreibweise gilt für  $\Phi$ :

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta\Phi = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}; \\ \Phi = \delta_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

**Bemerkung 2.2.11.** Auch für Lösungen des Anfangswertproblems (2.12) für die Wärmeleitungsgleichung gilt ein Maximumprinzip. Für  $t > 0$  gilt nämlich

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Phi(x-y, t)}_{>0} \cdot \underbrace{g(y)}_{\leq \sup_{\mathbb{R}^n} g} dy \\
 &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t) dy \\
 &= \sup_{\mathbb{R}^n} g \\
 \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t) &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} g.
 \end{aligned}$$

Analog erhält man  $\inf_{\mathbb{R}^n} u(\cdot, t) \geq \inf_{\mathbb{R}^n} g$ .

Nun wenden wir uns der **inhomogenen Wärmeleitungsgleichung**

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

zu, wobei wir hier zunächst vereinfachend annehmen, dass  $u \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  ist. Wir wollen diese Gleichung nach dem **Duhamel-Prinzip** lösen. Dieses stellt eine Analogie zur Variation der Konstanten dar, welches beim Lösen inhomogener linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen häufig hilfreich ist.

Betrachte dazu eine Schar  $u(x, t; s)$  von Lösungen des (homogenen) Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t(x, t; s) - \Delta u(x, t; s) = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty); \\ u(x, t; s) = f(x, s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Dann liefert für geeignetes  $f$  die Funktion  $\int_0^t u(x, t; s) ds$  eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Um genauer zu erkennen, wann ein  $f$  geeignet ist, führen wir folgende Notation ein:

**Definition 2.2.12.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Dann ist

$$C_1^2(\Omega) := \left\{ u \in C^0(\Omega) \mid u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \text{ existieren in } \overset{\circ}{\Omega} \text{ und lassen sich stetig auf } \Omega \text{ fortsetzen.} \right\}$$

**Satz 2.2.13**

Sei  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  mit kompaktem Träger. Setze

$$u(x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds.$$

Dann gilt:

1.  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,
2.  $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,
3.  $\lim_{t \searrow 0} u(x, t) = 0$ .

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

*Beweis.*

zu 1. Definiere die Funktion

$$v(x, t, \tau) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, \tau - s) f(y, s) dy ds.$$

Dann ist  $u(x, t) = v(x, t, t)$ . Substituieren wir jetzt  $z := x - y$  und  $\sigma := \tau - s$ , so erhalten wir

$$v(x, t, \tau) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \sigma) f(x - z, \tau - \sigma) dz d\sigma.$$

Da nun  $\Phi$  nicht mehr von  $x$  und  $\tau$  abhängt, brauchen wir für die Differentiation unter das Integral keine Ableitungen von  $\Phi$  zu betrachten. Da  $\Phi$  integrierbar ist und die auftretenden Ableitungen von  $f$  nach Voraussetzung beschränkt sind, dürfen wir zweimal nach den  $x_i$  und einmal nach  $\tau$  unter das Integral differenzieren. Insbesondere ist die Funktion  $v$  zweimal stetig nach den  $x_i$  und einmal stetig nach  $\tau$  und  $t$  differenzierbar. Daher ist auch 1. gezeigt. ✓

zu 2. Differenzieren wir unter das Integral. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= \frac{\partial v}{\partial t}(x, t, t) + \frac{\partial v}{\partial \tau}(x, t, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, t) f(x - z, 0) dz \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \sigma) \frac{\partial}{\partial \tau} f(x - z, t - \sigma) dz d\sigma; \\ \Delta_x u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \sigma) \Delta_x f(x - z, t - \sigma) dz d\sigma \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) u(x, t) &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, t) f(x - z, 0) dz}_{=: I_1} \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \sigma) \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \Delta_x \right) f(x - z, t - \sigma) dz d\sigma \\ &= I_1 + \underbrace{\int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \sigma) \left( -\frac{\partial}{\partial \sigma} - \Delta_z \right) f(x - z, t - \sigma) dz d\sigma}_{=: I_2(\varepsilon)} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \sigma) \left( -\frac{\partial}{\partial \sigma} - \Delta_z \right) f(x - z, t - \sigma) dz d\sigma}_{=: I_3(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Schätzen wir den dritten Integralterm ab:

$$\begin{aligned} |I_3(\varepsilon)| &\leq \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \sigma) \underbrace{\left| \left( -\frac{\partial}{\partial \sigma} - \Delta_z \right) f(x - z, t - \sigma) \right|}_{\leq c_4} dz d\sigma \\ &\leq c_4 \cdot \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0. \end{aligned}$$



Für den zweiten Integralterm liefert partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 I_2(\varepsilon) &\stackrel{\text{A.2}}{=} \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial \sigma} - \Delta_z\right) \Phi(z, \sigma) f(x-z, t-\sigma)}_{=0} dz d\sigma \\
 &\quad - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, t) f(x-z, 0) dz}_{=I_1} + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \varepsilon) f(x-z, t-\varepsilon) dz.
 \end{aligned}$$

Da  $f$  kompakten Träger hat, treten bei der partiellen Integration nach den  $z_i$  keine Randterme auf. Die beiden Randterme resultieren von der partiellen Integration nach  $\sigma$ . Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \varepsilon) f(x-z, t-\varepsilon) dz + I_3(\varepsilon) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \varepsilon) f(x-z, t) dz \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z, \varepsilon) (f(x-z, t-\varepsilon) - f(x-z, t)) dz + I_3(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Lassen wir nun  $\varepsilon \searrow 0$  gehen, so wissen wir bereits, dass das erste Integral gegen  $f(x, t)$  konvergiert. Der Betrag von  $(f(x-z, t-\varepsilon) - f(x-z, t))$  konvergiert gleichmäßig in  $z$  gegen 0, d.h. das zweite Integral verschwindet beim Grenzübergang  $\varepsilon \searrow 0$ . Und von  $I_3(\varepsilon)$  haben wir ohnehin bereits gezeigt, dass es gegen 0 geht. Somit bleibt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) u(x, t) = f(x, t). \quad \checkmark$$

zu 3. Da  $\text{supp } f$  kompakt ist, gilt die folgende Abschätzung:

$$|u(x, t)| \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s) \underbrace{|f(y, s)|}_{\leq c_5} dy ds \leq c_5 \cdot t \xrightarrow{t \searrow 0} 0.$$

□

**Korollar 2.2.14**

Sei  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  mit kompaktem Träger. Sei  $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Setze

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s) f(y, s) dy ds.$$

Dann gilt:

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

1.  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,
2.  $u_t - \Delta u = f$  auf  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,
3.  $u$  besitzt eine stetige Fortsetzung  $\tilde{u}$  auf  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  mit  $\tilde{u}|_{\mathbb{R}^n \times \{t=0\}} = g$ .

**Bemerkung 2.2.15.** Für Lösungen der Poisson-Gleichung hatten wir auch eine Eindeutigkeitsaussage. Aus der physikalischen Interpretation der Wärmeleitungsgleichung schöpfen wir die Hoffnung, dass deren Lösungen ebenfalls eindeutig durch die Anfangswerte festgelegt werden.

Leider ist dies nicht so: Es gibt nämlich nichttriviale Lösungen von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Diese Lösungen widersetzen sich einer physikalischen Interpretation.

**Beispiel 2.2.16.** Betrachte die Funktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vermöge

$$\psi(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist glatt auf ganz  $\mathbb{R}$ . Setze nun

$$u(x, t) = u(x_1, \dots, x_n, t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k)}(t)}{(2k)!} \cdot x_1^{2k}.$$

Wir zeigen zunächst, dass diese Definition sinnvoll ist, dass also die Reihe konvergiert. Dazu benötigen wir ein technisches Lemma:

### Lemma 2.2.17

Es existiert eine Zahl  $\eta > 1$  derart, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  und für alle  $t > 0$  gilt:

$$|\psi^{(k)}(t)| \leq \frac{\eta^k \cdot k!}{t^k} \cdot e^{-\frac{1}{2t^2}}.$$

## 2.2. Die Wärmeleitungsgleichung

*Beweis.* Betrachte Funktionen  $f_\eta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , die gegeben sind durch

$$f_\eta(\varphi) = \Re \left( \frac{1}{1 + \frac{2}{\eta} e^{i\varphi} + \frac{1}{\eta^2} e^{2i\varphi}} \right).$$

Wie man schnell erkennt, gilt  $f_\eta(\varphi) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 1$  gleichmäßig. Wir können also  $\eta \gg 1$  derart wählen, dass  $f_\eta(\varphi) \geq \frac{1}{2}$  für alle  $\varphi$  aus dem kompakten Intervall  $[0, 2\pi]$  ist.

Sei  $t > 0$ . Betrachte die holomorphe Fortsetzung von  $\psi$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , also  $\psi(z) = e^{-1/z^2}$ . Der Cauchy-Integralsatz liefert dann

$$\psi^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\psi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - t)^{k+1}},$$

wobei  $D$  eine Kreisscheibe im Definitionsbereich von  $\psi$  ist, die  $t$  enthält. Wir wählen  $D = B\left(t, \frac{t}{\eta}\right)$  und berechnen

$$\begin{aligned} |\psi^{(k)}(t)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\partial D} \underbrace{\frac{|\psi(\zeta)| d\zeta}{|\zeta - t|^{k+1}}}_{=\frac{t}{\eta}} \\ &= \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t}{\eta}\right)^{k+1}} \int_{\partial D} |\psi(\zeta)| d\zeta. \end{aligned}$$

Jetzt sind wir schon mal die Ableitungen losgeworden, jetzt müssen wir nur noch den Integranden abschätzen. Wir schreiben die komplexe Zahl  $\zeta \in \partial D$  als  $\zeta = t + \frac{t}{\eta} e^{i\varphi}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |\psi(\zeta)| &= \left| e^{-\frac{1}{\zeta^2}} \right| \\ &= e^{-\Re\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)} \\ &= e^{-\Re\left(\frac{1}{\left(t + \frac{t}{\eta} e^{i\varphi}\right)^2}\right)} \\ &= e^{-\frac{1}{t^2} \Re\left(\frac{1}{1 + \frac{2}{\eta} e^{i\varphi} + \frac{1}{\eta^2} e^{2i\varphi}}\right)} \\ &\leq e^{-\frac{1}{2t^2}} \end{aligned}$$

wegen der Wahl von  $\eta$ . Insgesamt erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} |\psi^{(k)}(t)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{t}{\eta}\right)^{k+1}} \cdot e^{-\frac{1}{2t^2}} \int_{\partial D} d\zeta \\ &= \frac{k!}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{t}{\eta}\right)^{k+1}} e^{-\frac{1}{2t^2}} \cdot 2\pi \frac{t}{\eta} \\ &= \frac{k! \cdot \eta^k}{t^k} e^{-\frac{1}{2t^2}}. \quad \square \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Untersuchen wir nun die Konvergenz der Reihe  $u(x, t)$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\psi^{(k)}(t)}{(2k)!} x_1^{2k} \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^k k!}{t^k} \cdot e^{-\frac{1}{2t^2}} \cdot \frac{|x_1|^{2k}}{(2k)!} \\
 &\leq e^{-\frac{1}{2t^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^k (x_1^2)^k}{t^k k!}, \quad \text{da } k! \cdot k! \leq (2k)! \\
 &= e^{-\frac{1}{2t^2}} \cdot e^{\frac{\eta x_1^2}{t}} \\
 &= e^{\frac{1}{t}(\eta x_1^2 - \frac{1}{2t})} < \infty.
 \end{aligned}$$

Somit konvergiert  $u(x, t)$  (sogar absolut) für alle  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Sei nun  $R > 0$  beliebig. Für  $|x_1| \leq R$  gilt:

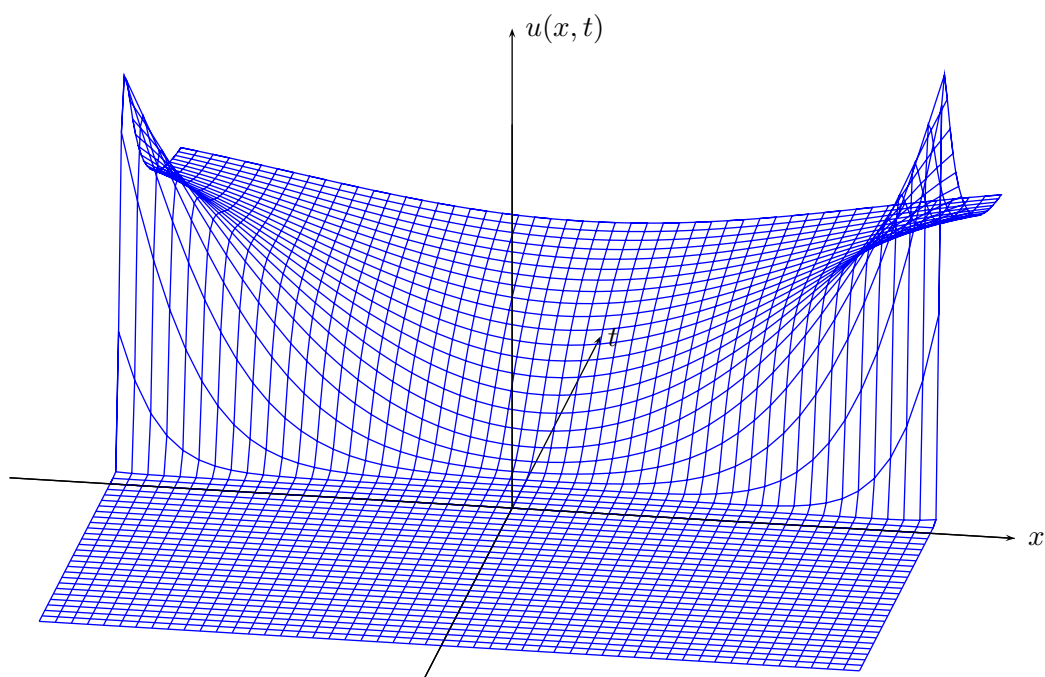
$$e^{\frac{1}{t}(\eta x_1^2 - \frac{1}{2t})} \leq e^{\frac{1}{t}(\eta R^2 - \frac{1}{2t})} \leq C(R),$$

das heißt, die Funktion  $u(x, t)$  konvergiert sogar gleichmäßig auf  $[-R, R] \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Deshalb ist  $u$  stetig auf  $[-R, R] \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , und da diese Aussage für alle  $R$  zutrifft, ist  $u$  stetig auf ganz  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Analog erhalten wir für die Reihe der partiellen Ableitungen ( $l$ -mal nach  $t$  und  $m$ -mal nach  $x_1$ ) die Abschätzung

$$\sum_{k=m+l}^{\infty} \left| \frac{\psi^{(k+l)}(t)}{(2k)!} \cdot \frac{d^m}{dx_1^m} (x_1^{2k}) \right| \leq \frac{\eta^{m+2l}}{t^{m+2l}} |x_1|^{m+2l} \cdot e^{\frac{1}{t}(\eta x_1^2 - \frac{1}{2t})},$$

woraus wir erstens ersehen, dass  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ , und zweitens, dass wir gliedweise differenzieren dürfen. Nun können wir überprüfen, dass  $u$  die Wärmeleitungsgleichung erfüllt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x_1^{2k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k+1)}(t)}{(2k+2)!} \frac{d^2}{dx_1^2} x_1^{2k+2} \\
 &\stackrel{j:=k+1}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi^{(j)}(t)}{(2j)!} \Delta x_1^{2j} \\
 &= \Delta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^{(j)}(t)}{(2j)!} x_1^{2j} \\
 &= \Delta u(x, t). \quad \checkmark
 \end{aligned}$$



Wir wollen jetzt die Mittelwertegenschaft und das Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung formulieren. Dafür benötigen wir zuerst zwei Definitionen.

**Definition 2.2.18.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt, sei  $T > 0$ . Dann heißt

$$U_T := U \times (0, T]$$

**parabolischer Zylinder über  $U$** , und

$$\Gamma_T := \bar{U}_T \setminus U_T = (U \times \{0\}) \cup (\partial U \times (0, T])$$

heißt **parabolischer Rand von  $U_T$** .

**Definition 2.2.19.** Zu  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  definieren wir den **Wärmeball**

$$E(x, t, r) := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid s \leq t \text{ und } \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

**Bemerkung 2.2.20.** Bei der Mittelwerteigenschaft werden wir eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung über den Wärmeball mitteln. Dies steht tatsächlich in Analogie zu der Mittelung über einen Ball im  $\mathbb{R}^n$ , die wir bei der Laplace-Gleichung vorgenommen hatten: Setzt man nämlich in die Definition des Wärmeballs für  $\Phi$  die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung ein, so erhält man einen euklidischen Ball um  $x$ .

**Bemerkung 2.2.21.** Wir wollen uns einmal überlegen, wie dieser Wärmeball aussieht. Dazu betrachten wir ihn „scheibenweise“, bestimmen also  $E(x, t, r) \cap (\mathbb{R}^n \times \{s\})$  für verschiedene  $s$ .

1. Zunächst liegen nur solche Punkte  $(y, s)$  in  $E(x, t, r)$ , bei denen  $s \leq t$  ist. Demzufolge ist für  $s > t$  die Menge  $E(x, t, r) \cap (\mathbb{R}^n \times \{s\})$  leer.
2. Sei nun  $t = s$ . Dann sind diejenigen Punkte im Wärmeball, für die

$$\Phi(x - y, t - s) = \Phi(x - y, 0) \geq \frac{1}{r^n}$$

ist. Nun verschwindet aber  $\Phi(x - y, 0)$  überall, außer bei  $x - y = 0$ , wo die Funktion  $\infty$  wird. Wir haben also  $E(x, t, r) \cap (\mathbb{R}^n \times \{t\}) = \{(x, t)\}$ .

3. Nun zum interessanten Teil:  $s < t$ . Nun zählt also nur noch die Bedingung  $\Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n}$ . Wir schreiben  $\Phi$  aus, um eine Bedingung an  $y$  zu finden:

$$\begin{aligned} (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} &\geq \frac{1}{r^n} \\ \Leftrightarrow -\frac{|x-y|^2}{4(t-s)} &\geq \log\left(\frac{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}{r^n}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{|x-y|^2}{4(t-s)} &\leq \log\left(\frac{r^n}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\right) \\ \Leftrightarrow |x-y| &\leq 2\sqrt{t-s} \sqrt{\log\left(\frac{r^n}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\right)}. \end{aligned}$$

Das heißt,  $y$  muss im Ball um  $x$  mit dem Radius  $2\sqrt{t-s} \sqrt{\log\left(\frac{r^n}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\right)}$  liegen.

Doch dieser Radius ist ja nicht für alle  $s$  definiert: Mit der ersten Wurzel haben wir kein Problem, da  $s \leq t$  ist. Aber der Logarithmus kann durchaus negativ werden, da dessen Argument für  $s \rightarrow -\infty$  gegen 0 geht. Berechnen wir also, für welches  $s$

## 2.2. Die Wärmeleitungsgleichung

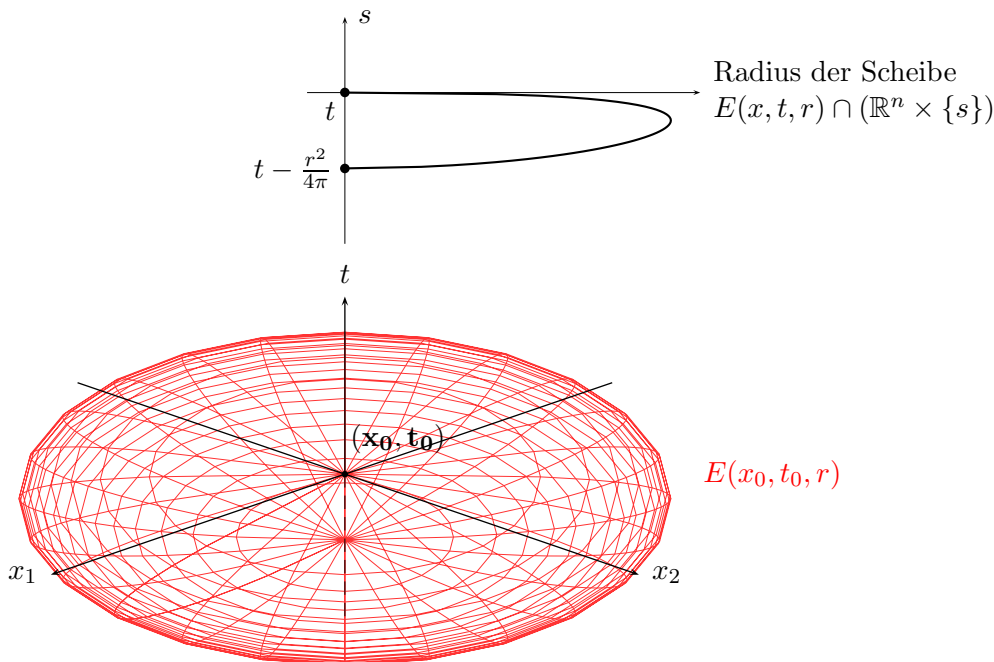
das Argument des Logarithmus den Wert 1 annimmt:

$$\begin{aligned} \frac{r^n}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} &\stackrel{!}{=} 1 \\ \Leftrightarrow \frac{r^2}{4\pi(t-s)} &= 1 \\ \Leftrightarrow s &= t - \frac{r^2}{4\pi}. \end{aligned}$$

Für dieses  $s$  haben wir also nur noch einen Punkt in  $E(x, t, r) \cap (\mathbb{R}^n \times \{s\})$ , und für kleinere  $s$  ist die Bedingung  $\Phi(x-y, t-s) \geq \frac{1}{r^n}$  nicht mehr erfüllbar.

Wir fassen zusammen:

$$E(x, t, r) \cap (\mathbb{R}^n \times \{s\}) = \begin{cases} \emptyset, & s > t \\ \{(x, t)\}, & s = t \\ \bar{B}\left(x, 2\sqrt{t-s} \sqrt{\log\left(\frac{r^n}{(4\pi(t-s))^{n/2}}\right)}\right) \times \{s\}, & t - \frac{r^2}{4\pi} < s < t \\ \left\{\left(x, t - \frac{r^2}{4\pi}\right)\right\}, & s = t - \frac{r^2}{4\pi} \\ \emptyset, & s < t - \frac{r^2}{4\pi}. \end{cases}$$



**Bemerkung 2.2.22.** Der Wärmeball  $E(x, t, r)$  ist eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

**Bemerkung 2.2.23.** Wir wollen für  $E(r) := E(0, 0, r)$  das Integral

$$\iint_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds$$

bestimmen, weil wir dieses in den folgenden Beweisen häufiger benötigen. Dazu substituieren wir  $y = rz$  und  $s = r^2\sigma$ . Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \iint_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds &= r^{n+2} \iint_{E(1)} \frac{|rz|^2}{(r^2\sigma)^2} dz d\sigma \\ &= r^n \iint_{E(1)} \frac{|z|^2}{\sigma^2} dz d\sigma. \end{aligned}$$

Wir brauchen also das gesuchte Integral nur für  $E(1)$  zu berechnen. Für  $E(r)$  ergibt sich dann einfach das  $r^n$ -fache.

$$\begin{aligned} \iint_{E(1)} \frac{|z|^2}{\sigma^2} dz d\sigma &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_{\bar{B}\left(0, 2\sqrt{-\sigma} \sqrt{\log\left(\frac{1}{(-4\pi\sigma)^{n/2}}\right)}\right)} \frac{|z|^2}{\sigma^2} dz d\sigma \\ &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{2\sqrt{-\sigma} \sqrt{\log\left(\frac{1}{(-4\pi\sigma)^{n/2}}\right)}} n\alpha(n)\rho^2 \cdot \rho^{n-1} d\rho d\sigma. \end{aligned}$$

Ersetzen wir  $\sigma$  durch  $-\sigma$ :

$$\begin{aligned} \iint_{E(1)} \frac{|z|^2}{\sigma^2} dz d\sigma &= \int_0^{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{2\sqrt{\sigma} \sqrt{\log\left(\frac{1}{(4\pi\sigma)^{n/2}}\right)}} n\alpha(n)\rho^2 \cdot \rho^{n-1} d\rho d\sigma \\ &= \frac{n\alpha(n)}{n+2} \int_0^{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{\sigma^2} \cdot [\rho^{n+2}]_0^{2\sqrt{\sigma} \sqrt{\log\left(\frac{1}{(4\pi\sigma)^{n/2}}\right)}} d\sigma \\ &= 2^{n+2} \frac{n\alpha(n)}{n+2} \int_0^{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^{\frac{n+2}{2}} \cdot \left(\log\left(\frac{1}{(4\pi\sigma)^{n/2}}\right)\right)^{\frac{n+2}{2}} d\sigma. \end{aligned}$$

Dieses Integral können wir bestimmen, indem wir  $\omega := (4\pi\sigma)^{n/2}$  substituieren. Dann ergibt sich  $\frac{d\omega}{d\sigma} = (4\pi)^{n/2} \cdot \frac{n}{2} \sigma^{(n-2)/2}$  und damit  $n\sigma^{(n-2)/2} d\sigma = (4\pi)^{-n/2} \cdot 2 d\omega$ .

$$\begin{aligned} \iint_{E(1)} \frac{|z|^2}{\sigma^2} dz d\sigma &= 2^{n+2} \frac{\alpha(n)}{n+2} \cdot (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot 2 \underbrace{\int_0^1 \left(\log\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)^{\frac{n+2}{2}} d\omega}_{=\Gamma\left(1+\frac{n+2}{2}\right)} \\ &= \frac{2^{n+2}}{n+2} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} \cdot 4^{-\frac{n}{2}} \pi^{-\frac{n}{2}} \cdot 2 \cdot \underbrace{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}+1\right)}_{=(1+\frac{n}{2})\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^{n+2}}{n+2} \cdot 2^{-n} \cdot 2 \cdot \frac{n+2}{2} \\
 &= 4,
 \end{aligned}$$

und dies unabhängig von der Dimension  $n$ . Wenn wir jetzt einen beliebigen Wärmeball betrachten, so erhalten wir die allgemeine Formel

$$\iint_{E(x,t,r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds = \iint_{E(0,0,r)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = 4r^n. \quad (2.13)$$

**Satz 2.2.24 (Mittelwerteigenschaft für Lös. der Wärmeleitungsgleichung)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $u \in C_1^2(U_T)$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t,r)} u(y, s) \cdot \frac{|y-x|^2}{(t-s)^2} dy ds$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  mit  $E(x, t, r) \subset U_T$ .

*Beweis.*

1. Verschiebe das Koordinatensystem so, dass  $(x, t) = (0, 0)$ . Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned}
 \varphi(r) &:= \frac{1}{4r^n} \iint_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\
 &= \frac{1}{4} \iint_{E(1)} u(rz, r^2\sigma) \frac{|z|^2}{\sigma^2} dz d\sigma,
 \end{aligned}$$

wobei wir wie in Bemerkung 2.2.23  $y = rz$  und  $s = r^2\sigma$  substituiert haben. Wir zeigen, dass  $\varphi$  konstant ist. Da  $E(1)$  kompakt ist, sind alle Ableitungen von  $u$  beschränkt und wir können unter dem Integralzeichen differenzieren:

$$\begin{aligned}
 \varphi'(r) &= \frac{1}{4} \iint_{E(1)} \frac{d}{dr} (u(rz, r^2\sigma)) \frac{|z|^2}{\sigma^2} dz d\sigma \\
 &= \frac{1}{4} \iint_{E(1)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i}(rz, r^2\sigma) \cdot z_i + \frac{\partial u}{\partial s}(rz, r^2\sigma) \cdot 2r\sigma \right) \frac{|z|^2}{\sigma^2} dz d\sigma \\
 &= \frac{1}{4r^2} \iint_{E(r)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i}(y, s) \frac{y_i}{r} + \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \frac{2s}{r} \right) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds
 \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

$$= \underbrace{\frac{1}{4r^{n+1}} \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} y_i \cdot \frac{|y|^2}{s^2} dy ds}_{=: I_1} + \underbrace{\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{|y|^2}{2s} dy ds}_{=: I_2}.$$

2. Um den Wert des Integrals  $I_2$  zu bestimmen, betrachten wir die folgende Hilfsfunktion:

$$\psi : \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \psi(y, s) := -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \log(r).$$

Auf  $\partial E(r)$  ist  $\frac{1}{r^n} = \Phi(-y, -s) = (-4\pi s)^{-n/2} e^{|y|^2/4s}$  und damit

$$\begin{aligned} 0 &= \log \left( (-4\pi s)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{|y|^2}{4s}} r^n \right) \\ &= -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \log(r) \\ &= \psi(y, s), \end{aligned}$$

also ist  $\psi|_{\partial E(r)} \equiv 0$ . Das wird uns beim Anwenden der Green-Formel und bei partieller Integration hilfreich sein, da die Randwerte dann verschwinden. Des Weiteren gilt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_i} = \frac{y_i}{2s}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s} = -\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}.$$

3. Nun können wir  $I_2$  bestimmen:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{|y|^2}{2s} dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \frac{\partial u}{\partial s} \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy ds. \end{aligned}$$

Partielle Integration nach  $y_i$  liefert

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \cdot y_i \right) \cdot \psi dy ds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial s} y_i + n \frac{\partial u}{\partial s} \right) \psi dy ds. \end{aligned}$$

## 2.2. Die Wärmeleitungsgleichung

Nun integrieren wir den ersten Summanden partiell nach  $s$ :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} y_i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s} - n \frac{\partial u}{\partial s} \psi \right) dy ds \\
 &= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} y_i \left( \frac{n}{2s} + \frac{|y|^2}{4s^2} \right) + n \frac{\partial u}{\partial s} \psi \right) dy ds \\
 &= -I_1 - \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( n \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{y_i}{2s} + n \frac{\partial u}{\partial s} \psi \right) dy ds \\
 &= -I_1 - \frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + \frac{\partial u}{\partial s} \psi \right) dy ds.
 \end{aligned}$$

Weil  $u$  die Wärmeleitungsgleichung erfüllt, ist  $\frac{\partial u}{\partial s} = \Delta_y u$ . Demnach erhalten wir für  $\varphi'$ :

$$\begin{aligned}
 \varphi'(r) &= I_1 + I_2 \\
 &= -\frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} (\langle Du, D\psi \rangle + \Delta_y u \cdot \psi) dy ds \\
 &\stackrel{A.2}{=} -\frac{n}{r^{n+1}} \iint_{\partial E(r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \psi dS(y) ds \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

da  $\psi|_{\partial E(r)} \equiv 0$  gilt. Wir wissen also nun, dass  $\varphi$  konstant ist.

4. Nun müssen wir noch den Wert von  $\varphi$  bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \varphi(r) &= \lim_{\rho \searrow 0} \varphi(\rho) \\
 &= \lim_{\rho \searrow 0} \left( \frac{1}{4\rho} \iint_{E(\rho)} u(y, s) \cdot \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \right) \\
 &= u(0, 0) \underbrace{\lim_{\rho \searrow 0} \left( \frac{1}{4\rho} \iint_{E(\rho)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \right)}_{\stackrel{(2.13)}{=} 1 \forall \rho} \\
 &= u(0, 0),
 \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

### Satz 2.2.25 (Maximumprinzip)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei  $u \in C_1^2(U_T) \cap C^0(\bar{U}_T)$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt:

1. (Schwach Maximumprinzip.) Das Maximum von  $u$  wird auf dem parabolischen Rand  $\Gamma_T$  angenommen:

$$\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

2. (Starkes Maximumprinzip.) Falls es ein  $(x_0, t_0) \in U_T$  mit  $u(x_0, t_0) = \max_{\bar{U}_T} u$  gibt, dann ist  $u$  konstant auf  $\bar{U}_{t_0}$ .

*Beweis.* Wir brauchen nur das starke Maximumprinzip zu zeigen, denn daraus folgt sofort das schwache wie im Beweis von Satz 2.1.12.

1. Sei  $(x_0, t_0) \in U_T$  mit  $u(x_0, t_0) = \max_{\bar{U}_T} u =: u_0$ . Wähle  $r$  so klein, dass  $E(x_0, t_0, r) \subset U_T$ . Dann gilt wegen der Mittelwerteigenschaft:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0, t_0, r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds \\ &\leq \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0, t_0, r)} \max_{\bar{U}_T} u \cdot \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds \\ &= \frac{u_0}{4r^n} \cdot \underbrace{\iint_{E(x_0, t_0, r)} \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds}_{\stackrel{(2.13)}{=} 4r^n} \\ &= u_0. \end{aligned}$$

Somit muss in der Ungleichung die Gleichheit gelten, also  $u(y, s) = \max_{\bar{U}_T} u$  für alle  $(y, s) \in E(x_0, t_0, r)$ .

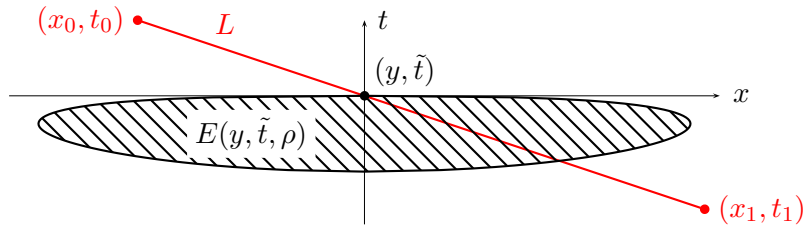
Leider ist damit nicht wie in Satz 2.1.12 gezeigt, dass die Menge  $\{(y, s) \in U_T \mid u(y, s) = u_0\}$  offen ist, denn  $E(x_0, t_0, r)$  ist keine Umgebung von  $(x_0, t_0)$ , da dieser Punkt auf dem Rand des Wärmeballs liegt (vgl. Bemerkung 2.2.21). Wir müssen uns also für diesen Beweis noch etwas anstrengen.

2. Sei  $x_1 \in U$  so, dass die Strecke  $\overline{x_0 x_1} = \{x \in U \mid x = t \cdot x_0 + (1 - t) \cdot x_1, t \in \mathbb{R}\}$  ganz in  $U$  liegt. Sei  $t_1 \in (0, t_0)$ . Dann verläuft die Strecke  $\overline{(x_0, t_0)(x_1, t_1)} := L$  ganz in  $U_T$ . Betrachte den Zeitpunkt

$$\tilde{t} := \min\{t \geq t_1 \mid u(x, \tau) = u_0 \text{ für alle } (x, \tau) \in L \text{ mit } t \leq \tau \leq t_0\}.$$

## 2.2. Die Wärmeleitungsgleichung

Weil  $u$  stetig ist, wird dieses Minimum tatsächlich angenommen. Sei  $(y, \tilde{t}) \in U \times [t_1, t_0]$  der Punkt, in dem das Minimum angenommen wird, es gilt also  $u(y, \tilde{t}) = u_0$ . Nach Beweisteil 1 wissen wir, dass dann auch auf einem ausreichend kleinen Wärmeball  $E(y, \tilde{t}, \rho) \subset U_T$  gilt:  $u \equiv u_0$ . Wäre nun  $\tilde{t} > t_1$ , so wäre  $L \cap E(y, \tilde{t}, \rho) \neq \emptyset$ . (Einen formalen Beweis dieser Aussage wollen wir hier nicht führen; wenn man sich jedoch die Gestalt des Wärmeballs vor Augen führt, ist es „anschaulich klar“.)



Da jedoch für alle  $(x, t) \in E(y, \tilde{t}, \rho)$  mit  $(x, t) \neq (y, \tilde{t})$  die Relation  $t < \tilde{t}$  gilt, hätten wir  $\tilde{t}$  nicht minimal gewählt. Demnach muss  $\tilde{t} = t_1$  sein. Insbesondere haben wir damit gezeigt, dass  $u(x_1, t_1) = u(x_0, t_0) = u_0$ .

3. Sei nun  $x \in U$  beliebig,  $0 < s < t_0$ . Da  $U$  zusammenhängend ist, finden wir eine Menge von Punkten  $\{x_0, x_1, \dots, x_m = x\}$  in  $U$  derart, dass die Strecken  $\overline{x_{i-1}x_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  ganz in  $U$  enthalten sind. Wenn wir überdies eine Folge  $t_0 > t_1 > \dots > t_m = s$  von Zeitpunkten wählen, so liegen die Strecken  $\overline{(x_{i-1}, t_{i-1})(x_i, t_i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$  ganz in  $U_T$ . Nach Beweisteil 2 gilt demnach

$$u_0 = u(x_0, t_0) = u(x_1, t_1) = u(x_2, t_2) = \dots = u(x_m, t_m) = u(x, s).$$

Also ist  $u \equiv u_0$  auf  $U \times (0, t_0)$ , und da  $u$  stetig ist, gilt  $u \equiv u_0$  auch auf  $\overline{U \times (0, t_0)} = \bar{U}_{t_0}$ .  $\square$

**Bemerkung 2.2.26 (Minimumprinzip).** Wenden wir das Maximumprinzip auf  $-u$  an, erhalten wir analoge Aussagen über das Minimum einer Lösung  $u \in C_1^2(U_T) \cap C^0(\bar{U}_T)$  der Wärmeleitungsgleichung:

1. Die Funktion  $u$  nimmt ihr Minimum auf dem parabolischen Rand  $\Gamma_T$  an:

$$\min_{\bar{U}_T} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

2. Gibt es ein  $(x_0, t_0) \in U_T$  mit  $u(x_0, t_0) = \min_{\bar{U}_T} u$ , so ist  $u$  konstant auf  $\bar{U}_{t_0}$ .

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

**Bemerkung 2.2.27.** Das starke Maximum- bzw. Minimumprinzip macht lediglich eine Aussage über  $\bar{U}_{t_0}$ . Für Zeiten  $t > t_0$  ist eine Änderung möglich. Betrachte z.B. die verschobene Fundamentallösung  $\Phi(x, t - t_0)$  auf  $U_T$ , wobei  $0 \notin U$  und  $T > t_0$ . Für alle  $x \in U$  ist  $\Phi(x, t_0) = 0$ , und  $\Phi$  ist auch tatsächlich konstant 0 auf  $\bar{U}_{t_0}$ ; aber  $\Phi$  verschwindet nirgends für  $t > t_0$ .

**Bemerkung 2.2.28.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei  $T > 0$ . Die Funktion  $u \in C_1^2(U_T) \cap C^0(\bar{U}_T)$  erfülle

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{auf } U_T, \\ u \equiv 0 & \text{auf } \partial U \times [0, T], \\ u = g & \text{auf } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit  $g \geq 0$ , aber  $g \not\equiv 0$ . Dann folgt leicht aus dem starken Minimumprinzip, dass  $u > 0$  auf  $U_T$  gilt.

### Satz 2.2.29 (Eindeutigkeit auf beschränkten Gebieten)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei  $g \in C^0(\Gamma_T)$  und  $f \in C^0(U_T)$ . Dann existiert höchstens eine Lösung  $u \in C_1^2(U_T) \cap C^0(\bar{U}_T)$  des Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{auf } U_T, \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T. \end{cases} \quad (2.14)$$

*Beweis.* Seien  $u_1, u_2$  Lösungen von (2.14). Dann löst  $v := u_1 - u_2$  die Wärmeleitungsgleichung und es gilt  $v|_{\Gamma_T} \equiv 0$ . Aus Maximum- und Minimumprinzip folgt hiermit

$$\max_{\bar{U}_T} v = \min_{\bar{U}_T} v = 0,$$

also  $u_1 = u_2$ . □

Nun wollen wir das Anfangswertproblem für  $U = \mathbb{R}^n$  betrachten. Da in diesem Falle der Rand von  $U$  leer ist, werden wir eine zusätzliche Bedingung benötigen, und zwar wollen wir die Kontrolle über  $x$  mit  $|x| \gg 0$  behalten.

**Satz 2.2.30 (Maximumprinzip für das Cauchy-Problem)**

Sei  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  eine Lösung des Cauchy-Problems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Außerdem gebe es Konstanten  $a, A > 0$  so, dass für  $u$  die Wachstumsbedingung

$$u(x, t) \leq A \cdot e^{a|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in [0, t]$$

erfüllt ist. Dann ist

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

*Beweis.*

- Wir nehmen zuerst  $T$  so klein an, dass  $4aT < 1$  gilt. Wähle  $\varepsilon$  klein genug, so dass auch  $4a(T + \varepsilon) < 1$  ist. Zu  $y \in \mathbb{R}^n$  und  $\mu > 0$  definiere die Funktion  $v : \mathbb{R}^n \times [0, T + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$v(x, t) := u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} \cdot e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}.$$

Wir überprüfen, dass  $v$  die Wärmeleitungsgleichung erfüllt. Dazu betrachten wir zunächst die räumlichen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-t)}} &= e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-t)}} \cdot \frac{x_i - y_i}{2(T-t)} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-t)}} &= e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-t)}} \cdot \left( \frac{x_i - y_i}{2(T-t)} \right)^2 + e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-t)}} \cdot \frac{1}{2(T-t)}. \end{aligned}$$

Betrachte nun die Hilfsfunktion  $f(x, t) := \frac{1}{(T-t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-t)}}$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \Delta f(x, t) &= \frac{1}{(T-t)^{n/2}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T-t)}} \\ &= f(x, t) \cdot \left( \frac{|x-y|^2}{4(T-t)^2} + \frac{n}{2(T-t)} \right); \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) &= f(x, t) \cdot \left( \frac{n}{2(T-t)} + \frac{|x-y|^2}{4(T-t)} \right) \\ &= \Delta f(x, y). \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Also erfüllt  $f$  die Wärmeleitungsgleichung, und damit tut dies auch  $v(x, t) = u(x, t) - \mu f(x, t - \varepsilon)$ . Außerdem sehen wir, dass die Zeitableitung von  $f$  für Zeiten kleiner als  $T$  positiv ist,  $f$  ist also monoton wachsend.

2. Wir betrachten nun  $v$  auf  $U := B(y, r)$  für beliebiges  $r > 0$ . Aus dem Maximumprinzip 2.2.25 folgt dann

$$\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

Wir wollen dieses Maximum für  $\Gamma_T$  abschätzen. Da

$$\Gamma_T = (U \times \{t = 0\}) \cup (\partial U \times (0, T]),$$

betrachten wir einfach die beiden Teile einzeln, zunächst  $U \times \{t = 0\}$ :

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \underbrace{\mu f(x, -\varepsilon)}_{\geq 0} \leq u(x, 0) = g(x) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g,$$

Es folgt die Abschätzung von  $v$  auf  $\partial U \times (0, T]$ , sei also  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $|x - y| = r$ ,  $0 < t \leq T$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \mu f(x, t - \varepsilon) \\ &\leq u(x, t) - \mu f(x, -\varepsilon) \quad (\text{wegen der Monotonie von } f) \\ &\leq A \cdot e^{a|x|^2} - \mu f(x, -\varepsilon) \\ &\leq A \cdot e^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T + \varepsilon)}}, \end{aligned}$$

denn  $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| = r + |y|$ . Setze  $\gamma := \frac{1}{4(T + \varepsilon)} - a$ . Nach der eingangs getroffenen Annahme an  $T$  ist  $\gamma > 0$ , und wir können die Abschätzung wie folgt fortsetzen:

$$v(x, t) \leq A \cdot e^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a + \gamma))^{\frac{n}{2}} \cdot e^{(a+\gamma)r^2}.$$

Der Minuend wächst mit  $r$  wie  $e^{ar^2}$ , der Subtrahend wie  $e^{(a+\gamma)r^2}$ , also schneller, da  $\gamma > 0$ . Somit konvergiert die Differenz mit  $r \rightarrow \infty$  uneigentlich gegen  $-\infty$ . Für  $r$  groß genug ist also  $v(x, t)$  auf  $\partial U \times (0, T]$  kleiner als eine beliebige vorgegebene Zahl, also z.B. kleiner als  $\sup_{\mathbb{R}^n} g$ . Damit haben wir gezeigt:

$$\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

für  $U = B(y, r)$  mit  $r$  groß genug. Lassen wir nun  $r$  gegen  $\infty$  gehen, so erhalten wir daraus

$$v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in [0, T].$$

Nun wollen wir eigentlich eine Aussage über  $u(x, t) = v(x, t) + \mu f(x, t - \varepsilon)$ ; aber da die Abschätzung für  $v$  unabhängig von  $\mu$  gilt, gilt sie auch für  $\lim_{\mu \rightarrow 0} v = u$ , also

$$u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in [0, T].$$



## 2.2. Die Wärmeleitungsgleichung

3. Wir müssen jetzt noch unsere Annahme an  $T$  loswerden, aber das ist nicht mehr schwer: Wir wählen einfach eine Unterteilung  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_k = T$  mit  $T_{i+1} - T_i < \frac{1}{4a}$ . Wenn wir nun das bislang Bewiesene zunächst auf  $u|_{\mathbb{R}^n \times [0, T_1]}$  anwenden, so erhalten wir

$$u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in [0, T_1],$$

und insbesondere gilt:

$$g_1(x) := u(x, T_1) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Damit ist auch  $\sup_{\mathbb{R}^n} g_1 \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$ . Nun wenden wir den ersten Beweisteil auf  $u|_{\mathbb{R}^n \times [T_1, T_2]}$  an – genauer: auf  $u(x, t + T_1)$  mit  $t \in [0, T_2 - T_1]$ , da wir ja als Startzeit  $t = 0$  vorausgesetzt haben – und erhalten wie eben

$$u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g_1 \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in [T_1, T_2]$$

sowie insbesondere

$$g_2(x) := u(x, T_2) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

So fahren wir fort, bis die gewünschte Aussage für alle  $t \in [0, T]$  gezeigt ist.

□

### Satz 2.2.31 (Eindeutigkeit für das Cauchy-Problem)

Sei  $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ . Dann existiert höchstens eine Lösung  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  für das Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

die die Wachstumsbedingung  $|u(x, t)| \leq A \cdot e^{a|x|^2}$  mit Konstanten  $A, a$  für alle  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$  erfüllt.

*Beweis.* Der Beweis läuft analog zum beschränkten Fall, der in Satz 2.2.29 behandelt wurde. □

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

**Bemerkung 2.2.32.** Durch die Wachstumsbedingung werden unphysikalische Lösungen wie in Beispiel 2.2.16 ausgeschlossen, wenn auch gerade mal so. Wir hatten für die unphysikalischen Lösungen die Abschätzung  $|u(x, t)| \leq e^{\frac{1}{t}(nx_1^2 - \frac{1}{2t})}$  bewiesen. Sie genügen also der Abschätzung  $|u(x, t)| \leq e^{a(t)|x|^2}$  mit  $a(t) = \frac{n}{t}$ . Da der Koeffizient  $a$  hier von  $t$  abhängt und mit  $t \rightarrow 0$  explodiert, kann Satz 2.2.31 nicht angewandt werden. Das Beispiel zeigt aber auch, dass die Wachstumsbedingung in Satz 2.2.31 nicht mehr wesentlich abgeschwächt werden kann.

**Bemerkung 2.2.33.** Die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind glatt (*ohne Beweis*), aber im Allgemeinen nicht analytisch, wie man bereits an der Fundamentallösung erkennen kann. Hält man jedoch  $t$  fest, so ist  $u(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  analytisch in  $x$  für jede Lösung  $u$  der Wärmeleitungsgleichung (*auch ohne Beweis*).

An dieser Stelle soll noch ein neuer Beweis von Satz 2.2.29 vorgestellt werden, und zwar einer, der ohne Maximumprinzip und Mittelwertegenschaft auskommt. Es genügt dabei zu zeigen, dass die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{auf } U_T \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

eindeutig ist, wenn  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend ist. Die Eindeutigkeit der Lösung des entsprechenden inhomogenen Problems (2.14) folgt dann durch Betrachtung der Differenz zweier Lösungen.

Sei also  $u \in C_1^2(U_T)$ . Setze

$$e(t) := \int_{\bar{U}} u(x, t)^2 dx.$$

Dann ist  $e(t) \geq 0$ , und die Gleichheit gilt genau dann, wenn  $u(x, t) = 0$  für alle  $x \in U$  ist. Wir wollen also zeigen, dass  $e(t) = 0$  für alle  $t$  gilt. Dazu bestimmen wir die Ableitung von  $e$ :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \int_{\bar{U}} \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t)^2) dx \\ &= 2 \int_{\bar{U}} u(x, t) \cdot u_t(x, t) dx \\ &= 2 \int_{\bar{U}} u(x, t) \cdot \Delta u(x, t) dx \\ &\stackrel{A.2}{=} -2 \int_{\bar{U}} \langle Du(x, t), Du(x, t) \rangle dx + \int_{\partial U} \underbrace{u(x, t)}_{=0} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) dS(x) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Somit ist  $e$  monoton fallend. Wir wissen aufgrund der Anfangsbedingung aber, dass  $e(0) = 0$  ist. Da  $e(t)$  außerdem stets nichtnegativ ist, folgt  $e(t) \equiv 0$  und deshalb auch  $u(x, t) \equiv 0$ .

**Satz 2.2.34 (Rückwärtseindeutigkeit)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt, sei  $T > 0$ . Die Funktion  $u \in C^2(\overline{U}_T)$  löse das Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{auf } U_T, \\ u = 0 & \text{auf } (\partial U \times (0, T)) \cup (U \times \{t = T\}). \end{cases} \quad (2.16)$$

Dann ist  $u \equiv 0$  auf  $U_T$ .

*Beweis.* Sei wieder  $e(t) := \int_{\overline{U}} u(x, t)^2 dx$ . Wir kennen bereits die erste Ableitung  $\dot{e}(t) = 2 \int_{\overline{U}} u \Delta u dx = -2 \int_{\overline{U}} \langle Du, Du \rangle dx$ . Nun benötigen wir auch noch die zweite:

$$\begin{aligned} \ddot{e}(t) &= -4 \int_{\overline{U}} \langle Du_t, Du \rangle dx \\ &\stackrel{\text{A.2}}{=} 4 \int_{\overline{U}} u_t \Delta u dx + 0 \\ &= 4 \int_{\overline{U}} (\Delta u)^2 dx. \end{aligned}$$

Außerdem benötigen wir noch  $\dot{e}^2$ :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t)^2 &= 4 \left( \int_{\overline{U}} u \Delta u dx \right)^2 \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} 4 \int_{\overline{U}} u^2 dx \cdot \int_{\overline{U}} (\Delta u)^2 dx \\ &= e(t) \cdot \ddot{e}(t). \end{aligned}$$

Angenommen, es gäbe ein  $t_1 \in [0, T]$  mit  $e(t_1) > 0$ . Wir setzen

$$t_2 := \sup\{t \in [0, T] \mid e > 0 \text{ auf } [t_1, t]\}.$$

Dann ist  $e > 0$  auf  $[t_1, t_2)$  und  $e(t_2) = 0$ . Somit ist  $f(t) := \log(e(t))$  für  $t \in [t_1, t_2)$  definiert, und es gilt

$$\dot{f} = \frac{\dot{e}}{e}, \quad \ddot{f} = \frac{\ddot{e}e - \dot{e}^2}{e^2} \geq 0.$$

Also ist  $f$  konvex, d.h. für jedes  $\tau \in [0, 1]$  und für jedes  $t \in [t_1, t_2)$  gilt:

$$f((1 - \tau)t_1 + \tau t) \leq (1 - \tau)f(t_1) + \tau f(t).$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} e^{f((1-\tau)t_1+\tau t)} &\leq e^{(1-\tau)f(t_1)+\tau f(t)} \\ \Leftrightarrow e((1-\tau)t_1+\tau t) &\leq e(t_1)^{1-\tau} \cdot e(t)^\tau. \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Wenn wir nun  $t \nearrow t_2$  gehen lassen, so erhalten wir

$$0 \leq e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq e(t_1)^{1-\tau} \cdot \underbrace{e(t_2)^\tau}_{=0} \quad \forall \tau \in [0, 1],$$

d.h.  $e \equiv 0$  auf  $[t_1, t_2]$  im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Bemerkung 2.2.35.** Wir wissen nun also, dass wir zu vorgegebenen Endwerten höchstens eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung bekommen können. Ob wir die Wärmeleitungsgleichung allerdings überhaupt „rückwärts lösen“ können, wissen wir noch nicht. Und in der Tat ist die Existenz von Lösungen des Problems (2.16) eine subtile Frage und hängt stark von den „Endbedingungen“ ab.

## 2.3. Die Wellengleichung

**Definition 2.3.1.** Wir stellen an eine Funktion  $u = u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  die PDG

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

Diese PDG heißt **Wellengleichung**. Sie beschreibt die Ausbreitung von Wellen.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (2.17)$$

wobei die Funktionen  $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben sind.

Wir wollen die Wellengleichung zunächst im Fall  $n = 1$  lösen, wir suchen also Lösungen von

$$0 = u_{tt} - u_{xx} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u.$$

Wie schön sich die Wellengleichung in diesem Fall faktorisieren lässt! Dann nennen wir doch einmal  $u_t - u_x =: v$  und versuchen, die Wellengleichung zu lösen, die nunmehr die Form  $v_t + v_x = 0$  hat.

Dazu betrachten wir die Geraden  $c(s) = (x_0, t_0) + s \cdot (1, 1)$ . Auf diesen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}v(c(s)) &= \frac{d}{ds}v(x_0 + s, t_0 + s) \\ &= v_x(c(s)) + v_t(c(s)) \\ &\stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

d.h.  $v$  löst die Gleichung  $v_t + v_x = 0$  genau dann, wenn  $v$  konstant auf der Geraden  $c(s)$  ist. Mit diesem Wissen können wir nun  $v$  für jeden Punkt  $(x_0, t_0)$  angeben:

$$\begin{aligned} v(x_0, t_0) &= v(x_0 + s, t_0 + s) \quad \forall s \\ &= v(x_0 - t_0, 0) \quad (\text{mit } s = -t_0) \\ &= u_t(x_0 - t_0, 0) + u_x(x_0 - t_0, 0) \\ &= h(x_0 - t_0) + g'(x_0 - t_0). \end{aligned}$$

Gut, nun haben wir  $v$ . Wir suchen aber immer noch ein  $u$  mit  $u_t - u_x = v$ . Dazu betrachten wir die Geraden  $\tilde{c}(s) = (x_0, t_0) + s \cdot (-1, 1)$ . Darauf gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}u(\tilde{c}(s)) &= \frac{d}{ds}u(x_0 - s, t_0 + s) \\ &= -u_x(\tilde{c}(s)) + u_t(\tilde{c}(s)) \\ &\stackrel{!}{=} v(\tilde{c}(s)). \end{aligned}$$

Daraus können wir jetzt durch Integration  $u$  erhalten:

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \int_{-t_0}^0 \frac{d}{ds}u(\tilde{c}(s)) ds + u(\tilde{c}(-t_0)) \\ &= \int_{-t_0}^0 v(\tilde{c}(s)) ds + u(\tilde{c}(-t_0)) \\ &= \int_{-t_0}^0 v(x_0 - s, t_0 + s) ds + u(x_0 + t_0, 0) \\ &= \int_{-t_0}^0 \underbrace{(h(x_0 - t_0 - 2s) - g'(x_0 - t_0 - 2s))}_{=:y} ds + g(x_0 + t_0) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{x_0+t_0}^{x_0-t_0} (h(y) - g'(y)) dy + g(x_0 + t_0) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} (h(y) - g'(y)) dy + g(x_0 + t_0) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} h(y) dy + \frac{1}{2} (g(x_0 + t_0) + g(x_0 - t_0)). \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass für eine Lösung  $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  des Anfangswertproblems (2.17) mit  $n = 1$  die **d'Alembert-Formel**

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy + \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) \quad (2.18)$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

gilt. Umgekehrt rechnet man schnell nach, dass die Funktionen  $u$  dieser Form tatsächlich (2.17) mit  $g \in C^2(\mathbb{R})$  und  $h \in C^1(\mathbb{R})$  lösen. Folglich gilt der folgende Satz:

### Satz 2.3.2

Zu  $g \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $h \in C^1(\mathbb{R})$  gibt es genau eine Funktion  $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , die das Anfangswertproblem (2.17) löst. Für diese gilt die d'Alembert-Formel (2.18).

Wenn wir nun auch für höhere Dimensionen die Wellengleichung lösen wollen, brauchen wir dazu sphärische Mittel:

**Definition 2.3.3.** Sei  $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , seien  $g, h \in C^0(\mathbb{R}^n)$ , Definiere die **sphärischen Mittel**

$$U(x, r, t) := \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y),$$

$$G(x, r) := \int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y),$$

$$H(x, r) := \int_{\partial B(x, r)} h(y) dS(y).$$

### Lemma 2.3.4 (Euler-Poisson-Darboux-Gleichung)

Sei  $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  eine Lösung des Anfangswertproblems (2.17),  $m \geq 2$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist die Funktion  $(r, t) \mapsto U(x, r, t)$  in  $C^m([0, \infty) \times [0, \infty))$  und löst das Problem

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0 & \text{auf } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ U = G & \text{auf } (0, \infty) \times \{t = 0\}, \\ U_t = H & \text{auf } (0, \infty) \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

*Beweis.*

1. Wenn wir die Regularität von  $(r, t) \mapsto U(x, r, t)$  untersuchen wollen, gedenken wir natürlich, Satz A.1 anzuwenden. Dafür darf aber nur der Integrand von der Differentiationsvariablen abhängen, nicht jedoch die Integrationsgrenzen. Um also das  $r$  aus dem Integrationsbereich herauszubekommen, substituieren wir  $y = x + rw$  und erhalten

$$\begin{aligned} U(x, r, t) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y, t) dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rw, t) dS(w). \end{aligned}$$

Nun sehen wir, dass der Integrand die erforderlichen Bedingungen für Satz A.1 erfüllt, und damit besitzt  $(r, t) \mapsto U(x, r, t)$  dieselbe Regularität wie der Integrand  $u$ . ✓

2. Nun bestimmen wir die Ableitungen:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} U_r(x, r, t) &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \langle Du(x + rw, t), w \rangle dS(w) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x + rw, t) dS(w). \end{aligned}$$

Im Punkt  $w \in \partial B(0, 1)$  ist der äußere Normalenvektor gegeben durch  $w$  selbst, also können wir die Richtungsableitung im Integranden als Normalenableitung auffassen. Tun wir das, so bietet sich die Green'sche Formel für die Fortsetzung der Berechnung an. Bevor wir diese anwenden, machen wir jedoch noch die Substitution rückgängig.

$$\begin{aligned} U_r(x, r, t) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y, t) dS(y) \\ &\stackrel{\text{A.2}}{=} \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy. \end{aligned}$$

b) Weiterhin ist

$$\begin{aligned} U_{rr}(x, r, t) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy \right) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \left( \frac{d}{dr}(r^{1-n}) \cdot \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy \right) \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

$$\begin{aligned}
 & + r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^r \int_{\partial B(x,\rho)} \Delta u(y,t) dS(y) d\rho \right) \\
 = & \frac{1}{n\alpha(n)} \left( (1-n)r^{-n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y,t) dy \right. \\
 & \left. + r^{1-n} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(y,t) dS(y) \right) \\
 = & \frac{1-n}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u dy + \int_{\partial B(x,r)} \Delta u dS(y).
 \end{aligned}$$

c) Also gilt

$$\begin{aligned}
 U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r &= \frac{1-n}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u dy + \int_{\partial B(x,r)} \Delta u dS(y) \\
 & \quad + \frac{n-1}{r} \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y,t) dy \\
 &= \int_{\partial B(x,r)} \Delta u dS(y) \\
 &= \int_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS(y) \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\partial B(x,r)} u dS(y) \\
 &= U_{tt}. \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

3. Zum Schluss überprüfen wir noch die Randwerte:

$$U(x, r, 0) = \int_{\partial B(x,r)} u(y, 0) dS(y) = \int_{\partial B(x,r)} g(y) dS(y) = G(x, r);$$

und

$$U_t(x, r, 0) = \int_{\partial B(x,r)} u_t(y, 0) dS(y) = \int_{\partial B(x,r)} h(y) dS(y) = H(x, r) \quad \checkmark$$

□

### Lemma 2.3.5

Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann existieren  $\beta_j^k \in \mathbb{N}$  mit  $j = 0, \dots, k-1$  derart, dass für alle  $\varphi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$  gilt:



1.  $\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \varphi(r)) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \varphi^{(j)}(r);$
2.  $\left(\frac{d}{dr}\right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \varphi(r)) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k} \varphi'(r));$
3.  $\beta_0^k = \prod_{j=1}^k (2j - 1).$

*Beweis.*

1. Wir beweisen zunächst 1. und 3. mittels vollständiger Induktion.

**k = 1:**

Aussage 1. des Lemmas behauptet:

$$r \cdot \varphi(r) = \beta_0^1 r \cdot \varphi(r).$$

Wenn wir  $\beta_0^1 := 1$  setzen, ist dies sicherlich für alle  $\varphi$  erfüllt, und überdies stimmt damit auch Aussage 3. im Fall  $k = 1$ .

**k → k + 1:**

Wir bestimmen

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k+1} \varphi(r)) &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \cdot (r^2 \varphi(r))) \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \left(\frac{d}{dr}\right)^j (r^2 \varphi(r)) \end{aligned}$$

nach Induktionsannahme. Nun müssen wir die  $j$ -te Ableitung von  $r^2 \varphi(r)$  berechnen. Dabei bekommen wir wegen der Leibniz-Regel Terme der Form

$$\begin{aligned} a \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} r^2\right) \varphi^{(j-2)}(r) &= \tilde{a} \varphi^{(j-2)}(r), \\ b \cdot \left(\frac{d}{dr} r^2\right) \varphi^{(j-1)}(r) &= \tilde{b} r \varphi^{(j-1)}(r) \text{ und} \\ &cr^2 \varphi^{(j)}(r) \end{aligned}$$

für bestimmte Koeffizienten  $\tilde{a}, \tilde{b}, c$ . Wenn wir dies nun mit dem  $r^{j+1}$  in der Summe multiplizieren, erhalten wir (mit unterschiedlichen Koeffizienten) die Terme

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

$r^{j+1}\varphi^{(j-2)}(r)$ ,  $r^{j+2}\varphi^{(j-1)}(r)$  sowie  $r^{j+3}\varphi^{(j)}(r)$ . Wir erkennen, dass der Exponent bei  $r$  immer um 3 größer ist als die Ableitungsordnung von  $\varphi$ . Wenn wir nun also wieder nach Ableitungsordnung von  $\varphi$  sortieren, erhalten wir

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k+1}\varphi(r)) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\beta}_j^k r^{j+3} \varphi^{(j)}(r)$$

mit neuen Koeffizienten  $\tilde{\beta}_j^k$ . Jetzt müssen wir die Summe noch einmal nach  $r$  ableiten. Dabei gilt für die einzelnen Summanden:

$$\frac{d}{dr}(\tilde{\beta}_j^k r^{j+3} \varphi^{(j)}(r)) = \tilde{\beta}_j^k (j+3) r^{j+2} \varphi^{(j)}(r) + \tilde{\beta}_j^k r^{j+3} \varphi^{(j+1)}(r).$$

Wenn wir nun wieder die Summanden nach der Ableitungsordnung von  $\varphi$  zusammenfassen wollen, fällt uns erstens auf, dass der Exponent bei  $r$  nur noch um 2 größer ist; und zweitens sehen wir, dass in der Summe jetzt nicht mehr  $\varphi^{(k-1)}$ , sondern  $\varphi^{(k)}$  als höchste Ableitung auftritt. Die neuen Koeffizienten der Summanden nennen wir nun  $\beta_j^{k+1}$ , dann steht da:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k+1}\varphi(r)) &= \frac{1}{r} \sum_{j=0}^k \beta_j^{k+1} r^{j+2} \varphi^{(j)}(r) \\ &= \sum_{j=0}^k \beta_j^{k+1} r^{j+1} \varphi^{(j)}(r), \end{aligned}$$

womit Aussage 1. bewiesen ist.

Um auch noch an  $\beta_0^{k+1}$  heranzukommen, wenden wir Aussage 1. auf die Funktion  $\varphi(r) \equiv 1$  an und erhalten

$$\begin{aligned} \beta_0^{k+1} r &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k+1} \cdot 1) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^{2k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} ((2k+1)r^{2k-1}) \\ &= (2k+1) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} (r^{2k-1} \cdot 1) \\ &= (2k+1) \cdot \beta_0^k r \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\beta_0^{k+1} &= (2k+1)\beta_0^k \\ &= (2k+1)\prod_{j=1}^k(2j-1) \\ &= \prod_{j=1}^{k+1}(2j-1),\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

2. Fehlt noch Aussage 2. zu zeigen. Für die linke Seite der Gleichung haben wir gemäß Aussage 1.:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dr}\right)^2\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\varphi(r)\right) &= \frac{d^2}{dr^2}\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k r^{j+1}\varphi^{(j)}(r) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k\left(j(j+1)r^{j-1}\varphi^{(j)}(r) + 2(j+1)r^j\varphi^{(j+1)}(r) \right. \\ &\quad \left. + r^{j+1}\varphi^{(j+2)}(r)\right);\end{aligned}$$

während wir für die rechte Seite berechnen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k\left(r^{2k}\varphi'(r)\right) &= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\cdot(r\varphi'(r))\right) \\ &= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k r^{j+1}\left(\frac{d}{dr}\right)^j\left(r\varphi'(r)\right) \\ &= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k r^{j+1}\cdot\left(r\varphi^{(j+1)}(r) + j\varphi^{(j)}(r)\right) \\ &= \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k\left((j+2)r^{j+1}\varphi^{(j+1)}(r) + r^{j+2}\varphi^{(j+2)}(r) \right. \\ &\quad \left. + j(j+1)r^j\varphi^{(j)}(r) + jr^{j+1}\varphi^{(j+1)}(r)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^k\left(r^{j+1}\varphi^{(j+2)}(r) + (2j+2)r^j\varphi^{(j+1)}(r) \right. \\ &\quad \left. + j(j+1)r^{j-1}\varphi^{(j)}(r)\right),\end{aligned}$$

und das ist offenbar gleich dem Ausdruck, den wir für die linke Seite berechnet haben. Somit ist das Lemma vollständig bewiesen.  $\square$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Mit Hilfe dieses technischen Lemmas und der sphärischen Mittel sind wir nun in der Lage, das Anfangswertproblem (2.17) in ungeraden Dimensionen zu lösen. Sei also  $n = 2k + 1$  ungerade. Wir halten ein  $x \in \mathbb{R}^n$  fest und nehmen an, wir hätten eine Funktion  $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , die das Anfangswertproblem löst. Wir setzen

$$\begin{aligned}\tilde{U}(r, t) &:= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U(x, r, t)\right), \\ \tilde{G}(r) &:= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} G(x, r)\right) \quad \text{sowie} \\ \tilde{H}(r) &:= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} H(x, r)\right).\end{aligned}$$

Dann ist  $\tilde{U} \in C^2([0, \infty) \times [0, \infty))$ , da  $U(x, \cdot, \cdot) \in C^{k+1}([0, \infty) \times [0, \infty))$  ist und  $(k-1)$ -mal abgeleitet wird. Außerdem sind nach Definition von  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{G}$  und  $\tilde{H}$  die Anfangsbedingungen  $\tilde{U}(r, 0) = \tilde{G}(r)$  und  $\tilde{U}_t(r, 0) = \tilde{H}(r)$  erfüllt. Ferner gilt für  $r > 0$ :

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{rr}(r, t) &= \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U(x, r, t)\right) \\ &\stackrel{2.3.5/2}{=} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^k \left(r^{2k} U_r(x, r, t)\right) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r^{2k} U_r(x, r, t)\right) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(2kr^{2k-2} U_r(x, r, t) + r^{2k-1} U_{rr}(x, r, t)\right) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} \left(U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r\right)(x, r, t)\right) \\ &\stackrel{2.3.4}{=} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U_{tt}(x, r, t)\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U(x, r, t)\right) \\ &= \tilde{U}_{tt}(x, r, t).\end{aligned}$$

Die Funktion  $\tilde{U}$  ist also eine eindimensionale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{für } r \geq 0, t \geq 0, \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{für } r \geq 0, t = 0. \end{cases}$$

Die eindimensionalen Lösungen haben wir aber schon studiert: Wir wissen, dass für sie die d'Alembert-Formel (2.18) gilt. Es gibt nur noch ein Problem: Die Formel gilt für Lösungen  $\tilde{U} \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , unsere Lösung ist jedoch nur in  $C^2([0, \infty) \times [0, \infty))$ . Wir

müssen  $\tilde{U}$  und die Anfangswerte  $\tilde{G}$  sowie  $\tilde{H}$  also noch geeignet für negative  $r$  definieren. Dazu spiegeln wir sie einfach am Ursprung, wir setzen also

$$\tilde{U}(r, t) := -\tilde{U}(-r, t), \quad \tilde{G}(r) := -\tilde{G}(-r), \quad \tilde{H}(r) := -\tilde{H}(-r)$$

für  $r < 0$ . Die derart fortgesetzten Funktionen sind auf jeden Fall stetig in  $r$ , da sie für  $r = 0$  verschwinden. Außerdem sind sie differenzierbar, da für jede ungerade Funktion  $f$  gilt:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(-f(-x)) = -\frac{df}{dx}(-x) \cdot (-1) = \frac{df}{dx}(-x),$$

für  $x = 0$  somit linksseitige und rechtsseitige Ableitung übereinstimmen. Für die zweite Ableitung von  $\tilde{U}$  nach  $r$  berechnen wir

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{rr}(r, t) &= \tilde{U}_{tt}(r, t) \\ &\stackrel{r \searrow 0}{\rightarrow} \tilde{U}_{tt}(0, t) \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left( r^{2k-1} U_{tt}(x, r, t) \right) \Big|_{r=0} \\ &\stackrel{2.3.5/1}{=} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^j U(x, r, t)}_{=0 \text{ für } r=0 \ \forall j} \\ &= 0, \end{aligned}$$

also ist  $\tilde{U} \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , und ebenso ist  $\tilde{G} = \tilde{U}(\cdot, 0) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Die Bedingungen für die Gültigkeit der d'Alembert-Formel sind also erfüllt. Wir wissen demnach für  $r < t$ :

$$\begin{aligned} \tilde{U}(r, t) &= \frac{1}{2} \left( \tilde{G}(r+t) + \tilde{G}(r-t) + \int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r) + \int_0^{r+t} \tilde{H}(y) dy + \int_{r-t}^0 \tilde{H}(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r) + \int_0^{t+r} \tilde{H}(y) dy - \int_0^{t-r} \tilde{H}(z) dz \right), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Integral  $z := -y$  substituiert und die Symmetrie von  $\tilde{H}$  ausgenutzt haben. Wie können wir jetzt aus  $\tilde{U}$  die gesuchte Lösung  $u$  gewinnen? Dazu erinnern wir uns an die Definition von  $\tilde{U}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{U}(r, t) &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left( r^{2k-1} U(x, r, t) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^j U(x, r, t) \\ &= \beta_0^k r U(x, r, t) + \beta_1^k r^2 U_r(x, r, t) + \cdots + \beta_{k-1}^k r^k \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} U(x, r, t). \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Wenn wir also den Summanden, in dem  $r$  nur in der ersten Potenz vorkommt, isolieren können, bekommen wir schon einmal die unabgeleitete Funktion  $U$ . Dazu dividieren wir durch  $r$  und lassen  $r \rightarrow 0$  gehen, dann fallen alle anderen Summanden weg:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(r, t)}{r} = \beta_0^k \lim_{r \rightarrow 0} U(x, r, t) = \beta_0^k u(x, t).$$

Wir haben also sogar die gesuchte Funktion  $u$  gewonnen:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\beta_0^k} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(r, t)}{r} \\ &= \frac{1}{\beta_0^k} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \left( \tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r) + \int_0^{t+r} \tilde{H}(y) dy - \int_0^{t-r} \tilde{H}(z) dz \right) \\ &= \frac{1}{\beta_0^k} \frac{1}{2} \left( \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t)}{r} + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{G}(t) - \tilde{G}(t-r)}{r} \right. \\ &\quad \left. + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^{t+r} \tilde{H}(y) dy - \int_0^t \tilde{H}(y) dy}{r} + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^t \tilde{H}(y) dy - \int_0^{t-r} \tilde{H}(y) dy}{r} \right) \\ &= \frac{1}{\beta_0^k} \frac{1}{2} (2\tilde{G}'(t) + 2\tilde{H}(t)) \\ &= \frac{1}{\gamma_n} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x,t)} h(y) dS(y) \right) \right], \end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei wir für ungerade  $n = 2k + 1$

$$\gamma_n := \beta_0^k = \prod_{j=1}^k (2j-1) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{n-2} j$$

definieren.

### Satz 2.3.6

Sei  $n \geq 3$  ungerade. Falls  $u \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  das Anfangswertproblem (2.17) der Wellengleichung löst, dann gilt für  $u$  die Gleichung (2.19).

Sind umgekehrt  $g \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$  und  $h \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  vorgegeben und ist  $u$  durch (2.19) definiert, dann ist  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  und  $u$  löst das Anfangswertproblem (2.17).

*Beweis.* Den ersten Teil des Satzes haben wir bereits gezeigt. Sei also  $u$  durch (2.19) definiert.

1. Um die Regularität von  $u$  zu untersuchen, wollen wir den Integrationsbereich koordinatenunabhängig machen. Zu diesem Zwecke substituieren wir wie im Beweis von Lemma 2.3.4  $y = x + tw$ .

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{\gamma_n} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} h(y) dS(y) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\gamma_n} \left[ \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \underbrace{g(x+tw) dS(w)}_{\in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))} \right)}_{\in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \underbrace{h(x+tw) dS(w)}_{\in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))} \right)}_{\in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))} \right],
 \end{aligned}$$

also ist  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .

2. Schreibe  $u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n}(u_1(x, t) + u_2(x, t))$ , wir setzen also

$$\begin{aligned}
 u_1(x, t) &:= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} g(x+tw) dS(w) \right) \quad \text{und} \\
 u_2(x, t) &:= \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} h(x+tw) dS(w) \right).
 \end{aligned}$$

Wir bestimmen  $\Delta u_1$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta u_1(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{t^{n-2}}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \Delta_x g(x+tw) dS(w) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{n\alpha(n)t} \int_{\partial B(x,t)} \Delta g(y) dS(y) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{n\alpha(n)t} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{\partial B(x,\tau)} \Delta g(y) dS(y) d\tau \right)
 \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x,t)} \Delta g(y) dy \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,t)} \Delta g(y) dy \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{t^n}{n} \int_{B(x,t)} \Delta g(y) dy \right).
\end{aligned}$$

Im Beweis von Satz 2.1.10 haben wir gezeigt, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) = \frac{1}{\text{vol } \partial B(x,t)} \int_{B(x,t)} \Delta g(y) dy$$

gilt. Schreiben wir die rechte Seite als Mittelwertintegral, so lautet die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) = \frac{t}{n} \int_{B(x,t)} \Delta g(y) dy. \quad (2.20)$$

Damit setzen wir die begonnene Rechnung fort:

$$\begin{aligned}
\Delta u_1(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( t^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) \right) \\
&\stackrel{2.3.5/2}{=} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^3 \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}-1} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) \right) \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 u_1(x,t).
\end{aligned}$$

Also löst  $u_1$  die Wellengleichung. Vollkommen analog zeigt man, dass  $u_2$  die Wellengleichung löst, und damit tut dies auch  $u$ .

3. Wir überprüfen die Anfangswerte: Nach Anwendung von 2.3.5/1 erkennt man sofort, dass  $u_2(x,t)$  für  $t \searrow 0$  gegen 0 strebt. Für den Grenzwert  $\lim_{t \searrow 0} u_1(x,t)$  erhalten wir (mit  $n = 2k + 1$ ):

$$\begin{aligned}
\lim_{t \searrow 0} u_1(x,t) &= \lim_{t \searrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{k-1} \left( t^{2k-1} \int_{\partial B(x,t)} g dS \right) \\
&\stackrel{2.3.5/1}{=} \lim_{t \searrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k t^{j+1} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^j \int_{\partial B(x,t)} g dS \\
&= \lim_{t \searrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k \left( (j+1)t^j \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^j \int_{\partial B(x,t)} g dS \right. \\
&\quad \left. + t^{j+1} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^{j+1} \int_{\partial B(x,t)} g dS \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \beta_0^k(0+1)t^0 \lim_{t \searrow 0} \int_{\partial B(x,t)} g \, dS \\
 &= \gamma_n g(x).
 \end{aligned}$$

Mit derselben Rechnung kann man zeigen, dass  $\frac{\partial}{\partial t} u_2(x, t) \xrightarrow{t \searrow 0} \gamma_n f(x)$  gilt. Fehlt noch der Anfangswert für  $\frac{\partial}{\partial t} u_1$ :

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \searrow 0} \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, t) &= \lim_{t \searrow 0} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x,t)} g \, dS \right) \\
 &\stackrel{2.3.5/2}{=} \lim_{t \searrow 0} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left( t^{n-1} \cdot \frac{t}{n} \int_{B(x,t)} \Delta g \, dy \right).
 \end{aligned}$$

Der Operator  $\left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(n-1)/2}$  vernichtet höchstens  $n-1$   $t$ -Potenzen. In der Funktion, auf die der Operator angewandt wird, ist  $t$  jedoch in der  $n$ -ten Potenz vorhanden, d.h. in jedem Summanden tritt auch nach dem Ableiten noch ein Faktor  $t$  auf. Demnach konvergiert  $\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, t)$  für  $t \searrow 0$  gegen 0. Zusammengefasst haben wir also

$$\lim_{t \searrow 0} u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left( \lim_{t \searrow 0} u_1(x, t) + \lim_{t \searrow 0} u_2(x, t) \right) = \frac{1}{\gamma_n} \cdot (\gamma_n g(x) + 0) = g(x),$$

und analog  $u_t(x, t) \xrightarrow{t \searrow 0} h(x)$ . Die Funktion  $u$  löst also tatsächlich das Anfangswertproblem (2.17).  $\square$

**Beispiel 2.3.7.** Der physikalisch wichtigste Fall mit ungerader Dimension ist der Fall  $n = 3$ . Dort gilt nach Satz 2.3.6:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B(x,t)} g(y) \, dS(y) \right) + t \int_{\partial B(x,t)} h(y) \, dS(y) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} g(y) \, dS(y) \right) + t \int_{\partial B(x,t)} h(y) \, dS(y) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} g(x + tw) \, dS(w) \right) + t \int_{\partial B(x,t)} h(y) \, dS(y) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} g(x + tw) \, dS(w) + \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} \langle Dg(x + tw), w \rangle \, dS(w) \\
 &\quad + t \int_{\partial B(x,t)} h(y) \, dS(y) \\
 &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x,t)} g(y) \, dS(y) + \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} \langle Dg(y), \frac{y-x}{t} \rangle \, dS(y)
 \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

$$\begin{aligned}
 & +t \int_{\partial B(x,t)} h(y) dS(y) \\
 = & \int_{\partial B(x,t)} (g(y) + \langle Dg(y), y - x \rangle + th(y)) dS(y). \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.21) heißt **Kirchhoff-Formel**.

Nun wollen wir auch die Lösungen der Wellengleichung in geraden Dimensionen kennenlernen. Dabei können wir jedoch nicht analog zum ungeradedimensionalen Fall vorgehen, denn dort haben wir benutzt, dass sich die Dimension als  $n = 2k + 1$  mit ganzzahligem  $k$  schreiben lässt. Wir können aber den geradedimensionalen Fall auf den zuvor behandelten zurückführen.

Sei dazu  $n = 2k$  gerade und  $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  eine Lösung des Anfangswertproblems (2.17). Setze

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, t) & := u(x_1, \dots, x_n, t), \\
 \bar{g}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) & := g(x_1, \dots, x_n) \text{ sowie} \\
 \bar{h}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) & := h(x_1, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

Dann ist  $\bar{u} \in C^{k+1}(\mathbb{R}^{n+1} \times [0, \infty))$  eine Lösung der Wellengleichung, und auf  $\mathbb{R}^{n+1} \times \{t = 0\}$  gilt  $\bar{u} = \bar{g}$  sowie  $\bar{u}_t = \bar{h}$ . Aus Satz 2.3.6 wissen wir demnach, dass

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = \bar{u}(x, 0, t) = & \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^{n-1} \int_{\partial B(x,0,t)} \bar{g}(y) d\bar{S}(y) \right) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^{n-1} \int_{\partial B(x,0,t)} \bar{h}(y) d\bar{S}(y) \right) \right]. \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Diese Formel ist aber noch etwas unhandlich, da wir über den Rand eines  $(n + 1)$ -dimensionalen Balles integrieren müssen, um ein  $n$ -dimensionales Problem zu lösen. Bestimmen wir also das Flächenelement  $d\bar{S}(y)$ .

Wir können das Integral über die Sphäre  $\partial B(x, 0, t)$  in zwei Integrale über Halbsphären zerlegen. Wählen wir die Halbsphären  $\{y \in \partial B(x, 0, t) \mid y_{n+1} > 0\}$  und  $\{y \in \partial B(x, 0, t) \mid y_{n+1} < 0\}$ , so stellen wir als erstes fest, dass beide Integrale denselben Wert annehmen müssen: Schließlich hängt der Integrand nicht von  $y_{n+1}$  ab. Wir brauchen also nur das Integral über die obere Halbsphäre zu bestimmen und dessen Wert zu verdoppeln, um den Wert des Integrals über die ganze Sphäre zu erhalten.

Die obere Halbsphäre ist der Graph über  $B(x, t)$  der Funktion  $y \mapsto \sqrt{t^2 - |y - x|^2}$ , lässt sich demnach parametrisieren durch

$$F : y \mapsto (y_1, \dots, y_n, \sqrt{t^2 - |y - x|^2}).$$

Für das Flächenelement gilt dann

$$d\bar{S}(y) = \sqrt{\det \left( \left\langle \frac{\partial F}{\partial y_i}, \frac{\partial F}{\partial y_j} \right\rangle \right)_{i,j}} dy.$$

Wir bestimmen die Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \left( 0, \dots, \overset{i}{\underset{\downarrow}{1}}, \dots, 0, \frac{x_i - y_i}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} \right),$$

Und damit ist

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial y_i}, \frac{\partial F}{\partial y_j} \right\rangle = \delta_{ij} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{t^2 - |y - x|^2}.$$

Hieraus die gewünschte Determinante zu bestimmen, erscheint zunächst ausgesprochen aufwändig. Um uns die Arbeit zu erleichtern, wollen wir die Rotationssymmetrie der Halbsphäre nutzen. Demgemäß kann das Flächenelement  $d\bar{S}(y)$  nur vom Abstand  $|y - x|$  abhängen, also bestimmen wir ihn nur für „einfache“  $y$ . Nehmen wir beispielsweise nur die  $y$  der Form  $y = x + \lambda e_1$ , dann ist

$$\left( \left\langle \frac{\partial F}{\partial y_i}, \frac{\partial F}{\partial y_j} \right\rangle (y) \right)_{i,j} = \left( \begin{array}{c|c} 1 + \frac{|x_1 - y_1|^2}{t^2 - |y - x|^2} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{1}_{n-1} \end{array} \right),$$

und somit

$$\begin{aligned} d\bar{S}(y) &= \sqrt{\det \left( \left\langle \frac{\partial F}{\partial y_i}, \frac{\partial F}{\partial y_j} \right\rangle \right)_{i,j}} dy \\ &= \sqrt{1 + \frac{|x_1 - y_1|^2}{t^2 - |y - x|^2}} dy \\ &= \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - |y - x|^2}} dy \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy. \end{aligned}$$

Nun können wir eines der Integrale in (2.22) bestimmen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x,0,t)} \bar{g}(y) d\bar{S}(y) &= \frac{1}{(n+1)\alpha(n+1)t^n} \int_{\partial B(x,0,t)} \bar{g}(y) d\bar{S}(y) \\ &= \frac{2}{(n+1)\alpha(n+1)t^n} \int_{B(x,t)} g(y) \cdot \frac{t dy}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} \\ &= \frac{2t\alpha(n)}{(n+1)\alpha(n+1)} \int_{B(x,t)} \frac{g(y) dy}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}}. \end{aligned}$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Für die Lösung  $u$  des Anfangswertproblems (2.17) gilt also

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{2\alpha(n)}{(n+1)\alpha(n+1)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B(x,t)} \frac{g(y) dy}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B(x,t)} \frac{h(y) dy}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} \right) \right] \\
 &=: \frac{1}{\gamma_n} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B(x,t)} \frac{g(y) dy}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B(x,t)} \frac{h(y) dy}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} \right) \right], \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

wobei wir den Wert von  $\gamma_n$  noch genauer bestimmen können:

$$\begin{aligned}
 \gamma_n &= \gamma_{n-1} \cdot \frac{(n+1)\alpha(n+1)}{2\alpha(n)} \\
 &= \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{n-1} j \right) \cdot \frac{(n+1) \frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\pi^{n/2}}}{2 \frac{\Gamma(1+\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}}} \\
 &= \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{n+1} j \right) \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+2}{2})}{2 \Gamma(\frac{n+3}{2})}.
 \end{aligned}$$

Die Gammafunktion nimmt für ganze Zahlen als Argument „schöne“ Werte an, nämlich  $\Gamma(x+1) = x!$ . Das Argument  $\frac{n+2}{2}$  macht dabei keine Probleme, da  $n$  gerade ist; aber  $\Gamma(\frac{n+3}{2})$  wollen wir eliminieren. Dazu benutzen wir die **Legendre-Verdoppelungsformel**

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \Gamma(x)$$

mit  $x = n+2$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma_n &= \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{n+1} j \right) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \cdot \frac{2^{n+1} \Gamma(\frac{n+2}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+2)} \\
 &= \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{n+1} j \right) \cdot \frac{2^n \left(\frac{n}{2}\right)!^2}{(n+1)!} \\
 &= \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{n+1} j \right) \cdot \frac{\left(2^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2}!\right)^2}{(n+1)!}.
 \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass

$$2^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2} = \prod_{j=1}^{n/2} (2j) = \prod_{\substack{j=2 \\ j \text{ gerade}}}^n j$$

gilt. Demnach rechnen wir weiter:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{n+1} j \right) \cdot \left( \prod_{\substack{j=2 \\ j \text{ gerade}}}^n j \right)^2 \frac{1}{(n+1)!} \\ &= (n+1)! \left( \prod_{\substack{j=2 \\ j \text{ gerade}}}^n j \right) \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \prod_{\substack{j=2 \\ j \text{ gerade}}}^n j, \end{aligned}$$

d.h. für gerade  $n$  ist  $\gamma_n$  das Produkt aller geraden Zahlen bis  $n$ , während es sich für ungerade  $n$  als Produkt aller ungeraden Zahlen bis  $n-2$  berechnen ließ.

### Satz 2.3.8

Sei  $n \geq 2$  gerade. Sei  $u \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  eine Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung (2.17). Dann gilt für  $u$  die Gleichung (2.23).

Sind umgekehrt  $g \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$  und  $h \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$  vorgegeben und ist  $u$  durch (2.23) definiert, dann ist  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  und  $u$  löst das Anfangswertproblem (2.17).

*Beweis.* Den ersten Teil des Satzes haben wir bereits gezeigt. Für den Beweis des zweiten Teils stellen wir zunächst fest, dass zu  $g$  und  $h$  wie oben  $\bar{g} \in C^{\frac{(n+1)+3}{2}}(\mathbb{R}^{n+1})$  und  $\bar{h} \in C^{\frac{(n+1)+1}{2}}(\mathbb{R}^{n+1})$  gilt. Die Funktion  $\bar{u}$ , die durch Gleichung (2.22) definiert wird, löst darum nach Satz 2.3.6 das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ \bar{u} = \bar{g}, \quad \bar{u}_t = \bar{h} & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Nach obiger Rechnung ist aber die durch Gleichung (2.23) definierte Funktion  $u(x, t) = \bar{u}(x, 0, t) = \bar{u}(x, x_{n+1}, t)$ , sie besitzt demnach dieselben Eigenschaften, löst also das Anfangswertproblem (2.17).  $\square$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

**Beispiel 2.3.9.** Auch für gerade Dimensionen schauen wir uns den physikalisch bedeutendsten Fall  $n = 2$  gesondert an. Nach Satz 2.3.8 gilt für Lösungen des Anfangswertproblems (2.17)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( t^2 \int_{B(x,t)} \frac{g(y) dy}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) + t^2 \int_{B(x,t)} \frac{h(y) dy}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right].$$

Wir bestimmen für den ersten Summanden:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( t^2 \int_{B(x,t)} \frac{g(y) dy}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\pi} \int_{B(x,t)} \frac{g(y) dy}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( t^2 \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tw) dw}{\sqrt{t^2 - |tw|^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tw) dw}{\sqrt{1 - |w|^2}} \right) \\ &\stackrel{\text{A.1}}{=} \frac{1}{\pi} \left( \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tw) dw}{\sqrt{1 - |w|^2}} + t \int_{B(0,1)} \frac{\langle w, Dg(x+tw) \rangle}{\sqrt{1 - |w|^2}} dw \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( t^{-2} \int_{B(x,t)} \frac{g(y) dy}{\sqrt{1 - \left| \frac{y-x}{t} \right|^2}} + t^{-1} \int_{B(x,t)} \frac{\langle Dg(y), \frac{y-x}{t} \rangle}{\sqrt{1 - \left| \frac{y-x}{t} \right|^2}} \right) \\ &= t \int_{B(x,t)} \frac{g(y) dy}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} + t \int_{B(x,t)} \frac{\langle Dg(y), y-x \rangle}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die **Poisson-Formel**

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2h(y) + t\langle Dg(y), y-x \rangle}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

**Bemerkung 2.3.10.** Sei  $K := \text{supp}(g) \cup \text{supp}(h) \subset \mathbb{R}^n$ . Wir untersuchen den Träger von  $u$ . Nach Gleichung (2.18) und den Sätzen 2.3.6 sowie 2.3.8 kann  $u(x, t) \neq 0$  nur dann gelten, wenn  $K \cap B(x, t) \neq \emptyset$  gilt. Setze

$$J_+(K) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \mid K \cap \bar{B}(x, t) \neq \emptyset\}.$$

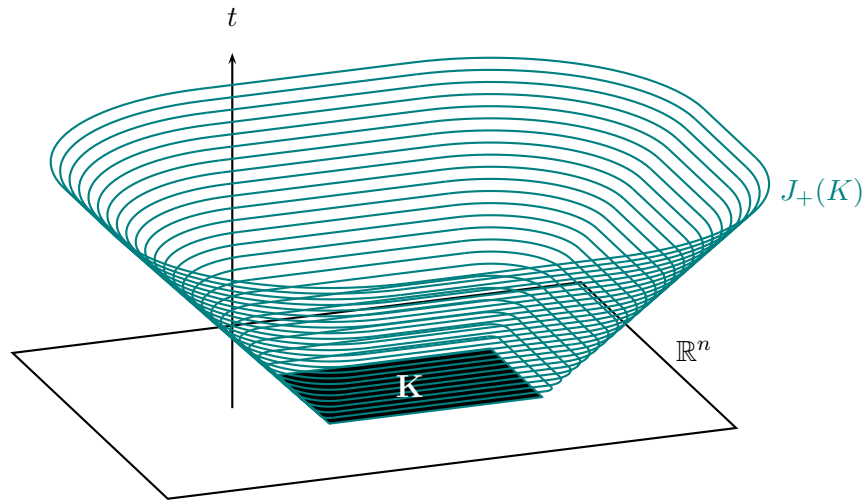
Dann ist offenbar  $\text{supp}(u) \subset J_+(K)$ .

Wir überlegen uns, wie  $J_+(K)$  aussieht:

$$\begin{aligned} K \cap \bar{B}(x, t) \neq \emptyset & \Leftrightarrow \exists x_0 \in K : x_0 \in \bar{B}(x, t) \\ & \Leftrightarrow \exists x_0 \in K : |x_0 - x| \leq t \\ & \Leftrightarrow \text{dist}(x, K) = \min_{x_0 \in K} |x_0 - x| \leq t, \end{aligned}$$

also

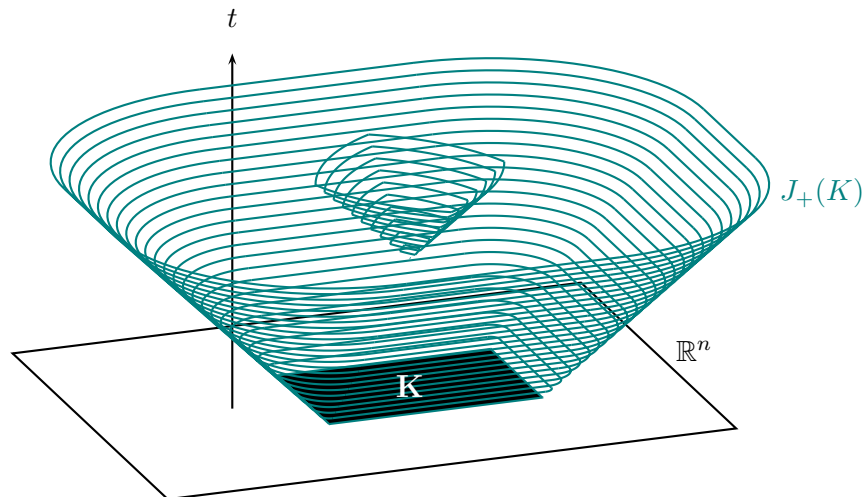
$$J_+(K) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \mid \text{dist}(x, K) \leq t\}.$$



Die Lösungen der Wellengleichung beschreiben also Wellen, die sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten, im Gegensatz zu den Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

In ungeraden Dimensionen  $n \geq 3$  haben wir eine noch stärkere Bedingung an den Träger von  $u$ : hier muss  $K \cap \partial B(x, t) \neq \emptyset$  sein, damit  $u(x, t) \neq 0$  gilt, d.h.

$$\begin{aligned} \text{supp}(u) &\subset \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \mid \exists x_0 \in K : |x_0 - x| = t\} \\ &= \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \mid \min_{x_0 \in K} |x_0 - x| \leq t \wedge \max_{x_0 \in K} |x_0 - x| \geq t \right\} \\ &= J_+(K) \setminus \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \mid \max_{x_0 \in K} |x_0 - x| < t \right\}. \end{aligned}$$



## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Wenn man also z.B. die Ausbreitung von Schallwellen im Raum betrachtet, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  im kompakten Gebiet  $K$  entstanden sind, so wird jeder Hörer die Schallwellen nur für eine gewisse Zeit hören. Man nennt dies das **Huygens-Prinzip**. Betrachtet man hingegen die Ausbreitung von Wasserwellen auf der Wasseroberfläche, so sind die Auswirkungen von deren Erzeugung im Prinzip beliebig lange spürbar. Hierin liegt der fundamentale Unterschied zwischen Lösungen der Wellengleichung in gerader und in ungerader Dimension.

Wir wollen nun die **inhomogene Wellengleichung**

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ u = u_t = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.24)$$

lösen. Dazu erinnern wir uns des Duhamel-Prinzips (siehe Seite 41): Statt (2.24) lösen wir das Problem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t; s) - \Delta u(x, t; s) = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \times [0, \infty), \\ u(x, t; s) = 0 & \text{für } t = s, \\ u_t(x, t; s) = f(x, s) & \text{für } t = s \end{cases} \quad (2.25)$$

und setzen

$$u(x, t) := \int_0^t u(x, t; s) ds. \quad (2.26)$$

### Satz 2.3.11

Sei  $n \geq 2$ , sei  $f \in C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Dann existiert eine Funktion  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , die das Problem (2.24) löst. Diese Funktion lässt sich aus einer Lösung von (2.25) durch Anwendung des Duhamel-Prinzips mittels (2.26) gewinnen.

*Beweis.*

1. Ist  $n$  ungerade, so ist  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \frac{n+1}{2}$  und damit nach Satz 2.3.6 die Funktion

$$u(x, t; s) = \frac{1}{\gamma_n} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B(x,t)} f(y, s) dy \right)$$

eine Lösung von (2.25) sowie zweimal stetig differenzierbar in  $x$  und  $t$ ; aber auch in  $s$ , da wir eine ausreichende Regularität für  $f$  fordern und über ein Kompaktum integrieren.



Ist  $n$  gerade, so ist  $\left[\frac{n}{2}\right] + 1 = \frac{n+2}{2}$  und damit gemäß Satz 2.3.8 die Funktion

$$u(x, t; s) = \frac{1}{\gamma_n} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n+3}{2}} \left( t^n \int_{B(x,t)} \frac{f(y, s)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy \right)$$

eine zweimal stetig differenzierbare Lösung von (2.25).

2. Wir überprüfen die Anfangsbedingungen für  $u(x, t)$ :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_0^0 u(x, 0; s) ds \\ &= 0; \quad \checkmark \\ u_t(x, t) &= u(x, t; t) + \int_0^t u_t(x, t; s) ds \\ &\stackrel{(2.25)}{=} \int_0^t u_t(x, t; s) ds \\ \Rightarrow u_t(x, 0) &= \int_0^0 u_t(x, 0; s) ds \\ &= 0. \quad \checkmark \end{aligned}$$

3. Schließlich zeigen wir, dass  $u(x, t)$  die inhomogene Wellengleichung (2.24) löst, weil  $u(x, t; s) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty) \times [0, \infty))$  ist:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t; s) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u_t(x, t; s) ds \\ &= u_t(x, t; t) + \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds \\ &\stackrel{(2.25)}{=} f(x, t) + \int_0^t \Delta u(x, t; s) ds \\ &\stackrel{A.1}{=} f(x, t) + \Delta \int_0^t u(x, t; s) ds \\ &= f(x, t) + \Delta u(x, t), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

**Beispiel 2.3.12.** Für  $n = 3$  lösen wir das Problem (2.25) nach der Kirchhoff-Formel (2.21):

$$u(x, t; s) = \int_{\partial B(x, t-s)} (t-s) f(y, s) dS(y).$$

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Daraus erhalten wir für (2.24) die Lösung

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_0^t (t-s) \int_{\partial B(x, t-s)} f(y, s) dS(y) ds \\
 &= \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-s)} \int_{\partial B(x, t-s)} f(y, s) dS(y) ds \\
 &\stackrel{r:=t-s}{=} \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\partial B(x, r)} \frac{f(y, t-r)}{r} dS(y) dr \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{B(x, t)} \frac{f(y, t-|y-x|)}{|y-x|} dy.
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.3.13.** Auch in Dimension  $n = 1$  können wir das Problem (2.24) mit Hilfe des Duhamel-Prinzips lösen. Hierbei genügt uns nach Satz 2.3.2 die Regularitätsbedingung  $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ . Wir haben dann

$$u(x, t; s) = \frac{1}{2} \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy,$$

und damit

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy ds.$$

**Beispiel 2.3.14.** Wir wollen lösen:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = xe^t & \text{auf } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u(x, t) = u_t(x, t) = x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Dazu lösen wir zunächst das homogene Problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x, t) \equiv 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_1(x, t) = x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Nach der d'Alembert-Formel gilt dann

$$\begin{aligned}
 u_1(x, t) &= \frac{1}{2} \left( 2x + \int_{x-t}^{x+t} y dy \right) \\
 &= x + \frac{1}{4}(4xt) \\
 &= (1+t)x.
 \end{aligned}$$

Nun lösen wir das inhomogene Problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x, t) = xe^t & \text{auf } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u_2(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_2(x, t) = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Die Lösung hierfür erhalten wir aus Bemerkung 2.3.13:

$$\begin{aligned}
 u_2(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} ye^s dy ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{1}{2} e^s ((x + (t - s))^2 - (x - (t - s))^2) \right) ds \\
 &= \int_0^t e^s \cdot x(t - s) ds \\
 &= xte^s \Big|_0^t - x \int_0^t se^s ds \\
 &= xt(e^t - 1) - x \left( se^s \Big|_0^t - e^s \Big|_0^t \right) \\
 &= x(e^t - t - 1).
 \end{aligned}$$

Also löst

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = xe^t$$

das Ausgangsproblem (2.27).

Nun studieren wir die Wellengleichung noch auf Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 2.3.15 (Eindeutigkeit)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit stückweise glattem Rand. Sei  $T > 0$ . Dann existiert zu gegebenen Funktionen  $f : U_T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \Gamma_T \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\bar{U}_T)$  des Anfangs- und Randwertproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{auf } U_T, \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T, \\ u_t = h & \text{auf } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $f = g = h \equiv 0$ . Zu zeigen ist, dass dann  $u \equiv 0$  auf  $\bar{U}_T$  gelten muss. Setze

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_U (u_t(x, t)^2 + |Du(x, t)|^2) dx.$$

Da  $u \in C^2(\bar{U}_T)$  ist, ist  $e$  immer noch einmal stetig differenzierbar. Wir bestimmen die

## 2. Die drei wichtigsten Prototypen

Ableitung von  $e$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}(t) &= \int_U (u_t \cdot u_{tt} + \langle Du, Du_t \rangle) dx \\
 &\stackrel{\text{A.2}}{=} \int_U (u_t u_{tt} - \Delta u \cdot u_t) dx + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \underbrace{u_t}_{=0} dS(x) \\
 &= \int_U u_t \underbrace{(u_{tt} - \Delta u)}_{=0} dx \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

also ist  $e$  konstant. Wir bestimmen den Wert von  $e$ , am einfachsten bei  $t = 0$ :

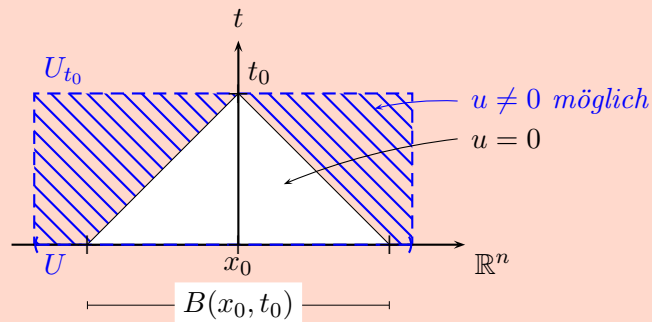
$$e(0) = \frac{1}{2} \int_U \underbrace{(u_t(x, 0))^2}_{=0} + \underbrace{|Du(x, 0)|^2}_{=0} dx = 0,$$

also ist  $e(t) = 0$  für alle  $t \in [0, T]$ . Dies ist aber nur möglich, wenn  $u_t \equiv 0$  und  $Du \equiv 0$ . Eine  $C^1$ -Funktion, für die alle Ableitungen überall verschwinden, muss jedoch konstant sein, also gilt

$$u(x, t) = u(x, 0) = 0. \quad \square$$

### Satz 2.3.16 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Seien  $x_0 \in U$  und  $t_0 > 0$  derart, dass  $B(x_0, t_0) \subset U$  ist. Die Funktion  $u \in C^2(U_{t_0})$  löse die Wellengleichung. Ist nun  $u_t = u = 0$  auf  $B(x_0, t_0) \times \{t = 0\}$ , so ist auch  $u(x_0, t_0) = 0$ .



*Beweis.* Wir zeigen, dass  $u \equiv 0$  auf dem Kegel über  $B(x_0, t_0) \times \{t = 0\}$  mit Spitze in  $(x_0, t_0)$  gilt. Daraus folgt dann, dass auch in der Kegelspitze  $(x_0, t_0)$  die Funktion den Wert 0 annimmt. Setze dazu

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} (u_t(x, t)^2 + |Du(x, t)|^2) dx.$$

Wie im Beweis von Satz 2.3.15 sehen wir, dass  $e(0) = 0$  gilt. Außerdem ist  $e$  nichtnegativ. Daher genügt es zu zeigen, dass  $e$  monoton fallend ist. Wir schätzen also die Ableitung ab:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} (u_t u_{tt} + \langle Du, Du_t \rangle) dx - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} (u_t^2 + |Du|^2) dS \\ &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t \underbrace{(u_{tt} - \Delta u)}_{=0} dx + \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} (u_t^2 + |Du|^2) dS \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 + u_t^2 - u_t^2 - |Du|^2 \right) dS, \end{aligned}$$

da für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  die Ungleichung  $a \cdot b \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$  gilt. Außerdem gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle Du, \nu \rangle \leq |Du| \cdot |\nu| = |Du|.$$

Daraus folgt, dass der Integrand bei  $\dot{e}$  nichtpositiv ist, also  $\dot{e} \leq 0$ , was zu zeigen war. Die Funktion  $e$  ist also konstant 0, und wie im Beweis von Satz 2.3.15 schließen wir daraus, dass

$$u(x, \tau) = u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, t_0 - \tau), \tau \in [0, t],$$

und diese Aussage gilt für alle  $t \in [0, t_0]$ , also auf dem gesamten Kegel, und insbesondere für  $\tau = t = t_0$ ,  $x = x_0$ .  $\square$

**Bemerkung 2.3.17.** Dieser Satz lässt sich physikalisch wie folgt interpretieren: Wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Welle außerhalb des Balles  $B(x_0, t_0)$  angeregt, so gelangt die Auslenkung (d.h. die Information über die Anregung der Welle) frühestens nach der Zeit  $t_0$  zum Punkt  $x_0$ . Die Welle kann also nur eine Raumeinheit pro Zeiteinheit zurücklegen, d.h. sie breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit aus. (Für Lösungen auf ganz  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  wussten wir das bereits.)



## 3. Transformationsmethoden

### 3.1. Fouriertransformation

In diesem Abschnitt sind alle auftretenden Funktionen komplexwertig.

**Definition 3.1.1.** Für  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist die **Fourier-Transformierte** definiert durch

$$\hat{u}(y) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} u(x) dx.$$

Die **inverse Fourier-Transformierte** ist gegeben durch

$$\check{u}(y) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} u(x) dx.$$

**Bemerkung 3.1.2.** Für jedes  $y \in \mathbb{R}^n$  gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\hat{u}(y)| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x, y \rangle}| \cdot |u(x)| dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \end{aligned}$$

Somit ist  $\hat{u}$  beschränkt, und es gilt

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Ferner liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz, dass  $\hat{u}$  stetig auf  $\mathbb{R}^n$  ist, da  $u$  integrierbar ist.

**Bemerkung 3.1.3.** Es gilt  $\check{u}(y) = \hat{u}(-y)$ . Damit ist auch  $\check{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ , und es gilt

$$\|\check{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

### 3. Transformationsmethoden

**Beispiel 3.1.4.** Sei  $u(x) = e^{-c|x|^2}$  mit  $c > 0$ . Offenbar ist  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , wir können also  $\hat{u}$  und  $\check{u}$  bestimmen.

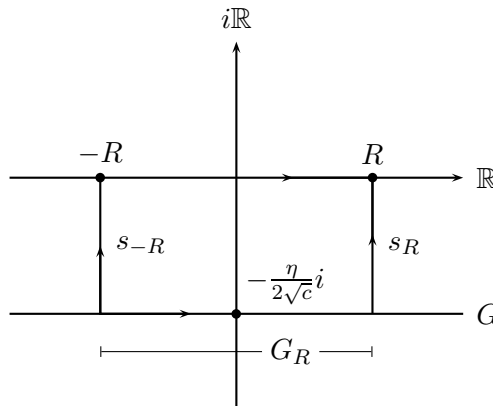
$$\begin{aligned}\check{u}(y) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} \cdot e^{-c|x|^2} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle x, iy - cx \rangle} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{x_j(iy_j - cx_j)} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{x_j(iy_j - cx_j)} dx_j\end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini. Um jetzt eines dieser Integrale  $\int_{\mathbb{R}} e^{\xi(i\eta - c\xi)} d\xi$  zu bestimmen, substituieren wir  $z := \sqrt{c}\xi - \frac{\eta}{2\sqrt{c}}i$ . Dann erhalten wir

$$e^{-z^2} = e^{-\left(c\xi^2 - \frac{\eta^2}{4c} - \xi\eta i\right)} = e^{\frac{\eta^2}{4c}} e^{\xi(i\eta - c\xi)}$$

und  $dz = \sqrt{c} d\xi$ . Der Integrationsbereich ist nach der Substitution jedoch nicht mehr  $\mathbb{R}$ , sondern die Gerade

$$G := \mathbb{R} - \frac{\eta}{2\sqrt{c}}i \subset \mathbb{C}.$$



Wir erhalten also für das Integral

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{\xi(i\eta - c\xi)} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{c}} e^{-\frac{\eta^2}{4c}} \int_G e^{-z^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} e^{-\frac{\eta^2}{4c}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{G_R} e^{-z^2} dz,\end{aligned}$$

wobei  $G_R = \{z \in G \mid \Re(z) \in [-R, R]\}$  ist. Nun ist die Funktion  $z \mapsto e^{-z^2}$  aber ganz, also ist der Wert des Integrals über  $G_R$  derselbe wie über einen beliebigen anderen Weg von



$-R - \frac{\eta}{2\sqrt{c}}i$  bis  $R - \frac{\eta}{2\sqrt{c}}i$ . Setzen wir  $s_t := \left\{ z \in (t + i\mathbb{R}) \mid \Im(z) \in \left[-\frac{\eta}{2\sqrt{c}}, 0\right] \right\}$ , so erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{\xi(i\eta - c\xi)} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{c}} e^{-\frac{\eta^2}{4c}} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\int_{s_{-R}} e^{-z^2} dz}_{\rightarrow 0} + \int_{-R}^R e^{-z^2} dz - \underbrace{\int_{s_R} e^{-z^2} dz}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} e^{-\frac{\eta^2}{4c}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz}_{=\sqrt{\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\eta^2}{4c}}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für  $\check{u}$ :

$$\begin{aligned} \check{u}(y) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{y_j^2}{4c}} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{\pi}{c}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4c}} \\ &= (2c)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4c}}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\hat{u}(y) = \check{u}(-y) = \check{u}(y).$$

### Satz 3.1.5

Seien  $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist

$$\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \cdot \hat{v}.$$

*Beweis.* Nach der Definition der Fourier-Transformierten gilt

$$\begin{aligned} \widehat{u * v}(y) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} (u * v)(x) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} u(z) \cdot v(x - z) dz dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z, y \rangle} \cdot e^{-i\langle x - z, y \rangle} u(z) v(x - z) dx dz \end{aligned}$$

### 3. Transformationsmethoden

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z, y \rangle} u(z) \cdot \left( (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-z, y \rangle} v(x-z) dx \right) dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z, y \rangle} u(z) \hat{v}(y) dz \\
 &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}(y) \hat{v}(y).
 \end{aligned}$$

□

#### Satz 3.1.6 (Plancherel)

Sei  $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann sind auch  $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und es gilt

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

*Beweis.*

- Wir wissen bereits aus Bemerkung 3.1.2, dass für  $v, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$  die Fourier-Transformierten beschränkt sind. Damit sind auch

$$v \cdot \hat{w}, \hat{v} \cdot w \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Für den Wert des Integrals gilt dann

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \hat{w}(x) dx &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} v(x) e^{-i\langle x, y \rangle} w(y) dy dx \\
 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} v(x) w(y) dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(y) w(y) dy.
 \end{aligned}$$

- Für  $\varepsilon > 0$  setze  $v_\varepsilon(x) := e^{-\varepsilon|x|^2}$ . Dann ist nach Beispiel 3.1.4

$$\hat{v}_\varepsilon(y) = (2\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}},$$

und aus Beweisteil 1 erhalten wir demnach

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(x) e^{-\varepsilon|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} w(x) (2\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} dx \quad (3.1)$$

für jede  $L^1$ -Funktion  $w$ .

- Setze  $v(x) := \bar{u}(-x)$ ,  $w := u * v$ . Die so definierte Funktion  $w$  ist integrierbar, da sie Faltung integrierbarer Funktionen ist. Außerdem ist sie stetig, da sie Faltung von  $L^2$ -Funktionen ist. Wir kennen zudem aus Satz 3.1.5 die Gestalt von  $\hat{w}$ :

$$\hat{w} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \cdot \hat{v}.$$

Wir bestimmen die Fourier-Transformierte von  $v$ :

$$\begin{aligned}\hat{v}(y) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y \rangle} \bar{u}(-x) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{i\langle x,y \rangle} u(-x)} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{-i\langle -x,y \rangle} u(-x)} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{-i\langle x,y \rangle} u(x)} dx \\ &= \bar{\hat{u}}(y).\end{aligned}$$

Also ist

$$\hat{w} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\hat{u}|^2.$$

4. Wir wollen nun in Gleichung (3.1)  $\varepsilon \searrow 0$  gehen lassen. Beginnen wir mit der rechten Seite der Gleichung. Dazu erinnern wir uns, dass wir  $(4\pi\varepsilon)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\varepsilon)}$  bereits als Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung kennengelernt haben. Von dieser wissen wir, dass sie für  $\varepsilon \searrow 0$  gegen die  $\delta_0$ -Distribution strebt. Demzufolge gilt

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} (2\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} w(0),$$

da  $w$  stetig und integrierbar ist. Setzen wir die Definition von  $w$  ein, so ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \searrow 0} (2\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} dx &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \bar{u}(x) dx \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty.\end{aligned}$$

Wir wissen also, dass der Grenzwert existiert und kennen seinen Wert. Mit diesem Wissen schauen wir uns die linke Seite von Gleichung (3.1) für  $\varepsilon \searrow 0$  an:

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{n}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(x) e^{-\varepsilon|x|^2} dx \\ &\stackrel{\text{Teil 3}}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(x)|^2 e^{-\varepsilon|x|^2} dx \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(x)|^2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} e^{-\varepsilon|x|^2} dx \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(x)|^2 dx \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\hat{u}(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

wobei wir den Grenzwert wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz unter dem Integral ziehen durften. Wir haben also schon einmal gezeigt, dass  $\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$  gilt.

### 3. Transformationsmethoden

5. Es gilt  $\check{u}(x) = \hat{u}(-x)$ , also ist

$$\|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

was zu zeigen war.

□

Wir haben gesehen, dass die Fouriertransformation Funktionen aus  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$   $L^2$ -isometrisch auf Funktionen aus  $L^2(\mathbb{R}^n)$  abbildet. Da  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  liegt, können wir die Fouriertransformation eindeutig zu einer Isometrie  $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  fortsetzen.

**Definition 3.1.7.** Sei  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $(u_k)_k$  mit  $u_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  eine Folge, die  $u$  approximiert, d.h.  $u_k \xrightarrow{L^2} u$ . Dann ist

$$\hat{u} := \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{u}_k$$

die **Fourier-Transformierte** und

$$\check{u} := \lim_{k \rightarrow \infty} \check{u}_k$$

die **inverse Fourier-Transformierte von  $u$** , wobei der Grenzwert bezüglich der  $L^2$ -Norm zu nehmen ist.

**Bemerkung 3.1.8.** Die Definition 3.1.7 ist sinnvoll, denn

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|(u_k - u_j)^\wedge\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)};$$

deshalb ist  $(\hat{u}_k)_k$  ebenso wie  $(u_k)_k$  eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit von  $L^2$  existiert der Grenzwert. Außerdem hängt die Definition von  $\hat{u}$  nicht von der Wahl der Folge  $(u_k)_k$  ab: Wählen wir nämlich eine weitere Folge  $(v_k)_k$  mit  $v_k \xrightarrow{L^2} u$ ,  $\hat{v}_k \xrightarrow{L^2} \hat{v}$  und setzen

$$w_k := \begin{cases} u_l, & k = 2l - 1, \\ v_l, & k = 2l, \end{cases}$$

so konvergiert auch  $w_k$  gegen  $u$ . Damit konvergiert auch  $\hat{w}_k$ , hat also nur einen Häufungspunkt  $\hat{u} = \hat{v}$ . Dasselbe gilt natürlich auch für  $\check{u}$ .

**Korollar 3.1.9 (Plancherel)**

Für  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  sind  $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und es gilt:

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

**Satz 3.1.10 (Eigenschaften der Fourier-Transformierten)**

Für  $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$  gilt:

1.  $\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \bar{\hat{v}} dx,$
2.  $\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \cdot \hat{u}$  für jeden Multiindex  $\alpha$  mit  $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n),$
3.  $u = \check{\check{u}}.$

*Beweis.* zu 1. Für  $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{C}$  gilt  $\widehat{\lambda v} = \lambda \hat{v}$ . Wir berechnen nun einerseits

$$\begin{aligned} \|u + \lambda v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|(u + \lambda v)\hat{\cdot}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \|\hat{u} + \lambda \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u} + \lambda \hat{v}) \cdot \overline{(\hat{u} + \lambda \hat{v})} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{u}|^2 + |\lambda \hat{v}|^2 + \bar{\hat{u}}(\lambda \hat{v}) + \hat{u}(\overline{\lambda \hat{v}})) dx \\ &= \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + |\lambda|^2 \|\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{\hat{u}}(\lambda \hat{v}) + \hat{u}(\overline{\lambda \hat{v}})) dx \\ &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + |\lambda|^2 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{\hat{u}}(\lambda \hat{v}) + \hat{u}(\overline{\lambda \hat{v}})) dx; \quad (3.2) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \|u + \lambda v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (u + \lambda v) \cdot \overline{(u + \lambda v)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (|u|^2 + |\lambda v|^2 + \bar{u}(\lambda v) + u(\overline{\lambda v})) dx \\ &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + |\lambda|^2 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{u}(\lambda v) + u(\overline{\lambda v})) dx. \quad (3.3) \end{aligned}$$

### 3. Transformationsmethoden

Vergleichen wir nun die Gleichungen (3.2) und (3.3), so erkennen wir, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{u}(\lambda\hat{v}) + \widehat{u}(\overline{\lambda\hat{v}})) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{u}(\lambda v) + u(\overline{\lambda v})) dx \\ \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \Re(\bar{\lambda} u \bar{v}) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Re(\bar{\lambda} \hat{u} \hat{v}) dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

gelten muss. Setzen wir in Gleichung (3.4) den Parameter  $\lambda := 1$ , so erhalten wir die Aussage

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Re(u \bar{v}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Re(\hat{u} \hat{v}) dx; \quad (3.5)$$

und für  $\lambda := i$  ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Im(u \bar{v}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Im(\hat{u} \hat{v}) dx. \quad (3.6)$$

Addition von (3.5) und der mit  $i$  multiplizierten Gleichung (3.6) liefert die gewünschte Aussage. ✓

zu 2. Sei zunächst  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist auch  $D^\alpha u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , und wir erhalten durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha u}(y) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} D^\alpha u(x) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{D_x^\alpha (e^{-i\langle x, y \rangle})}_{=(-iy)^\alpha e^{i\langle x, y \rangle}} u(x) dx \\ &= (iy)^\alpha \hat{u}(y). \end{aligned}$$

Ist nun  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  beliebig, so approximiere  $u$  durch  $C_c^\infty$ -Funktionen  $u_k$ , für die Eigenschaft 2 dann jeweils gilt. Die gewünschte Aussage bleibt nach Definition von  $\hat{u}$  auch beim Grenzübergang erhalten.

zu 3. Sei zunächst  $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $v \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \check{u}(x) v(x) dx &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} u(y) v(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \check{v}(y) dy. \end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle derartigen  $v$ :

$$\begin{aligned} \hat{v}(y) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} \bar{v}(x) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{i\langle x, y \rangle} v(x)} dx \\ &= \check{v}(y). \end{aligned}$$

Auch für beliebige  $L^2$ -Funktionen  $u, v$  gilt (nach Auswahl einer approximierenden Folge und Grenzwertbildung) weiterhin

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{u}v \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\check{v} \, dx, \quad \check{v} = \overline{\check{v}}.$$

Demzufolge ist für alle  $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \check{u}v \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\check{v} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\overline{\check{v}} \, dx \\ &\stackrel{1.}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u\overline{\check{v}} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} uv \, dx. \end{aligned}$$

Da das  $L^2$ -Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, gilt somit  $u = \check{u}$ . □

## 3.2. Anwendungen

Die Fouriertransformation ist besonders geeignet, um Lösungen für lineare PDGen mit konstanten Koeffizienten zu finden.

**Beispiel 3.2.1 (Bessel-Potential).** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Wir betrachten die PDG

$$-\Delta u + u = f. \tag{3.7}$$

Führen wir für diese Gleichung die Fouriertransformation durch, so erhalten wir

$$(|y|^2 + 1)\hat{u}(y) = \hat{f}(y)$$

für fast alle  $y \in \mathbb{R}^n$ . Dies können wir sehr leicht nach  $\hat{u}$  umstellen und daraus die gesuchte Funktion  $u$  selbst erhalten:

$$u(y) = \check{u}(y) = \left( \hat{f}(y) \cdot \frac{1}{1 + |y|^2} \right)^\check{}$$

Wir suchen nun ein  $B(y)$  derart, dass  $\hat{B}(y) = \frac{1}{1+|y|^2}$  gilt – denn dann können wir  $u$  ohne Verwendung von Fouriertransformationen ausdrücken als

$$u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} f * B.$$

### 3. Transformationsmethoden

Offenbar gilt  $\frac{1}{1+|y|^2} = \int_0^\infty e^{-t(1+|y|^2)} dt$ , also

$$\begin{aligned}
 B(x) &= \left( \frac{1}{1+|y|^2} \right)^\vee(x) \\
 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,y \rangle} \int_0^\infty e^{-t(1+|y|^2)} dt dy \\
 &= \int_0^\infty e^{-t} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,y \rangle} e^{-t|y|^2} dy dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-t} (e^{-t|\cdot|^2})^\vee(x) dt \\
 &\stackrel{3.1.4}{=} \int_0^\infty (2t)^{-\frac{n}{2}} e^{-t\frac{|x|^2}{4t}} dt.
 \end{aligned}$$

Dieses  $B$  heißt **Bessel-Potential**. Zusammengefasst erhalten wir die Aussage, dass für Lösungen  $u$  von (3.7) gilt:

$$u(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n}{2}} e^{-t\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy dt.$$

**Beispiel 3.2.2 (Wärmeleitungsgleichung).** Wir suchen Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Für die Lösungen  $u$  erhalten wir nach Fouriertransformation bezüglich  $x$ :

$$\begin{cases} \hat{u}_t(y) + |y|^2 \hat{u}(y) = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ \hat{u} = \hat{g} & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

für fast alle  $y$ . Diese gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung können wir natürlich lösen und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(y) &= e^{-t|y|^2} \hat{g}(y) \\
 \Rightarrow u(x) &= (e^{-t|\cdot|^2} g(y))^\vee(x) \\
 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (g * F)(x),
 \end{aligned}$$

wobei wir  $F$  wieder „passend“ wählen, was uns in diesem Beispiel gar nicht schwer fällt:

$$F(x) = (e^{-t|\cdot|^2})^\vee(x) = (2t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Also bekommen wir für  $u$  die uns bereits bekannte Lösung

$$u(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy. \quad (3.8)$$



**Beispiel 3.2.3 (Schrödinger-Gleichung).** Für komplexwertige Funktionen  $u$  und  $g$  (wobei  $g$  vorgegeben und  $u$  gesucht ist) lösen wir das Anfangswertproblem für die PDG

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Wir können jetzt analog zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung vorgehen, wir erhalten die Lösung der Schrödinger-Gleichung aber auch, indem wir in Gleichung (3.8) formal  $t$  durch  $it$  ersetzen. Für die Lösungen gilt nämlich

$$u(x, t) = (4\pi it)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{ix-y|^2}{4t}} g(y) dy,$$

wobei wir  $i^{-1/2}$  als  $e^{-i\pi/4}$  erklären. Für  $g \in L^1(\mathbb{R}^n), t > 0$  ist  $u$  wohldefiniert. Ist außerdem  $|y|^2 g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so kann man zeigen, dass  $u$  tatsächlich die Schrödinger-Gleichung  $iu_t + \Delta u = 0$  löst. Wie im Beweis des Satzes von Plancherel zeigt man, dass für  $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  die Gleichung

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

für  $t > 0$  erfüllt ist. In welchem Sinne  $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \searrow 0} g$  strebt, wird eventuell später deutlich.

**Definition 3.2.4.** Wir setzen

$$\psi(x, t) := (4\pi it)^{-\frac{n}{2}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}}$$

mit  $x \in \mathbb{R}^n, t \neq 0$ . Dieses  $\psi$  heißt **Fundamentallösung der Schrödinger-Gleichung**.

**Bemerkung 3.2.5.** Die Funktion

$$u = g * \psi(\cdot, t)$$

löst die PDG  $iu_t + \Delta u = 0$ , und überdies gilt  $\lim_{t \searrow 0} u = g$ . Die stetige Fortsetzung von  $u$  auf  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$  löst sonach das Anfangswertproblem (3.9).

### 3. Transformationsmethoden

**Beispiel 3.2.6 (Wellengleichung).** Wir betrachten noch einmal das Anfangswertproblem (2.17):

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g \text{ und } u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Durch Fouriertransformation in  $x$  erhalten wir daraus

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + |y|^2 \hat{u} = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \hat{u} = \hat{g} \text{ und } \hat{u}_t = \hat{h} & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.10)$$

– und das können wir für festes  $y$  lösen. Der Lösungsraum der Differentialgleichung ist zweidimensional mit der Basis  $\{\cos(|y|\cdot t), \sin(|y|\cdot t)\}$ . Zusammen mit den Anfangswerten erhält man die Lösung von (3.10):

$$\hat{u}(y, t) = \hat{g}(y) \cos(|y|t) + \frac{\hat{h}(y)}{|y|} \sin(|y|t).$$

Diese Lösung liegt in  $L^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Selbst bei  $y = 0$  schafft die Funktion keine Probleme, da

$$\frac{\hat{h}(y)}{|y|} \sin(|y|t) = \hat{h}(y) \cdot t \cdot \underbrace{\frac{\sin(|y|t)}{|y|t}}_{\substack{\text{glatt,} \\ \text{beschränkt}}}$$

gilt. Wenn  $\hat{u}$  außerdem integrierbar ist, können wir Definition 3.1.1 anwenden, um  $u$  auszurechnen:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left( \hat{g}(y) \cos(|y|t) + \frac{\hat{h}(y)}{|y|} \sin(|y|t) \right)^\sim(x) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} \cdot \left( \hat{g}(y) \cos(|y|t) + \frac{\hat{h}(y)}{|y|} \sin(|y|t) \right) dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} \left( \hat{g}(y) (e^{i|y|t} + e^{-i|y|t}) + \frac{\hat{h}(y)}{i|y|} (e^{i|y|t} - e^{-i|y|t}) \right) dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ e^{i(\langle x, y \rangle + |y|t)} \left( \hat{g}(y) + \frac{\hat{h}(y)}{i|y|} \right) + e^{i(\langle x, y \rangle - |y|t)} \left( \hat{g}(y) - \frac{\hat{h}(y)}{i|y|} \right) \right] dy. \end{aligned}$$

Wir haben also eine weitere Lösungsformel für die Wellengleichung gefunden. Diese erfordert keine Fallunterscheidung nach der Dimension, und wir benötigen auch keinerlei Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an  $g$  und  $h$ . Sind allerdings  $g, h \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ohne weitere Voraussetzungen, so erhalten wir für  $u$  in der Regel eine distributionelle Lösung.

**Beispiel 3.2.7 (Telegrafengleichung).** Das PDG-System

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + 2d \cdot u_t - u_{xx} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g \text{ und } u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.11)$$

ist das Anfangswertproblem für die **Telegrafengleichung** mit Dämpfungskoeffizient  $d \in \mathbb{R}$ . Auch dieses lösen wir, indem wir zunächst die Fouriertransformation in den räumlichen Koordinaten ausführen:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + 2d\hat{u}_t + y^2 \cdot \hat{u} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \hat{u} = \hat{g} \text{ und } \hat{u}_t = \hat{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem lösen wir mit dem Ansatz  $\hat{u}(y, t) = \alpha e^{\gamma t}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2}{dt^2} e^{\gamma t} + 2d \frac{d}{dt} e^{\gamma t} + y^2 e^{\gamma t} \\ &= (\gamma^2 + 2d\gamma + y^2) e^{\gamma t} \\ \Leftrightarrow 0 &= (\gamma^2 + 2d\gamma + y^2) \\ \Leftrightarrow \gamma &= -d \pm \sqrt{d^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Wir haben für  $|y| \neq d$  zwei linear unabhängige Lösungen, aus welchen wir die allgemeine Lösung linearkombinieren können. Wir setzen

$$\eta = \eta(y) := \sqrt{d^2 - y^2} \text{ für } |y| < d; \quad \delta = \delta(y) := \sqrt{y^2 - d^2} \text{ für } |y| > d$$

und erhalten als allgemeine Lösung

$$\hat{u}(y, t) = \begin{cases} e^{-td}(\alpha(y)e^{t\eta} + \beta(y)e^{-t\eta}), & |y| < d; \\ e^{-td}(\alpha(y)e^{it\delta} + \beta(y)e^{-it\delta}), & |y| > d. \end{cases}$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \hat{g}(y) &= \hat{u}(y, 0) = \alpha(y) + \beta(y) \text{ und} \\ \hat{h}(y) &= \hat{u}_t(y, 0) = \begin{cases} (\eta - d)\alpha(y) - (\eta + d)\beta(y), & |y| < d \\ (i\delta - d)\alpha(y) - (i\delta + d)\beta(y), & |y| > d \end{cases} \end{aligned}$$

bekommen wir die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{cases} \frac{\hat{h} + (\eta + d)\hat{g}}{2\eta}, & |y| < d \\ \frac{\hat{h} + (i\delta + d)\hat{g}}{2i\delta}, & |y| > d \end{cases} \\ \beta &= \begin{cases} -\frac{\hat{h} + (d - \eta)\hat{g}}{2\eta}, & |y| < d \\ -\frac{\hat{h} + (d - i\delta)\hat{g}}{2i\delta}, & |y| > d. \end{cases} \end{aligned}$$

### 3. Transformationsmethoden

Setzen wir diese in die Formel für  $\hat{u}$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{u}(y, t) &= \begin{cases} e^{-td} \left( \frac{\hat{h}+(\eta+d)\hat{g}}{2\eta} e^{t\eta} - \frac{\hat{h}+(d-\eta)\hat{g}}{2\eta} e^{-t\eta} \right), & |y| < d \\ e^{-td} \left( \frac{\hat{h}+(i\delta+d)\hat{g}}{2i\delta} e^{it\delta} - \frac{\hat{h}+(d-i\delta)\hat{g}}{2i\delta} e^{-it\delta} \right), & |y| > d \end{cases} \\ &= e^{-td} \cdot \begin{cases} \frac{\hat{h}(y)}{\eta(y)} \sinh(t\eta(y)) + \hat{g}(y) \left( \cosh(t\eta(y)) + \frac{d}{\eta(y)} \sinh(t\eta(y)) \right), & |y| < d \\ \frac{\hat{h}(y)}{\delta(y)} \sin(t\delta(y)) + \hat{g}(y) \left( \cos(t\delta(y)) + \frac{d}{\delta(y)} \sin(t\delta(y)) \right), & |y| > d. \end{cases}\end{aligned}$$

Ist  $\hat{u}$  integrierbar, so können wir die inverse Fourier-Transformierte gemäß Definition 3.1.1 gewinnen:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= e^{-td} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \\ &\cdot \left( \int_{\{|y||y|<d\}} e^{ixy} \left( \frac{\hat{h}(y)}{\eta(y)} \sinh(t\eta(y)) + \hat{g}(y) \left( \cosh(t\eta(y)) + \frac{d}{\eta(y)} \sinh(t\eta(y)) \right) \right) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\{|y||y|>d\}} e^{ixy} \left( \frac{\hat{h}(y)}{\delta(y)} \sin(t\delta(y)) + \hat{g}(y) \left( \cos(t\delta(y)) + \frac{d}{\delta(y)} \sin(t\delta(y)) \right) \right) dy \right).\end{aligned}$$

Dabei stört auch nicht, dass wir den Wert von  $\hat{u}(\pm d, t)$  nicht kennen, denn  $\{y = \pm d\}$  ist eine Nullmenge in  $\mathbb{R}$  und liefert somit bei der Integration keinen Beitrag.

### 3.3. Laplacetransformation

**Definition 3.3.1.** Für  $u \in L^1((0, \infty))$  heißt

$$u^\sharp : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ vermöge } u^\sharp(s) := \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt$$

die **Laplace-Transformierte** von  $u$ .

**Satz 3.3.2**

Für  $u \in L^1((0, \infty))$  ist  $u^\sharp \in C^0([0, \infty)) \cap L^\infty([0, \infty)) \cap C^\infty((0, \infty))$ .

*Beweis.*

1. Zuerst sehen wir, dass  $u^\sharp$  beschränkt ist, denn für alle  $s \in [0, \infty)$  gilt

$$\begin{aligned} |u^\sharp(s)| &\leq \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{\leq 1} |u(t)| dt \\ &\leq \|u\|_{L^1((0, \infty))} \\ \Rightarrow \|u^\sharp\|_{L^\infty((0, \infty))} &\leq \|u\|_{L^1((0, \infty))} < \infty. \quad \checkmark \end{aligned}$$

2. Nun untersuchen wir die Stetigkeit von  $u^\sharp$ : Für jede Folge  $s_j \rightarrow s$  in  $[0, \infty)$  konvergiert  $e^{-s_j t} u(t)$  punktweise gegen  $e^{-st} u(t)$ . Nach Voraussetzung ist  $|e^{-s_j t} u(t)| \leq |u(t)|$  integrierbar. Nun wenden wir den Satz von der majorisierten Konvergenz an und sehen

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} u^\sharp(s_j) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-s_j t} u(t) dt \\ &= \int_0^\infty \lim_{j \rightarrow \infty} e^{-s_j t} u(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt \\ &= u^\sharp(s). \quad \checkmark \end{aligned}$$

3. Nun zur Glattheit: Fixiere ein  $s_0 > 0$ . Wir bestimmen die  $n$ -te Ableitung des Integranden in der Definition von  $u^\sharp$ :

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-st} u(t) = (-t)^n e^{-st} u(t).$$

Nun überprüfen wir die Bedingung für die Differentiation unter dem Integralzeichen (Satz A.1). Für  $s > \frac{s_0}{2}$  gilt

$$|(-t)^n e^{-st} u(t)| = t^n e^{-st} |u(t)| \leq t^n e^{-\frac{s_0 t}{2}} |u(t)|.$$

Die Funktion  $t \mapsto t^n e^{s_0 t/2}$  ist stetig. Außerdem konvergiert sie gegen 0 sowohl für  $t \rightarrow 0$  als auch für  $t \rightarrow \infty$  – sie bleibt also beschränkt. Wenn wir eine beschränkte Funktion mit der  $L^1$ -Funktion  $|u(t)|$  multiplizieren, so ist das Ergebnis ebenfalls integrierbar, und wir können Satz A.1 anwenden. Wir erhalten  $u^\sharp \in C^\infty((\frac{s_0}{2}, \infty))$  und

$$\frac{d^n}{ds^n} u^\sharp(s) = \int_0^\infty (-t)^n e^{-st} u(t) dt \quad (3.13)$$

für alle  $s > \frac{s_0}{2}$ . Da wir diese Aussage jedoch für beliebige  $s_0$  haben, ist  $u^\sharp \in C^\infty((0, \infty))$ , und die Gleichung (3.13) gilt für alle  $s > 0$ .

□

### 3. Transformationsmethoden

**Bemerkung 3.3.3.** Die Laplacetransformation  $\sharp : L^1((0, \infty)) \rightarrow L^\infty((0, \infty))$  ist linear und beschränkt, wie wir bereits gezeigt haben. Ferner ist sie injektiv. (Ohne Beweis.)

**Beispiel 3.3.4.** Betrachte die Wärmeleitungsgleichung mit  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u \in C^\infty(U \times (0, \infty)) \cap L^\infty(U \times (0, \infty))$ :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & U \times (0, \infty), \\ u = f, & U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Wir führen die Laplacetransformation für  $u$  durch und erhalten für  $s > 0$ :

$$\begin{aligned} \Delta u^\sharp(x, s) &= \Delta \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt \\ &\stackrel{\text{A.1}}{=} \int_0^\infty e^{-st} \Delta u(x, t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} u_t(x, t) dt. \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \Delta u^\sharp(x, s) &= - \int_0^\infty (-s) e^{-st} u(x, t) dt + [e^{-st} u(x, t)]_0^\infty \\ &= s \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt - u(x, 0) \\ &= s u^\sharp(x, s) - f(x). \end{aligned}$$

Wir haben die Wärmeleitungsgleichung also in eine modifizierte Poisson-Gleichung

$$-\Delta u^\sharp(x, s) + s \cdot u^\sharp(x, s) = f(x) \text{ für } x \in U$$

umgewandelt, die uns so ähnlich (nämlich ohne den Faktor  $s$ ) schon einmal in Beispiel 3.2.1 begegnet ist. Deren Lösungen kann man nun aus dem Bessel-Potential gewinnen. Es sind dieselben Lösungen, die wir bereits mit Hilfe der Fouriertransformation gewannen.

### 3.4. Eine Wellen-Wärmeleitungs-Transformation

Betrachte das Anfangswertproblem der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u = g \text{ und } u_t = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (3.14)$$

mit  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ . Wir beschränken unsere Betrachtungen auf ungerade Dimensionen  $n = 2k + 1 \geq 3$ . Dann hat gemäß dem Huygens-Prinzip die Funktion  $u(x, \cdot)$  für jedes feste  $x$  kompakten Träger. Setze

$$v(x, t) := (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) ds$$

für  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Für  $t \searrow 0$  konvergiert  $v(x, t)$  gemäß Satz 2.2.9 gegen  $u(x, 0) = g(x)$ . Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} \Delta v(x, t) &= (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} \Delta u(x, s) ds \\ &= (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u_{ss}(x, s) ds \\ &= -(4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{s}{2t}\right) e^{-\frac{s^2}{4t}} u_s(x, s) ds. \end{aligned}$$

Bei der soeben durchgeführten partiellen Integration treten keine Randterme auf, da  $u(x, \cdot)$  kompakten Träger besitzt. Wir bestimmen weiter

$$\begin{aligned} \Delta v(x, t) &= (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} s e^{-\frac{s^2}{4t}} u_s(x, s) ds \\ &= -(4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{2t}\right) e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) ds. \end{aligned}$$

Die zeitliche Ableitung von  $v$  bestimmen wir ebenfalls:

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) ds + (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{4t^2} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) ds \\ &= (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) ds + (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{2t} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) ds \\ &= \Delta v(x, t). \end{aligned}$$

Die Funktion  $v$  löst also das Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

### 3. Transformationsmethoden

Wir können demnach statt der Wellengleichung die Wärmeleitungsgleichung lösen und aus deren Lösungen die Lösungen von (3.14) konstruieren. Also tun wir dies. Dazu stellen wir zunächst fest, dass  $v$  beschränkt ist, da

$$|v(x, t)| \leq (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} \underbrace{|u(x, s)|}_{\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}} ds \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \cdot 1 < \infty.$$

Wir brauchen also nicht die unphysikalischen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu suchen, sondern uns genügen die nicht zu schnell wachsenden. Aus Satz 2.2.31 wissen wir, dass die Lösung eindeutig bestimmt ist, und aus Satz 2.2.9 kennen wir deren Gestalt:

$$v(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy.$$

Nun wollen wir  $u$  daraus gewinnen. Dazu überlegen wir uns zunächst, dass mit  $u(x, s)$  auch  $u(x, -s)$  das Anfangswertproblem (3.14) löst. Da ferner die Transformation  $f(t) \mapsto (4\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4t} f(s) ds$  injektiv ist (Begründung weiter unten) und  $v$ , wie wir wissen, eindeutig ist, muss auch die Lösung  $u$  eindeutig sein. Also gilt  $u(x, s) = u(x, -s)$ . Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) ds &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) ds \\ &= \frac{1}{2} (4\pi t)^{\frac{1}{2}} v(x, t) \\ &= \frac{1}{2} (4\pi t)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (4\pi t)^{-k} \int_0^\infty \int_{\partial B(x, r)} e^{-\frac{r^2}{4t}} \cdot g(y) dS(y) dr \\ &= \frac{1}{2} (4\pi t)^{-k} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} \cdot n\alpha(n)r^{n-1} \underbrace{\int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y)}_{=G(x, r)} dr \\ &= \frac{n\alpha(n)}{2} (4\pi t)^{-k} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1} G(x, r) dr. \end{aligned}$$

Nun gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$-\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} e^{-\lambda r^2} = \lambda e^{-\lambda r^2}.$$

Deshalb haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda r^2} r^{2k} G(x, r) dr &= \left(-\frac{1}{2}\right)^k \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (e^{-\lambda r^2}) r^{2k} G(x, r) dr \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^k \int_0^\infty \left(\frac{d}{dr} \circ \frac{1}{r}\right)^k (r e^{-\lambda r^2}) r^{2k-1} G(x, r) dr. \end{aligned}$$



### 3.4. Eine Wellen-Wärmeleitungs-Transformation

Durch partielle Integration erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \lambda^k e^{-\lambda r^2} r^{2k} G(x, r) dr \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} \circ \frac{1}{r}\right)^{k-1} (r e^{-\lambda r^2}) \frac{d}{dr} (r^{2k-1} G(x, r)) dr \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \int_0^\infty \left(\frac{d}{dr} \circ \frac{1}{r}\right)^{k-1} (r e^{-\lambda r^2}) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) (r^{2k-1} G(x, r)) dr \\
 &\quad \vdots k\text{-mal} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \int_0^\infty r e^{-\lambda r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k-1} G(x, r)) dr.
 \end{aligned}$$

Die Randterme bei  $r = \infty$  verschwinden, weil die Funktion  $r \mapsto G(x, r)$  wegen des Huygens-Prinzips für hinreichend große  $r$  verschwindet. Die Randterme bei  $r = 0$  verschwinden, weil eine  $r$ -Potenz stehen bleibt. Mit  $\lambda := \frac{1}{4t}$  erhalten wir sonach

$$\int_0^\infty e^{-r^2 \lambda} u(x, r) dr = \frac{n\alpha(n)}{\pi^k 2^{k+1}} \int_0^\infty e^{-r^2 \lambda} r \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k-1} G(x, r)) dr.$$

Wenn wir nun  $\tau := r^2$  substituieren, so erkennen wir in beiden Seiten der Gleichung jeweils die Laplace-Transformierte einer Funktion. Die Laplacetransformation ist jedoch injektiv, also sind die Funktionen gleich. Machen wir die Substitution rückgängig (wir müssen außerdem noch mit  $2r$  multiplizieren, um die Substitution der Integrationsvariablen auszugleichen), so erhalten wir die uns bereits aus Satz 2.3.7 bekannte Lösung

$$\begin{aligned}
 u(x, r) &= \frac{n\alpha(n)}{\pi^k 2^{k+1}} r \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k (r^{2k-1} G(x, r)) \\
 &= \frac{1}{\gamma_n} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} G(x, r)).
 \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise sehen wir übrigens die Injektivität der Transformation, die  $u$  auf  $v$  abbildet: Hierin erkennen wir die Laplacetransformation nach der Substitution  $\tau := \frac{s^2}{4}$ .

### 3.5. Cole-Hopf-Transformation

Wir suchen für eine feste Konstante  $c \in \mathbb{R}$  die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + c \cdot |Du|^2 = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Wir haben es hierbei erstmals mit einer nur semilinearen PDG zu tun. Sei nun  $u$  eine Lösung von (3.15). Betrachte dann

$$v(x, t) := \varphi(u(x, t))$$

mit einer noch zu bestimmenden glatten Funktion  $\varphi$ . Wir nehmen außerdem an, dass  $\varphi'$  nirgends verschwindet. Damit ist  $\varphi$  insbesondere streng monoton und somit glatt umkehrbar. Wir können also  $u$  aus  $v$  zurückgewinnen. Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} v_t &= \varphi'(u) \cdot u_t, \\ \Delta v &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varphi(u) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi'(u) \cdot u_{x_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n (\varphi''(u) \cdot u_{x_i}^2 + \varphi'(u) \cdot u_{x_i x_i}) \\ &= \varphi''(u) |D(u)|^2 + \varphi'(u) \Delta u. \end{aligned}$$

Die Funktion  $u$  löst (3.15) also genau dann, wenn für  $v$  gilt:

$$\begin{aligned} v_t &= \varphi'(u) \cdot u_t \\ &= \varphi'(u) \cdot (\Delta u - c|Du|^2) \\ &= \Delta v - \varphi''(u) |Du|^2 - c\varphi'(u) |Du|^2 \\ &= \Delta v - (\varphi''(u) + c\varphi'(u)) |Du|^2. \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Funktion  $\varphi$  so wählen, dass  $\varphi''(u) + c\varphi'(u) = 0$  ist, z.B.  $\varphi(y) = e^{-cy}$ . Dann ist das Anfangswertproblem (3.15) äquivalent zu

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v = e^{-cg} & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Dies ist wieder die Wärmeleitungsgleichung, und für diese kennen wir zumindest die beschränkten Lösungen mittlerweile bestens:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \cdot e^{-cg(y)} dy \\ \Rightarrow u(x, t) &= -\frac{1}{c} \log \left( (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t} - cg(y)} dy \right). \end{aligned}$$

**Beispiel 3.5.1 (Burgers-Gleichung mit Viskosität).** Wir betrachten das semilineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + uu_x = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Zunächst hat dieses Problem eine andere Gestalt als (3.15), und es erscheint unklar, wie die eben besprochene Transformationsmethode darauf anzuwenden sein sollte. Wir stellen jedoch fest, dass  $2uu_x = (u^2)_x$  ist. Da wir in der Gleichung am Ende  $(w_x)^2$  stehen haben möchten, sorgen wir nun dafür, dass  $w_x = u$  ist. Wir setzen also

$$w(x, t) := \int_{-\infty}^x u(y, t) dy,$$

und ebenso definieren wir

$$h(x) := \int_{-\infty}^x g(y) dy.$$

Dann bestimmen wir

$$\begin{aligned} w_t &= \int_{-\infty}^x u_t dy \\ &= \int_{-\infty}^x (u_{yy} - \frac{1}{2}(u^2)_y) dy \\ &= u_x - \frac{1}{2}u^2 \\ &= w_{xx} - \frac{1}{2}(w_x)^2. \end{aligned}$$

Aus der Cole-Hopf-Transformation wissen wir nun, dass

$$\begin{aligned} w(x, t) &= -2 \log \left( (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{1}{2}h(y)} dy \right) \\ &= n \log(4\pi t) - 2 \log \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{1}{2}h(y)} dy \\ \Rightarrow u(x, t) &= w_x(x, t) \\ &= -2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{x-y}{2t} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{1}{2}h(y)} \right) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{1}{2}h(y)} dy} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{1}{2}h(y)} dy}{t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{1}{2}h(y)} dy}. \end{aligned}$$



## 4. Elliptische Theorie

### 4.1. Vorbemerkungen

**Definition 4.1.1.** Wir betrachten PDGen der Form

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) = 0.$$

Solch eine PDG (oder auch der Differentialoperator  $L$ ) heißt **gleichmäßig elliptisch**, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. *Beschränktheit der Koeffizienten:* Es gibt ein  $C > 0$  derart, dass

$$|a_{ij}(x)|, |b_i(x)|, |c(x)| \leq C$$

für jedes  $x \in U$ ;

2. *Symmetrie:* Für alle  $i, j$  und für jedes  $x \in U$  gilt

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x);$$

3. *Elliptizität:* Es gibt ein  $\lambda > 0$  mit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$  und alle  $x \in U$ .

**Bemerkung 4.1.2.** Die Symmetriebedingung stellt keine wesentliche Einschränkung dar, denn zumindest für  $u \in C^2(U)$  gilt  $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$  und damit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}u_{x_i x_j}.$$

Auf diese Weise können die Koeffizienten symmetrisiert werden.

#### 4. Elliptische Theorie

**Bemerkung 4.1.3.** Bedingung 3 ist äquivalent dazu, dass die symmetrische Matrix  $(a_{ij}(x))_{ij}$  nur Eigenwerte größer oder gleich  $\lambda$  besitzt, wobei  $\lambda$  nicht von  $x$  abhängt. Insbesondere ist  $(a_{ij}(x))_{ij}$  symmetrisch positiv definit.

**Beispiel 4.1.4.** Der Laplace-Operator ist gleichmäßig elliptisch: Es ist  $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$  und  $b_i = c = 0$ ; wir können also  $C = 1$  und  $\lambda = 1$  wählen.

**Beispiel 4.1.5.** Der Laplace-Beltrami-Operator auf riemannschen Mannigfaltigkeiten ist ebenfalls elliptisch mit  $c \equiv 0$ .

### 4.2. Das Maximumprinzip

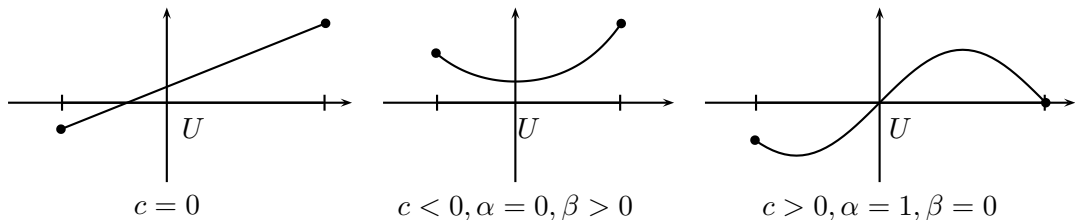
In Abschnitt 2.1 haben wir die Laplacegleichung ausgiebig untersucht und dabei festgestellt, dass für ihre Lösungen das Maximumprinzip gilt. Gilt dieses vielleicht auch für andere gleichmäßig elliptische PDGen? Dazu betrachten wir ein einfaches Beispiel.

**Beispiel 4.2.1.** Sei  $U = [s, t] \subset \mathbb{R}$ . Betrachte die Differentialgleichung

$$Lu := u'' + c \cdot u = 0 \text{ mit } c \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \quad (4.1)$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung können wir leicht bestimmen:

$$u(x) = \begin{cases} \alpha \sin(\sqrt{c}x) + \beta \cos(\sqrt{c}x) & \text{für } c > 0; \\ \alpha \cdot x + \beta & \text{für } c = 0; \\ \alpha \sinh(\sqrt{|c|x}) + \beta \cosh(\sqrt{|c|x}) & \text{für } c < 0. \end{cases}$$



Im Falle  $c = 0$  erkennen wir, dass Minimum und Maximum auf dem Rand von  $U$  angenommen werden und dass sogar das starke Maximumprinzip gilt. (Das ist auch wenig verwunderlich, denn für  $c = 0$  ist Gleichung (4.1) die Laplace-Gleichung.) Bei  $c < 0, \alpha = 0, \beta > 0$  wird immerhin das Maximum am Rand angenommen, das Minimum jedoch nicht; und mit  $\beta < 0$  wäre es umgekehrt. Für  $c > 0$  wird weder das Maximum noch das Minimum am Rand angenommen.

Das Vorzeichen von  $c$  wird also für die Gültigkeit des Maximumprinzips bedeutsam sein.

**Satz 4.2.2 (Schwachtes Maximumprinzip für  $c \equiv 0$ )**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch mit  $c \equiv 0$ . Dann gilt für  $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ :

1. Falls  $Lu \geq 0$  auf  $U$ , so ist  $\sup_U u = \max_{\partial U} u$ .
2. Falls  $Lu \leq 0$  auf  $U$ , so ist  $\inf_U u = \min_{\partial U} u$ .

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir noch ein Lemma:

**Lemma 4.2.3**

Seien  $A$  und  $B$  reelle symmetrische positiv semidefinite  $n \times n$ -Matrizen. Dann gilt

$$\operatorname{tr}(A \cdot B) \geq 0.$$

*Beweis.* Da  $B$  symmetrisch ist, existiert ein  $S \in O(n)$  derart, dass

$$S^t B S = \operatorname{Diag}(d_1, \dots, d_n),$$

und da  $B$  positiv semidefinit ist, sind die  $d_i \geq 0$ . Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A \cdot B) &= \operatorname{tr}(A \cdot S \operatorname{Diag}(d_1, \dots, d_n) S^t) \\ &= \operatorname{tr}(S^t A S \operatorname{Diag}(d_1, \dots, d_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle S^t A S \operatorname{Diag}(d_1, \dots, d_n) e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n d_i \langle S^t A S e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n d_i \underbrace{\langle A \cdot S e_i, S e_i \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

#### 4. Elliptische Theorie

*Beweis von Satz 4.2.2.* Wenden wir Aussage 1 auf  $(-u)$  an, so erhalten wir Aussage 2. Es genügt also, 1 zu zeigen. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \sup_U u &= \sup_{\bar{U}} u, & \text{da } u &\in C^0(\bar{U}) \\ &= \max_{\bar{U}} u, & \text{da } \bar{U} &\text{ kompakt} \\ &\geq \max_{\partial U} u. \end{aligned}$$

Bleibt nur noch  $\max_{\partial U} u \geq \sup_U u$  zu zeigen.

1. Betrachte zunächst nur Funktionen  $u$  mit  $Lu > 0$  auf ganz  $U$ . Angenommen, es gäbe ein  $x_0 \in U$ , bei welchem  $u$  sein Maximum annimmt. Dann müsste  $Du(x_0) = 0$  und  $D^2u(x_0)$  negativ semidefinit sein. Daraus ergäbe sich aber

$$\begin{aligned} Lu(x_0) &= \text{tr}((a_{ij}(x_0))_{ij} \cdot D^2u(x_0)) + \langle b(x_0), Du(x_0) \rangle \\ &= \text{tr}((a_{ij}(x_0))_{ij} \cdot D^2u(x_0)), \end{aligned}$$

und wegen der positiven Definitheit von  $(a_{ij}(x_0))_{ij}$ , der negativen Semidefinitheit von  $D^2u(x_0)$  und Lemma 4.2.3 ist dieser Ausdruck nichtpositiv im Widerspruch zur Voraussetzung. ✓

2. Sei nun  $Lu \geq 0$ . Setze

$$v(x) := e^{\alpha x_1} \text{ mit } \alpha = \frac{1+C}{\lambda},$$

wobei  $C$  und  $\lambda$  die Konstanten aus Definition 4.1.1 sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} Lv(x) &= (a_{11}(x) \cdot \alpha^2 + \alpha b_1(x))v(x) \\ &= \alpha(\underbrace{\alpha a_{11}(x)}_{\geq \lambda} + \underbrace{b_1(x)}_{\in [-C, C]})v(x) \\ &\geq \alpha(\alpha\lambda - C)v(x) \\ &= \alpha \cdot 1 \cdot v(x) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Somit ist, da  $L$  linear ist,

$$L(u + \varepsilon v) > 0$$

für jedes  $\varepsilon > 0$ . Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \sup_U u &= \sup_U (u + \varepsilon v - \varepsilon v) \\ &\leq \sup_U (u + \varepsilon v) + \sup_U (-\varepsilon v) \\ &= \sup_U (u + \varepsilon v) - \varepsilon \inf_U v \\ &= \max_{\partial U} (u + \varepsilon v) - \varepsilon \inf_U v \quad \text{wegen Beweisteil 1 für } u + \varepsilon v \\ &\leq \max_{\partial U} u + \varepsilon \max_{\partial U} v - \varepsilon \inf_U v. \end{aligned}$$



Beim Grenzübergang  $\varepsilon \searrow 0$  erhalten wir die gewünschte Abschätzung

$$\sup_U u \leq \max_{\partial U} u. \quad \square$$

#### Korollar 4.2.4

Seien  $U, L$  wie im Satz 4.2.2. Seien  $f \in C^0(U)$  und  $g \in C^0(\partial U)$  gegeben. Dann besitzt das **Dirichlet-Problem**

$$\begin{cases} Lu = f & \text{auf } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

höchstens eine Lösung  $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ .

*Beweis.* Sind  $u_1, u_2$  zwei solche Lösungen, dann genügt  $u := u_1 - u_2$  dem Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{auf } U, \\ u = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases}$$

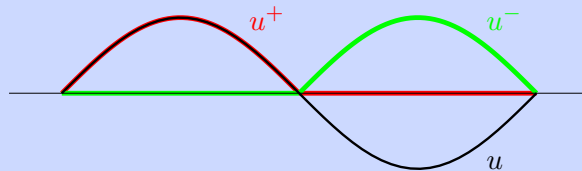
Nach dem schwachen Maximumprinzip 4.2.2 gilt dann  $u \equiv 0$  und damit  $u_1 = u_2$ .  $\square$

**Definition 4.2.5.** Für eine Funktion  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  setze den **positiven** bzw. **negativen Anteil**

$$u^+(x) := \max(u(x), 0), \quad u^-(x) := -\min(u(x), 0).$$

Mit dieser Definition gilt

$$u^+, u^- \geq 0, \quad u = u^+ - u^-.$$



#### 4. Elliptische Theorie

##### Satz 4.2.6 (Schwach Maximumprinzip für $c \leq 0$ )

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch mit  $c \leq 0$ . Dann gilt für  $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ :

1. Falls  $Lu \geq 0$  auf  $U$ , so ist  $\sup_U u^+ = \max_{\partial U} u^+$ .
2. Falls  $Lu \leq 0$  auf  $U$ , so ist  $\sup_U u^- = \max_{\partial U} u^-$ .

*Beweis.* Wir müssen wieder nur die erste Aussage des Satzes zeigen, da die zweite sofort folgt, wenn wir  $u$  durch  $-u$  ersetzen.

1. Setze  $U^+ := \{x \in U \mid u(x) > 0\}$ . Da  $u$  stetig ist, ist  $U^+ \subset U$  offen und beschränkt. Außerdem gilt auf  $U^+$ :

$$0 \leq Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + \underbrace{c}_{\leq 0} \cdot \underbrace{u}_{> 0} \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} =: \tilde{L}u.$$

Wenden wir nun Satz 4.2.2 auf  $U^+$  und  $\tilde{L}$  an, so erhalten wir

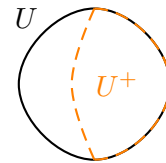
$$\sup_{U^+} u = \max_{\partial U^+} u.$$

2. Nach der Definition von  $U^+$  ist  $u \leq 0$  auf  $U \setminus U^+$ , d.h.  $u^+|_{U \setminus U^+} \equiv 0$ . Ferner ist  $u = u^+$  auf  $U^+$ , und daraus sehen wir

$$\sup_U u^+ = \sup_{U^+} u^+ = \sup_{U^+} u.$$

Wir betrachten nun die Werte der Funktion  $u$  auf  $\partial U^+$ , und zu diesem Zwecke zerlegen wir den Rand in

$$\partial U^+ = (\partial U^+ \cap U) \sqcup (\partial U^+ \cap \partial U).$$



Aufgrund der Stetigkeit von  $u$  gilt auf  $\partial U^+ \cap U$ :  $u = u^+ \equiv 0$ , und damit

$$\sup_U u^+ = \sup_{U^+} u \stackrel{\text{Teil 1}}{=} \max_{\partial U^+} u \leq \max_{\partial U^+} u^+ = \max_{\partial U^+ \cap \partial U} u^+ \leq \max_{\partial U} u^+.$$

Die entgegengesetzte Relation  $\max_{\partial U} u^+ \leq \sup_U u^+$  gilt ohnehin, da  $u^+$  stetig ist; somit haben wir die Gleichheit gezeigt.  $\square$

**Lemma 4.2.7 (Randwertlemma)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $L$  gleichmäßig elliptisch mit  $c \leq 0$ . Für  $u \in C^2(U)$  gelte

$$Lu \geq 0$$

auf  $U$ . Im Punkt  $x_0 \in \partial U$  seien ferner die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $u$  ist stetig in  $x_0$ ;
2.  $u(x_0) \geq 0$  oder  $c \equiv 0$ ;
3.  $u(x_0) > u(x)$  für alle  $x \in U$ ;
4. Es existiert ein Ball  $B(y, R) \subset U$  derart, dass  $x_0 \in \partial B(y, R)$  liegt.

Dann gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(x_0 + t(x_0 - y)) > 0,$$

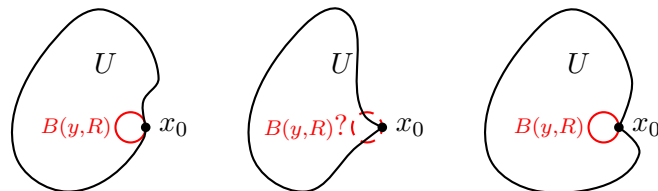
sofern diese Ableitung existiert.

**Bemerkung 4.2.8.** Wegen Bedingung 3 gilt bereits

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(x_0 + t(x_0 - y)) \geq 0;$$

jedoch benötigen wir später die Aussage, dass diese Ableitung nirgends verschwindet – also die Echt-größer-Relation.

**Bemerkung 4.2.9.** Wir untersuchen, was Bedingung 4 aussagt. Was für Punkte in welcherlei Gebieten haben wir damit ausgeschlossen? Sicher lässt sich solch ein Ball finden, wenn der Rand glatt ist. Hat der Rand jedoch einen Knick, so können sich Probleme ergeben ... allerdings nur für Knicke nach innen.



#### 4. Elliptische Theorie

##### Beweis des Randwertlemmas 4.2.7.

1. Nachdem wir nötigenfalls  $R$  verringert haben, können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $x_0$  der einzige Punkt in  $\partial B(y, R) \cap \partial U$  ist. Fixiere nun ein  $\rho \in (0, R)$  und wähle ein  $\gamma \gg 0$  so, dass

$$4\lambda\rho^2\gamma^2 - 2nC(1+R)\gamma - 2C > 0$$

gilt, wobei  $\lambda$  und  $C$  die Konstanten aus Definition 4.1.1 sind. Für die Hilfsfunktion

$$v(x) := e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma R^2}$$

gilt offensichtlich  $v|_{\partial B(y,R)} \equiv 0$ , und außerdem bestimmen wir

$$\begin{aligned} Lv(x) = e^{-\gamma|x-y|^2} \cdot & \left( 4\gamma^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right. \\ & \left. - 2\gamma \sum_{i=1}^n a_{ii} - 2\gamma \sum_{i=1}^n b_i(x_i - y_i) + c \right) - c \cdot e^{-\gamma R^2}. \end{aligned}$$

Liegt  $x$  im Ring  $B(y, R) \setminus \bar{B}(y, \rho)$ , so können wir  $Lv(x)$  nach unten abschätzen, wobei wir die Beschränktheit und die Elliptizität von  $L$  verwenden:

$$\begin{aligned} Lv(x) & \geq e^{-\gamma R^2} \cdot \left( 4\gamma^2 \cdot \underbrace{\lambda|x-y|^2}_{\geq \rho} - 2\gamma \cdot nC - 2\gamma \cdot nC \underbrace{|x-y|}_{\leq R} - C \right) - c \cdot e^{-\gamma R^2} \\ & \geq e^{-\gamma R^2} (4\gamma^2 \lambda \rho^2 - 2\gamma nC(1+R) - 2C) \\ & > 0 \end{aligned}$$

wegen der Voraussetzung an  $\gamma$ .

2. Nach Voraussetzung 3 ist  $u(x) - u(x_0) < 0$ . Wir können also noch eine kleine Zahl addieren, ohne dass die Summe positiv wird. So ist für  $\varepsilon > 0$  klein genug

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0 \tag{4.2}$$

auf  $\partial B(y, \rho)$ , da  $v$  dort konstant ist. Auf  $\partial B(y, \rho)$  gilt Ungleichung (4.2) ohnehin, da dort  $v \equiv 0$  ist. Wir wollen nun das schwache Maximumprinzip auf die Funktion  $u - u(x) + \varepsilon v$  auf dem Gebiet  $B(y, R) \setminus \bar{B}(y, \rho)$  anwenden. Dazu bestimmen wir

$$\begin{aligned} L(u - u(x_0) + \varepsilon v)(x) & = Lu(x) - L(u(x_0))(x) + \varepsilon Lv(x) \\ & = \underbrace{Lu(x)}_{\geq 0} - c(x)u(x_0) + \varepsilon \underbrace{Lv(x)}_{> 0 \text{ nach Teil 1}} \\ & > -c(x)u(x_0) \geq 0, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung 2 entweder  $c(x) \equiv 0$  gilt (dann gilt die letzte Ungleichung trivialerweise), oder es gilt  $u(x_0) \geq 0$  – in jedem Falle soll jedoch  $c \leq 0$  sein, also

## 4.2. Das Maximumprinzip

ist  $c(x)u(x_0)$  nichtpositiv. Wenden wir nun das schwache Maximumprinzip an, so erhalten wir

$$0 \leq \sup_{B(y,R) \setminus \bar{B}(y,\rho)} (u - u(x_0) + \varepsilon v)^+ \leq \max_{\partial B(y,R) \cup \partial B(y,\rho)} (u - u(x_0) + \varepsilon v)^+ \stackrel{(4.2)}{\leq} 0.$$

Also ist  $(u - u(x_0) + \varepsilon v)^+ = 0$  und damit

$$u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0 \tag{4.3}$$

für alle  $x$  im Ringgebiet  $B(y, R) \setminus \bar{B}(y, \rho)$ . Da bei  $x = x_0$  in (4.3) die Gleichheit gilt, ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (u(x_0 + t(x_0 - y)) - u(x_0) + \varepsilon v(x_0 + t(x_0 - y))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(x_0 + t(x_0 - y)) \\ &\quad + \varepsilon e^{-\gamma|x_0+t(x_0-y)-y|^2} \Big|_{t=0} \cdot (-\gamma) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |x_0 + t(x_0 - y) - y|^2 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(x_0 + t(x_0 - y)) - \gamma \varepsilon e^{-\gamma|x_0-y|^2} \cdot 2|x_0 - y|^2 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(x_0 + t(x_0 - y)) - 2R^2 \gamma \varepsilon e^{-\gamma R^2}, \end{aligned}$$

Woraus wir erhalten:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(x_0 + t(x_0 - y)) \geq 2R^2 \gamma \varepsilon e^{-\gamma R^2} > 0. \quad \square$$

### Satz 4.2.10 (Starkes Maximumprinzip)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch. Für  $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$  gelte  $Lu \geq 0$ . Falls

1.  $c \equiv 0$  und  $u$  besitzt in  $U$  ein Maximum; oder
2.  $c \leq 0$  und  $u$  besitzt in  $U$  ein nichtnegatives Maximum,

dann ist  $u$  konstant.

#### 4. Elliptische Theorie

*Beweis.* Sei  $m$  ein inneres Maximum von  $u$ . Im Falle  $c \neq 0$  sei  $m \geq 0$ . Angenommen,  $u$  wäre nicht konstant. Dann ist

$$U' := \{x \in U \mid u(x) < m\}$$

offen und nicht leer. Der Rand von  $U'$  besitzt Punkte in  $U$ , nämlich jene, an denen das Maximum  $m$  angenommen wird. Deshalb finden wir einen Punkt  $y \in U'$  mit  $R := \text{dist}(y, \partial U') < \text{dist}(y, \partial U)$ . Es gilt  $B(y, R) \subset U'$ . Sei  $x_0 \in \partial B(y, R) \cap \partial U'$ . Dann können wir das Randwertlemma 4.2.7 auf  $x_0$ ,  $y$  und  $U'$  anwenden und erhalten

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(x_0 + t(x_0 - y)) > 0,$$

falls die Ableitung existiert. Dass sie existiert, haben wir aber durch die Regularitätsbedingung an  $u$  sichergestellt, und so erhalten wir

$$Du(x_0) \neq 0$$

im Widerspruch zur Annahme, dass in  $x_0$  ein inneres Maximum angenommen wird.  $\square$

**Bemerkung 4.2.11.** Die Einschränkung, dass das Maximum nichtnegativ sein muss, falls  $c \neq 0$ , ist tatsächlich notwendig: Betrachte als Gegenbeispiel  $U = (-1, 1)$  und die Funktion  $u(x) = -\cosh(x)$ , die eine Lösung der gleichmäßig elliptischen Differentialgleichung

$$Lu := u'' - u = 0$$

ist, aber ein inneres Maximum bei  $x_0 = 0$  annimmt.

**Definition 4.2.12.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $F = F(x, z, p, A) \in C^1(U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2})$ . Zu der nichtlinearen PDG

$$F[u] := F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \tag{4.4}$$

und  $v \in C^2(U)$  betrachte die Ableitung

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F[v + tv] \\ &= \frac{\partial F}{\partial z}[v] \cdot u(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i}[v] \cdot u_{x_i}(x) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F}{\partial A_{ij}}[v] \cdot u_{x_i x_j}(x). \end{aligned}$$

Die PDG

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F[v + tv] = 0 \tag{4.5}$$

ist also eine lineare PDG an  $u$ . Die PDG (4.4) heißt **gleichmäßig elliptisch bei  $v$** , falls (4.5) gleichmäßig elliptisch gemäß Definition 4.1.1 ist.

**Bemerkung 4.2.13.** Die Definitionen 4.1.1 und 4.2.12 sind miteinander gut verträglich: Ist die PDG (4.4) bereits linear, so ist  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} [v + tu] = F[u]$ .

**Beispiel 4.2.14 (Minimalflächengleichung).** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und beschränkt. Betrachte die (quasilineare) Minimalflächengleichung

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0.$$

In diesem Fall ist  $F(x, z, p, A) = (1 + p_2^2)A_{11} - 2p_1 p_2 A_{12} + (1 + p_1^2)A_{22}$  und

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F[v + tu] \\ &= 2(v_x v_{yy} - v_y v_{xy})u_x + 2(v_y v_{xx} - v_x v_{xy})u_y + (1 + v_y^2)u_{xx} - 2v_x v_y u_{xy} + (1 + v_x^2)u_{yy}. \end{aligned}$$

Die Beschränktheit der Koeffizienten gilt, wenn  $v$  stetig auf  $\bar{U}$  ist. Die Symmetriebedingungen stellen wir sicher, indem wir  $a_{12} = a_{21} := v_x v_y$  setzen. Die Elliptizitätsbedingungen müssen wir prüfen:

$$\begin{aligned} & (1 + v_y^2)\xi_1^2 - 2v_x v_y \xi_1 \xi_2 + (1 + v_x^2)\xi_2^2 \\ & \geq (1 + v_y^2)\xi_1^2 - (v_x^2 \xi_2^2 + v_y^2 \xi_1^2) + (1 + v_x^2)\xi_2^2 \\ & = \xi_1^2 + \xi_2^2 \\ & = |\xi|^2. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im ersten Schritt verwendet, dass  $2ab \leq a^2 + b^2$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt. Mit  $\lambda = 1$  ist also die Elliptizitätsbedingung für alle  $v \in C^2(\bar{U})$  erfüllt.

#### Satz 4.2.15

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei  $F \in C^1(\bar{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2})$ . Für jedes  $x \in U$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathbb{R}^{n^2}$  sei  $z \mapsto F(x, z, p, A)$  monoton fallend. Seien  $u_0, u_1 \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$  und sei  $F$  gleichmäßig elliptisch bei  $tu_1 + (1 - t)u_0$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Gilt dann

$$u_1 \leq u_0 \text{ auf } \partial U \text{ und } F[u_1] \geq F[u_0] \text{ auf } U,$$

so ist entweder  $u_1 < u_0$  auf  $U$  oder  $u_1 = u_0$  auf  $U$ .

#### 4. Elliptische Theorie

*Beweis.* Setze  $u := u_1 - u_0$  und  $u(t) := tu_1 + (1-t)u_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq F[u_1] - F[u_0] \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} F[u(t)] dt \\
&= \int_0^1 \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F}{\partial A_{ij}}[u(t)] \cdot u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}[u(t)] \cdot u_{x_j} + \frac{\partial F}{\partial z}[u(t)] \cdot u \right] dt \\
&= \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\left( \int_0^1 F_{A_{ij}}[u(t)] dt \right)}_{=: a_{ij}} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\left( \int_0^1 F_{p_j}[u(t)] dt \right)}_{=: b_j} u_{x_j} + \underbrace{\left( \int_0^1 F_z[u(t)] dt \right)}_{=: c} u \\
&=: Lu.
\end{aligned}$$

Da  $F$  stetig differenzierbar ist, sind die  $a_{ij}, b_j, c \in C^0(\bar{U})$  beschränkt. Da  $F$  ferner gleichmäßig elliptisch bei  $u(t)$  für jedes  $t \in [0, 1]$  ist, finden wir ein  $\lambda > 0$  (welches möglicherweise von  $t$  abhängt), so dass

$$\sum_{i,j=1}^n F_{A_{ij}}[u(t)](x) \xi_i \xi_j \geq \lambda(t) |\xi|^2$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$  gilt. Ist  $\lambda(t)$  maximal gewählt, so ist  $\lambda(t)$  der kleinste Eigenwert von  $(F_{A_{ij}}[u(t)])_{ij}$ . Dieser hängt, da  $(F_{A_{ij}}[u(t)])_{ij}$  stetig in  $t$  ist, selbst stetig von  $t$  ab. Es existiert demnach ein  $\lambda_0 > 0$  mit  $\lambda(t) \geq \lambda_0$  für alle  $t \in [0, 1]$ ; also gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j &= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^n F_{A_{ij}}[u(t)] \xi_i \xi_j dt \\
&\geq \int_0^1 \lambda_0 |\xi|^2 dt \\
&= \lambda_0 |\xi|^2.
\end{aligned}$$

Hiermit haben wir gezeigt, dass  $L$  gleichmäßig elliptisch ist. Außerdem ist  $c = \int_0^1 F_z[u(t)] dt \leq 0$ , da nach Voraussetzung  $z \mapsto F(x, z, p, A)$  monoton fallend ist. Damit können wir das schwache Maximumprinzip 4.2.6 anwenden und erhalten

$$\sup_U u^+ \leq \max_{\partial U} u^+ = 0,$$

da nach Voraussetzung  $u \leq 0$  auf  $\partial U$ . Daraus sehen wir, dass  $u^+ \equiv 0$ , also  $u_1 \leq u_0$  auf ganz  $U$ .

Existiert nun ein  $x_0 \in U$  mit  $u_1(x_0) = u_0(x_0)$ , also  $u(x_0) = 0$ , so besitzt  $u$  in  $x_0$  ein nichtnegatives Maximum, und aus dem starken Maximumprinzip 4.2.10 folgt dann  $u \equiv 0$ , d.h.  $u_1 = u_0$  auf  $U$ .  $\square$



**Beispiel 4.2.16.** Seien  $u_1, u_0 \in C^2(\bar{U})$  Lösungen der Minimalflächengleichung, d.h.  $F[u_0] = F[u_1] = 0$ . Dann sagt uns Satz 4.2.15, dass  $u_1 \leq u_0$  auf  $U$ , wenn  $u_1 \leq u_0$  auf  $\partial U$ . Sei z.B.  $u_1$  affin linear. Dann ist der Graph von  $u_1$  eine Ebene. Wenn der Graph von  $u_0$  also auf  $\partial U$  ganz auf einer Seite einer Ebene liegt, so liegt er nach Satz 4.2.15 auf ganz  $U$  auf einer Seite dieser Ebene.

**Korollar 4.2.17**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei  $F \in C^1(\bar{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2})$ . Für jedes  $x \in U$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathbb{R}^{n^2}$  sei  $z \mapsto F(x, z, p, A)$  monoton fallend. Seien  $u_0, u_1 \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$  und sei  $F$  gleichmäßig elliptisch bei  $tu_1 + (1-t)u_0$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Gilt dann

$$u_1 = u_0 \text{ auf } \partial U \text{ und } F[u_1] = F[u_0] \text{ auf } U,$$

so ist  $u_1 = u_0$  auf  $U$ .

**Beispiel 4.2.18.** Eine Lösung der Minimalflächengleichung ist durch den vorgegebenen Randwert eindeutig bestimmt.

### 4.3. Schwache Lösungen

Wir wollen in diesem Abschnitt das Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{auf } U \\ u = 0 & \text{auf } \partial U \end{cases} \tag{4.6}$$

lösen. Gilt für  $L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + c$  die Koeffizientenbedingung

$$a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(U), \quad a_{ij} \in C^1(U), \quad Da_{ij} \in L^\infty(U), \tag{4.7}$$

so lässt sich die PDG  $Lu = f$  in **Divergenzform** schreiben:

$$\begin{aligned} f &= Lu \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu \end{aligned}$$

#### 4. Elliptische Theorie

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i,j=1}^n ((a_{ij}u_{x_i})_{x_j} - a_{ij,x_j}u_{x_i}) + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu \\
 &= \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\left( b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji,x_i} \right)}_{=: \tilde{b}_j} u_{x_j} + cu
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

für alle  $u \in C^2(U)$ . Die Koeffizienten  $\tilde{b}_j$  sind wegen (4.7) ebenfalls in  $L^\infty(U)$ .

#### Lemma 4.3.1

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $f \in L^2(U)$ . Der Differentialoperator  $L$  erfülle die Koeffizientenbedingung (4.7). Dann sind für  $u \in C^2(\bar{U})$  äquivalent:

1.  $Lu = f$ ;
2. Für alle  $v \in H_0^1(U)$  gilt

$$\int_U \left( - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j u_{x_j}v + cuv \right) dx = (f, v)_{L^2(U)}. \tag{4.9}$$

*Beweis.*

1 $\Rightarrow$ 2: Für alle  $v \in C_c^\infty(U)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 (f, v)_{L^2(U)} &= (Lu, v)_{L^2(U)} \\
 &= \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j u_{x_j} + cu \right) v dx.
 \end{aligned}$$

Integrieren wir im ersten Summanden partiell, so erhalten wir

$$(f, v)_{L^2(U)} = \int_U \left( - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})v_{x_j} + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j u_{x_j}v + cuv \right) dx.$$

Da beide Seiten der Gleichung bzgl. der  $H^1$ -Norm stetig in  $v$  sind und da  $C_c^\infty(U)$  in  $H_0^1(U)$  dicht liegt, gilt die Gleichung auch für alle  $v \in H_0^1(U)$ .

2 $\Rightarrow$ 1: Wie im ersten Beweisschritt erhalten wir durch partielle Integration und Vollständigkeit von  $C_c^\infty(U)$ , dass

$$(Lu, v)_{L^2(U)} = (f, v)_{L^2(U)}$$

für alle  $v \in H_0^1(U)$  gilt. Da  $H_0^1(U)$  dicht in  $L^2(U)$  liegt und das  $L^2$ -Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, folgt daraus direkt

$$Lu = f.$$

□

**Definition 4.3.2.** Falls  $u \in H^1(U)$  die Gleichung (4.9) erfüllt, so nennen wir  $u$  eine **schwache Lösung von  $Lu = f$** . Ist  $u$  sogar aus  $H_0^1(U)$ , so ist es eine **schwache Lösung des Dirichlet-Problems** (4.6).

Sei  $Lu = \sum (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum b_j u_{x_j} + cu$  in Divergenzform gegeben. Es gelte ferner die Koeffizientenbedingung (4.7). Setze  $B_L : H_0^1(U) \times H_0^1(U) \rightarrow \mathbb{R}$  vermöge

$$B_L(u, v) := \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} v - cuv \right) dx.$$

Für  $u \in C^2(\bar{U})$  und  $v \in H_0^1(U)$  ist

$$B_L(u, v) = -(Lu, v)_{L^2(U)}.$$

Allgemeiner gilt:

**Bemerkung 4.3.3.** Die Funktion  $u \in H^1(U)$  ist eine schwache Lösung des Dirichlet-Problems (4.6) genau dann, wenn  $u \in H_0^1(U)$  liegt und für alle  $v \in H_0^1(U)$  gilt:

$$B_L(u, v) = -(f, v)_{L^2(U)}.$$

**Bemerkung 4.3.4.** Der Definition 4.3.2 können wir wegen Bemerkung 4.3.3 auch dann einen Sinn beimessen, wenn  $f \in H^{-1}(U)$ . Wir nennen dann  $u$  eine schwache Lösung des Dirichlet-Randwertproblems (4.6), wenn für alle  $v \in H_0^1(U)$  gilt:

$$B_L(u, v) = -f(v).$$

**Bemerkung 4.3.5.** Um das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f & \text{auf } U \\ T(u) = g \end{cases} \quad (4.10)$$

#### 4. Elliptische Theorie

lösen zu können, wobei  $T$  der Spuroperator ist, muss  $g \in \text{im}(T)$  liegen. Es gilt also  $g = T(\tilde{g})$  für ein  $\tilde{g} \in H^1(U)$ . Substituieren wir nun  $\tilde{u} := u - \tilde{g}$ , so finden wir, dass das Problem (4.10) äquivalent ist zu

$$\begin{cases} L\tilde{u} = f - L\tilde{g} =: \tilde{f} & \text{auf } U, \\ \tilde{u} = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases}$$

Es genügt also, Probleme der Form (4.6) zu untersuchen.

#### Satz 4.3.6

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch und genüge der Koeffizientenbedingung (4.7). Dann gibt es Konstanten  $\alpha, \beta > 0$  und  $\gamma \geq 0$ , so dass für alle  $u, v \in H_0^1(U)$  gilt:

1.  $|B_L(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{H^1(U)} \|v\|_{H^1(U)}$ ;
2.  $B_L(u, u) \geq \beta \|u\|_{H^1(U)}^2 - \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2$ .

*Beweis.* zu 1. Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} |B_L(u, v)| &= \left| \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} v - cuv \right) dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(U)} \int_U |u_{x_i}| \cdot |v_{x_j}| dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \|b_j\|_{L^\infty(U)} \int_U |u_{x_j}| \cdot |v| dx + \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U |u| \cdot |v| dx \\ &\leq C_1 \int_U |Du| \cdot |Dv| dx + C_2 \int_U |Du| \cdot |v| dx + C_3 \int_U |u| \cdot |v| dx \\ &\leq C_1 \underbrace{\|Du\|_{L^2(U)}}_{\leq \|u\|_{H^1(U)}} \cdot \|Dv\|_{L^2(U)} + C_2 \|Du\|_{L^2(U)} \cdot \underbrace{\|v\|_{L^2(U)}}_{\leq \|v\|_{H^1(U)}} \\ &\quad + C_3 \|u\|_{L^2(U)} \cdot \|v\|_{L^2(U)} \\ &\leq \underbrace{(C_1 + C_2 + C_3)}_{=: \alpha} \|u\|_{H^1(U)} \|v\|_{H^1(U)}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

zu 2. Aufgrund der Elliptizität von  $L$  gilt

$$\begin{aligned}\lambda \|Du\|_{L^2(U)}^2 &= \lambda \int_U |Du|^2 dx \\ &\leq \int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx \\ &= B_L(u, u) + \int_U \left( \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} u + cu^2 \right) dx \\ &\leq B_L(u, u) + C_4 \|Du\|_{L^2(U)} \|u\|_{L^2(U)} + C_5 \|u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Nun gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  die Abschätzung  $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Wenden wir diese mit

$$x = \sqrt{\lambda} \|Du\|_{L^2(U)}, \quad y = \frac{C_4}{\sqrt{\lambda}} \|u\|_{L^2(U)}$$

auf die begonnene Rechnung an und setzen  $C_6 := \frac{C_4^2}{2\lambda} + C_5$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda \|Du\|_{L^2(U)}^2 &\leq B_L(u, u) + \frac{\lambda}{2} \|Du\|_{L^2(U)}^2 + C_6 \|u\|_{L^2(U)}^2 \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{2} \|Du\|_{L^2(U)}^2 &\leq B_L(u, u) + C_6 \|u\|_{L^2(U)}^2 \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{\lambda}{2}}_{=: \beta} \|u\|_{H^1}^2 &\leq B_L(u, u) + \underbrace{\left( C_6 + \frac{\lambda}{2} \right)}_{=: \gamma} \|u\|_{L^2(U)}^2,\end{aligned}$$

woraus sich die gewünschte Ungleichung ergibt.  $\square$

**Bemerkung 4.3.7.** Die Bilinearform  $B_L$  ist nur dann koerziv, wenn  $\gamma = 0$  gewählt werden kann. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht möglich. Deshalb können wir den Satz von Lax-Milgram A.5 nicht auf  $B_L$  anwenden. Wir betrachten stattdessen die symmetrische Bilinearform

$$B(u, v) := B_L(u, v) + \gamma(u, v)_{L^2(U)}.$$

Die Koerzivität für  $B$  haben wir gerade durch die Definition sichergestellt; und die Beschränktheit kommt uns auch nicht abhandeln, denn es gilt:

$$\begin{aligned}|B(u, v)| &= |B_L(u, v) + \gamma(u, v)_{L^2(U)}| \\ &\leq |B_L(u, v)| + \gamma \|u\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} \\ &\leq \alpha \|u\|_{H^1(U)} \|v\|_{H^1(U)} + \gamma \|u\|_{H^1(U)} \|v\|_{H^1(U)}.\end{aligned}$$

#### 4. Elliptische Theorie

Diese Bilinearform  $B$  gehört ebenfalls zu einem gleichmäßig elliptischen Differentialoperator:

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx - \int_U \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} v dx - \int_U c u v dx + \gamma \int_U u v dx \\ &= \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} v - (c - \gamma) u v \right) dx \\ &= B_{L-\gamma}(u, v). \end{aligned}$$

#### Satz 4.3.8

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch und genüge der Koeffizientenbedingung (4.7). Sei  $f \in H^{-1}(U)$ . Dann gibt es eine Konstante  $\gamma > 0$  derart, dass für alle  $\mu \geq \gamma$  das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu - \mu u = f & \text{auf } U \\ u = 0 & \text{auf } \partial U \end{cases} \quad (4.11)$$

eine eindeutige schwache Lösung besitzt.

*Beweis.* Wir wählen  $\gamma$  wie in Satz 4.3.6. Die Bilinearform  $B_{L-\mu}$  erfüllt nach Bemerkung 4.3.7 die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram A.5. Wenden wir diesen auf das Funktional  $(-f) \in H^{-1}(U)$  an, so liefert er uns ein eindeutiges  $u \in H_0^1(U)$  mit

$$B_{L-\mu}(u, v) = -f(v) \quad \forall v \in H_0^1(U). \quad (4.12)$$

Nach Bemerkung 4.3.4 ist dieses  $u$  genau die schwache Lösung des Problems (4.11).  $\square$

**Bemerkung 4.3.9.** Satz 4.3.8 besagt, dass die beschränkte lineare Abbildung

$$\begin{aligned} H_0^1(U) &\rightarrow H^{-1}(U), \\ u &\mapsto Lu - \mu u \end{aligned}$$

bijektiv ist. Damit existiert die Abbildung

$$(L - \mu)^{-1} : H^{-1}(U) \rightarrow H_0^1(U),$$

die automatisch linear und beschränkt ist.

#### 4.4. Die Fredholm-Alternative und adjungierte Gleichungen

##### Korollar 4.3.10

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch und genüge der Koeffizientenbedingung (4.7). Sei  $\gamma$  wie in Satz 4.3.6. Dann gibt es eine Konstante  $C = C(U, L, \mu) > 0$ , so dass für die Lösungen  $u$  des Randwertproblems (4.11) die A-priori-Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(U)} \leq C \cdot \|f\|_{H^{-1}(U)} \quad (4.13)$$

für beliebige  $f \in H^{-1}(U)$  gilt. Die Konstante  $C$  hängt dabei nicht von der Funktion  $f$  ab. Ist  $f \in L^2(U)$ , so gilt wegen  $\|f\|_{H^{-1}(U)} \leq \|f\|_{L^2(U)}$  auch

$$\|u\|_{H^1(U)} \leq C \cdot \|f\|_{L^2(U)}.$$

#### 4.4. Die Fredholm-Alternative und adjungierte Gleichungen

##### Satz 4.4.1 (Fredholm-Alternative)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch und genüge der Koeffizientenbedingung (4.7). Dann gilt entweder:

$$\forall f \in H^{-1}(U) \exists! \text{ schwache Lösung } u \text{ des Problems } \begin{cases} Lu = f & \text{auf } U, \\ u = 0 & \text{auf } \partial U; \end{cases} \quad (4.14)$$

oder:

$$\exists \text{ nichttriviale schwache Lösung } u \text{ des Problems } \begin{cases} Lu = 0 & \text{auf } U, \\ u = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases} \quad (4.15)$$

*Beweis.*

1. Wähle gemäß Satz 4.3.8 und Bemerkung 4.3.9 ein  $\mu \geq 0$  so groß, dass der Operator  $L - \mu : H_0^1(U) \rightarrow H^{-1}(U)$  beschränkt und bijektiv ist. Setze

$$g := (L - \mu)^{-1} f \in H_0^1(U) \subset H^{-1}(U)$$

#### 4. Elliptische Theorie

und definiere den Operator  $K : H^{-1}(U) \rightarrow H^{-1}(U)$  durch

$$K := \mu(L - \mu)^{-1}.$$

Nach dem Satz von Rellich-Kondrakov A.23 ist die Einbettung  $H^1(U) \hookrightarrow L^2(U)$  kompakt, und wegen

$$H^{-1}(U) \xrightarrow[\text{beschränkt}]{\mu(L-\mu)^{-1}} H_0^1(U) \subset H^1(U) \xleftarrow[\text{kompakt}]{} L^2(U) \subset H^{-1}(U)$$

ist damit auch  $K$  kompakt. Nach der abstrakten Fredholm-Alternative A.22 ist nun entweder die Gleichung  $u + Ku = g$  für alle  $g \in H^{-1}(U)$  lösbar, oder  $u + Ku = 0$  besitzt eine nichttriviale Lösung.

2. Bleibt zu zeigen, dass wir mit diesem  $u$  tatsächlich eine schwache Lösung des Dirichlet-Problems gefunden haben. Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned} u + \mu(L - \mu)^{-1}u &= (L - \mu)^{-1}f \\ \Leftrightarrow u &= (L - \mu)^{-1} \underbrace{(f - \mu u)}_{\in H^{-1}(U)} \in H_0^1(U). \end{aligned}$$

Damit wissen wir schon einmal, dass  $u$  im richtigen Sobolew-Raum liegt. Wenden wir nun  $(L - \mu)$  auf die Gleichung an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (L - \mu)u &= f - \mu u \\ \Leftrightarrow Lu &= f. \end{aligned}$$

Ist nun  $g = 0$ , so ist auch  $f = 0$  und unsere nichttriviale Lösung von  $u + Ku = 0$  entpuppt sich als die in (4.15) geforderte Lösung des homogenen Dirichlet-Problems.

□

**Bemerkung 4.4.2.** Alternativ können wir  $K = \mu(L - \mu)^{-1}$  auch als Operator von  $L^2(U)$  nach  $L^2(U)$  auffassen. Dieser ist aus demselben Grunde wie eben kompakt, und wir können (4.14) ersetzen durch

$$\forall f \in L^2(U) \exists! \text{ schwache Lösung } u \text{ des Problems } \begin{cases} Lu = f & \text{auf } U, \\ u = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases} \quad (4.16)$$



#### 4.4. Die Fredholm-Alternative und adjungierte Gleichungen

**Definition 4.4.3.** Sei  $L$  in Divergenzform gegeben durch

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} - cu.$$

Falls  $L$  der Koeffizientenbedingung

$$a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(U), \quad a_{ij}, b_j \in C^1(U), \quad Da_{ij}, Db_j \in L^\infty(U) \quad (4.17)$$

genügt, so definiere den zu  $L$  formal adjungierten Differentialoperator  $L^*$  durch

$$L^*v := \sum_{i,j=1}^n (a_{ji}v_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^n b_j v_{x_j} + \left( \sum_{j=1}^n b_{j,x_j} - c \right) v.$$

**Bemerkung 4.4.4.** Für  $u, v \in C_c^2(U)$  gilt:

$$\begin{aligned} (Lu, v)_{L^2(U)} &= \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} v - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} v - cuv \right) dx \\ &= \int_U \left( - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{j=1}^n (b_j v)_{x_j} u - cuv \right) dx \\ &= \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}v_{x_j})_{x_i} u + \sum_{j=1}^n b_j v_{x_j} u + \left( \sum_{j=1}^n b_{j,x_j} - c \right) uv \right) dx \\ &= (u, L^*v)_{L^2(U)}. \end{aligned}$$

Vervollständigen wir  $C_c^2(U)$  bezüglich der  $H^1$ -Norm, so erkennen wir, dass für alle  $u, v \in H_0^1(U)$  gilt:

$$B_L(u, v) = B_{L^*}(v, u).$$

**Definition 4.4.5.** Ist  $L = L^*$ , so heißt  $L$  selbstadjungiert.

**Beispiel 4.4.6.** Der zu  $L = \Delta$  adjungierte Operator ist  $\Delta^* = \Delta$ . Der Laplace-Operator ist also selbstadjungiert.

#### 4. Elliptische Theorie

Wir setzen

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_L &:= \left\{ \text{schwache Lösungen von } \left\{ \begin{array}{l} Lu=0 \text{ auf } U \\ u=0 \text{ auf } \partial U \end{array} \right\} \right\} \\ &= \{u \in H_0^1(U) \mid B_L(u, v) = 0 \forall v \in H_0^1(U)\} \\ &= \ker(L : H_0^1(U) \rightarrow H^{-1}(U)).\end{aligned}$$

#### Satz 4.4.7

Sei  $U$  offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch und erfülle (4.17). Dann gilt:

$$\dim(\mathcal{N}_L) = \dim(\mathcal{N}_{L^*}) < \infty.$$

*Beweis.*

1. Wähle  $\mu \gg 0$  so groß, dass  $(L - \mu)$  und  $(L^* - \mu)$  invertierbar sind. Im Beweis von Satz 4.4.1 haben wir gesehen, dass mit  $K = \mu(L - \mu)^{-1} : L^2(U) \rightarrow L^2(U)$  gilt:

$$u \in \mathcal{N}_L \Leftrightarrow u + Ku = 0 \Leftrightarrow u \in \ker(\text{Id} + K).$$

Da  $K$  kompakt ist, gilt  $\dim(\mathcal{N}_L) < \infty$  (siehe A.21/1).

2. Wir zeigen nun, dass  $K^* = \mu(L^* - \mu)^{-1}$  ist. Dann wissen wir nämlich, dass

$$u \in \mathcal{N}_{L^*} \Leftrightarrow u \in \ker(\text{Id} + K^*),$$

und aus der Kompaktheit von  $K$  folgt dann  $\dim(\mathcal{N}_L) = \dim(\mathcal{N}_{L^*})$  (siehe A.21/5). Für  $u, v \in L^2(U)$  ist

$$\begin{aligned}(u, K^*v)_{L^2(U)} &= (Ku, v)_{L^2(U)} \\ &= (\mu(L - \mu)^{-1}u, v)_{L^2(U)} \\ &= \mu((L - \mu)^{-1}u, (L^* - \mu)(L^* - \mu)^{-1}v)_{L^2(U)} \\ &= \mu((L - \mu)^{-1}u, L^*(L^* - \mu)^{-1}v)_{L^2(U)} \\ &\quad - \mu^2((L - \mu)^{-1}u, (L^* - \mu)^{-1}v)_{L^2(U)} \\ &= \mu(L(L - \mu)^{-1}u, (L^* - \mu)^{-1}v)_{L^2(U)} \\ &\quad - \mu^2((L - \mu)^{-1}u, (L^* - \mu)^{-1}v)_{L^2(U)} \\ &= \mu((L - \mu)(L - \mu)^{-1}u, (L^* - \mu)^{-1}v)_{L^2(U)} \\ &= (u, \mu(L^* - \mu)^{-1}v)_{L^2(U)}\end{aligned}$$

□

**Satz 4.4.8**

Sei  $U$  offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch und erfülle (4.17). Sei  $f \in L^2(U)$ . Dann besitzt das Dirichlet-Randwertproblem (4.6) eine schwache Lösung genau dann, wenn für alle  $v \in \mathcal{N}_{L^*}$  gilt:

$$(f, v)_{L^2(U)} = 0.$$

*Beweis.* Wähle  $\mu$  so groß, dass  $(L - \mu)$  und  $(L^* - \mu)$  invertierbar sind. Setze  $K = \mu(L - \mu)^{-1} : L^2(U) \rightarrow L^2(U)$ . Da  $Lu = f$  äquivalent zu  $u + Ku = (L - \mu)^{-1}f$  ist, besitzt das Dirichlet-Problem genau dann eine Lösung, wenn

$$(L - \mu)^{-1}f \in \text{im}(\text{Id} + K) \stackrel{\text{A.21/3}}{=} \ker(\text{Id} + K^*)^\perp,$$

und das bedeutet

$$\begin{aligned} 0 &= ((L - \mu)^{-1}f, v) \\ &= (f, (L^* - \mu)^{-1}v) \quad \forall v \in \ker(\text{Id} + K^*) = \mathcal{N}_{L^*}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Für  $w \in \mathcal{N}_{L^*}$  gilt

$$(L^* - \mu)w = -\mu w \in \mathcal{N}_{L^*},$$

also ist  $(L^* - \mu)(\mathcal{N}_{L^*}) \subset \mathcal{N}_{L^*}$ . Da nun aber  $\mathcal{N}_{L^*}$  endlichdimensional und  $(L^* - \mu)$  ein Isomorphismus auf  $L^2(U)$  ist, muss  $(L^* - \mu)(\mathcal{N}_{L^*}) = \mathcal{N}_{L^*}$  sein. Wir können also Gleichung (4.18) schreiben als

$$0 = (f, v') \quad \forall v' \in \mathcal{N}_{L^*}. \quad \square$$

**Beispiel 4.4.9.** Sei  $L = \Delta - 1$ . Wir untersuchen, ob das Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = \Delta u - u = f & \text{auf } U, \\ u = 0 & \text{auf } \partial U \end{cases} \quad (4.19)$$

stets lösbar ist. Betrachte dazu das homogene Problem

$$\begin{cases} \Delta u - u = 0 & \text{auf } U, \\ u = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases} \quad (4.20)$$

Sei  $u$  eine schwache Lösung von (4.20), d.h.  $u \in H_0^1$  und für alle  $v \in H_0^1(U)$  gilt

$$\begin{aligned} 0 &= B_L(u, v) \\ &= \int_U (-\langle Du, Dv \rangle - uv) dx. \end{aligned}$$

#### 4. Elliptische Theorie

Insbesondere erhalten wir für  $v = u$ :

$$\begin{aligned} 0 &= B_L(u, u) \\ &= - \int_U (|Du|^2 + u^2) dx \\ &= -\|u\|_{H^1(U)}^2. \end{aligned}$$

Damit muss  $u = 0$  sein, also  $\mathcal{N}_L = \mathcal{N}_{L^*} = \{0\}$ . Die Fredholm-Alternative 4.4.1 sagt uns nun, dass (4.19) für alle  $f \in H^{-1}(U)$  lösbar ist.

**Beispiel 4.4.10.** Sei  $L = \Delta$ . Betrachte das Randwertproblem zur Laplacegleichung:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } U, \\ u = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases} \quad (4.21)$$

Ist  $u$  schwache Lösung von (4.21), so gilt für alle  $v \in H_0^1(U)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= B_\Delta(u, v) \\ &= - \int_U \langle Du, Dv \rangle dx, \end{aligned}$$

und speziell für  $v = u$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U |Du|^2 dx \\ \Rightarrow \quad Du &\equiv 0. \end{aligned}$$

Daraus können wir nun schließen, dass  $u$  konstant auf jeder Zusammenhangskomponente ist, und da  $u|_{\partial U} = 0$ , muss dann  $u \equiv 0$  sein. Doch Obacht: Können wir tatsächlich von  $Du \equiv 0$  auf  $u = \text{const.}$  schließen? Immerhin ist  $u$  nur in  $H^1(U)$ , und falls  $u \notin C^\infty(U)$ , so bedeutet  $Du \equiv 0$  nur, dass es eine Folge  $(u_k)_k \subset C^\infty(U)$  mit  $u_k \xrightarrow{L^2} u$  und  $Du_k \xrightarrow{L^2} 0$  gibt. Tatsächlich folgt daraus, dass  $u$  konstant sein muss, wie wir naiv annahmen.

#### Satz 4.4.11

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch und erfülle die Koeffizientenbedingung (4.7). Definiere das **reelle Spektrum von  $L$**  durch

$$\Sigma(L) := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \left\{ \begin{array}{l} Lu + \lambda u = 0 \text{ auf } U \\ u = 0 \text{ auf } \partial U \end{array} \right. \text{ besitzt eine nichttriviale schwache Lösung} \right\}.$$

Dann ist  $\Sigma(L)$  endlich oder abzählbar unendlich. Falls  $\#\Sigma(L) = \aleph_0$ , so ist

$$\Sigma(L) = \{\mu_k \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty.$$

#### 4.4. Die Fredholm-Alternative und adjungierte Gleichungen

*Beweis.*

1. Wähle  $\gamma > 0$  gemäß Satz 4.3.8 so, dass das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{auf } U \\ u = 0 & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

für alle  $\mu \leq -\gamma$  eine eindeutige Lösung besitzt. Damit haben wir schon einmal sichergestellt, dass  $\Sigma(L) \subset (-\gamma, \infty)$ .

2. Betrachte wieder den kompakten Operator  $K = \gamma(L - \gamma \text{Id})^{-1} : L^2(U) \rightarrow L^2(U)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} Lu + \mu u &= 0 \\ \Leftrightarrow (L - \gamma \text{Id})u &= -(\mu + \gamma)u \\ \Leftrightarrow u &= -(\mu + \gamma)(L - \gamma \text{Id})^{-1}u \\ \Leftrightarrow u &= -\frac{\mu + \gamma}{\gamma} \cdot Ku. \end{aligned}$$

Wenn  $\mu$  also in  $\Sigma(L)$  liegt, so ist auch  $-\frac{\gamma}{\mu + \gamma} \in \sigma(K)$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus \{-\gamma\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ vermöge} \\ \mu &\mapsto -\frac{\gamma}{\mu + \gamma} \end{aligned}$$

ist sogar bijektiv: Die Umkehrabbildung lautet

$$\lambda \mapsto -\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\gamma.$$

3. Wegen des Satzes über das Spektrum kompakter Operatoren A.29 ist  $\sigma(K)$  (und damit auch  $\Sigma(L)$ ) höchstens abzählbar. Ist  $\#\Sigma(L) = \aleph_0$ , so ist 0 der einzige Häufungspunkt von  $\sigma(K) \setminus \{0\}$ , woraus wir erhalten:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{1}{\lambda_k}\right)\gamma \right| = \infty \xrightarrow{\mu_k \geq -\gamma} \mu_k \rightarrow \infty.$$

□

## 4.5. Differenzenquotienten

**Definition 4.5.1.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann definiere für  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x \in U$  und  $0 < |h| < \text{dist}(x, \partial U)$  die **Differenzenquotienten**

$$\nabla_k^h u(x) := \frac{1}{h}(u_k^h(x) - u(x)), \quad \nabla^h u := (\nabla_1^h u, \dots, \nabla_n^h u),$$

wobei  $u_k^h(x) := u(x + he_k)$ .

### Lemma 4.5.2

1. Ist  $u \in H^l(U)$ , so ist  $\nabla_k^h u \in H^l(U_h)$ , wobei

$$U_h = \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > |h|\};$$

2. Es gilt die Produktregel

$$\nabla_k^h(uv) = u_k^h \nabla_k^h v + (\nabla_k^h u)v;$$

3. Sind  $u, v \in L^2(U)$ , dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \nabla_k^h v \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla_k^{-h} u)v \, dx.$$

4. Der Differenzenquotient und die Ableitung sind vertauschbar:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla_k^h u) = \nabla_k^h \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

*Beweis.*

zu 1. Ist  $u \in H^l(U)$ , so ist auch  $u_k^h$  und damit  $\nabla_k^h u \in H^l(U_h)$ .

zu 2. Es gilt:

$$\nabla_k^h(uv)(x) = \frac{1}{h}((uv)(x + he_k) - (uv)(x))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}(u_k^h(x)v_k^h(x) - u(x)v(x)) \\
&= \frac{1}{h}(u_k^h(x) \cdot (v_k^h(x) - v(x)) + (u_k^h(x) - u(x))v(x)) \\
&= u_k^h(x)\nabla_k^h v(x) + (\nabla_k^h u(x))v(x).
\end{aligned}$$

zu 3. Durch Substitution  $y := x + he_k$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\nabla_k^h v(x) dx &= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x + he_k) dx - \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x) dx \\
&= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} u(y - he_k)v(y) dy - \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(y) dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla_k^{-h} u)(y)v(y) dy.
\end{aligned}$$

zu 4. Die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}
(\nabla_k^h u)_{x_j} &= \left( \frac{1}{h}(u(x + he_k) - u(x)) \right)_{x_j} \\
&= \frac{1}{h}(u_{x_j}(x + he_k) - u_{x_j}(x)) \\
&= \nabla_k^h(u_{x_j}).
\end{aligned}$$

□

### Proposition 4.5.3

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $V \subset\subset W \subset\subset U$ . Dann gilt:

1. Für alle  $u \in H^1(U)$  und alle  $h$  mit  $0 < |h| < \text{dist}(\bar{V}, \partial U)$  ist

$$\|\nabla^h u\|_{L^2(V)} \leq \|Du\|_{L^2(U)};$$

2. Ist  $u \in L^2(U)$  und gibt es Konstanten  $\varepsilon, C > 0$  mit

$$\|\nabla_k^h u\|_{L^2(W)} \leq C \quad \forall 0 < |h| \leq \varepsilon,$$

dann ist  $u \in H^1(V)$  und  $\|Du\|_{L^2(V)} \leq C$ .

#### 4. Elliptische Theorie

*Beweis.*

zu 1. Es genügt, die Abschätzung für  $u \in C^\infty(U) \cap H^1(U)$  zu zeigen. Dazu bestimmen wir

$$\begin{aligned} |\nabla_k^h u(x)| &= \frac{1}{|h|} |u(x + he_k) - u(x)| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x + the_k) dt \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_0^1 u_{x_k}(x + the_k) \cdot he_k dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |u_{x_k}(x + the_k)| dt. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir nun die  $L^2$ -Norm

$$\begin{aligned} \|\nabla_k^h u\|_{L^2(V)}^2 &= \int_V |\nabla_k^h u(x)|^2 dx \\ &\leq \int_V \left( \int_0^1 |u_{x_k}(x + the_k)| dt \right)^2 dx \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \int_V \left( \int_0^1 1 dt \cdot \int_0^1 |u_{x_k}(x + the_k)|^2 dt \right) dx \\ &= \int_0^1 \int_{V - the_k} |u_{x_k}(y)|^2 dy dt \\ &\leq \int_0^1 \int_U |u_{x_k}(y)|^2 dy dt \\ &= \|u_{x_k}\|_{L^2(U)}^2. \quad \checkmark \end{aligned}$$

zu 2. Wähle eine Nullfolge  $\delta_j$  und setze

$$u_j(x) := (\eta_{\delta_j} * u)(x) = \int_{B(x, \delta_j)} \eta_{\delta_j}(x - y) u(y) dy,$$

wobei  $\eta_\delta$  der Standardglätter ist (siehe Definition A.3). Für  $\delta_j$  klein genug (also  $j$  groß genug) ist dann  $u_j \in C^\infty(W)$  und  $u_j \rightarrow u$  konvergiert in  $L^2(W)$ . Wir berechnen nun für  $x \in V$

$$\begin{aligned} Du_j(x) &= \int_W D_x \eta_{\delta_j}(x - y) u(y) dy \\ &= - \int_W D_y \eta_{\delta_j}(x - y) u(y) dy \\ &= - \int_W ((\nabla^{h_j})_y \eta_{\delta_j}(x - y) + O(\delta_j)) u(y) dy \\ &= \int_W \eta_{\delta_j}(x - y) (\nabla^{-h_j} u)(y) dy + O(\delta_j) \|u\|_{L^2(W)} \end{aligned}$$



für  $h_j$  klein genug. Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  gilt nun

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\
&= (1+\sigma)a^2 + \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)b^2 - \left(\sigma a^2 + \frac{1}{\sigma}b^2 - 2ab\right) \\
&= (1+\sigma)a^2 + \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)b^2 - \left(\sqrt{\sigma}a^2 - \frac{b^2}{\sqrt{\sigma}}\right)^2 \\
&\leq (1+\sigma)a^2 + \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)b^2.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung nutzen wir aus, um  $\|Du_j\|_{L^2(V)}$  abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
\|Du_j\|_{L^2(V)}^2 &= \int_V \left( \int_W \eta_{\delta_j}(x-y) \nabla^{-h_j} u(y) dy + O(\delta_j) \right)^2 dx \\
&\leq \int_V \left( (1+\sigma) \left( \int_W \eta_{\delta_j}(x-y) \nabla^{-h_j} u(y) dy \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) O(\delta_j^2) \right) dx \\
&\stackrel{\text{CSU}}{\leq} (1+\sigma) \int_V \underbrace{\left( \int_W \eta_{\delta_j}(x-y) dy \right)}_{\leq 1} \cdot \int_W \eta_{\delta_j}(x-y) |\nabla^{-h_j} u(y)|^2 dy dx \\
&\quad + \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) O(\delta_j^2)
\end{aligned}$$

(Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung wurde hier auf  $\langle \sqrt{\eta_{\delta_j}}, \sqrt{\eta_{\delta_j}} u \rangle_{L^2}$  angewandt.)

$$\begin{aligned}
&\leq (1+\sigma) \int_W \left( \int_V \eta_{\delta_j}(x-y) dx \right) \cdot |\nabla^{-h_j} u(y)|^2 dy + \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) O(\delta_j^2) \\
&\leq (1+\sigma) \|\nabla^{h_j} u\|_{L^2(W)}^2 + \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) O(\delta_j^2) \\
&\leq (1+\sigma)C + \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) O(\delta_j^2) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (1+\sigma)C.
\end{aligned}$$

Sonach ist die Folge  $(\|Du_j\|_{L^2(V)})_j$  und damit auch  $(\|u_j\|_{H^1(V)})_j$  beschränkt. Es gibt also ein  $v \in H^1(V)$  mit  $u_j \rightharpoonup v$  in  $H^1(V)$ . Dann konvergiert  $u_j$  auch in  $L^2(V)$  schwach gegen  $v$ . Da wir jedoch bereits wissen, dass  $u_j \rightarrow u$  in  $L^2(V)$  konvergiert, muss der Grenzwert  $u = v \in H^1(V)$  sein.

#### 4. Elliptische Theorie

Nun wollen wir die  $L^2$ -Norm von  $Du$  abschätzen. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \|Du\|_{L^2(V)}^2 &= \|u\|_{H^1(V)}^2 - \|u\|_{L^2(V)}^2 \\
 &\leq \varliminf_j \|u_j\|_{H^1(V)}^2 - \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{L^2(V)}^2 \\
 &= \varliminf_j (\|Du_j\|_{L^2(V)}^2 + \|u_j\|_{L^2(V)}^2) - \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{L^2(V)}^2 \\
 &= \varliminf_j \|Du_j\|_{L^2(V)}^2 \\
 &\leq \varliminf_j \left( (1 + \sigma)C + \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) O(\delta_j^2) \right) \\
 &= (1 + \sigma)C.
 \end{aligned}$$

Dies gilt für alle positiven  $\sigma$ . Lassen wir nun  $\sigma \rightarrow 0$  gehen, so ergibt sich die Behauptung.

□

### 4.6. Innere Regularität

#### Satz 4.6.1

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch und erfülle die Koeffizientenbedingung (4.7). Dann liegen die schwachen Lösungen  $u$  von  $Lu = f$  für jede Funktion  $f \in L^2(U)$  und für jedes  $V \subset\subset U$  in  $H^2(V)$  und es existiert eine Konstante  $C > 0$ , die nur von  $L$  und  $V$  abhängt, so dass

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \quad (4.22)$$

Gleichung (4.22) heißt **elliptische Abschätzung**.

**Bemerkung 4.6.2.** Für die Aussage „ $u \in H^k(V) \forall V \subset\subset U$ “ schreibt man kurz  $u \in H_{\text{loc}}^k(U)$ .

**Bemerkung 4.6.3.** Können wir aus Satz 4.6.1 nicht auch auf die Aussage  $u \in H^2(U)$  schließen? Dazu versuchen wir,  $U$  durch  $V_i \subset\subset U$  auszuschöpfen. Leider wird dabei im Allgemeinen  $C \rightarrow \infty$  streben.

**Bemerkung 4.6.4.** In Satz 4.6.1 werden keine Randbedingungen vorausgesetzt, er gilt also nicht nur für  $u \in H_0^1(U)$ .

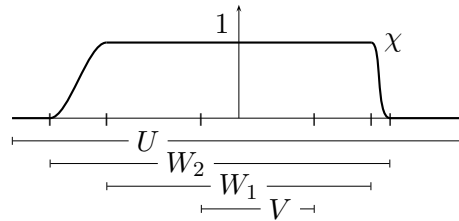
*Beweis von Satz 4.6.1.* In diesem Beweis werden wir an mehreren Stellen die folgenden Abschätzungen benötigen:

$$xy \leq \frac{1}{2} \left( (\varepsilon x)^2 + \left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^2 \right) \quad \forall x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}; \quad (4.23)$$

$$(x + y)^2 \geq x^2 + y^2 \quad \forall x, y \geq 0; \quad (4.24)$$

$$(x + y)^2 \leq 2 \cdot (x^2 + y^2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4.25)$$

1. Wähle  $W_1, W_2$  offen mit  $V \subset\subset W_1 \subset\subset W_2 \subset\subset U$ . Wähle eine Abschneidefunktion  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\chi|_{W_1} \equiv 1$ ,  $\chi|_{\mathbb{R}^n \setminus W_2} \equiv 0$  und  $0 \leq \chi \leq 1$ .



Auch  $\chi^2$  ist dann eine Abschneidefunktion mit denselben Eigenschaften.

2. Schreibe  $L$  in Divergenzform:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu$$

und betrachte die zugehörige Bilinearform  $B_L$ . Dann ist  $u \in H^1(U)$  eine schwache Lösung von  $Lu = f$  genau dann, wenn

$$B_L(u, v) = -\langle f, v \rangle_{L^2(U)} \quad (4.26)$$

für alle  $v \in H_0^1$  gilt. Schreiben wir Gleichung (4.26) etwas um:

$$\int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_U \left( -f + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu \right) \cdot v dx. \quad (4.27)$$

3. Für  $v$  wählen wir nun

$$v := \underbrace{-\nabla_k^{-h} \chi^2}_{\in H^1(U_h)} \underbrace{\nabla_k^h u}_{\in H_0^1(U)} \in H_0^1(U) \text{ für } |h| \text{ klein genug}$$

#### 4. Elliptische Theorie

und rechnen die linke Seite von Gleichung (4.27) aus:

$$\begin{aligned}
\int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx &= - \int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} (\nabla_k^{-h} (\chi^2 \nabla_k^h u))_{x_j} dx \\
&\stackrel{4.5.2/4}{=} - \int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \nabla_k^{-h} (\chi^2 \nabla_k^h u)_{x_j} dx \\
&\stackrel{4.5.2/3}{=} \int_U \sum_{i,j=1}^n \nabla_k^h (a_{ij} u_{x_j}) \cdot (\chi^2 \nabla_k^h u)_{x_i} dx \\
&\stackrel{4.5.2/2}{=} \int_U \sum_{i,j=1}^n ((a_{ij})_k^h \nabla_k^h u_{x_i} + (\nabla_k^h a_{ij}) u_{x_i}) \\
&\quad \cdot (2\chi \chi_{x_j} \nabla_k^h u + \chi^2 \nabla_k^h u_{x_j}) dx \\
&= \int_W \chi^2 \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})_k^h \cdot \nabla_k^h u_{x_i} \cdot \nabla_k^h u_{x_j} dx \\
&\quad + \int_W \sum_{i,j=1}^n 2\chi \chi_{x_j} (a_{ij})_k^h \cdot \nabla_k^h u_{x_i} \cdot \nabla_k^h u dx \\
&\quad + \int_W \sum_{i,j=1}^n 2\chi \chi_{x_j} \nabla_k^h a_{ij} \cdot u_{x_i} \nabla_k^h u dx \\
&\quad + \int_W \sum_{i,j=1}^n \chi^2 \nabla_k^h a_{ij} \cdot u_{x_i} \nabla_k^h u_{x_j} dx.
\end{aligned}$$

Sehen wir uns nun diese Integralterme gesondert an: Die Summe im ersten Integral können wir wegen der Elliptizitätsbedingung abschätzen durch

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})_k^h \nabla_k^h u_{x_i} \cdot \nabla_k^h u_{x_j} \geq \lambda |\nabla_k^h Du|^2.$$

Den zweiten Integranden schätzen wir betragsmäßig ab:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i,j=1}^n 2\chi_{x_j} (a_{ij})_k^h \cdot \chi \nabla_k^h u_{x_i} \cdot \nabla_k^h u \right| &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\left| \sum_{j=1}^n 2\chi_{x_j} (a_{ij})_k^h \right|}_{\text{beschränkt}} \cdot |\chi \nabla_k^h u_{x_i}| \cdot |\nabla_k^h u| \\
&\leq C'_1 |\nabla_k^h u| \cdot \sum_{i=1}^n |\chi \nabla_k^h u_{x_i}| \\
&\stackrel{(4.25)}{\leq} C_1 |\chi \nabla_k^h Du| \cdot |\nabla_k^h u|.
\end{aligned}$$

Analog können wir die anderen Integranden betragsmäßig abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^n 2\chi\chi_{x_j} \nabla_k^h a_{ij} \cdot u_{x_i} \cdot \nabla_k^h u \right| &\leq C_2 |Du| \cdot |\nabla_k^h u|, \\ \left| \sum_{i,j=1}^n \chi \nabla_k^h a_{ij} \cdot u_{x_i} \cdot \chi \nabla_k^h u_{x_i} \right| &\leq C_3 |Du| \cdot |\nabla_k^h Du|. \end{aligned}$$

Damit können wir nun die linke Seite von (4.27) abschätzen:

$$\begin{aligned} &\int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} \\ &\geq \lambda \int_W \chi^2 |\nabla_k^h Du|^2 dx - \int_W C_1 |\chi \nabla_k^h Du| \cdot |\nabla_k^h u| dx \\ &\quad - \int_W C_2 |Du| \cdot |\nabla_k^h u| dx - \int_W C_3 |Du| \cdot |\chi \nabla_k^h u| dx \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\geq} \lambda \underbrace{\|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(W_2)}^2}_{=\|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)}^2} - C_1 \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(W_2)} \underbrace{\|\nabla_k^h u\|_{L^2(W_2)}}_{\stackrel{4.5.3/1}{\leq} \|Du\|_{L^2(U)}} \\ &\quad - C_2 \|Du\|_{L^2(W_2)} \|\nabla_k^h u\|_{L^2(W_2)} - C_3 \|Du\|_{L^2(W_2)} \|\chi \nabla_k^h u\|_{L^2(W_2)} \\ &\geq \lambda \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)}^2 - C_4 \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)} \|Du\|_{L^2(U)} - C_2 \|Du\|_{L^2(U)}^2 \\ &\stackrel{(4.23)}{\geq} \frac{\lambda}{2} \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)}^2 - C_5 \|Du\|_{L^2(U)}^2. \end{aligned}$$

4. Nun sehen wir uns die rechte Seite von (4.27) an:

$$\begin{aligned} &\left| \int_U \left( -f + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu \right) \cdot v dx \right| \\ &\leq \int_U \left( |f| + \sum_{j=1}^n |b_j| \cdot |u_{x_j}| + |c| \cdot |u| \right) |v| dx \\ &\leq C_6 \int_U (|f| + |Du| + |u|) |v| dx \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} C_6 (\|f\|_{L^2(U)} + \|Du\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \|v\|_{L^2(U)}. \end{aligned}$$

Schätzen wir nun die  $L^2$ -Norm von  $v$  ab:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(U)}^2 &= \int_U |v|^2 dx \\ &= \int_W |\nabla_k^{-h}(\chi^2 \nabla_k^h u)|^2 dx \\ &= \|\nabla_k^{-h}(\chi^2 \nabla_k^h u)\|_{L^2(W_2)}^2 \end{aligned}$$

#### 4. Elliptische Theorie

$$\begin{aligned}
& \stackrel{4.5.3/1}{\leq} \|D(\chi^2 \nabla_k^h u)\|_{L^2(U)}^2 \\
& = \|2\chi D\chi \nabla_k^h u + \chi^2 D\nabla_k^h u\|_{L^2(W_2)}^2 \\
& \leq (\|2\chi D\chi \nabla_k^h u\|_{L^2(W_2)} + \|\chi\|_{L^2(U)} \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(W_2)})^2 \\
& \leq C_7 \left( \|\nabla_k^h u\|_{L^2(W_2)} + \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(W_2)} \right)^2 \\
& \leq C_7 \left( \|Du\|_{L^2(U)} + \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Damit können wir nun die begonnene Abschätzung der rechten Seite von (4.27) fortsetzen:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_U \left( -f + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu \right) \cdot v \, dx \right| \\
& \leq C_8 \left( \|f\|_{L^2(U)} + \|Du\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right) \cdot \left( \|Du\|_{L^2(U)} + \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)} \right) \\
& \stackrel{(4.23)}{\leq} C_9 \left( \|f\|_{L^2(U)} + \|Du\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right)^2 \\
& \quad + \frac{\lambda}{8} \left( \|Du\|_{L^2(U)} + \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)} \right)^2 \\
& \stackrel{(4.25)}{\leq} C_{10} \left( \|f\|_{L^2(U)}^2 + \|Du\|_{L^2(U)}^2 + \|u\|_{L^2(U)}^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)}^2 \\
& = C_{10} \left( \|f\|_{L^2(U)}^2 + \|u\|_{H^1(U)}^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)}^2.
\end{aligned}$$

5. Setzen wir jetzt die Abschätzungen aus den Beweisteilen 3 und 4 zusammen, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{2} \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)}^2 - C_5 \|Du\|_{L^2(U)}^2 \\
& \leq C_{10} \left( \|f\|_{L^2(U)}^2 + \|u\|_{H^1(U)}^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)}^2,
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\|\chi \nabla_k^h Du\|_{L^2(U)}^2}_{\geq \|\nabla_k^h Du\|_{L^2(W_1)}^2} \leq C_{11} \left( \|f\|_{L^2(U)}^2 + \|u\|_{H^1(U)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Wegen Proposition 4.5.3/2 ist somit  $Du \in H^1(V)$  und deshalb auch  $u \in H^2(V)$ . Außerdem liefert uns jene Proposition, dass sich  $\|D^2u\|_{L^2(V)}$  durch dieselbe Konstante abschätzen lässt wie  $\|\nabla_k^h Du\|_{L^2(W_1)}$ . Damit können wir die  $H^2$ -Norm von  $u$  abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2(V)}^2 & = \|u\|_{H^1(V)}^2 + \|D^2u\|_{L^2(V)}^2 \\
& \leq \|u\|_{H^1(U)}^2 + C_{11} \left( \|f\|_{L^2(U)}^2 + \|u\|_{H^1(U)}^2 \right) \\
& \leq C_{12} \left( \|f\|_{L^2(U)}^2 + \|u\|_{H^1(U)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Mit (4.24) erhalten wir dann

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C_{12}(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}). \quad (4.28)$$

Leider ist dies noch nicht das in Satz 4.6.1 behauptete Ergebnis, da in unserer Abschätzung noch die  $H^1$ -Norm von  $u$  benutzt wird; am Ende wollen wir jedoch nur die  $L^2$ -Norm verwenden, also eine Abschätzung unabhängig von Ableitungen von  $u$  bekommen. Dazu benötigen wir noch drei weitere Beweisschritte.

6. Wir betrachten erneut die beiden Seiten der Gleichung (4.27), dieses mal mit der Testfunktion  $v = \chi^2 u \in H_0^1(U)$ . Für die linke Seite bekommen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx &= \int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} (\chi^2 u)_{x_j} dx \\ &= \int_U \underbrace{\chi^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}}_{\geq \lambda |Du|^2} dx + \int_U \sum_{i,j=1}^n 2\chi a_{ij} u_{x_i} \chi_{x_j} u dx. \end{aligned}$$

Schätzen wir den Integranden im zweiten Integral betragsmäßig ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^n 2\chi a_{ij} u_{x_i} \chi_{x_j} u \right| &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\left| \sum_{j=1}^n 2\chi_{x_j} a_{ij} \right|}_{\text{beschränkt}} \cdot |\chi| \cdot |u| \cdot |u_{x_i}| \\ &\leq C_{13} \chi |u| \sum_{i=1}^n |u_{x_i}| \\ &\stackrel{(4.25)}{\leq} C_{14} \chi |Du| \cdot |u|. \end{aligned}$$

Damit führen wir die begonnene Abschätzung der linken Seite fort:

$$\begin{aligned} \int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx &\geq \lambda \|\chi Du\|_{L^2(U)}^2 - C_{14} \int_U \chi |Du| \cdot |u| dx \\ &\geq \lambda \|\chi Du\|_{L^2(U)}^2 - C_{14} \|\chi Du\|_{L^2(U)} \|u\|_{L^2(U)} \\ &\stackrel{(4.23)}{\geq} \frac{\lambda}{2} \|\chi Du\|_{L^2(U)}^2 - C_{15} \|u\|_{L^2(U)}^2. \end{aligned}$$

#### 4. Elliptische Theorie

7. Nun zur rechten Seite von (4.27), die wir wieder betragsmäßig abschätzen wollen:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_U \left( -f + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu \right) \cdot \chi^2 u \, dx \right| \\
 & \leq \int_U \left( \chi^2 |f| + \chi \sum_{j=1}^n |b_j| \cdot |\chi u_{x_j}| + \chi^2 |c| \cdot |u| \right) |u| \, dx \\
 & \leq C_{16} \int_U (|f| + |\chi Du| + |u|) |u| \, dx \\
 & \stackrel{\text{CSU}}{\leq} C_{16} (\|f\|_{L^2(U)} + \|\chi Du\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \|u\|_{L^2(U)} \\
 & \stackrel{(4.23)\lambda}{\leq} \frac{\lambda}{4} \|\chi Du\|_{L^2(U)}^2 + C_{17} (\|u\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(U)}^2).
 \end{aligned}$$

8. Setzen wir nun die beiden Abschätzungen zusammen, so erhalten wir

$$\underbrace{\frac{\lambda}{4} \|\chi Du\|_{L^2(U)}^2}_{\geq \frac{\lambda}{4} \|Du\|_{L^2(W_1)}^2} \leq C_{18} (\|u\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(U)}^2). \quad (4.29)$$

Ungleichung (4.28) indes, angewandt auf  $W_1 \supset \supset V$ , garantiert uns die Existenz einer Konstante  $C_{19} > 0$  mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{H^2(V)} & \leq C_{19} (\|f\|_{L^2(W_1)} + \|u\|_{H^1(W_1)}) \\
 & \stackrel{(4.24)}{\leq} C_{19} (\|f\|_{L^2(W_1)} + \|u\|_{L^2(W_1)} + \|Du\|_{L^2(W_1)}) \\
 & \stackrel{(4.29)}{\leq} C_{20} (\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \quad \square
 \end{aligned}$$

#### Satz 4.6.5

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch mit  $a_{ij}, b_j, c \in C^{k+1}(U)$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Sei  $V \subset \subset U$ . Dann liegen die schwachen Lösungen  $u$  von  $Lu = f$  für jede Funktion  $f \in H^k(U)$  und für jedes  $V \subset \subset U$  in  $H^{k+2}(V)$  und es existiert eine Konstante  $C > 0$ , die nur von  $L, V$  und  $k$  abhängt, so dass

$$\|u\|_{H^{k+2}(V)} \leq C (\|f\|_{H^k(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \quad (4.30)$$

*Beweis.* Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  entspricht die Aussage des Satzes 4.6.5 genau der Aussage von Satz 4.6.1. Sei also  $k \geq 1$ ,



und die Aussage gelte für  $k - 1$  als gezeigt. Wir wählen nun eine offene Menge  $W$  mit  $V \subset\subset W \subset\subset U$ . Da  $f \in H^k(U) \subset H^{k-1}(U)$ , ist nach Induktionsannahme  $u \in H^{k+1}(W)$  und es gilt

$$\|u\|_{H^{k+1}(W)} \leq C_1 (\|f\|_{H^{k-1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

Die Funktion  $u$  ist schwache Lösung von  $Lu = f$  genau dann, wenn für alle Testfunktionen  $v \in C_c^\infty(U)$  gilt:

$$B_L(u, v) = -(f, v)_{L^2(U)}.$$

Wir wählen nun eine Testfunktion  $v \in C_c^\infty(W) \subset C_c^\infty(U)$ . Dann ist auch  $-v_{x_m} \in C^\infty(W)$  eine zulässige Testfunktion. Setzen wir diese in die definierende Gleichung für schwache Lösungen ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_W \left( - \sum_{i,j=1}^n \underbrace{a_{ij} u_{x_i} v_{x_m x_j}}_{\in H^1(W)} + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} v_{x_m} + cu v_{x_m} - f v_{x_m} \right) dx \\ &= \int_W \left( \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_{x_m} v_{x_j} - \sum_{j=1}^n (b_j u_{x_j})_{x_m} v - (cu)_{x_m} v + f_{x_m} v \right) dx \\ &= \int_W \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij, x_m} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_m x_i} v_{x_j} - \sum_{j=1}^n b_{j, x_m} u_{x_j} v \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_m x_j} v - c_{x_m} uv - cu_{x_m} v + f_{x_m} v \right) dx \\ &= B_L(u_{x_m}, v) + \underbrace{\int_W \left( - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij, x_m} u_{x_i})_{x_j} - \sum_{j=1}^n b_{j, x_m} u_{x_j} - c_{x_m} u + f_{x_m} \right) \cdot v dx}_{=:\tilde{f} \in H^{k-1}(W)}. \end{aligned}$$

Die Funktion  $u_{x_m} \in H^k(U) \subset H^1(U)$  ist also eine schwache Lösung von  $Lu_{x_m} = \tilde{f}$  auf  $W$ . Nach Induktionsannahme gilt dann  $u_{x_m} \in H^{k+1}(V)$  und damit  $u \in H^{k+2}(V)$ . Ferner existiert eine Konstante  $C_2 > 0$ , so dass

$$\begin{aligned} \|u_{x_m}\|_{H^{k+1}(V)} &\leq C_2 (\|\tilde{f}\|_{H^{k-1}(W)} + \|u_{x_m}\|_{L^2(W)}) \\ &\leq C_2 (\|\tilde{f}\|_{H^{k-1}(W)} + \|u\|_{H^2(W)}) \\ &\leq C_3 (\|\tilde{f}\|_{H^{k-1}(W)} + \|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \end{aligned}$$

Um mit dieser Gleichung etwas anfangen zu können, müssen wir noch die  $H^{k-1}$ -Norm

#### 4. Elliptische Theorie

von  $\tilde{f}$  abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{H^{k-1}(W)} &\leq C_3 \cdot \left( \sum_{i,j=1}^n \|u_{x_i x_j}\|_{H^{k-1}(W)} + \sum_{j=1}^n \|u_{x_j}\|_{H^{k-1}(W)} + \|u\|_{H^{k-1}(W)} + \|f_{x_m}\|_{H^{k-1}(W)} \right) \\ &\leq C_4 (\|u\|_{H^{k+1}(W)} + \|f\|_{H^k(W)}) \\ &\leq C_5 (\|f\|_{H^k(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \quad \text{nach Induktionsannahme.} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die gewünschte Abschätzung für die  $H^{k+2}$ -Norm von  $u$ :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{k+2}(V)} &\leq \|u\|_{H^{k+1}(V)} + \sum_{m=1}^n \|u_{x_m}\|_{H^{k+1}(V)} \\ &\leq C_6 (\|f\|_{H^k(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \end{aligned} \quad \square$$

#### Korollar 4.6.6

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch mit  $a_{ij}, b_j, c \in C^\infty(U)$ . Sei  $f \in C^\infty(U)$ . Dann ist jede schwache Lösung  $u$  von  $Lu = f$  glatt in  $U$ .

*Beweis.* Sei  $V \subset\subset W \subset\subset U$  offen. Es gilt dann  $f \in C^\infty(\bar{W}) \subset H^k(W)$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Nach Satz 4.6.5 ist damit  $u \in H^{k+2}(V) \subset C^{k+2-n}$  für alle  $k \geq n-2$  (vgl. A.24). Demnach ist  $u \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(V) = C^\infty(V)$ , und da dies für alle  $V \subset\subset U$  gilt, können wir  $U$  durch relativ kompakte Teilmengen ausschöpfen und erhalten das gewünschte Resultat  $u \in C^\infty(U)$ .  $\square$

**Bemerkung 4.6.7.** Wir wissen nun, dass schwache Lösungen einer gleichmäßig elliptischen Gleichung auch klassische Lösungen sind, sofern die Koeffizienten des Operators glatt sind. Damit können wir Resultate wie z.B. die Fredholm-Alternative, die wir bislang nur für schwache Lösungen kannten, auch für klassische Lösungen formulieren. Um andererseits klassische Resultate wie das Maximumprinzip auf schwache Lösungen anwenden zu können, fehlt uns noch eine wichtige Zutat: Wir wissen nämlich noch nicht, ob sich die schwachen Lösungen auch stetig auf den Rand des Gebietes  $U$  fortsetzen lassen. Dies werden wir in Abschnitt 4.7 untersuchen.

## 4.7. Randregularität

### Satz 4.7.1

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch und erfülle die Koeffizientenbedingung (4.7). Dann sind für alle  $f \in L^2(U)$  die schwachen Lösungen  $u$  des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \text{auf } U \\ u = 0 & \text{auf } \partial U \end{cases} \quad (4.31)$$

in  $H^2(U)$ , und es existiert eine von  $f$  und  $u$  unabhängige Konstante  $C > 0$ , so dass gilt:

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

**Bemerkung 4.7.2.** Im Unterschied zu Satz 4.6.1 bekommen wir hier eine Normabschätzung für ganz  $U$ . Dies ist möglich, weil wir zusätzliche Forderungen an  $U$  und  $u$  stellen: Das Gebiet  $U$  soll beschränkt sein, sein Rand soll glatt sein, und  $u$  soll eine Randbedingung erfüllen, d.h. ein Element aus  $H_0^1(U)$  sein.

**Bemerkung 4.7.3.** Ist  $0 \notin \Sigma(L)$  und ist  $u \in H_0^1(U)$  die eindeutige Lösung von (4.31), so gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(U)} &\leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|L^{-1}f\|_{L^2(U)}) \\ &\leq C(\|f\|_{L^2(U)} + C'\|f\|_{L^2(U)}) \\ &= \tilde{C}\|f\|_{L^2(U)} \end{aligned}$$

wegen der Beschränktheit von  $L^{-1}$ .

*Beweis von Satz 4.7.1.*

1. Sei zunächst  $U = \{x \in B(0,1) \mid x_n > 0\}$  die obere Halbkugel. Setze  $W := B(0, \frac{1}{2}) \cap U$ ,  $V := B(0, \frac{1}{3}) \cap U$  und wähle eine glatte Abschneidefunktion  $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  mit  $\text{supp } \chi \subset B(0, 1)$  und  $\chi|_{B(0, \frac{1}{2})} \equiv 1$ . Sei  $u$  eine schwache Lösung von (4.31). Dann gilt für alle  $v \in H_0^1(U)$ :  $B_L(u, v) = -(f, v)_{L^2(U)}$ , also

$$\sum_{i,j=1}^n \int_U a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_U \left( -f + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu \right) \cdot v dx.$$

#### 4. Elliptische Theorie

Für  $k = 1, \dots, n-1$  und  $h > 0$  klein genug setze

$$\begin{aligned} v &:= -\nabla_k^{-h}(\chi^2 \nabla_k^h u) \\ &= \frac{1}{h^2}(\chi_k^{-h}(u - u_k^{-h}) - \chi^2(u_k^h - u)). \end{aligned}$$

Wenden wir hierauf den Spuroperator an, so stellen wir fest, dass aus  $Tu = 0$  auch  $Tu_k^h = 0$  folgt (da  $k \neq n$ ) und damit auch  $Tv = 0$ . Demzufolge ist  $v \in H_0^1(U)$  und sonach eine zulässige Testfunktion.

2. Wie im Beweis von Satz 4.6.1 (Schritte 3–5) erhalten wir die Abschätzung

$$\|\nabla_k^h Du\|_{L^2(W)}^2 \leq C_1(\|f\|_{L^2(U)}^2 + \|u\|_{H^1(U)}^2).$$

Aus Proposition 4.5.3/2 erhalten wir dann wieder  $u_{x_k} \in H^1(V)$ . Hier funktioniert dies jedoch tatsächlich nur für  $k \neq n$ : In diesem Fall können wir die Beweisschritte von 4.5.3/2 gut nachvollziehen; während wir für die Richtung  $k = n$  den Parameter  $h$  nicht mehr klein genug wählen können. Die Norm können wir dann auch nur für diese Ableitungsrichtungen statt für ganz  $Du$  abschätzen:

$$\sum_{\substack{k,l=1 \\ k+l < 2n}}^n \|u_{x_k x_l}\|_{L^2(V)} \leq C_2(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}).$$

3. Wegen der inneren Regularität (Satz 4.6.1) ist  $u \in H_{\text{loc}}^2(U)$  und erfüllt damit fast überall

$$f = Lu = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j u_{x_j} + cu, \quad (4.32)$$

wobei  $\tilde{b}_j = b_j - \sum_i a_{ji, x_i}$  gilt. Außerdem haben wir wegen der Elliptizität von  $L$  die Bedingung

$$a_{nn} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta_{in} \delta_{jn} \geq \theta |e_n|^2 = \theta > 0,$$

die uns erlaubt, Gleichung (4.32) durch  $a_{nn}$  zu dividieren, so dass wir erhalten:

$$\begin{aligned} \|u_{x_n x_n}\|_{L^2(V)} &= \left\| \frac{1}{a_{nn}} \left( -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j < 2n}}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j u_{x_j} + cu - f \right) \right\|_{L^2(V)} \\ &\leq C_2 \left( \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j < 2n}}^n \|u_{x_i x_j}\|_{L^2(V)} + \|u\|_{H^1(V)} + \|f\|_{L^2(V)} \right) \\ &\stackrel{(4.32)}{\leq} C_3(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}) \end{aligned}$$

und damit

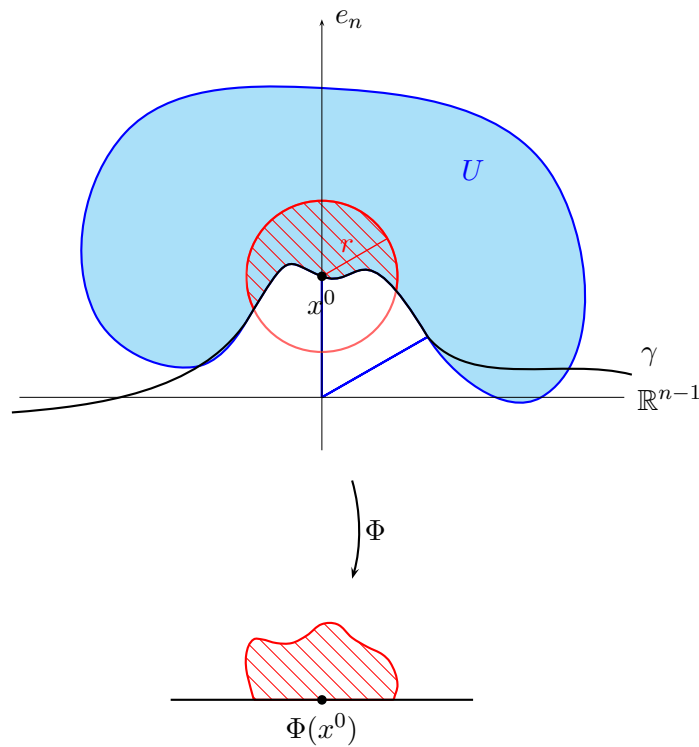
$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(V)} &= \|D^2u\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)} \\ &\leq C_4(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}). \end{aligned}$$

Wir wissen also schon einmal, dass  $u \in H^2(V)$ . Wie im Beweis von Satz 4.6.1 (Beweisschritte 6–8) zeigt man dann die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C_5(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

4. Sei nun  $U$  ein beliebiges Gebiet mit glattem Rand. Sei  $x^0 \in \partial U$ . Indem wir das Koordinatensystem verschieben, die Achsen umnummerieren und ggf. umorientieren, können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $x^0 = x_n^0 e_n$  und dass es ein  $r > 0$  sowie eine Kurve  $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$  gibt, so dass

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$



Dann ist die durch

$$\Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

#### 4. Elliptische Theorie

definierte Abbildung  $\Phi : U \cap B(x^0, r) \rightarrow \Phi(U \cap B(x^0, r))$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus mit  $|\det D\Phi| \equiv 1$ .

5. Setze  $\Psi := \Phi^{-1}$ . Sei  $s > 0$  so klein, dass

$$U' := \{x \in B(0, s) \mid x_n > 0\} \subset \Phi(U \cap B(x^0, r)).$$

Zu  $y \in U'$  setze  $u'(y) := u(\Psi(y))$ . Dann ist  $u' \in H^1(U')$  und  $u' = 0$  auf  $\{y \in \partial U' \mid y_n = 0\}$ . Wir zeigen nun, dass  $u'$  schwache Lösung von  $L'u' = f'$  auf  $U'$  ist, wobei wir folgende Bezeichnungen benutzen:

$$f'(y) = f(\Psi(y)),$$

$$L'u' = - \sum_{k,l=1}^n (a'_{kl} u'_{y_l})_{y_k} + \sum_{l=1}^n b'_l u'_{y_l} + c' u',$$

$$a'_{kl}(y) = \sum_{r,s=1}^n a_{rs}(\Psi(y)) \Phi_{k,x_r}(\Psi(y)) \Phi_{l,x_s}(\Psi(y)),$$

$$b'_l(y) = \sum_{r=1}^n b_r(\Psi(y)) \Phi_{l,x_r}(\Psi(y)),$$

$$c'(y) = c(\Psi(y)).$$

Sei dazu  $v' \in H_0^1(U')$ ,  $v = v' \circ \Phi$ . Dann ist  $v' = v \circ \Psi$ , und wir berechnen:

$$\begin{aligned} B_{L'}(u', v') &= \int_{U'} \left( \sum_{k,l=1}^n a'_{kl} u'_{y_k} v'_{y_l} + \sum_{l=1}^n b'_l u'_{y_l} v' + c' u' v' \right) dy \\ &= \int_{U'} \left( \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^n a'_{kl} \cdot ((u_{x_i} \circ \Psi) \cdot \Psi_{i,y_k}) \cdot ((v_{x_j} \circ \Psi) \cdot \Psi_{j,y_l}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n b'_l (u_{x_j} \circ \Psi) \cdot \Psi_{j,y_l} \cdot (v \circ \Psi) + c' \cdot (u \circ \Psi) \cdot (v \circ \Psi) \right) dy \\ &= \int_{U'} \left( \sum_{i,j=1}^n (u_{x_i} \circ \Psi) \cdot (v_{x_j} \circ \Psi) \cdot \sum_{r,s=1}^n (a_{rs} \circ \Psi) \right. \\ &\quad \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n \Psi_{i,y_k} \cdot (\Phi_{k,x_r} \circ \Psi)}_{=\delta_{ir}} \sum_{l=1}^n \Psi_{j,y_l} \cdot (\Phi_{l,x_s} \circ \Psi) \\ &\quad \left. + \sum_{l,j,r=1}^n (b_r \circ \Psi) \cdot (u_{x_j} \circ \Psi) \cdot (\Phi_{l,x_r} \circ \Psi) \cdot \Psi_{j,y_l} \cdot (v \circ \Psi) \right. \\ &\quad \left. + (c \circ \Psi) \cdot (u \circ \Psi) \cdot (v \circ \Psi) \right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{U'} \left( \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \circ \Psi)(u_{x_i} \circ \Psi)(v_{x_j} \circ \Psi) + \sum_{j=1}^n (b_j \circ \Psi)(u_{x_j} \circ \Psi)(v \circ \Psi) \right. \\
&\quad \left. + (c \circ \Psi)(u \circ \Psi)(v \circ \Psi) \right) dy \\
&= \underbrace{\frac{1}{|\det D\Psi|}}_{=1} \cdot \int_{\Psi(U')} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu \right) dx \\
&= B_L(u, v) \\
&= (f, v)_{L^2(\Psi(U'))} \\
&= \underbrace{|\det D\Psi|}_{=1} (f', v')_{L^2(U')}. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

6. Für  $y \in U'$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^n a'_{kl}(y) \xi_k \xi_l &= \sum_{r,s=1}^n a_{rs}(\Psi(y)) \sum_{k=1}^n \Phi_{k,x_r}(\Psi(y)) \xi_k \sum_{l=1}^n \Phi_{l,x_s}(\Psi(y)) \xi_l \\
&= \sum_{r,s=1}^n a_{rs}(\Psi(y)) (\xi \cdot D\Phi(\Psi(y)))_r (\xi \cdot D\Phi(\Psi(y)))_s \\
&\geq \theta |\xi \cdot D\Phi(\Psi(y))| \\
&\geq \theta' |\xi|,
\end{aligned}$$

da  $|\xi| = |(\xi \cdot D\Phi) \cdot D\Psi| \leq C_6 |\xi \cdot D\Phi|$ . Also ist  $L'$  gleichmäßig elliptisch. Weil überdies  $\Psi$  und  $\Phi$   $C^\infty$ -Diffeomorphismen sind, erfüllt  $L'$  auch die Koeffizientenbedingung (4.7). Somit können wir die Beweisschritte 1–3 auf  $U'$  anwenden und erhalten für  $V' = \{y \in B(0, \frac{\delta}{3}) \mid y_n > 0\}$ :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2(\Psi(V'))} &\leq C_7 \|u'\|_{H^2(V')} \\
&\leq C_8 (\|f'\|_{L^2(U')} + \|u'\|_{L^2(U')}) \\
&= C_8 (\|f\|_{L^2(\Psi(U'))} + \|u\|_{L^2(\Psi(U'))}) \\
&\leq C_8 (\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).
\end{aligned}$$

7. Nun finden wir zu jedem  $x^0 \in \partial U$  solch ein  $V'$  mit  $x^0 \in \overline{\Psi(V')} \cap \partial U$ . Überdecken wir also  $\partial U$  mit derartigen Mengen und wählen wir eine endliche Teilüberdeckung, so erhalten wir schon einmal die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C_9 (\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}),$$

wobei  $V := \bigcup_i \overline{\Psi(V'_i)}$  eine Umgebung von  $\partial U$  ist. Die Regularität auf dem Rest von  $U$  kennen wir bereits aus Satz 4.6.1, wodurch sich die Abschätzung für ganz  $U$  ergibt.  $\square$

#### 4. Elliptische Theorie

##### Satz 4.7.4

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch auf  $U$  mit  $a_{ij}, b_j, c \in C^\infty(\bar{U})$ . Ist  $f \in C^\infty(U)$  und  $u \in H_0^1(U)$  schwache Lösung von (4.31), so ist  $u \in C^\infty(\bar{U})$ .

*Beweis.* Wir beginnen mit zwei Vorüberlegungen:

Aus Satz 4.7.1 wissen wir bereits, dass

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C_1(\|f\|_{H^0(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) < \infty$$

gilt. Wir wollen diese Gleichung nun verallgemeinern zu

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C_2(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) < \infty \quad (4.33)$$

für alle  $m \geq 0$ . Wenn dies gezeigt ist, sagt uns der Einbettungssatz von Sobolew und Rellich-Kondrakov A.24, dass  $u \in C^\infty(\bar{U}) = \bigcap_{k \geq 0} H^k(U)$ .

Es genügt, für alle  $m$  die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C_3(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) < \infty \quad (4.34)$$

für  $U = \{y \in B(0, s) \mid y_n > 0\}$  und  $V = B(0, t) \cap U$  mit  $t < s$  zu zeigen. Danach kann wie im Beweis von Satz 4.7.1, Schritte 4–7, verfahren werden, um (4.33) herzuleiten.

Diese Abschätzung beweisen wir nun mittels vollständiger Induktion nach  $m$ . Den Induktionsanfang hat uns Satz 4.7.1 bereits abgenommen. Sei also (4.34) für ein  $m$  gezeigt. Wähle ein  $r \in (t, s)$  und setze  $W := B(0, r) \cap U$ . Nach Induktionsannahme ist dann  $u \in H^{m+2}(W)$ . Sei  $\alpha$  ein Multiindex mit  $|\alpha| = m + 1$ ,  $\alpha_n = 0$ . Dann ist  $\tilde{u} := D^\alpha u \in H^1(W)$ , und außerdem ist  $\tilde{u} = 0$ , wenn  $x_n = 0$ , da wir in  $x_n$ -Richtung nicht ableiten. Nun ist  $\tilde{u}$  eine schwache Lösung von  $L\tilde{u} = \tilde{f}$ , wobei

$$\tilde{f} = D^\alpha f - \sum_{\substack{\beta < \alpha \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \left( \sum_{i,j=1}^n (D^{\alpha-\beta} a_{ij} \cdot D^\beta u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^n D^{\alpha-\beta} b_j \cdot D^\beta u_{x_j} + D^{\alpha-\beta} c \cdot D^\beta u \right),$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{L^2(W)} &= C_3(\|f\|_{H^{m+1}(W)} + \|u\|_{L^2(W)}) \\ \Rightarrow \|\tilde{u}\|_{H^2(V)} &\leq C_4(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) < \infty. \end{aligned}$$

(Vgl. den Beweis von Satz 4.6.5, worin allerdings nur der Spezialfall  $m = 0$  ausgeführt ist.) Mit der  $H^2$ -Norm von  $\tilde{u}$  kontrollieren wir insbesondere alle zweiten Ableitungen von



$\tilde{u} = D^\alpha u$  (für  $\alpha$  wie oben) – und dies sind genau die  $D^\beta u$  mit  $|\beta| = m + 3$  und  $\beta_n \leq 2$ . Für solche  $\beta$  haben wir nun die Abschätzung

$$\|D^\beta u\|_{L^2(V)} \leq C_4(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \quad (4.35)$$

Nun gilt diese Abschätzung nicht nur, wenn  $\beta_n \leq 2$ , sondern für alle  $\beta$  der Länge  $m + 3$ . Um dies zu sehen, wollen wir erneut die vollständige Induktion bemühen, dieses Mal nach  $\beta_n$ . Für  $\beta_n \leq 2$  haben wir die Gültigkeit der Abschätzung bereits hergeleitet. Gelte also (4.35) für  $\beta_n \leq j$ , dann wollen wir die Gültigkeit für  $\beta_n = j + 1$  zeigen. Wir schreiben dazu  $\beta = \gamma + \delta$  mit  $\delta = (0, \dots, 0, 2)$ . Der Multiindex  $\gamma$  besitzt dann die Länge  $m + 1$ . Wegen Satz 4.6.5 ist  $u \in H_{\text{loc}}^{m+3}(U)$ , und es gilt fast überall  $Lu = f$  und damit auch

$$\begin{aligned} D^\gamma f &= D^\gamma Lu \\ &= D^\gamma \left( a_{nn} u_{x_n x_n} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j < 2n}}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu \right) \\ &= a_{nn} D^\beta u + R, \end{aligned}$$

wobei  $R$  eine Summe von Resttermen ist, deren Ableitungsordnung höchstens  $m + 3$  ist und in denen maximal  $j$  Ableitungen in  $x_n$ -Richtung enthalten sind. Damit lässt sich auf  $R$  die Induktionsannahme anwenden, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|D^\beta u\|_{L^2(V)} &\leq \frac{1}{\theta} \|a_{nn} D^\beta u\|_{L^2(V)} \\ &\leq C_5 \cdot (\|D^\gamma f\|_{L^2(U)} + \|R\|_{L^2(U)}) \\ &\leq C_6 \cdot (\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}). \end{aligned}$$

Addieren wir nun die Abschätzungen für alle Ableitungsrichtungen und -ordnungen bis  $m + 3$ , so haben wir gezeigt, dass gilt:

$$\|u\|_{H^{m+3}(V)} \leq C_7(\|f\|_{H^{m+1}(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) < \infty. \quad \square$$

## 4.8. Eigenwerte und Eigenfunktionen

**Definition 4.8.1.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch mit glatten Koeffizienten. Eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt **Eigenwert (von  $-L$ )**, falls das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = -\lambda u & \text{auf } U \\ u = 0 & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

eine schwache Lösung  $u \in H_0^1(U) \setminus \{0\}$  besitzt. Solch ein  $u$  heißt dann **Eigenfunktion von  $L$  zu  $-\lambda$** .

#### 4. Elliptische Theorie

**Bemerkung 4.8.2.** Da der Operator  $L' := L + \lambda \text{Id}$  dieselbe Regularität wie  $L$  besitzt, sagt uns die innere Regularitätstheorie, angewandt auf  $L'$ , dass die Eigenfunktionen von  $L$  glatt sind (vgl. Korollar 4.6.6). Ist außerdem  $\partial U$  glatt und sind die Koeffizienten von  $L$  in  $C^\infty(\bar{U})$ , so liefert uns die Randregularität (Satz 4.7.4), dass die Eigenfunktionen von  $L$  sogar in  $C^\infty(\bar{U})$  liegen.

#### Satz 4.8.3

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch mit glatten Koeffizienten. Ferner sei  $L$  formal selbstadjungiert. Dann gilt:

1. Alle Eigenwerte von  $L$  sind reell;
2. Jeder Eigenwert hat endliche Vielfachheit, d.h. die zugehörigen Eigenräume sind endlichdimensional;
3. Das reelle Spektrum von  $L$  besitzt abzählbar unendlich viele Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , wobei  $\lambda_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ . (In der Notation wollen wir jeden Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit wiederholen.)
4. Es gibt eine  $L^2$ -Orthonormalbasis von  $L^2(U)$ , die nur aus Eigenfunktionen von  $L$  besteht.

*Beweis.*

zu 1. Wähle  $\gamma \gg 0$  gemäß Satz 4.3.8 und Bemerkung 4.3.9 so, dass der Operator

$$L - \gamma \text{Id} : H_0^1(U) \rightarrow H^{-1}(U)$$

bijektiv ist. Definiere den kompakten Operator  $K : L^2(U, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(U, \mathbb{C})$  durch

$$K := \gamma(L - \gamma)^{-1}.$$

Da  $L = L^*$  ist, muss auch  $K = K^*$  sein (vgl. den Beweis zu Satz 4.4.7). Ist nun  $\mu$  ein Eigenwert von  $K$ ,  $u \in L^2(U, \mathbb{C})$  Eigenfunktion von  $K$  zu  $\mu$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \mu(u, u)_{L^2(U)} &= (\mu u, u)_{L^2(U)} = (Ku, u)_{L^2(U)} \\ &= (u, Ku)_{L^2(U)} = (u, \mu u)_{L^2(U)} \\ &= \bar{\mu}(u, u)_{L^2(U)} \\ \Rightarrow \mu &= \bar{\mu}, \end{aligned}$$

also muss  $\mu$  reell sein. Wie wir bereits im Beweis von Satz 4.4.11 sahen, bildet

$$\varphi : \mu \mapsto \frac{1 + \mu}{\mu} \cdot \gamma$$

die Eigenwerte von  $K$  bijektiv auf die Eigenwerte von  $-L$  ab. Da  $\varphi$  jedoch die reellen Zahlen nicht verlässt, müssen auch die Eigenwerte von  $L$  reell sein. ✓

zu 2. Die Eigenwerte kompakter Operatoren besitzen endliche Vielfachheit, also gilt dies auch für die Eigenwerte von  $L$ . (Argumentation wie bei 1.) ✓

zu 4. Da  $L^2(U, \mathbb{C})$  separabel und  $K$  kompakt ist, besitzt  $L^2(U, \mathbb{C})$  nach dem Satz von Hilbert-Schmidt eine Basis  $B$  aus Eigenvektoren von  $K$ . Nun ist (wie bei 1) Eine Funktion  $u \in L^2(U, \mathbb{C})$  genau dann Eigenvektor von  $K$  zum Eigenwert  $\mu$ , wenn  $u$  Eigenfunktion von  $-L$  zum Eigenwert  $\varphi(\mu)$  ist. Demzufolge ist  $B$  die gesuchte Basis, wenn sie orthonormal ist. Weil aber die Basis für jeden einzelnen Eigenraum orthonormiert werden kann, bleibt nur zu zeigen, dass Eigenfunktionen von  $L$  (bzw. Eigenvektoren von  $K$ ) zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind. Sei also  $u$  Eigenvektor von  $K$  zum Eigenwert  $\mu$  und  $u'$  Eigenvektor zu  $\mu' \neq \mu$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu(u, u')_{L^2(U)} &= (Ku, u')_{L^2(U)} \\ &= (u, Ku')_{L^2(U)} \\ &= \mu'(u, u')_{L^2(U)} \\ \Rightarrow (u, u') &= 0. \quad \checkmark \end{aligned}$$

zu 3. Da sich ganz  $L^2(U)$  durch Eigenfunktionen von  $L$  aufspannen lässt, gibt es davon unendlich viele linear unabhängige. Demzufolge gibt es auch unendlich viele Eigenwerte (wenn wir weiterhin die Konvention verwenden, die Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit ggf. mehrfach zu zählen). Satz 4.4.11 liefert dann die Behauptung. □

□

**Beispiel 4.8.4.** Wir wollen die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplace-Operators  $L = \Delta$  auf dem Quadrat  $U = (0, \pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$  bestimmen. Um die nichttrivialen schwachen Lösungen  $u \in H_0^1$  von  $\Delta u = -\lambda u$  zu finden, benutzen wir den Ansatz  $u(x, y) = f(x)g(y)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u + \lambda u \\ &= f''(x)g(y) + f(x)g''(y) + \lambda f(x)g(y) \\ &= f(x)g(y) \left( \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} + \lambda \right) \\ \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} &= -\frac{g''(y)}{g(y)} - \lambda. \end{aligned}$$

#### 4. Elliptische Theorie

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von  $x$  ab, die rechte nur von  $y$ . Also hängen in Wahrheit beide Seiten von gar nichts ab:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} =: -\mu \in \mathbb{R}, \quad \frac{g''(y)}{g(y)} = \mu - \lambda =: -\nu \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen dieser zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen kennen wir natürlich:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 \sin(\sqrt{\mu}x) + a_2 \cos(\sqrt{\mu}x), \\ g(y) &= b_1 \sin(\sqrt{\nu}y) + b_2 \cos(\sqrt{\nu}y). \end{aligned}$$

(Negative  $\mu, \nu$  scheiden aus, weil diese unter den gegebenen Randbedingungen nur die Nulllösung liefern können.) Aus der Randbedingung  $f(0) = 0$  gewinnen wir  $a_2 = 0$ , und wegen  $f(\pi) = 0$  ist  $\sqrt{\mu} \in \mathbb{Z}$ . Analoges erhalten wir für  $g$ , und so lauten die schwachen Lösungen, die wir bislang kennen,

$$u_{kl}(x, y) = c \sin(kx) \sin(l y), \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Diese  $u_{kl}$  sind die Eigenfunktionen zum Eigenwert  $\lambda = \mu + \nu = k^2 + l^2$ .

Haben wir damit sämtliche Eigenwerte von  $\Delta$  gefunden? Nun, wenn es noch weitere gäbe, müssten die zugehörigen (nichttrivialen) Eigenfunktionen  $u$  senkrecht auf allen  $u_{kl}$  stehen, also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y) u_{kl}(x, y) \, dx \, dy \\ &= c \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} u(x, y) \sin(kx) \, dx \right) \sin(l y) \, dy \quad \forall l \, \forall k \\ \Rightarrow 0 &= \int_0^{2\pi} u(x, y) \sin(kx) \, dx \quad \forall k \\ \Rightarrow 0 &\equiv u(x, y) \quad \zeta \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von  $\Delta$  auf dem gegebenen Quadrat sind also

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1^2 + 1^2 = 2, \\ \lambda_2 &= \lambda_3 = 1^2 + 2^2 = 5, \\ \lambda_4 &= 2^2 + 2^2 = 8, \\ &\vdots \end{aligned}$$

**Definition 4.8.5.** Der kleinste Eigenwert  $\lambda_1$  heißt **Grundton von  $L$** .

**Satz 4.8.6**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch mit glatten Koeffizienten. Ferner sei  $L$  formal selbstadjungiert. Dann gilt:

1.  $\lambda_1 = \min\{B_L(u, u) \mid u \in H_0^1(U), \|u\|_{L^2(U)} = 1\}$ ;
2. Dieses Minimum wird von einer  $L^2$ -normierten Funktion  $u \in H_0^1(U)$  genau dann angenommen, wenn  $u$  Eigenfunktion von  $L$  zu  $-\lambda_1$  ist;
3. Der Grundton hat die Vielfachheit 1;
4. Die Eigenfunktionen zu  $-\lambda_1$  sind entweder strikt positiv oder strikt negativ auf  $U$ .

*Beweis.*

zu 1. Wähle eine Orthonormalbasis  $\{w_k\}$  von  $L^2(U)$ , die nur aus Eigenfunktionen von  $L$  besteht. Dabei sei  $w_k$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $-\lambda_k$ . Es gilt dann

$$B_L(w_k, w_l) = \lambda_k \delta_{kl}.$$

Wir stellen nun eine Funktion  $u \in L^2(U)$  in der Basis  $(w_k)$  dar:

$$u = \sum_k (u, w_k)_{L^2(U)} \cdot w_k =: \sum_k d_k w_k.$$

Ist  $u$  normiert, so gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= \|u\|_{L^2(U)} \\ &= \sum_{k,l} d_k d_l (w_k, w_l)_{L^2(U)} \\ &= \sum_k d_k^2. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} B_L(u, u) &= B_L\left(\sum_k d_k w_k, \sum_l d_l w_l\right) & (4.36) \\ &= \sum_{k,l} d_k d_l B_L(w_k, w_l) \\ &= \sum_k \lambda_k d_k^2 \\ &\geq \lambda_1 \sum_k d_k^2 \\ &= \lambda_1. \end{aligned}$$

#### 4. Elliptische Theorie

Dieses Minimum wird tatsächlich bei  $u = w_1$  angenommen:

$$B_L(w_1, w_1) = \lambda_1(w_1, w_1)_{L^2(U)} = \lambda_1.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. – Doch Obacht: In Gleichung (4.36) waren wir etwas nachlässig. Die Bilinearform ist nämlich nur für  $H^1$ -Funktionen definiert, und über die Reihe  $\sum_k d_k w_k$  wissen wir nur, dass sie in  $L^2(U)$  gegen  $u$  konvergiert. Ob sie auch in der stärkeren  $H^1$ -Norm gegen  $u$  konvergiert, müssen wir noch untersuchen.

- a) Indem wir notfalls  $L$  durch  $L - \gamma$  mit  $\gamma > \lambda_1 + 1$  ersetzen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\lambda_1 > 1$  ist. Betrachte die Bilinearform  $B_{L-1}$ . Dann gilt einerseits nach Satz 4.3.6/1 die Abschätzung

$$B_{L-1}(u, u) \leq C_1 \|u\|_{H^1(U)}^2 \quad \forall u \in C_c^\infty(U); \quad (4.37)$$

andererseits ergibt sich aus der Elliptizität von  $\lambda$ , der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Ungleichung (4.23):

$$\begin{aligned} B_L(u, u) &= \int_U \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} u - cu^2 \right) dx \\ &\geq \theta \|Du\|_{L^2(U)}^2 - C_1 (\|Du\|_{L^2(U)} \|u\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}^2) \\ &\geq \frac{\theta}{2} \|Du\|_{L^2(U)}^2 - C_2 \|u\|_{L^2(U)}^2 \\ \Leftrightarrow \|Du\|_{L^2(U)}^2 &\leq C_3 (B_L(u, u) + \|u\|_{L^2(U)}^2) \\ &= C_3 B_{L-1}(u, u). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Die Gleichungen (4.37) und (4.38) ergeben zusammen eine Abschätzung der  $H^1$ -Norm von  $u$ :

$$\|u\|_{H^1(U)} \leq C_4 B_{L-1}(u, u) \quad \forall u \in C_c^\infty(U).$$

Demnach definiert  $B_{L-1}$  ein Skalarprodukt auf  $C_c^\infty(U)$ , dessen Norm zur  $H^1$ -Norm äquivalent ist. Wir können also die von  $B_{L-1}$  induzierte Norm benutzen, um die  $H^1$ -Konvergenz der Reihe  $\sum_k d_k w_k$  zu untersuchen. Nun ist

$$B_{L-1}(w_k, w_l) = B_L(w_k, w_l) + (w_k, w_l)_{L^2(U)} = (\lambda_k + 1) \delta_{kl}.$$

Die  $w_k$  bilden also auch ein  $B_{L-1}$ -Orthogonalsystem, nur normiert sind sie leider nicht. Holen wir das nach und definieren wir Funktionen

$$v_k := \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}},$$

so haben wir ein  $B_{L-1}$ -Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen von  $L$  gefunden.

- b) Diese  $v_k$  bilden bezüglich der  $H^1$ -Norm eine Basis von  $H_0^1(U)$ . Täten sie dies nicht, so gäbe es nichttriviale  $H_0^1$ -Funktionen  $u \in (\text{span}\{v_k\})^\perp$ , und dann gälte für alle  $k$ :

$$\begin{aligned} 0 &= B_{L-1}(u, v_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k + 1}} B_{L-1}(u, w_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k + 1}} (B_L(u, w_k) + (u, w_k)_{L^2(U)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k + 1}} (\lambda_k + 1) (u, w_k)_{L^2(U)} \\ \Rightarrow (u, w_k)_{L^2(U)} &= 0, \end{aligned}$$

also ist tatsächlich nur die Funktion  $u \equiv 0$  senkrecht auf  $\text{span}\{v_k\}$ .

- c) Ist nun  $u \in H_0^1(U)$ , so konvergiert demnach

$$\begin{aligned} u &= \sum_k B_{L-1}(u, v_k) v_k \\ &= \sum_k \frac{1}{\lambda_k + 1} B_{L-1}(u, w_k) w_k \\ &= \sum_k (u, w_k)_{L^2(U)} w_k \\ &= \sum_k d_k w_k \end{aligned}$$

auch in der  $H^1$ -Norm. ✓

zu 2. Sei  $u \in H_0^1(U)$  normiert und  $B_L(u, u) = \lambda_1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= B_L(u, u) \\ &= \sum_k \lambda_k d_k^2 \\ &= \lambda_1 \sum_{\lambda_k = \lambda_1} d_k^2 + \sum_{\lambda_k > \lambda_1} \underbrace{\lambda_k}_{> \lambda_1} \cdot \underbrace{d_k^2}_{\geq 0} \\ &\geq \lambda_1 \sum_k d_k^2 \\ &= \lambda_1. \end{aligned}$$

In der Ungleichung muss also die Gleichheit gelten, und das geht nur, wenn  $d_k = 0$  für alle  $k$  mit  $\lambda_k > \lambda_1$ . Damit ist  $u$  aber eine Linearkombination von Eigenfunktionen zum Eigenwert  $-\lambda_1$  und somit selbst eine. ✓

#### 4. Elliptische Theorie

zu 4. Sei  $w$  eine Eigenfunktion von  $L$  zu  $-\lambda_1$ . Sei  $w$  normiert. Wir zerlegen  $w$  in Positiv- und Negativteil:  $w = w^+ - w^-$ . Da  $w \in H_0^1(U)$ , ist auch  $|w| \in H_0^1(U)$  und damit auch  $w^+ = \frac{1}{2}(w + |w|)$  sowie  $w^- = w^+ - w$ . Wir können also  $B_L$  auch auf Positiv- und Negativteil von  $w$  anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= B_L(w, w) \\
 &= B_L(w^+ - w^-, w^+ - w^-) \\
 &= B_L(w^+, w^+) - \underbrace{2B_L(w^+, w^-)}_{=0} + B_L(w^-, w^-) \\
 &\geq \lambda_1(\|w^+\|_{L^2(U)}^2 + \|w^-\|_{L^2(U)}^2) \\
 &= \lambda_1\|w\|_{L^2(U)}^2 \\
 &= \lambda_1.
 \end{aligned}$$

In der Ungleichung muss also wieder die Gleichheit gelten. Wegen 2 sind dann  $w^+$  und  $w^-$  Eigenfunktionen von  $L$  zu  $-\lambda_1$ , d.h.

$$Lw^\pm = -\lambda_1 w^\pm.$$

Da  $w$  als Eigenfunktion nicht identisch verschwinden kann, sei o.B.d.A.  $w^+ \neq 0$ . Dann ist die Menge

$$N := \{x \in U \mid w^+(x) = 0\}$$

eine echte Teilmenge von  $U$ . Sei  $x \in N$ . Wähle ein  $R > 0$  klein genug, dass  $\bar{B}(x, R) \subset U$  ist. Da  $w^+ \in C^\infty(\bar{B}(x, R))$  in  $x$  sein Minimum annimmt, folgt aus dem Maximumprinzip, dass  $w^+ \equiv 0$  auf  $\bar{B}(x, R)$ , also liegt der Ball ganz in  $N$ . Die Menge  $N$  ist somit offen. Da  $w^+$  stetig ist, muss  $N$  überdies abgeschlossen sein – also ist  $N = \emptyset$ . Und wieder dient die Stetigkeit von  $w$  als Argument:  $w$  wird nirgends null, also ist  $w$  strikt positiv. ✓

zu 3. Wäre die Vielfachheit von  $\lambda_1$  mindestens gleich 2, so könnten wir uns zwei Eigenfunktionen  $w, w'$  zum Eigenwert  $-\lambda_1$  wählen, die  $L^2$ -orthogonal zueinander sind. Betrachten wir jedoch die  $H^1$ -Funktion  $w \cdot w'$ , so sagt uns Punkt 4, dass diese Funktion o.B.d.A. strikt positiv ist. Damit erhalten wir die Ungleichung

$$0 = (w, w')_{L^2(U)} = \int_U ww' \, dx > 0. \quad \zeta$$

□



# A. Anhang

## Differentiation unter dem Integralzeichen

### Satz A.1

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, sei  $F : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  ist die Funktion  $t \mapsto F(x, t)$  auf ganz  $I$  differenzierbar;
2. Für alle  $t \in I$  ist die Funktion  $x \mapsto F(x, t)$  auf ganz  $\mathbb{R}^n$  integrierbar;
3. Es gibt eine Funktion  $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$  derart, dass  $|\frac{\partial F}{\partial t}(x, t)| \leq G(x)$ .

Dann ist  $f(t) := \int_{\mathbb{R}^n} F(x, t) dx$  differenzierbar und es gilt

$$f'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx.$$

## Green'sche Formel

### Satz A.2

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen mit stückweise glattem Rand. Seien  $u, v \in C^2(\bar{U})$  mit  $\text{supp } u \cap \text{supp } v$  kompakt. Sei  $\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$  das äußere Einheitsnormalenfeld von  $\partial U$ . Dann gilt:

$$\int_U u(x) \Delta v(x) dx = - \int_U \langle Du(x), Dv(x) \rangle dx + \int_{\partial U} u(x) \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) dS(x).$$

## Glättungsoperatoren

### Definition A.3

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Definiere die Funktion  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\eta(x) := \begin{cases} C(n) \cdot e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

wobei die dimensionsabhängige Konstante  $C(n) > 0$  so gewählt ist, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = \int_{\bar{B}(0,1)} \eta(x) dx = 1.$$

Man überprüft schnell, dass  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Für  $\varepsilon > 0$  setze

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Offenbar ist  $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x) dx = 1$ .

Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ . Definiere in jedem  $x \in U_\varepsilon := \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$  die Funktion

$$f_\varepsilon(x) := \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

### Proposition A.4

1. Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist  $f_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ .

2. Für fast alle  $x \in U$  gilt

$$f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} f(x).$$

3. Ist  $f \in L^2(U)$ , so konvergiert  $f_\varepsilon \rightarrow f$  in  $L^2(U)$ .

*Beweis.*

1. Für festes  $x \in U$  ist  $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)f(y)$  integrierbar; und für festes  $x \in U$  ist  $x \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)f(y)$  glatt. Ebenso sind alle (auch höhere) Ableitungen von  $x \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)f(y)$  nach den  $x_i$  integrierbar und durch  $c \cdot |f(y)| \cdot \chi_{\text{supp } \eta_\varepsilon}$  abschätzbar.

Mit A.1 folgt dann die Behauptung.

2. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 |f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy - f(x) \right| \\
 &= \left| \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy - f(x) \cdot \int_U \eta_\varepsilon(x-y) dy \right| \\
 &= \left| \int_U \eta_\varepsilon(x-y) (f(y) - f(x)) dy \right| \\
 &\leq \int_U \eta_\varepsilon(x-y) |f(y) - f(x)| dy \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \underbrace{\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}_{\leq \sup \eta} |f(y) - f(x)| dy \\
 &\leq c(n) \cdot \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| dy,
 \end{aligned}$$

wobei  $c(n)$  nicht von  $\varepsilon$  abhängt, während nach dem Lebesgue'schen Differentiationsatz das Mittelwertintegral für fast alle  $x$  gegen 0 konvergiert, wenn  $\varepsilon \searrow 0$ .

3. ohne Beweis.

□

## Satz von Lax-Milgram

### Satz A.5

Sei  $\mathcal{H}$  ein reeller Hilbertraum. Sei  $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear. Ferner gebe es Konstanten  $\alpha, \beta > 0$  derart, dass für alle  $u, v \in \mathcal{H}$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Beschränktheit:  $|B(u, v)| \leq \alpha \cdot \|u\| \cdot \|v\|$ ;
2. Koerzivität:  $B(u, u) \geq \beta \|u\|^2$ .

Dann existiert für jedes beschränkte lineare Funktional  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  genau ein  $u \in \mathcal{H}$ , so dass für alle  $v \in \mathcal{H}$  gilt:

$$f(v) = B(u, v).$$

**Bemerkung A.6**

Ist  $B$  symmetrisch, so definiert  $B$  ein neues Skalarprodukt, dessen Norm zu  $\|\cdot\|$  äquivalent ist. Damit ist  $(\mathcal{H}, B)$  ebenfalls ein Hilbertraum, und die Aussage von Lax-Milgram ist die des Riesz'schen Darstellungssatzes.

*Beweis von Satz A.5..*

1. *Eindeutigkeit:* Seien  $u_0, u_1 \in \mathcal{H}$  so, dass  $f(v) = B(u_i, v)$  für alle  $v$  und  $i \in \{1, 2\}$ . Für  $v = u_1 - u_0$  gilt dann:

$$\begin{aligned} \beta\|v\|^2 &\leq B(v, v) \\ &= B(u_1, v) - B(u_0, v) \\ &= f(v) - f(v) \\ &= 0, \end{aligned}$$

also  $v = 0$ . ✓

2. *Existenz:*

- a) Für festes  $u \in \mathcal{H}$  ist die Abbildung  $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  vermöge  $v \mapsto B(u, v)$  beschränkt und linear. Nach Riesz existiert darum genau ein  $w \in \mathcal{H}$  derart, dass

$$B(u, v) = (w, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Schreibe  $w =: S(u)$ .

- b) Die Abbildung  $S$  ist linear, denn für alle  $v \in \mathcal{H}$  gilt:

$$\begin{aligned} (S(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) &= B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) \\ &= \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v) \\ &= \lambda_1 (S(u_1), v) + \lambda_2 (S(u_2), v) \\ &= (\lambda_1 S(u_1) + \lambda_2 S(u_2), v). \end{aligned}$$

Ferner ist  $S$  beschränkt, da

$$\begin{aligned} \alpha\|u\| \cdot \|S(u)\| &\geq B(u, S(u)) \\ &= (S(u), S(u)) \\ &= \|S(u)\|^2 \\ \Rightarrow \|S(u)\| &\leq \alpha\|u\|. \end{aligned}$$

- c) Wir zeigen, dass  $S(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$  abgeschlossen ist. Dazu bemerken wir zunächst, dass für alle  $u \in \mathcal{H}$  gilt:

$$\begin{aligned} \beta\|u\|^2 &\leq B(u, u) \\ &= (S(u), u) \\ &\leq \|S(u)\| \cdot \|u\| \\ \Rightarrow \|u\| &\leq \frac{1}{\beta}\|S(u)\|. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Sei nun  $\{u_i\}$  eine Folge in  $\mathcal{H}$  mit  $S(u_i) \rightarrow y \in \mathcal{H}$ . Nun ist  $\{S(u_i)\}$  beschränkt, und wegen (A.1) ist dann auch  $\{u_i\}$  beschränkt. Damit enthält  $\{u_i\}$  eine schwach konvergente Teilfolge (die wir ebenfalls  $\{u_i\}$  nennen) mit dem schwachen Grenzwert  $x \in \mathcal{H}$ . Die Folge  $\{S(u_i)\}$  konvergiert dann schwach gegen  $S(x)$ , und da wir den Grenzwert von  $\{S(u_i)\}$  bereits als  $y$  kennen, wissen wir, dass

$$y = S(x) \in S(\mathcal{H})$$

liegen muss.

- d) Wir zeigen, dass  $S$  surjektiv ist. Wenn  $S$  nicht surjektiv wäre, dann gäbe es ein  $x \in S(\mathcal{H})^\perp \setminus \{0\}$ . Für dieses  $x$  gilt

$$0 < \beta \|x\|^2 \leq B(x, x) = (S(x), x) = 0 \quad \zeta$$

- e) Nach Riesz gibt es zu  $f$  genau ein  $w \in \mathcal{H}$  mit

$$f(v) = (w, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Da  $S$  surjektiv ist, finden wir ein  $u \in \mathcal{H}$  mit  $S(u) = w$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} f(v) &= (w, v) \\ &= (S(u), v) \\ &= B(u, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

□

## Sobolew-Räume

### Definition A.7

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Für  $u, v \in C^\infty(U)$  und  $k \in \mathbb{N}$  setze

$$(u, v)_{H^k(U)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U D^\alpha u(x) \cdot D^\alpha v(x) dx,$$

falls die Integrale existieren. Setze ferner

$$\|u\|_{H^k(U)}^2 := (u, u)_{H^k(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(U)}^2 \geq \|u\|_{L^2(U)}^2.$$

Definiere nun die **Sobolew-Räume**

$H^k(U) :=$  Vervollständigung von  $\{u \in C^\infty(U) \mid \|u\|_{H^k(U)} < \infty\}$  bzgl.  $\|\cdot\|_{H^k(U)}$ ;

$H_0^k(U) :=$  Vervollständigung von  $C_c^\infty(U)$  bzgl.  $\|\cdot\|_{H^k(U)}$ .

## A. Anhang

Die so definierten  $H^k(U)$ ,  $H_0^k(U)$  sind separable Hilberträume mit dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_{H^k(U)}$ .

### Beispiel A.8

Es gilt  $H^0(U) = H_0^0(U) = L^2(U)$ .

### Bemerkung A.9

Der Raum  $C_c^\infty(U)$  liegt dicht in  $H_0^k(U)$ . Ferner liegt  $C^\infty(\bar{U})$  dicht in  $H^k(U)$ , falls  $\partial U$  glatt ist.

### Bemerkung A.10

Für alle  $u \in C^\infty(U)$  und  $k_1 < k_2$  gilt

$$\|u\|_{H^{k_1}(U)} \leq \|u\|_{H^{k_2}(U)}.$$

Damit besitzt die Identität

$$\text{Id} : C_c^\infty(U) \rightarrow C_c^\infty(U)$$

eine eindeutige beschränkte lineare Fortsetzung  $H_0^{k_2}(U) \hookrightarrow H_0^{k_1}(U)$ . Wir schreiben:

$$H_0^{k_2}(U) \subset H_0^{k_1}(U).$$

Auf dieselbe Weise fassen wir  $H^{k_2}(U)$  als Teilmenge von  $H^{k_1}(U)$  auf. Wir erhalten die Inklusionen

$$\begin{aligned} L^2(U) &= H^0(U) \supset H^1(U) \supset H^2(U) \supset \dots \supset C^\infty(\bar{U}) \\ &\quad \parallel \quad \cup \quad \cup \quad \quad \quad \cup \\ L^2(U) &= H_0^0(U) \supset H_0^1(U) \supset H_0^2(U) \supset \dots \supset C_c^\infty(U) \end{aligned}$$

### Bemerkung A.11

Für alle  $u \in C_c^\infty(U)$  gilt

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{H^k(U)} \leq \|u\|_{H^{k+1}(U)}.$$

Deshalb besitzt der Ableitungsoperator

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C_c^\infty(U) \rightarrow C_c^\infty(U)$$

eine eindeutige beschränkte lineare Fortsetzung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : H_0^{k+1}(U) \rightarrow H_0^k(U).$$

Ähnlich können wir den Ableitungsoperator auch zu

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : H^{k+1}(U) \rightarrow H^k(U)$$

fortsetzen.

### Definition A.12

Wir setzen

$$H^{-1}(U) := H_0^1(U)^* = \{\text{beschränkte lineare Funktionale } H_0^1(U) \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

### Bemerkung A.13

Zu  $f \in L^2(U)$  betrachte das lineare Funktional

$$l_f : H_0^1(U) \subset L^2(U) \rightarrow \mathbb{R}, \\ v \mapsto (f, v)_{L^2(U)}.$$

Die  $H^{-1}$ -Norm von  $l_f$  definieren wir einfach als Operatornorm. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|l_f\|_{H^{-1}(U)} &= \sup_{\substack{v \in H_0^1(U) \\ \|v\|_{H^1(U)}=1}} |l_f(v)| \\ &= \sup_{\substack{v \in H_0^1(U) \\ \|v\|_{H^1(U)}=1}} |(f, v)_{L^2(U)}| \\ &\leq \sup_{\substack{v \in H_0^1(U) \\ \|v\|_{H^1(U)}=1}} \|f\|_{L^2(U)} \cdot \underbrace{\|v\|_{L^2(U)}}_{\leq \|v\|_{H^1(U)}=1} \\ &\leq \|f\|_{L^2(U)}. \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir eine beschränkte stetige Einbettung  $L^2(U) \hookrightarrow H^{-1}(U)$ . Wir können also  $L^2(U)$  als Teilmenge von  $H^{-1}(U)$  auffassen und schreiben fortan  $f$  statt  $l_f$ .

**Bemerkung A.14**

Sei  $f \in C_c^\infty(U)$ . Im Folgenden bilden wir das Supremum über alle  $v \in H_0^1(U)$  mit  $\|v\|_{H^1(U)} = 1$ :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{H^{-1}(U)} &= \sup_v \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}, v \right)_{L^2(U)} \right| \\ &= \sup_v \left| \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i} v \, dx \right| \\ &= \sup_v \left| - \int_U f \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \right| \\ &\leq \sup_v \left( \|f\|_{L^2(U)} \cdot \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(U)} \right) \\ &\leq \sup_v (\|f\|_{L^2(U)} \cdot \|v\|_{H^1(U)}) \\ &= \|f\|_{L^2(U)}. \end{aligned}$$

Der Ableitungsoperator  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  besitzt also eine eindeutige beschränkte lineare Fortsetzung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : L^2(U) \rightarrow H^{-1}(U).$$

Ist ferner  $a \in C^1(U) \cap L^\infty(U)$  und  $Da \in L^\infty(U)$ , dann ist für alle  $v$  wie oben:

$$\begin{aligned} \left| \left( a \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}, v \right)_{L^2(U)} \right| &= \left| \int_U f \frac{\partial(av)}{\partial x_i} \, dx \right| \\ &= \left| \int_U f \left( \frac{\partial a}{\partial x_i} v + a \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \, dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(U)} \cdot (\|a_{x_i} v\|_{L^2(U)} + \|av_{x_i}\|_{L^2(U)}) \\ &\leq \|f\|_{L^2(U)} \cdot (\|a_{x_i}\|_{L^\infty(U)} \|v\|_{L^2(U)} + \|a\|_{L^\infty(U)} \|v_{x_i}\|_{L^2(U)}) \\ &\leq \|f\|_{L^2(U)} \cdot c \cdot \|v\|_{H^1(U)} \\ &= c \|f\|_{L^2(U)}, \end{aligned}$$

also

$$\left\| a \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{H^{-1}(U)} \leq c \|f\|_{L^2(U)}.$$

Somit besitzt auch  $a \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$  eine eindeutige beschränkte lineare Fortsetzung

$$a \frac{\partial}{\partial x_i} : L^2(U) \rightarrow H^{-1}(U).$$



**Satz A.15 (Spursatz)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit glattem Rand. Dann besitzt die Einschränkung

$$\begin{aligned} C^\infty(\bar{U}) &\rightarrow C^\infty(\partial U), \\ u &\mapsto u|_{\partial U} \end{aligned}$$

eine eindeutige beschränkte lineare Fortsetzung

$$T : H^1(U) \rightarrow L^2(\partial U).$$

Der Operator  $T$  heißt **Spuroperator**.

*Beweis.* Sei  $Y$  ein glattes Vektorfeld auf  $\bar{U}$  mit  $Y|_{\partial U} = \nu$  äußeres Einheitsnormalenfeld. Sei  $u \in C^\infty(\bar{U})$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\partial U)}^2 &= \int_{\partial U} u^2 dS \\ &= \int_{\partial U} \langle u^2 \cdot Y, \nu \rangle dS \\ &= \int_U \operatorname{div}(u^2 \cdot Y) dx \quad \text{nach dem Gauß'schen Integralsatz} \\ &= \int_U (\langle \operatorname{grad}(u^2), Y \rangle + u^2 \operatorname{div} Y) dx \\ &\leq \|Y\|_{L^\infty(U)} \int_U |2u \cdot \operatorname{grad} u| dx + \|\operatorname{div} Y\|_{L^\infty(U)} \|u\|_{L^2(U)}^2 \\ &\leq c_1 \|u\|_{L^2(U)} \|Du\|_{L^2(U)} + c_2 \|u\|_{L^2(U)}^2 \\ &\leq c_3 (\|u\|_{L^2(U)}^2 + \|Du\|_{L^2(U)}^2) \\ &= c_3 \|u\|_{H^1(U)}^2. \end{aligned}$$

Da  $C^\infty(\bar{U})$  dicht in  $H^1(U)$  liegt, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung A.16**

Es gilt  $H_0^1(U) = \ker(T)$ . Die Inklusion „ $\subset$ “ lässt sich leicht ablesen, da  $C_c^\infty(U)$  dicht in  $H_0^1(U)$  liegt und für  $u \in C_c^\infty(U)$  gilt:

$$Tu = u|_{\partial U} = 0.$$

Die andere Inklusion belassen wir hier ohne Beweis.

## Kompakte Operatoren

### Definition A.17

Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume. Ein beschränkter linearer Operator  $K : X \rightarrow Y$  heißt **kompakt**, falls für jede beschränkte Folge  $(x_k)_k \subset X$  die Bildfolge  $(Kx_k)_k$  eine in  $Y$  konvergente Teilfolge besitzt.

### Beispiel A.18

Operatoren mit endlichdimensionalem Bild sind kompakt.

### Bemerkung A.19

Für beschränkte lineare Operatoren  $L : X \rightarrow Y$  gilt:

1. Konvergiert die Folge  $(x_k)_k \subset X$  gegen  $x \in X$ , so konvergiert  $Lx_k$  gegen  $Lx \in Y$ .
2. Konvergiert  $x_k$  schwach gegen  $x$ , so konvergiert  $Lx_k$  schwach gegen  $Lx$ .

Für kompakte Operatoren folgt aus der schwachen Konvergenz bereits die herkömmliche Konvergenz der Bildfolge:

$$(x_k \rightharpoonup x) \Rightarrow (Kx_k \rightarrow Kx).$$

### Lemma A.20

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Sei  $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  kompakt. Dann ist auch  $K^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  kompakt.

*Beweis.* Sei  $(x_k)_k \subset \mathcal{H}$  beschränkt. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann  $x_k \rightharpoonup x \in \mathcal{H}$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \|K^*x_k - K^*x\|^2 &= (K^*(x_k - x), K^*(x_k - x)) \\ &= (KK^*(x_k - x), x_k - x) \\ &\leq \|KK^*(x_k - x)\| \cdot \|x_k - x\|. \end{aligned}$$

Da  $(x_k - x) \rightarrow 0$ , geht auch  $K^*(x_k - x) \rightarrow 0$ . Da  $K$  kompakt ist, folgt daraus bereits  $KK^*(x_k - x) \rightarrow 0$ , und da  $\|x_k - x\|$  beschränkt ist, erhalten wir

$$\|K^*x_k - K^*x\|^2 \rightarrow 0,$$

also  $K^*x_k \rightarrow K^*x$ . □

### Satz A.21 (Eigenschaften kompakter Operatoren)

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Sei  $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  kompakt. Dann gilt:

1.  $\dim(\ker(\text{Id} + K)) < \infty$ ;
2.  $(\text{Id} + K)(\mathcal{H})$  ist abgeschlossen in  $\mathcal{H}$ ;
3.  $\text{im}(\text{Id} + K) = \ker(\text{Id} + K^*)^\perp$ ;
4.  $\ker(\text{Id} + K) = \{0\}$  genau dann, wenn  $\text{im}(\text{Id} + K) = \mathcal{H}$ ;
5.  $\dim(\ker(\text{Id} + K)) = \dim(\ker(\text{Id} + K^*))$ .

### Bemerkung A.22 (Fredholm-Alternative)

Satz A.21/4 lässt sich wie folgt umformulieren: Entweder besitzt  $u + Ku = f$  für jedes  $f \in \mathcal{H}$  eine Lösung, oder die zugehörige homogene Gleichung  $u + Ku = 0$  besitzt eine nichttriviale Lösung. Damit vermittelt A.21/4 zwischen Eindeutigkeits- und Existenzaussagen.

### Satz A.23 (Rellich-Kondrakov)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist die Einbettung

$$H^{k+1}(U) \hookrightarrow H^k(U)$$

kompakt.

**Satz A.24 (Sobolew, Rellich-Kondrakov)**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit glattem Rand. Dann lässt sich die Identität auf  $C^\infty(\bar{U})$  in eindeutiger Weise zu einer beschränkten Einbettung

$$H^k(U) \hookrightarrow C^{k - [\frac{n}{2}] - 1}(\bar{U})$$

fortsetzen. Diese Einbettung ist kompakt.

**Bemerkung A.25**

Die beschränkte Einbettbarkeit in Satz A.24 ist äquivalent zur Abschätzung

$$\|u\|_{C^{k - [\frac{n}{2}] - 1}(U)} \leq C \cdot \|u\|_{H^k(U)} \quad \forall u \in C^\infty(\bar{U}),$$

wobei die  $C^\ell$ -Norm definiert ist durch

$$\|u\|_{C^\ell(U)} := \max_{|\alpha| \leq \ell} \sup_{\bar{U}} |D^\alpha u|.$$

**Definition A.26**

Sei  $\mathcal{H}$  ein  $\mathbb{K}$ -Hilbertraum,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Sei  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein beschränkter linearer Operator. Dann heißt

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists u \in \mathcal{H} \setminus \{0\} : Au = \lambda u\}$$

das **Punktspektrum**,

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid A - \lambda \text{Id} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ ist bijektiv}\}$$

die **Resolventenmenge** und

$$\sigma(A) := \mathcal{H} \setminus \rho(A)$$

das **Spektrum von  $A$** .

**Bemerkung A.27**

Offensichtlich gilt  $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$  für jedes  $A$ . Ist  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , so gilt sogar  $\sigma_p(A) = \sigma(A)$ . Für  $\dim \mathcal{H} = \infty$  ist jedoch das Punktspektrum im Allgemeinen eine echte Teilmenge des Spektrums.

**Beispiel A.28**

Sei  $\mathcal{H} = \ell^2$ . Der Operator  $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  sei durch  $A(e_i) = e_{i+1}$  gegeben. Dieser Operator ist beschränkt, linear und injektiv, aber nicht surjektiv. Damit ist  $0 \in \sigma(A)$ . Wie man leicht sieht, liegt  $0$  hingegen nicht in  $\sigma_p(A)$ .

**Satz A.29**

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit  $\dim \mathcal{H} = \infty$ . Sei  $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  kompakt. Dann gilt:

1.  $0 \in \sigma(K)$ ;
2.  $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ ;
3. Entweder ist  $\#\sigma(K) < \infty$ , oder  $\sigma(K) \setminus \{0\} = \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  mit  $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

*Beweis.*

zu 1. Wäre  $0 \in \rho(K)$ , so wäre  $K$  bijektiv. Damit wäre  $K^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  beschränkt und linear, weshalb wiederum die Identität  $\text{Id} = K \circ K^{-1}$  kompakt sein müsste – ist sie aber nicht.  $\zeta$

zu 2. Sei  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \notin \sigma_p(K)$ . Wir wollen zeigen, dass  $\lambda \in \rho(K)$ . Wegen  $\lambda \notin \sigma_p(K)$  ist  $\ker(K - \lambda \text{Id}) = \{0\}$ , also ist  $K - \lambda \text{Id} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  injektiv. Wir schreiben

$$K - \lambda \text{Id} = -\lambda \left( \text{Id} - \frac{1}{\lambda} K \right)$$

und sehen nun auch, dass  $\text{Id} - \frac{1}{\lambda} K$  injektiv ist. Wegen Satz A.21/4 ist  $\text{Id} - \frac{1}{\lambda} K$  (und damit auch  $K - \lambda \text{Id}$ ) auch surjektiv.  $\checkmark$

zu 3. Sei  $\sigma(K)$  unendlich. Seien  $\lambda_k \in \sigma(K) \setminus \{0\}$  paarweise verschieden mit  $\lambda_k \rightarrow \lambda \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ . Wir wollen zeigen, dass  $\lambda = 0$  sein muss.

Da Spektrum und Punktspektrum (bis auf die  $0$ ) identisch sind, finden wir für alle  $k$  ein  $v_k \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  mit  $K v_k = \lambda_k v_k$ . Diese  $v_k$  sind linear unabhängig, da sie zu verschiedenen Eigenwerten gehören. Setze nun

$$\mathcal{H}_k := \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathcal{H}.$$

## A. Anhang

Da die  $v_k$  zu paarweise verschiedenen Eigenwerten gehören, sind sie linear unabhängig; und deshalb ist  $\mathcal{H}_k \subsetneq \mathcal{H}_{k+1}$  für alle  $k$ . Für  $v = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j \in \mathcal{H}_k$ ,  $k \geq 2$  gilt

$$\begin{aligned} (K - \lambda_k \text{Id})v &= \alpha_k (K - \lambda_k \text{Id})v_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j (K - \lambda_k \text{Id})v_j \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \underbrace{(K - \lambda_k \text{Id})v_j}_{\in \mathcal{H}_{k-1}} \in \mathcal{H}_{k-1}, \end{aligned}$$

da die  $v_j$  Eigenvektoren von  $K$  sind. Wähle nun zu jedem  $k$  ein  $u_k \in \mathcal{H}_k$  mit  $\|u_k\| = 1$ ,  $u_k \perp \mathcal{H}_{k-1}$ . Für  $l < k$  gilt dann

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Ku_k}{\lambda_k} - \frac{Ku_l}{\lambda_l} \right\| &= \left\| \underbrace{\frac{Ku_k - \lambda_k u_k}{\lambda_k}}_{\in \mathcal{H}_{k-1}} - \underbrace{\frac{Ku_l - \lambda_l u_l}{\lambda_l}}_{\in \mathcal{H}_{l-1} \subset \mathcal{H}_{k-1}} + \underbrace{u_k}_{\in \mathcal{H}_{k-1}^\perp} - \underbrace{u_l}_{\in \mathcal{H}_l \subset \mathcal{H}_{k-1}} \right\| \\ &\geq \|u_k\| \\ &= 1. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Wäre nun  $\lambda \neq 0$ , so gäbe es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  gälte:  $|\lambda_k| \geq \varepsilon$ . Damit wäre dann

$$\left\| \frac{u_k}{\lambda_k} \right\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|u_k\| = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Da  $K$  jedoch kompakt ist, müsste eine Teilfolge von  $\left(\frac{Ku_k}{\lambda_k}\right)_k$  konvergent und damit eine Cauchy-Folge sein. Gleichung (A.2) hingegen sagt uns, dass es keine Cauchy-Folge sein kann. Demnach muss  $\lambda = 0$  sein.

Da jede überabzählbare Folge auch überabzählbar viele Häufungspunkte besitzt, während jede Folge von Eigenwerten  $\lambda_k$  lediglich den Häufungspunkt 0 hat, kann es nur abzählbar viele Eigenwerte geben.

□

# Literaturverzeichnis

- [1] Evans, Lawrence C.: *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, USA (1998)
- [2] John, Fritz: *Partial Differential Equations*, 4. Aufl., Springer-Verlag, New York (1982)
- [3] Jost, Jürgen: *Partielle Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin (1998)
- [4] Königsberger, Konrad: *Analysis 1*, 6. Aufl., Springer-Verlag, Berlin (2004)





# Index

- adjungierter Differentialoperator, 131
- Bessel-Potential, 98
- Burgers-Gleichung, 109
- Cole-Hopf-Transformation, 108
- d'Alembert-Formel, 63
- Differenzenquotient, 136
- Diffusionsgleichung, 35
- Dirichlet-Energie, 33
- Dirichlet-Prinzip, 33
- Dirichlet-Problem, 115, 123
  - schwache Lösung, 125
- Divergenzform, 123
- Duhamel-Prinzip, 41
- Eigenfunktion, 155
- Eigenwert, 155
- Eindeutigkeitseigenschaft, starke, 24
- elliptische Abschätzung, 140
- elliptische PDG, 111, 121
  - innere Regularität, 140
  - Maximumprinzip, 112, 116, 119
  - Randregularität, 149
  - schwache Lösung, 125
- Euler-Poisson-Darboux-Gleichung, 64
- formal adjungierter Differentialoperator, 131
- Fouriertransformation, 89, 94
  - Eigenschaften, 95
- Fredholm-Alternative, 129, 173
- Fundamentallösung
  - Laplace-Gleichung, 8
  - Schrödinger-Gleichung, 99
  - Wärmeleitungsgleichung, 35, 98
- gleichmäßig elliptisch, 121
- gleichmäßig elliptisch, 111
- Green'sche Formel, 163
- Greenfunktion, 27
- Grundton, 158
- harmonische Funktion, 7
  - Eindeutigkeit, 24
  - Maximumprinzip, 13
  - Minimumprinzip, 14
  - Mittelwerteigenschaft, 11–12
  - Regularität, 15
- Harnack-Ungleichung, 20
- Huygens-Prinzip, 82
- innere Regularität, 140
- Kirchhoff-Formel, 76
- kompakter Operator, 172
- Korteweg-deVries-Gleichung (KdV), 2
- Laplace-Gleichung, 3, 7
  - Fundamentallösung, 8
- Laplace-Operator, 2
- Laplacetransformation, 102
- Lax-Milgram, Satz von, 165
- Legendre-Verdoppelungsformel, 78
- lineare PDG, 3
- Liouville, Satz von, 19
- Maximumprinzip
  - gleichmäßig elliptische PDG, 112, 116, 119
  - harmonische Funktion, 13
  - Wärmeleitungsgleichung, 54, 57

## Index

- Minimalflächengleichung, 2, 121
- Minimumprinzip
  - harmonische Funktion, 14
  - Wärmeleitungsgleichung, 55
- Mittelwerteigenschaft
  - harmonische Funktion, 11–12
  - Wärmeleitungsgleichung, 51
- Monge-Ampère-Gleichung, 2
  
- parabolischer Rand, 47
- parabolischer Zylinder, 47
- partielle Differentialgleichung (PDG), 1
- Plancherel, Satz von, 92, 95
- Poisson-Formel, 80
- Poisson-Gleichung, 2, 11, 15, 27
  - Darstellungsformel, 20
- Poissonkern, 32
- Punktspektrum, 174
  
- quasilineare PDG, 4
  
- Randregularität, 149
- Randwertlemma, 117
- reelles Spektrum, 134
- Regularität
  - elliptische PDG, 140, 149
  - harmonische Funktion, 15
- Rellich-Kondrakov, Satz von, 173
- Resolventenmenge, 174
  
- Schrödinger-Gleichung, 99
  - Fundamentallösung, 99
- schwache Lösung, 125
- selbstadjungierter Differentialoperator, 131
- semilineare PDG, 3
- Sobolew-Räume, 167
- Spektrum, 174
  - reelles, 134
- sphärische Mittel, 64
- Spuroperator, 171
- Spursatz, 171
- System partieller Differentialgleichungen, 2
  
- Telegrafengleichung, 101
  
- Viskosität, 109
- voll nichtlineare PDG, 4
  
- Wärmeball, 47
- Wärmeleitungsgleichung, 35, 98, 104, 105
  - Ausbreitungsgeschwindigkeit, 37
  - Eindeutigkeit, 56, 59
  - Fundamentallösung, 35, 98
  - inhomogene, 41
  - Maximumprinzip, 54, 57
  - Minimumprinzip, 55
  - Mittelwerteigenschaft, 51
  - Rückwärtseindeutigkeit, 61
- Wellengleichung, 62, 99, 105
  - Ausbreitungsgeschwindigkeit, 81, 86
  - Eindeutigkeit, 85
  - inhomogene, 82