Nichtkommutative Geometrie

Vorlesung von Prof. C. Bär

Hamburg, Sommersemester 2003
Stand vom 27. Juni 2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Supermannigfaltigkeiten

Folgender kleiner Dialog zwischen dem Physiker **P** und dem Mathematiker **M** möge die Betrachtung nichtkommutativer Strukturen motivieren:

P: Ein einfaches Modell für Fermionen ist gegeben durch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\dot{\varphi}(t)\ dt$$

für glatte Funktionen φ auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger.

M: Aber

$$\varphi\dot{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\varphi) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varphi^2$$

und daher

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\dot{\varphi}\, dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}\varphi^2\, dt = 0 \qquad (!!)$$

für alle φ. Das ergibt doch keinen Sinn!

P: Doch, denn φ ist hier antikommutierende Variable, d.h.

$$\varphi\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\varphi$$

und daher

$$\varphi\dot{\varphi} \neq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\varphi^2.$$

Was damit gemeint ist, wollen wir verstehen. Die zu Grunde liegende mathematische Struktur ist die einer Supermannigfaltigkeit, einem Raum mit der mildesten Form von Nichtkommutativität.

1.1 Superalgebra

Konvention. Alle Vektorräume haben, sofern nichts anderes gesagt wird, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ als Grundkörper. Mit $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ bezeichnen wir den Körper mit zwei Elementen.

1.1.1 Definition. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V zusammen mit einer Zerlegung $V = V_0 \oplus V_1$ heißt *Supervektorraum* (oder *$\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum*). Die *Paritätsfunktion* ist die Funktion

$$p : (V_0 \cup V_1) - \{0\} \to \mathbb{Z}_2, \qquad p(v) = i \text{ für } v \in V_i.$$

Die Elemente von $V_0 \cup V_1$ heißen *homogen*.

Konstruktionen. Seien V und W Supervektorräume.

1) $V \oplus W$ erbt eine Supervektorraumstruktur vermöge

$$(V \oplus W)_i := V_i \oplus W_i$$

2) $V \otimes W$ wird zu einem Supervektorraum durch

$$(V \otimes W)_i := \bigoplus_{i=j+k} V_j \otimes W_k.$$

3) Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt *gerade*, falls $\varphi(V_i) \subset W_i$, und *ungerade*, falls $\varphi(V_i) \subset W_{i+1}$. Setze

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V,W)_0 &:= \{\varphi : V \to W \text{ gerade}\}, \\ \mathrm{Hom}(V,W)_1 &:= \{\varphi : V \to W \text{ ungerade}\}. \end{aligned}$$

Dies macht $\mathrm{Hom}(V,W) = \mathrm{Hom}(V,W)_0 \oplus \mathrm{Hom}(V,W)_1$ zu einem Supervektorraum.

1.1.2 Definition. Eine *assoziative Superalgebra* A ist ein Supervektorraum, der gleichzeitig ein assoziativer Ring ist (mit der selben Addition), so dass die Multiplikation $A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto a \cdot b$, gerade ist, d.h. $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$ erfüllt, und für alle $a, b \in A$ und alle λ, μ aus dem Grundkörper gilt $(\lambda a) \cdot (\mu b) = \lambda\mu(a \cdot b)$.

Besitzt die Algebra ein Einselement, so ist insbesondere $p(1) = 0$.

1.1.3 Beispiel. 1) $A = \mathbb{C}$ ist eine assoziative Superalgebra über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit $A_0 = \mathbb{R}$ und $A_1 = i\mathbb{R}$.

2) Sei U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (nicht super). Dann ist die *Graßmann-Algebra* definiert durch

$$\Lambda^* U = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k U$$

mit $\wedge$ als Multiplikation. Durch

$$\begin{aligned} (\Lambda^* U)_0 &:= \bigoplus_{j \geq 0} \Lambda^{2j} U, \\ (\Lambda^* U)_1 &:= \bigoplus_{j \geq 0} \Lambda^{2j+1} U, \end{aligned}$$

wird $\Lambda^* U$ zu einer assoziativen Superalgebra.

1.1.4 Definition. Sei A eine assoziative Superalgebra. Der *Superkommutator* ist für homogene Elemente a, $b \in A$ definiert durch

$$[a,b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)}\, ba$$

und wird durch Bilinearität auf ganz $A \times A$ fortgesetzt. Die Superalgebra A heißt *superkommutativ* (oder *graduiert kommutativ*), falls $[a,b] = 0$ für alle $a, b \in A$.

Von den Beispielen ist die Graßmann-Algebra superkommutativ, $A = \mathbb{C}$ dagegen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nicht. In jeder superkommutativen Superalgebra A gilt nämlich für alle ungeraden Elemente $a \in A_1$:

$$a^2 = \frac{1}{2}[a, a] = 0.$$

Jede assoziative Algebra A über $\mathbb{K}$ kann zu einer assoziativen Superalgebra über $\mathbb{K}$ gemacht werden, indem man $A_0 := A$ und $A_1 := \{0\}$ setzt. Sie wird genau dann superkommutativ, wenn sie im üblichen Sinne kommutativ ist.

1.1.5 Definition. Sei A eine assoziative Superalgebra mit 1 über $\mathbb{K}$ und M ein Supervektorraum über $\mathbb{K}$. Sei $\cdot : A \times M \to M, (a, m) \mapsto a \cdot m$, eine Abbildung, so dass für alle $a, b \in A, m, n \in M$ und $k \in \mathbb{K}$ gilt

1) $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$
2) $a \cdot (b \cdot m) = (a \cdot b) \cdot m$
3) $a \cdot (m + n) = a \cdot m + b \cdot n$
4) $1 \cdot m = m$
5) $a \cdot (km) = k(a \cdot m)$
6) $A_i \cdot M_j \subset M_{i+j}$

Dann heißt $(M, \cdot)$ ein *A-Links-Supermodul*. Analog definiert man *A-Rechts-Supermoduln*.

1.1.6 Übung. Sei A superkommutative Superalgebra und sei M ein A-Links-Supermodul. Zeige, dass durch

$$m \cdot a := (-1)^{p(a)p(m)} a \cdot m$$

für homogene $a \in A$ und $m \in M$ eine A-Rechts-Supermodulstruktur auf M definiert wird. Lediglich Axiom (2) erfordert eine kleine Rechnung. (Beachte, dass A als superkommutativ vorausgesetzt wird.)

1.1.7 Definition. Sei A eine superkommutative Superalgebra und seien M, N A-Links-Supermoduln. Eine homogene (d.h. gerade oder ungerade) $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\varphi : M \to N$ heißt *graduiert linear über A*, falls für alle homogenen $a \in A$ und $m \in M$ gilt

$$\varphi(am) = (-1)^{p(a)p(\varphi)} a\varphi(m) .$$

Eine inhomogene $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\varphi : M \to N$ heißt graduiert linear, falls ihre homogenen Bestandteile es sind.

1.1.8 Notation. Sind M, N A-Links-Supermoduln, so bezeichne

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(M, N) &:= \{\varphi : M \to N \,|\, \varphi \text{ graduiert linear}\}, \\ \mathrm{End}_A(M) &:= \mathrm{Hom}_A(M, M). \end{aligned}$$

1.1.9 Beispiel. Ist $b \in A$ fest, so ist

$$L_b : M \to M \ , \quad L_b(m) = bm$$

eine graduiert lineare Abbildung. Denn ist b homogen, so auch L_b und $p(L_b) = p(b)$:

$$\begin{aligned} L_b(am) = b(am) = (b \cdot a)m = (-1)^{p(b)p(a)}(a \cdot b)m = (-1)^{p(a)p(b)}a(bm) \\ = (-1)^{p(a)p(b)}aL_b(m). \end{aligned}$$

1.1.10 Definition. Sei A eine superkommutative Superalgebra. Ein A-Links-Supermodul heißt *frei vom Rang $r|s$ über A*, falls M eine A-Basis $e_1, \ldots, e_{r+s}$ besitzt mit $e_1, \ldots, e_r \in M_0$ und $e_{r+1}, \ldots, e_{r+s} \in M_1$. Eine solche A-Basis nennen wir *angepasst* . Dass $e_1, \ldots, e_{r+s}$ eine A-Basis bilden, bedeutet, dass es zu jedem $x \in M$ eindeutige $a^1, \ldots, a^{r+s} \in A$ gibt mit

$$x = \sum_{j=1}^{r+s} a^j \, e_j \; .$$

1.1.11 Proposition. *Der Rang $r|s$ eines freien A-Supermoduls ist eindeutig definiert und hängt nicht ab von der Wahl der angepassten Basis.*

Beweis siehe [ConGro, S. 44f]. □

Seien M und N freie A-Links-Supermoduln vom Rang $m|n$ bzw. $r|s$, sei $\varphi : M \to N$ graduiert linear. Dann ist bzgl. der zugehörigen A-Rechts-Supermodulstrukturen die Abbildung φ im üblichen Sinn linear, denn

$$\begin{aligned}
\varphi\,(ma) &= (-1)^{p(m)p(a)} \quad \varphi(am) \\
&= (-1)^{p(m)p(a)+p(\varphi)p(a)} \quad a\varphi(m) \\
&= (-1)^{p(m)p(a)+p(\varphi)p(a)+p(a)p(\varphi(m))} \quad \varphi(m)\,a \\
&= \varphi(m)\,a\;,
\end{aligned}$$

da $p(\varphi(m)) = p(\varphi) + p(m)$.
Seien nun $e_1, \ldots, e_{m+n}$ bzw. $f_1, \ldots, f_{r+s}$ angepasste Basen von M bzw. N. Definiere $a^i_j \in A$ durch

$$\varphi\,(e_j) = \sum_{i=1}^{r+s} f_i \, a^i_j \; .$$

Schreibe $x \in M$ in der Form $x = \sum\limits_{j=1}^{m+n} e_j x^j$ und $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{r+s} f_i y^i$. Dann gilt

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m+n} \varphi(e_j)\, x^j = \sum_{j=1}^{m+n} \sum_{i=1}^{r+s} f_i a^i_j x^j \qquad \text{also} \qquad y^i = \sum_{j=1}^{m+n} a^i_j x^j \; .$$

In Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{r+s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_{m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{r+s}_1 & \cdots & a^{r+s}_{m+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{m+n} \end{pmatrix} .$$

Also wird φ bzgl. der gewählten angepassten Basen und der Rechtskoordinaten y^i und x^j wie bei der klassischen linearen Algebra durch die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_{m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{r+s}_1 & \cdots & a^{r+s}_{m+n} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} L_{00} & L_{01} \\ \hline L_{10} & L_{11} \end{array}\right) \begin{array}{l} \}r \\ \}s \end{array}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{\phantom{L_{00}}}_{m}\;\underbrace{\phantom{L_{01}}}_{n}$$

dargestellt. Für homogenes φ haben alle Einträge von L_{ij} die Parität $i + j + p(\varphi)$.

Somit ist es sinnvoll, eine Matrix in Blockform

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix}$$

homogen mit der Parität $p(L)$ zu nennen, falls die Elemente in L_{ij} Parität $i+j+p(L)$ haben. Die Menge aller dieser Blockmatrizen bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Mat}_A(m|n, r|s)$$

und falls $m = r$ und $n = s$ auch mit

$$\mathrm{Mat}_A(m|n)$$

1.1.12 Bemerkung. $\mathrm{Mat}_A(m|n, r|s)$ erbt von $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ eine A-Links-Supermodulstruktur, wobei

$$aL = \begin{pmatrix} aL_{00} & aL_{01} \\ (-1)^{p(a)} aL_{10} & (-1)^{p(a)} aL_{11} \end{pmatrix},$$

denn

$$(a \cdot \varphi)(e_j) = \sum_{i=1}^{r+s} a \cdot f_i \cdot a^i_j = \sum_{i=1}^{r+s} (-1)^{p(a)p(f_i)} f_i \cdot a \cdot a^i_j.$$

1.1.13 Definition. Für eine homogene Matrix $L \in \mathrm{Mat}_A(m|n)$ definieren wir die *Superspur* durch

$$\mathrm{Str}(L) := \mathrm{tr}(L_{00}) - (-1)^{p(L)} \,\mathrm{tr}(L_{11}).$$

Für beliebige Matrix $L \in \mathrm{Mat}_A(m|n)$ schreiben wir $L = L_+ + L_-$ mit homogenen $L_\pm$ und wir setzen

$$\mathrm{Str}(L) := \mathrm{Str}(L_+) + \mathrm{Str}(L_-).$$

1.1.14 Proposition. *Sei A eine superkommutative Superalgebra. Die Superspur verschwindet auf Superkommutatoren, d.h. für K, $L \in \mathrm{Mat}_A(r|s)$ gilt*

$$\mathrm{Str}([K, L]) = 0.$$

Beweis. Es genügt, homogene K, $L \in \mathrm{Mat}_A(r|s)$ zu betrachten.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Str}([K, L]) \\
&= \mathrm{Str}\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} K_{00}L_{00} + K_{01}L_{10} + \\ \quad -(-1)^{p(K)p(L)}(L_{00}K_{00} + L_{01}K_{10}) \end{array} & * \\ \hline * & \begin{array}{l} K_{10}L_{01} + K_{11}L_{11} + \\ \quad -(-1)^{p(K)p(L)}(L_{10}K_{01} + L_{11}K_{11}) \end{array} \end{array}\right) \\
&= \mathrm{tr}(K_{00}L_{00} - (-1)^{p(K)p(L)} L_{00}K_{00}) \\
&\quad + \mathrm{tr}(K_{01}L_{10} - (-1)^{p(K)p(L)+p(KL)} L_{10}K_{01}) \\
&\quad + \mathrm{tr}((-1)^{p(K)p(L)+1} L_{01}K_{10} - (-1)^{p(KL)} K_{10}L_{01}) \\
&\quad -(-1)^{p(KL)} \,\mathrm{tr}(K_{11}L_{11} - (-1)^{p(K)p(L)} L_{11}K_{11})
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\mathrm{tr}(K_{00}L_{00} - (-1)^{p(K)p(L)} L_{00}K_{00}) = \sum_{i,j=1}^{r} (k^j_i l^i_j - \underbrace{(-1)^{p(k^j_i)p(l^i_j)} l^i_j k^j_i}_{=k^j_i l^i_j, \text{ da } A \text{ superkomm.}}) = 0.$$

Analog sieht man, dass die anderen drei Spuren ebenfalls verschwinden. $\square$

1.1.15 Definition. Sei A eine superkommutative Superalgebra und sei M ein freier A-Links-Supermodul vom Rang $r|s$. Ist $\varphi \in \operatorname{End}_A(M)$, so definieren wir die *Superspur von φ* durch

$$\operatorname{Str}(\varphi) := \operatorname{Str}(L),$$

wobei L die darstellende Matrix von φ bzgl. einer angepassten Basis sei.

1.1.16 Proposition. *Die Superspur von $\varphi \in \operatorname{End}_A(M)$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der angepassten Basis.*

$$\operatorname{Str} : \operatorname{End}_A(M) \to A$$

ist A-linear (d.h. graduiert linear mit $p(\operatorname{Str}) = 0$). Ferner gilt für alle φ, $\psi \in \operatorname{End}_A(M)$:

$$\operatorname{Str}([\varphi, \psi]) = 0.$$

Beweis.

a) Seien $e_1, \dots, e_{r+s}$ und $\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_{r+s}$ angepasste Basen und L bzw. $\widetilde{L}$ die zugehörigen darstellenden Matrizen von φ.

Schreibe $\widetilde{e}_j = \sum_{i=1}^{r+s} e_i t^i_j, \quad t^i_j \in A$, und setze $T := (t^i_j) \in \operatorname{Mat}_A(r|s)$.

Da beide Basen angepasst sind, ist T eine gerade Matrix.

Einerseits gilt

$$\varphi(\widetilde{e}_j) = \sum_{i=1}^{r+s} \widetilde{e}_i \widetilde{a}^i_j = \sum_{i,k} e_k t^k_i \widetilde{a}^i_j$$

und andererseits

$$\varphi(\widetilde{e}_j) = \varphi\Big(\sum_i e_i t^i_j\Big) = \sum_{i,k} e_k a^k_i t^i_j,$$

also ist $T\widetilde{L} = LT$.

Da man analog e_j durch die $\widetilde{e}_i$ ausdrücken kann, ist T invertierbar und daher $\widetilde{L} = T^{-1}LT$. Es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Str}(\widetilde{L}) = \operatorname{Str}(T^{-1}LT) &= \operatorname{Str}\big(TT^{-1}L \quad + \underbrace{[T^{-1}L, T]}_{\substack{\text{Superkommutator} \\ = \text{ Kommutator,} \\ \text{da } p(T)=0}} \big) \\ &= \operatorname{Str}(L).\end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{Str}(L)$ wohldefiniert.

b) Die Additivität von Str ist klar. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Str}(a\varphi) = \operatorname{Str}(aL) = \operatorname{Str}&\begin{pmatrix} aL_{00} & aL_{01} \\ (-1)^{p(a)} aL_{10} & (-1)^{p(a)} aL_{11} \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{tr}(aL_{00}) - (-1)^{p(aL)} \operatorname{tr}\big((-1)^{p(a)} aL_{11}\big) \\ &= a \operatorname{tr}(L_{00}) - (-1)^{p(L)} a \operatorname{tr}(L_{11}) \\ &= a \operatorname{Str}(L).\end{aligned}$$

c) $\mathrm{Str}([\varphi, \psi]) = 0$ ist klar wegen Proposition 1.1.14.

□

Sei $A = A_0 \oplus A_1$ eine superkommutative Superalgebra und sei $\langle A_1 \rangle$ das von A_1 erzeute beidseitige Ideal in A, d.h.

$$\langle A_1 \rangle = \Big\{ \sum_j a_j b_j c_j \mid b_j \in A_1,\ a_j\, c_j \in A \Big\}.$$

Dann ist $\mathcal{A} := {}^{A}\!/\!_{\langle A_1 \rangle}$ eine kommutative Algebra.

1.1.17 Beispiel. Wir betrachten wieder die Graßmann-Algebra

$$A = \Lambda^* \mathbb{K}^n, \qquad A_0 = \bigoplus_{j \geq 0} \Lambda^{2j} \mathbb{K}^n, \qquad A_1 = \bigoplus_{j \geq 0} \Lambda^{2j+1} \mathbb{K}^n.$$

$$\Rightarrow \qquad \langle A_1 \rangle = \bigoplus_{k \geq 1} \Lambda^k \mathbb{K}^n$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{A} = \Lambda^0 \mathbb{K}^n = \mathbb{K}$$

1.1.18 Lemma. *Alle Elemente $x \in \langle A_1 \rangle$ sind nilpotent, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x^n = 0$.*
Alle Matrizen $L \in \mathrm{Mat}_A(r|s)$, deren Einträge in $\langle A_1 \rangle$ liegen, sind nilpotent.

Beweis.

a) Schreibe $x \in \langle A_1 \rangle$ in der Form $x = \sum_{j=1}^{m} a_j b_j c_j$, $\quad b_j \in A_1$ und $a_j,\, c_j \in A$, wobei a_j und c_j als homogen angenommen werden können.

Nach Ausmultiplizieren von x^{n+1} muss in jedem Summanden mindestens ein b_j doppelt auftreten, d.h. alle Summanden sind von der Form $d_1 b_j d_2 b_j d_3$ mit homogenen d_1, d_2, d_3.

Nun gilt: $\quad d_1 b_j d_2 b_j d_3 = \pm d_1 \underbrace{b_j^2}_{=0} d_2 d_3 = 0.$

b) Gilt $a_i^j \in \langle A_1 \rangle$ für alle Einträge von $L \in \mathrm{Mat}_A(r|s)$, so existiert nach a) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $(a_i^j)^N = 0$ für alle i, j.

In $L^{(r+s)^2 N}$ tritt in jedem Eintrag wenigstens ein a_i^j mindestens N-mal auf. Also $L^{(r+s)^2 N} = 0$.

□

1.1.19 Notation. $\pi : A \to \mathcal{A}$, $\quad a \mapsto a + \langle A_1 \rangle$, sei die kanonische Projektion.

1.1.20 Satz. *Eine Matrix $L \in \mathrm{Mat}_A(r|s)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\pi(L) \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(r+s)$ invertierbar ist.*

Man beachte, dass man in der kommutativen Algebra $\mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(r+s)$ den gewöhnlichen Determinatenbegriff zur Verfügung hat. Auf ganz $\mathrm{Mat}_A(r|s)$ steht dieser nicht zur Verfügung.
Beweis.

„⇒“: Klar: Sei $L \in \mathrm{Mat}_A(r|s)$ invertierbar mit Rechtsinversem $K \in \mathrm{Mat}_A(r|s)$.

$$LK = 1 \in \mathrm{Mat}_A(r|s) \quad \Rightarrow \quad \pi(L)\pi(K) = 1 \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(r+s).$$

„$\Leftarrow$“: $\pi(L) \in \mathrm{Mat}_A(r+s)$ besitze ein Rechtsinverses. Dann existiert ein $K \in \mathrm{Mat}_A(r|s)$, so dass $\pi(L)\pi(K) = 1 \in \mathrm{Mat}_A(r+s)$.

Für $B := 1 - LK \in \mathrm{Mat}_A(r|s)$ gilt dann $\pi(B) = 0$, d.h. B hat Einträge in $\langle A_1 \rangle$. Aus Lemma 1.1.18 folgt, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $B^n = 0$. Damit:

$$LK(1 + B + \cdots + B^{n-1}) = (1-B)(1 + B + \cdots + B^{n-1}) = 1 - B^n = 1.$$

Also ist $K(1 + B + \cdots + B^{n-1})$ Rechtsinverses von L.

Analog konstruiert man das Linksinverse von L.

□

1.1.21 Korollar. *Sei* $L = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_A(r|s)$ *eine* gerade *Matrix. Dann ist L genau dann invertierbar, wenn* $L_{00} \in \mathrm{Mat}_{A_0}(r)$ *und* $L_{11} \in \mathrm{Mat}_{A_0}(s)$ *invertierbar sind.*

Beweis.

$$\begin{aligned} L \text{ invertierbar} &\overset{1.1.20}{\iff} \pi(L) = \begin{pmatrix} \pi(L_{00}) & \pi(L_{01}) \\ \pi(L_{10}) & \pi(L_{11}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(L_{00}) & 0 \\ 0 & \pi(L_{11}) \end{pmatrix} \text{ invertierbar} \\ &\overset{1.1.20}{\iff} \begin{pmatrix} L_{00} & 0 \\ 0 & L_{11} \end{pmatrix} \text{ invertierbar} \\ &\iff L_{00},\ L_{11} \text{ invertierbar} \end{aligned}$$

□

1.1.22 Definition. Die Gruppe der geraden invertierbaren Matrizen

$$\mathrm{GL}_A(r|s) := \left\{ L \in \mathrm{Mat}_A(r|s) \,|\, p(L) = 0 \text{ und } L \text{ ist invertierbar} \right\}$$

heißt *allgemeine lineare Supergruppe vom Rang $r|s$*.
Für $L \in \mathrm{GL}_A(r|s)$ heißt

$$\mathrm{Sdet}(L) := \det(L_{00} - L_{01}L_{11}^{-1}L_{10}) \cdot \det(L_{11}^{-1}) \in A_0$$

Superdeterminante oder auch *Berezin-Determinante von L*.

1.1.23 Satz. *Die Superdeterminante*

$$\mathrm{Sdet} : \mathrm{GL}_A(r|s) \to A_0^\times = \mathrm{GL}_A(1|0)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus in die Einheitengruppe $A_0^\times$ von A_0.

Beweisskizze. Direkt aus der Definition folgt, dass $\mathrm{Sdet}(1) = 1$. Zu zeigen ist nur, dass $\mathrm{Sdet}(K) \cdot \mathrm{Sdet}(L) = \mathrm{Sdet}(KL)$ für alle K und L, denn dann folgt mit $\mathrm{Sdet}(1_{\mathrm{Mat}}) = \mathrm{Sdet}(KK^{-1}) = \mathrm{Sdet}(K) \cdot \mathrm{Sdet}(K^{-1})$, dass Sdet invertierbar ist in A_0 mit $\mathrm{Sdet}(K)^{-1} = \mathrm{Sdet}(K^{-1})$.
Definiere

$$G := \{L \in \mathrm{GL}_A(r|s) \,|\, \mathrm{Sdet}(KL) = \mathrm{Sdet}(K) \cdot \mathrm{Sdet}(L) \text{ für alle } K \in \mathrm{GL}_A(r|s)\}.$$

Dann wollen wir $G = \mathrm{GL}_A(r|s)$ zeigen. Dies folgt aus:

a) $G \subset \mathrm{GL}_A(r|s)$ ist Untergruppe.

b) G enthält alle Matrizen der Formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L_{10} & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_{00} & 0 \\ 0 & L_{11} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & L_{01} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei L_{01} höchstens ein nichttriviales Element enthalte.

c) Diese Matrizen erzeugen $\mathrm{GL}_A(r|s)$.

Für die Details siehe [Manin, S.166f]. ⊟

1.1.24 Definition. Ein Supervektorraum $\mathfrak{g}$ mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ heißt *Lie-Superalgebra*, falls für alle homogenen Elemente a, b, $c \in \mathfrak{g}$ gilt:

1) *Antisymmetrie:* $[a,b] = -(-1)^{p(a)p(b)}[b,a]$

2) *Jacobi-Identität:*

$$[a,[b,c]] + (-1)^{p(a)(p(b)+p(c))}[b,[c,a]] + (-1)^{p(c)(p(a)+p(b))}[c,[a,b]] = 0$$

1.1.25 Übung. Sei A eine assoziative Superalgebra. Zeige, dass A mit dem Superkommutator aus Definition 1.1.4 eine Lie-Superalgebra definiert.

1.1.26 Übung. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, X ein nichttriviales glattes Vektorfeld auf M. Betrachte folgende Operatoren auf den Differentialformen:

1) äußere Ableitung: d

2) Kontraktion mit X: ι_X

3) Lie-Ableitung nach X: $\mathcal{L}_X$

Setze $A_0 := \mathbb{R} \cdot \mathcal{L}_X$, $A_1 := \mathbb{R} \cdot d \oplus \mathbb{R} \cdot \iota_X$. Zeige, dass $A = A_0 \oplus A_1$ mit dem Superkommutator eine 3-dimensionale reelle Lie–Superalgebra definiert.

Sei A eine superkommutative Superalgebra und M ein A–Links–Supermodul. Dann bildet der Dualraum

$$M^* := \{\varphi : M \to A \,|\, \varphi \text{ graduiert linear}\}$$

wieder einen A-Links-Supermodul.
Ist N ein weiterer A-Links-Supermodul und $\varphi : M \to N$ graduiert linear, so definiere die *Adjungierte*

$$\varphi^* : N^* \to M^*, \quad \varphi^*(\chi) := (-1)^{p(\varphi)p(\chi)}\chi \circ \varphi$$

für homogene φ, χ. Die Definition für beliebige φ und χ erhält man wieder durch bilineare Fortsetzung.
Wird φ vermöge angepasster Basen $e_1, \ldots, e_{m+n}$ und $f_1, \ldots, f_{r+s}$ durch die Supermatrix

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_A(m|n, r|s)$$

dargestellt, so wird φ^* bzgl. der dualen Basen $e_1^*, \ldots, e_{m+n}^*$ und $f_1^*, \ldots, f_{r+s}^*$, d.h. $e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = f_i^*(f_j)$, dargestellt durch

$$L^{st} = \begin{pmatrix} L_{00}^t & (-1)^{p(L)+1} L_{10}^t \\ (-1)^{p(L)} L_{01}^t & L_{11}^t \end{pmatrix},$$

die *Supertransponierte* von L. Hieraus folgt im Fall $m = r$, $n = s$ direkt:

$$\operatorname{Str}(\varphi^*) = \operatorname{Str}(L^{st}) = \operatorname{Str}(L) = \operatorname{Str}(\varphi)$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sdet}(L^{st}) &= \det\left(L_{00}^t - (-1)^{p(L)+1} L_{10}^t (L_{11}^t)^{-1} (-1)^{p(L)} L_{01}^t\right) \cdot \det\left((L_{11}^t)^{-1}\right) \\
&= \det\left(L_{00}^t + L_{10}^t (L_{11}^{-1})^t L_{01}^t\right) \cdot \det\left((L_{11}^{-1})^t\right) \\
&= \det\left(L_{00} - \left((L_{11}^{-1})^t L_{01}^t\right)^t L_{10}\right) \cdot \det\left(L_{11}^{-1}\right) \\
&= \det(L_{00} - L_{01} L_{11}^{-1} L_{10}) \cdot \det(L_{11}^{-1}) \\
&= \operatorname{Sdet}(L)
\end{aligned}$$

Beachte bei dieser Rechnung, dass $(BC)^t = (-1)^{p(B)p(C)} C^t B^t$ für homogene Matrizen B, $C \in \operatorname{Mat}_A(r|s)$.

1.2 Garbentheorie

1.2.1 Definition. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{T}_X$ die Topologie von X, d.h. die Menge der offenen Teilmengen von X.
Eine *Garbe $\mathcal{G}$ auf X* ordnet jedem $U \in \mathcal{T}_X$ ein Objekt $\mathcal{G}(U)$ und jedem Paar U, $V \in \mathcal{T}_X$ mit $U \subset V$ einen Morphismus $\varrho_{U,V} : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(U)$ wie in untenstehender Tabelle zu, so dass für alle U, V, W, $U_\alpha \in \mathcal{T}_X$ mit $U \subset V \subset W$ und $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = U$ gilt:

1) $\varrho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{G}(U)}$
2) $\varrho_{U,W} = \varrho_{U,V} \circ \varrho_{V,W}$
3) *Lokale Bestimmtheit:*
Sind f, $g \in \mathcal{G}(U)$ mit $\varrho_{U_\alpha,U}(f) = \varrho_{U_\alpha,U}(g)$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$, so ist $f = g$.
4) *Zusammenkleben:*
Sind $f_\alpha \in \mathcal{G}(U_\alpha)$ vorgegeben mit $\varrho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(f_\alpha) = \varrho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta}(f_\beta)$ für alle α, $\beta \in \mathcal{A}$, dann existiert $f \in \mathcal{G}(U)$ mit $\varrho_{U_\alpha,U}(f) = f_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{G}$ Garbe von	$\mathcal{G}(U)$	$\mathcal{G}(\emptyset)$	$\varrho_{U,V} : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(U)$
abelschen Gruppen	abelsche Gruppe	$\{0\}$	Gruppenhomomorphismus
R-Moduln (R fester Ring)	R-Modul	$\{0\}$	Modulhomomorphismus
Ringen	Ring	$\{0\}$	Ringhomomorphismus
K-Algebren (K fester Körper)	K-Algebra	$\{0\}$	K-Algebrenhomom.
K-Algebren mit 1 (K fester Körper)	K-Algebren mit Eins 1_U ($\neq 0_U$, es sei denn $U = \emptyset$)	$\{0\}$	K-Algebrenhomom. mit $\varrho_{U,V}(1_V) = 1_U$
A-Moduln (A feste Algebra)	A-Modul	$\{0\}$	A-Modulhomomorphismus
$\mathcal{F}$-Moduln ($\mathcal{F}$ Garbe von Algebren)	$\mathcal{F}(U)$-Modul	$\{0\}$	additiv mit $\varrho^{\mathcal{G}}_{U,V}(a \cdot m) = \varrho^{\mathcal{F}}_{U,V}(a) \cdot \varrho^{\mathcal{G}}_{UV}(m)$
Idealen in $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ Garbe von Ringen)	Ideale in $\mathcal{F}(U)$	$\{0\}$	$\varrho^{\mathcal{G}}_{U,V} = \varrho^{\mathcal{F}}_{U,V}\big\vert_{\mathcal{G}(V)}$

1.2.2 Beispiel. 1) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\mathcal{G} := \mathcal{C}^0_X$, $\mathcal{G}(U) = \mathcal{C}^0_X(U) = C(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ stetig}\}$ mit $\varrho_{U,V} : C(V) \to C(U)$, $\varrho_{U,V}(f) = f|_U$ (die Restriktion von f auf U) ist eine Garbe von $\mathbb{R}$-Algebren mit 1.

2) X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\mathcal{G} := \mathcal{C}^\infty_X$, $\mathcal{G}(U) = C^\infty(U)$, $\varrho_{U,V}(f) = f|_U$, ist eine Garbe von $\mathbb{R}$-Algebren mit 1.

3) X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $E \to X$ ein Vektorbündel, $\mathcal{G}(U) := C^\infty(U, E) := \{$ glatte Schnitte von $E|_U \to U\}$, $\varrho_{U,V}(f) = f|_U$. $\mathcal{G}$ ist eine Garbe von $\mathcal{F}$-Moduln, wobei $\mathcal{F}$ die Garbe der glatten Funktionen ist.

4) X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{G}(U) = \mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$, $\varrho_{U,V}(f) = f|_U$, ist eine Garbe von $\mathbb{C}$-Algebren mit 1.

5) X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ abgeschlossen.
$\mathcal{F}(U) = C(U)$ ist eine Garbe von Ringen und
$\mathcal{G}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig } \mid f|_{U\cap Y} = 0\}$ ist eine Garbe von Idealen in $\mathcal{F}$.

1.2.3 Definition. Sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X und $p \in X$. Dann ist der *Halm von $\mathcal{G}$ über p* definiert durch

$$\mathcal{G}_p := \Big(\dot{\bigcup_{\substack{U \in \mathcal{T}_X \\ p \in U}}} \mathcal{G}(U) \Big) \Big/ \sim$$

wobei $\mathcal{G}(U_1) \ni f \sim g \in \mathcal{G}(U_2)$ genau dann, wenn

$$\exists U_3 \in \mathcal{T}_X \text{ mit } p \in U_3 \subset U_1 \cap U_2, \text{ so dass } \varrho_{U_3,U_1}(f) = \varrho_{U_3,U_2}(g).$$

Die Restklasse $[f]_p$ von f in $\mathcal{G}_p$ heißt *Keim von f in p*.

Der Halm $\mathcal{G}_p$ erbt die algebraische Struktur der Garbe. Ist $\mathcal{G}$ z.B. eine Garbe abelscher Gruppen, so wird vermöge

$$[f]_p + [g]_p := [f + g]_p$$

$\mathcal{G}_p$ auch zu einer abelschen Gruppe. Man überprüfe die Wohldefiniertheit dieser Addition!

1.2.4 Definition. Sei X ein topologischer Raum, seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X (vom selben algebraischen Typ). Ein *Garbenhomomorphismus* $\Psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ordnet jedem $U \in \mathcal{T}_X$ einen Morphismus $\Psi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ zu, so dass für $U, V \in \mathcal{T}_X$ mit $U \subset V$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varrho^{\mathcal{F}}_{U,V}} & \mathcal{F}(U) \\ {\scriptstyle \Psi_V}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Psi_U} \\ \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\varrho^{\mathcal{G}}_{U,V}} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

kommutiert. Hieraus sieht man leicht, dass für alle $p \in X$ ein Homomorphismus Ψ_p auf den Halmen induziert wird:

$$\Psi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p, \qquad \Psi_p\big([f]_p\big) = \big[\Psi_U(f)\big]_p.$$

1.2.5 Beispiel. Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{C}^\infty_X$. Sei ξ ein glattes Vektorfeld auf X. Definiere Ψ durch $\Psi_U(f) := \partial_\xi f$.
Dann ist Ψ ein Garbenhomomorphismus von Garben von $\mathbb{R}$-Vektorräumen, aber nicht von Garben reller Algebren, da $\partial_\xi(fg) \neq \partial_\xi f \cdot \partial_\xi g$.

1.2.6 Definition. Ein $\mathbb{K}$-*geringter Raum* besteht aus einem topologischen Raum X, einer Garbe $\mathcal{G}$ von $\mathbb{K}$-Algebren auf X sowie $\mathbb{K}$-Algebrenhomomorphismen

$$v_p : \mathcal{G}_p \to \mathbb{K} \qquad \text{für alle } p \in X.$$

Dann heißt $\mathcal{G}$ die *Strukturgarbe des $\mathbb{K}$-geringten Raumes* und v_p heißt der *Wert an der Stelle p*. Schreibe auch $v_p^{\mathcal{G}}$, um den Bezug zur Strukturgarbe zu verdeutlichen. Sind alle $\mathcal{G}(U)$ Superalgebren und die Einschränkungsmorphismen gerade, so heißt der $\mathbb{K}$-geringten Raum auch $\mathbb{K}$-*supergeringter Raum*.

1.2.7 Beispiel. 1) $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ X ein topologischer Raum, $\mathcal{G} = \mathcal{C}_X^0$, $v_p\big([f]_p\big) = f(p)$

2) $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\mathcal{G} = \mathcal{C}_X^\infty$, $v_p\big([f]_p\big) = f(p)$

3) $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$ X komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{G} = \mathcal{O}$, $v_p\big([f]_p\big) = f(p)$

1.2.8 Definition. Ein $\mathbb{K}$-geringter Raum heißt *lokal*, falls für alle $p \in X$

$$\mathfrak{m}_p := \ker v_p$$

das einzige maximale Ideal in $\mathcal{G}_p$ ist.

1.2.9 Bemerkung. Die $\mathbb{K}$-geringten Räume aus Beispiel (1.2.7) sind lokal.
Wir zeigen dies für X ein topologischer Raum mit $\mathcal{G} = \mathcal{C}_X^0$.
$\mathfrak{m}_p$ ist ein Ideal in $\mathcal{G}_p$ und $\mathfrak{m}_p \subsetneq \mathcal{G}_p$.
Sei $\mathfrak{m} \subsetneq \mathcal{G}_p$ ein Ideal in $\mathcal{G}_p$. Zu zeigen: $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_p$.
Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann existiert ein $[f]_p \in \mathfrak{m}$ mit $f(p) \neq 0$, $f \in C(U)$. Da f stetig ist, existiert eine offene Umgebung $U' \subset U$ von p, so dass $f \neq 0$ auf U'.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \frac{1}{f|_{U'}} \in C(U') \\
\Rightarrow \quad & [f]_p \left[\tfrac{1}{f|_{U'}}\right]_p = [f|_{U'}]_p \left[\tfrac{1}{f|_{U'}}\right]_p = [1]_p \\
\Rightarrow \quad & [f]_p \quad \text{invertierbar in } \mathcal{G}_p
\end{aligned}$$

Für jedes $[g]_p \in \mathcal{G}_p$ gilt dann aber $[g]_p = [g]_p[f]_p^{-1}[f]_p \in \mathfrak{m}$, d.h. $\mathfrak{m} = \mathcal{G}_p$. Widerspruch!

1.2.10 Bemerkung. Ist $(X, \mathcal{G}, v)$ ein lokaler $\mathbb{K}$-geringter Raum, so ist v durch $\mathcal{G}$ eindeutig bestimmt. Denn sind v und w Auswertungsabbildungen, so gilt wegen der Eindeutigkeit des maximalen Ideals $\mathfrak{m}_p = \ker v_p = \ker w_p$. Also induzieren v_p und w_p Isomorphismen

$$\mathcal{G}_p/\mathfrak{m}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}.$$

Demnach existiert ein $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ mit $v_p = \lambda w_p$, aber wegen $\lambda w_p(1) = v_p(1) = 1 = w_p(1)$, ist $\lambda = 1$ und also $v_p = w_p$ □

Seien X, Y topologische Räume, $\varphi : X \to Y$ stetig. Sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X. Wir setzen für $U \in \mathcal{T}_Y$

$$(\varphi_*\mathcal{G})(U) := \mathcal{G}(\varphi^{-1}(U))$$

und für $U, V \in \mathcal{T}_Y$ mit $U \subset V$

$$\varrho_{U,V}^{\varphi_*\mathcal{G}} := \varrho^{\mathcal{G}}_{\varphi^{-1}(U), \varphi^{-1}(V)}.$$

Man sieht leicht, dass hierdurch eine Garbe auf Y definiert wird.

1.2.11 Definition. Wir nennen $\varphi_*\mathcal{G}$ mit $\varrho^{\varphi_*\mathcal{G}}_{\cdot,\cdot}$ die *Bildgarbe* von $\mathcal{G}$ unter φ.

1.2.12 Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y (vom selben algebraischen Typ). Ein *Garbenmorphismus*

$$(\varphi, \Psi) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$$

besteht aus einer stetigen Abbildung $\varphi : X \to Y$ und einem Garbenhomomorphismus $\Psi : \mathcal{G} \to \varphi_*\mathcal{F}$.
Sind $(\varphi_1, \Psi_1) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ und $(\varphi_2, \Psi_2) : (Y, \mathcal{G}) \to (Z, \mathcal{H})$ Garbenmorphismen, so ist die *Komposition* der Garbenmorphismen

$$(\varphi, \Psi) = (\varphi_2, \Psi_2) \circ (\varphi_1, \Psi_1) : (X, \mathcal{F}) \to (Z, \mathcal{H})$$

gegeben durch $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ und $\Psi_{Z'} = \Psi_{1,\varphi_2^{-1}(Z')} \circ \Psi_{2,Z'}$ für $Z' \subset Z$ offen. Ein Garbenmorphismus $(\varphi, \Psi) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Garbenmorphismus $(\varphi', \Psi') : (Y, \mathcal{G}) \to (X, \mathcal{F})$ gibt mit $(\varphi', \Psi') \circ (\varphi, \Psi) = (\mathrm{id}, \mathrm{id})$ und $(\varphi, \Psi) \circ (\varphi', \Psi') = (\mathrm{id}, \mathrm{id})$. Wir nennen $(\varphi, \Psi)^{-1} := (\varphi', \Psi')$ dann auch den *inversen Garbenmorphismus*.

1.2.13 Beispiel. 1) Sei $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung, $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0_X$ und $\mathcal{G} = \mathcal{C}^0_Y$. Ist $U \in \mathcal{T}_Y$, $f \in C(U)$, dann ist

$$f \circ \varphi \in C(\varphi^{-1}(U)) = (\varphi_*\mathcal{F})(U).$$

Durch

$$\Psi_U : \mathcal{G}(U) \to (\varphi_*\mathcal{F})(U), \quad f \mapsto f \circ \varphi,$$

wird ein Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \to \varphi_*\mathcal{F}$ definiert.

Dann ist $(\varphi, \Psi) : (X, \mathcal{C}^0_X) \to (Y, \mathcal{C}^0_Y)$ ein Garbenmorphismus.

2) Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\varphi : X \to Y$ eine glatte Abbildung. Es bezeichne

$$\begin{aligned} &\Omega^k_X \quad \text{die Garbe der glatten } k\text{-Formen auf } X, \\ &\Omega^k_Y \quad \text{die Garbe der glatten } k\text{-Formen auf } Y. \end{aligned}$$

Das Zurückziehen (pull-back) von Formen liefert einen Garbenhomomorphismus

$$\Psi : \Omega^k_Y \to \varphi_*\Omega^k_X.$$

Dann ist $(\varphi, \Psi) : (X, \Omega^k_X) \to (Y, \Omega^k_Y)$ ein Garbenmorphismus.

Seien $(X, \mathcal{F})$ und $(Y, \mathcal{G})$ topologische Räume mit Garben von Ringen. Für $U \in \mathcal{T}_X$ setze

$$\mathrm{Mor}(U) := \{(\varphi, \Psi) : (U, \mathcal{F}|_U) \to (Y, \mathcal{G}) \text{ Garbenmorphismus}\},$$

wobei $\mathcal{F}|_U$ die eingeschränkte Garbe ist, d.h. für $U' \in \mathcal{T}_U$ ist

$$(\mathcal{F}|_U)(U') = \mathcal{F}(U') \qquad \text{und} \qquad \varrho^{\mathcal{F}|_U}_{U',U''} := \varrho^{\mathcal{F}}_{U',U''}.$$

Für U_1, $U \in \mathcal{T}_X$ mit $U_1 \subset U$ konstruieren wir eine „Einschränkung“

$$\mu_{U_1,U} : \mathrm{Mor}(U) \to \mathrm{Mor}(U_1), \qquad \mu_{U_1,U}(\varphi, \Psi) = (\varphi_1, \Psi_1)$$

durch

$$\varphi_1 := \varphi|_{U_1}$$

und für $V \in \mathcal{T}_Y$

$$\Psi_{1,V} := \varrho^{\mathcal{F}}_{\varphi^{-1}(V)\cap U_1, \varphi^{-1}(V)} \circ \Psi_V.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\Psi_V} & \varphi_*(\mathcal{F}|_U)(V) = (\mathcal{F}|_U)(\varphi^{-1}(V)) \;=\; \mathcal{F}(\varphi^{-1}(V)) \\ {\scriptstyle \Psi_{1,V}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \varrho^{\mathcal{F}}_{\varphi^{-1}(V)\cap U_1,\varphi^{-1}(V)}} \\ \varphi_{1*}(\mathcal{F}|_{U_1})(V) & = (\mathcal{F}|_{U_1})(\varphi_1^{-1}(V)) = \mathcal{F}(\varphi_1^{-1}(V)) & = \;\mathcal{F}(\varphi^{-1}(V)\cap U_1) \end{array}$$

Dann ist tatsächlich $(\varphi_1, \Psi_1) \in \mathrm{Mor}(U_1)$.

1.2.14 Übung. Zeige, dass Mor mit $\mu_{\cdot,\cdot}$ eine Garbe von Ringen auf X ist.

1.2.15 Definition. Ein *Morphismus $\mathbb{K}$-geringter Räume* $(X, \mathcal{F}, v)$, $(Y, \mathcal{G}, w)$ ist ein Morphismus

$$(\varphi, \Psi) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$$

der zugrundeliegenden Garben, so dass für alle $p \in X$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [f]_{\varphi(p)} & \longmapsto & [\Psi_U(f)]_p \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{G}_{\varphi(p)} & \xrightarrow{\Psi_p} & \mathcal{F}_p \\ & {\scriptstyle w_{\varphi(p)}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle v_p} & \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

kommutiert, wobei $f \in \mathcal{G}(U)$ für eine offene Umgebung U von $\varphi(p)$ in Y und

$$\Psi_U(f) \in (\varphi_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(\underbrace{\varphi^{-1}(U)}_{\substack{\text{offene Umg.}\\ \text{von } p}}).$$

1.2.16 Lemma. *Sei $(\varphi, \Psi) : (X, \mathcal{F}, v) \to (Y, \mathcal{G}, w)$ ein Morphismus $\mathbb{K}$-geringter Räume und sei $p \in X$.*
Dann erhält die auf den Halmen induzierte Abbildung $\Psi_p : \mathcal{G}_{\varphi(p)} \to \mathcal{F}_p$ die Kerne der Auswertungsabbildung, d.h.

$$\ker w_{\varphi(p)} = \Psi_p^{-1}(\ker v_p).$$

Beweis.

„$\supset$“: Sei $[f]_{\varphi(p)} \in \Psi_p^{-1}(\ker v_p)$, d.h.

$$0 = v_p\Psi_p([f]_{\varphi(p)}) = w_{\varphi(p)}([f]_{\varphi(p)}).$$

Also ist $[f]_{\varphi(p)} \in \ker w_{\varphi(p)}$.

„$\subset$“: Sei $[f]_{\varphi(p)} \in \ker w_{\varphi(p)}$, d.h.

$$0 = w_{\varphi(p)}\big([f]_{\varphi(p)}\big) = v_p\big(\Psi_p([f]_{\varphi(p)})\big).$$

Also ist $\Psi_p\big([f]_{\varphi(p)}\big) \in \ker v_p$ und somit $[f]_{\varphi(p)} \in \Psi_p^{-1}(\ker v_p)$.

□

1.2.17 Bemerkung. Der Beweis zeigt auch, dass

$$\Psi_p(\ker w_{\varphi(p)}) \subset \ker v_p.$$

Die umgekehrte Inklusion gilt im Allgemeinen nicht. Dazu betrachte:

1.2.18 Beispiel. Sei $X = Y$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\varphi = \mathrm{id}$,

$\mathcal{F} = \Omega_X^*$, d.h. $\mathcal{F}(U) = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} \Omega^k(U)$, mit Auswertungsmorphismus v,

$\mathcal{G} = \mathcal{C}_X^\infty$, mit Auswertungsmorphismus w,

Ψ die Einbettung $\Omega_X^0 = \mathcal{C}_X^\infty \to \Omega_X^0 \subset \Omega_X^*$,

$v_p(\omega_0 + \omega_1 + \dots) = w_0(p)$, wobei $\omega_i \in \Omega^i(U)$.

Dann ist $\ker v_p = \ker w_p \oplus \Omega_{X,p}^1 \oplus \Omega_{X,p}^2 \oplus \cdots$.

1.2.19 Definition. Sei $(X, \mathcal{G}, v)$ ein $\mathbb{K}$-geringter Raum, sei $U \in \mathcal{T}_X$. Dann heißt $(U, \mathcal{G}|_U, v|_{\bigcup\limits_{p\in U}\mathcal{G}_p})$ *offener Teilraum von $(X, \mathcal{G}, v)$*.

1.2.20 Bemerkung. Ist $(X, \mathcal{G}, v)$ lokal, so auch $(U, \mathcal{G}|_U, v|_{\bigcup\limits_{p\in U}\mathcal{G}_p})$.

1.3 Supermannigfaltigkeiten

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, sei $\Lambda^*\mathbb{R}^n$ die Graßmann-Algebra. Wir setzen

$$\mathcal{O}_{m|n}(U) := C^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^*\mathbb{R}^n.$$

Seien $\theta_1, \dots, \theta_n$ ungerade Erzeuger von $\Lambda^*\mathbb{R}^n$, z.B. könnten $\theta_1, \dots, \theta_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n = \Lambda^1\mathbb{R}^n$ bilden. Es könnten aber auch im Fall $n = 3$ für eine Basis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ die Erzeuger $\theta_1 = b_1$, $\theta_2 = b_2$, $\theta_3 = b_3 + b_1 \wedge b_2 \wedge b_3$ sein. Es ist dann $b_3 = \theta_3 - \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3$.

Wir schreiben von nun an „$\cdot$“ statt „$\wedge$“.

Die Produkte

$$\theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}, \qquad \varepsilon_j \in \{0, 1\},$$

bilden eine Vektorraumbasis von $\Lambda^*\mathbb{R}^n$. Also läßt sich jedes $f \in \mathcal{O}_{m|n}(U)$ eindeutig schreiben in der Form

$$f = \sum_{\substack{\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\\ \varepsilon_j\in\{0,1\}}} f_\varepsilon \otimes \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n},$$

wobei $f_\varepsilon \in C^\infty(U)$. Wir schreiben auch formal

$$f(x, \theta) = \sum_\varepsilon f_\varepsilon(x) \cdot \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}.$$

1.3.1 Definition. Wir nennen die Elemente von $\mathcal{O}_{m|n}(U)$ *Superfunktionen in m geraden und n ungeraden Variablen*.

Sind $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so liefert die Einschränkung $C^\infty(U) \to C^\infty(V)$ einen Morphismus

$$\begin{gathered}\mathcal{O}_{m|n}(U) \to \mathcal{O}_{m|n}(V)\\ f = \sum_\varepsilon f_\varepsilon \otimes \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n} \mapsto f|_V = \sum_\varepsilon (f_\varepsilon|_V) \otimes \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}.\end{gathered}$$

Man sieht sofort, dass $\mathcal{O}_{m|n}$ damit zu einer Garbe von reellen superkommutativen Superalgebren wird. Die Multiplikation in $\mathcal{O}_{m|n}(U)$ ist definiert durch

$$(f \otimes \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}) \cdot (f \otimes \theta_1^{\delta_1} \cdots \theta_n^{\delta_n}) = (fg) \otimes \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n} \cdot \theta_1^{\delta_1} \cdots \theta_n^{\delta_n}$$

Die Eins in $\mathcal{O}_{m|n}(U)$ ist

$$1 = \sum_{\varepsilon} f_\varepsilon \otimes \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}, \quad \text{wobei } f_\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varepsilon = (0, \ldots, 0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $p \in \mathbb{R}^m$ sei

$$v_p : \mathcal{O}_{m|n,p} \to \mathbb{R}, \qquad v_p\big([f]_p\big) := f_{(0,\ldots,0)}(p).$$

Dann ist v_p ein 1-erhaltender Algebrenhomomorphismus. v_p ist wohldefiniert, insbesondere unabhängig von der Wahl der (ungeraden) Erzeuger $\theta_1, \ldots, \theta_n$, da die homogenen Bestandteile der $\theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}$ positiven Grad in der Graßmann-Algebra haben und daher $f_{(0,\ldots,0)}$ sich bei Wechsel der Erzeuger nicht verändert (wohl aber die anderen f_ε).

1.3.2 Satz. $(\mathbb{R}^m, \mathcal{O}_{m|n}, v)$ *ist lokaler* $\mathbb{R}$*-supergeringter Raum.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass $\mathfrak{m}_p := \ker(v_p)$ das eindeutige maximale Ideal in $\mathcal{O}_{m|n,p}$ ist.
Sei $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{m|n,p}$ ein Ideal mit $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}_p$. Es ist zu zeigen, dass $\mathfrak{m} = \mathcal{O}_{m|n,p}$. Dazu reicht es, ein invertierbares Element in $\mathfrak{m}$ zu finden.
Sei $[f]_p \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}_p$, $f \in \mathcal{O}_{m|n}(U)$, U offene Umgebung von p. Da $[f]_p \notin \mathfrak{m}_p$, ist $f_{(0,\ldots,0)}(p) \neq 0$. Da $f_{(0,\ldots,0)}$ stetig ist, existiert eine offene Umgebung $U' \subset U$ von p, so dass $f_{(0,\ldots,0)} \neq 0$ auf U'. Somit ist $f_{(0,\ldots,0)}|_{U'}$ invertierbar in $C^\infty(U')$.
Nach Satz 1.1.20 ist $f|_{U'} \in \mathcal{O}_{m|n}(U')$ (aufgefasst als $(1|0)$-Matrix) genau dann invertierbar, wenn

$$\pi(f|_{U'}) \;\in\; \mathcal{O}_{m|n}(U') \big/ \langle \mathcal{O}_{m|n}(U')_1 \rangle \;\cong\; C^\infty(U')$$

invertierbar ist. (Dabei ist die Projektion $\pi(g) = g_{(0,\ldots,0)}$).
Also ist $[f]_p$ invertierbar. □

1.3.3 Korollar. *Ist* $U \subset \mathbb{R}^m$ *offen, so ist* $(U, \mathcal{O}_{m|n}|_U, v|_{\bigcup_{p\in U} \mathcal{O}_{m|n,p}})$ *ein lokaler* $\mathbb{R}$*-supergeringter Raum.*

1.3.4 Definition. Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend, dann nennen wir $(U, \mathcal{O}_{m|n}|_U)$ ein *Supergebiet der Dimension* $m|n$.
Die kartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ von U heißen *gerade Koordinaten* und die $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *ungerade Koordinaten*.

1.3.5 Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein $\mathbb{R}$-supergeringter Raum. Eine *Superkarte der Dimension* $m|n$ *von* $(X, \mathcal{O}_X)$ besteht aus einer offenen Teilmenge $U \subset X$, einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ und einem Isomorphismus $\mathbb{R}$-supergeringter Räume

$$(\varphi, \Psi) : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (V, \mathcal{O}_{m|n}|_V).$$

1.3.6 Bemerkung. Für jedes $p \in X$, das im Definitionsbereich einer Superkarte liegt, ist der Halm $\mathcal{O}_{X,p}$ eine *lokale* $\mathbb{R}$-Algebra, da dies nach Satz 1.3.2 für $\mathcal{O}_{m|n,p}$ gilt.

1.3.7 Definition. Ein $\mathbb{R}$-supergeringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *Supermannigfaltigkeit der Dimension* $m|n$, falls gilt:

1) X ist hausdorffsch,
2) die Topologie $\mathcal{T}_X$ besitzt eine abzählbare Basis und
3) jeder Punkt von X liegt im Definitionsbereich einer Superkarte.

(Wir werden noch sehen, dass die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel in der Garbe $\mathcal{O}_X$ bzw. der Definition der Superkarte versteckt ist.)

1.3.8 Bemerkung. Eine Supermannigfaltigkeit ist ein *lokaler* $\mathbb{R}$-supergeringter Raum.

1.3.9 Definition. Ein *Morphismus von Supermannigfaltigkeiten* ist ein Morphismus der $\mathbb{R}$-geringten Räume.

Man beachte, dass Morphismen von Supermannigfaltigkeiten nicht gerade zu sein brauchen.

1.3.10 Beispiel. 1) Sei M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist $(M, \mathcal{C}^\infty_M)$ eine Supermannigfaltigkeit der Dimension $m|0$, denn für eine Karte

$$M \supset U \xrightarrow{\varphi} V \subset \mathbb{R}^m$$

und $\Psi(f) = f \circ \varphi = \varphi^*(f)$ ist

$$(\varphi, \Psi) : (U, \mathcal{C}^\infty_U) \to (V, \mathcal{C}^\infty_V)$$

ein Isomorphismus und

$$\mathcal{C}^\infty_V(V') = C^\infty(V') \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = C^\infty(V') \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^* \mathbb{R}^0 = \mathcal{O}_{m|0}(V').$$

2) Sei $(\{0\}, \mathcal{O}_{0|1})$ der *Superpunkt* der Dimension $0|1$.
Um $(\{0\}, \mathcal{O}_{0|1})$ zu verstehen, betrachten wir Morphismen

$$(\varphi, \Psi) : (\{0\}, \mathcal{O}_{0|1}) \to (M, \mathcal{C}^\infty_M).$$

Die zugehörige Superalgebra können wir schreiben als

$$\mathcal{O}_{0|1}(\{0\}) = C^\infty(\{0\}) \otimes \Lambda^* \mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cdot \theta) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cdot \theta.$$

Setze $\varphi(0) =: p \in M$. Schreibe die auf den Halm induzierte Abbildung

$$\Psi_0 : \mathcal{C}^\infty_p \to \mathcal{O}_{0|1,0} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cdot \theta$$

in der Form

$$\Psi_0(f) = A(f) + B(f) \cdot \theta, \quad \text{wobei } A,\, B : \mathcal{C}^\infty_p \to \mathbb{R} \ \ \mathbb{R}\text{-linear sind.}$$

Für Produkte gilt dann

$$\begin{aligned} A(fg) + B(fg)\theta = \Psi_0(fg) &= \Psi_0(f)\Psi_0(g) \\ &= \big(A(f) + B(f)\theta\big)\big(A(g) + B(g)\theta\big) \\ &= A(f)A(g) + \big(B(f)A(g) + A(f)B(g)\big)\theta. \end{aligned}$$

Also ist $A(fg) = A(f)A(g)$ und es gilt $A(1) = 1$, da $\Psi_0(1) = 1$. Somit ist $A : \mathcal{C}^\infty_p \to \mathbb{R}$ ein 1-erhaltender Algebrenhomomorphismus. Es ist $A = v_p$, denn

$$A(f) = A(\underbrace{f - f(p)}_{\in \mathfrak{m}_p = \ker A} + f(p)) = A(f(p)) = f(p).$$

Für B hingegen gilt

$$B(fg) = B(f)A(g) + A(f)B(g) = g(p) \cdot B(f) + f(p) \cdot B(g),$$

d.h. B ist eine Derivation auf $\mathcal{C}_p^\infty$. Und somit:

$$\exists!\, X \in T_pM : \quad B(f) = \partial_X f.$$

Sind umgekehrt $p \in M$ und $X \in T_pM$ gegeben, so wird durch

$$\varphi : \{0\} \to M, \qquad \varphi(0) = p$$

$$\begin{aligned} \Psi_U : C^\infty(U) &\to \varphi_*\mathcal{O}_{0|1}(U) = \mathcal{O}_{0|1}(\varphi^{-1}(U)) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cdot \theta & \text{falls } p \in U, \\ \{0\} & \text{falls } p \notin U, \end{cases} \\ \Psi_U(f) &= f(p) + \partial_X f \cdot \theta, \qquad \text{für } U \subset M \text{ offen}, \end{aligned}$$

ein Morphismus

$$(\varphi, \Psi) : (\{0\}, \mathcal{O}_{0|1}) \to (M, \mathcal{C}_M^\infty)$$

definiert.

Insgesamt erhalten wir somit eine $1:1$–Korrespondenz

$$\{\text{Morphismen } (\{0\}, \mathcal{O}_{0|1}) \to (M, \mathcal{C}_M^\infty)\} \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad TM.$$

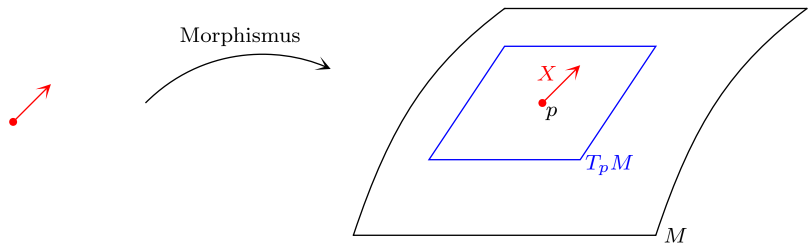


Abb. 1: Der Superpunkt.

3) Sei M eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang n. Dann ist

$$\Lambda^*E = \Lambda^0E \oplus \Lambda^1E \oplus \cdots \oplus \Lambda^nE \to M$$

ein Vektorbündel vom Rang 2^n. Wir nennen Λ^*E das von $E \to M$ induzierte *Graßmannbündel*. Setze

$$\mathcal{O}_E(U) := \{\text{glatte Schnitte in } \Lambda^*E|_U \to U\}.$$

$\mathcal{O}_E$ ist eine Garbe von $\mathbb{R}$-Algebren auf M.

Wir konstruieren Superkarten der Dimension $m|n$:

Jeder Punkt in M besitzt eine offene Umgebung U, über der das Bündel E trivial ist, d.h. es gibt glatte Schnitte $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ von $E|_U \to U$, so dass $\vartheta_1(x), \ldots, \vartheta_n(x)$ eine Basis von E_x bilden für alle $x \in U$. Nach eventueller Verkleinerung von U existiert auch ein Diffeomorphismus

$$\varphi : U \to V, \qquad V \subset \mathbb{R}^m \text{ offen}.$$

Für eine offene Teilmenge $V' \subset V$ setze

$$\Psi_{V'} : \mathcal{O}_{m|n}(V') \to \varphi_* \mathcal{O}_E|_U(V') = \mathcal{O}_E(\varphi^{-1}(V'))$$
$$f = \sum_{\varepsilon} f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n} \mapsto \sum_{\varepsilon} (f_\varepsilon \circ \varphi) \vartheta_1^{\varepsilon_1} \cdots \vartheta_n^{\varepsilon_n},$$

wobei $\theta_1 \cdots \theta_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n = \Lambda^1 \mathbb{R}^n$ ist.

Jeder Vektorbündelhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & F \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array}$$

der faserweise ein Isomorphismus ist, induziert einen Morphismus

$$(\varphi, \Psi) : (M, \mathcal{O}_E) \to (M', \mathcal{O}_F)$$

der zugehörigen Supermannigfaltigkeiten, definiert durch

$$\begin{aligned} \Psi_U : \mathcal{O}_F(U) &\to \varphi_* \mathcal{O}_E(U) = \mathcal{O}_E(\varphi^{-1}(U)) \\ \Psi_U(g)(x) &= (\Lambda^* \Phi^{-1})(g(\varphi(x)) \quad \in E_x, \end{aligned}$$

wobei $g \in \mathcal{O}_F(U)$ und $x \in \varphi^{-1}(U)$.

Es sind aber nicht alle Morphismen $(M, \mathcal{O}_E) \to (M', \mathcal{O}_F)$ von dieser Form (vgl. Bsp. 1.3.10.2).

1.3.11 Proposition. *Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die maximalen Ideale in $C^\infty(M)$ sind genau die Ideale*

$$\mathfrak{m}_p = \{f \in C^\infty(M) \mid f(p) = 0\}, \qquad p \in M.$$

Die 1-erhaltenden Algebrenhomomorphismen

$$\delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

sind von der Form $\delta(f) = f(p)$.

Beweis.

a) Beh.: Die Ideale $\mathfrak{m}_p$ sind maximal.

Bew.: Sei $\mathfrak{m} \subset C^\infty(M)$ ein Ideal mit $\mathfrak{m}_p \subsetneq \mathfrak{m}$. Wir zeigen: $\mathfrak{m} = C^\infty(M)$.
Sei $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}_p$, d.h. $f(p) \neq 0$. Da $f - f(p) \in \mathfrak{m}_p \subset \mathfrak{m}$, ist $f(p) = f - (f - f(p)) \in \mathfrak{m}$. $f(p)$ ist invertierbar in $C^\infty(M)$, also $\mathfrak{m} = C^\infty(M)$.

b) Beh.: Es gibt keine weiteren maximalen Ideale.

Bew.: Sei $m \subsetneq C^\infty(M)$ ein Ideal. Wir zeigen: $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_p$ für ein $p \in M$.
Angenommen, dies wäre falsch, d.h. $\forall p \in M \, \exists f_p \in \mathfrak{m}$ mit $f_p(p) \neq 0$. OBdA sei $f_p > 0$ in einer offenen Umgebung U_p von p in M. Wähle eine offene Umgebung U'_p von p, die relativ-kompakt in U_p liegt. $\{U'_p\}_{p \in M}$ bildet eine offene Überdeckung von M. Da wir M als kompakt vorausgesetzt haben, gibt es $p_1, \ldots, p_N \in M$, so dass $M = \bigcup_{i=1}^N U'_{p_i}$.
Wähle dazu passende Abschneidefunktionen $\eta_i \in C^\infty(M)$, $i = 1, \ldots, N$, d.h.

- $\eta_i \geq 0$
- $\eta_i \equiv 1$ auf U'_{p_i}
- $\eta_i \equiv 0$ auf $M - U_{p_i}$.

Dann ist $\eta_i \cdot f_{p_i} \in \mathfrak{m}$, $\eta_i \cdot f_{p_i} \geq 0$ auf M und $\eta_i \cdot f_{p_i} > 0$ auf U'_{p_i}. Es folgt

$$0 < \sum_{i=1}^{N} \eta_i \cdot f_{p_i} \in \mathfrak{m}.$$

Damit enthält $\mathfrak{m}$ ein invertierbares Element, also $\mathfrak{m} = C^\infty(M)$. Widerspruch!

c) Sei $\delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ ein 1-erhaltender Algebrenhomomorphismus. Dann ist $\ker(\delta)$ ein maximales Ideal in $C^\infty(M)$. Also existiert ein $p \in M$ mit $\ker(\delta) = \mathfrak{m}_p$. Für dieses p gilt

$$\delta(f) = \delta\big(\underbrace{f - f(p)}_{\in \mathfrak{m}_p} + f(p)\big) = \delta\big(f(p) \cdot 1\big) = f(p) \cdot \delta(1) = f(p) \cdot 1 = f(p).$$

□

1.3.12 Bemerkung. Für nichtkompakte Mannigfaltigkeiten M ist Proposition 1.3.11 nicht wahr. So ist z. B. die Menge der glatten Funktionen mit kompaktem Träger $\mathfrak{m} = C_c^\infty(M)$ in diesem Fall ein echtes Ideal und daher in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}'$ enthalten. Dieses maximale Ideal kann jedoch nicht von der Form $\mathfrak{m}_p$ sein, da kein Punkt p Nullstelle aller Funktionen in $C_c^\infty(M)$ ist.[1]

1.3.13 Übung. In Beispiel 1.3.10.2 hatten wir gesehen, dass die Morphismen $(\varphi, \Psi) : (\{0\}, \mathcal{O}_{0|1}) \to (M, \mathcal{C}_M^\infty)$ den Tangentialvektoren $X \in T_pM$, $p \in M$ entsprechen. Sei nun $(F, F^*) : (M, \mathcal{C}_M^\infty) \to (N, \mathcal{C}_N^\infty)$ ein Morphismus, $F^*(f) := f \circ F$. Dann entspricht dem Morphismus

$$(F, F^*) \circ (\varphi, \Psi) : (\{0\}, \mathcal{O}_{0|1}) \to (N, \mathcal{C}_N^\infty)$$

ein Tangentialvektor $Y \in T_qN$, $q \in N$.
Berechne q und Y.

1.3.14 Satz. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Supermannigfaltigkeit. Dann gilt:*

1) X besitzt genau eine Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit, so dass für jede Superkarte

$$(\varphi, \Psi) : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (V, \mathcal{O}_{m|n}|_V)$$

die Abbildung $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

2) Es gibt genau einen 1-erhaltenden Homomorphismus

$$\beta : \mathcal{O}_X \to \mathcal{C}_X^\infty$$

von $\mathbb{R}$-Algebrengarben.

3) Für $U \in \mathcal{T}_X$ setze

$$\mathcal{O}^1(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) \,|\, f \text{ nilpotent}\}.$$

Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^1(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\beta_U} C^\infty(U) \longrightarrow 0$$

exakt, d.h. β ist surjektiv und $\ker \beta_U = \mathcal{O}^1(U)$.

[1] Ich danke Herrn Martin Schlottmann für diesen Hinweis.

4) *Ist* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *eine weitere Supermannigfaltigkeit und*

$$(\varphi, \Psi) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

ein Morphismus von Supermannigfaltigkeiten, so ist $\varphi : X \to Y$ *glatt.*

5) *Für jedes* $V \in \mathcal{T}_Y$ *kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X\big(\varphi^{-1}(V)\big) & \xleftarrow{\Psi_V} & \mathcal{O}_Y(V) \\ {\scriptstyle\beta_{\varphi^{-1}(V)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta_V} \\ C^\infty\big(\varphi^{-1}(V)\big) & \xleftarrow{\varphi^*} & C^\infty(V) \end{array}$$

Beweis.

1) Es ist nur zu zeigen, dass für je zwei Superkarten

$$\begin{aligned} &(\varphi_1, \Psi_1) : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (V_1, \mathcal{O}_{m|n}|_{V_1}) \\ \text{und}\quad &(\varphi_2, \Psi_2) : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (V_2, \mathcal{O}_{m|n}|_{V_2}) \end{aligned}$$

der Homöomorphismus $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V_2$ glatt ist. (Dabei ersetze U_1, U_2 durch $U := U_1 \cap U_2$.)

Sei $f \in C^\infty(V_2) \subset \mathcal{O}_{m|n}(V_2)$. Dann ist für $p \in V_1$:

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(p) &= v_{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(p)}\big([f]_{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(p)}\big) \\ &= v_p\big((\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2)_{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(p)}[f]_p\big) \\ &= v_p\big([\ \underbrace{(\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2)_{V_2}(f)}_{\substack{\in\, \mathcal{O}_{m|n}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(V_2)) \\ =\, \mathcal{O}_{m|n}(V_1)}}\ ]_p\big) \qquad \text{glatt in } p. \end{aligned}$$

Also ist $f \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ glatt für alle $f \in C^\infty(V_2)$, insbesondere für Koordinatenfunktionen. Somit ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ glatt.

2) Eindeutigkeit. Für die auf den Halmen induzierte Abbildung kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,p} & \xrightarrow{\beta_p} & \mathcal{C}^\infty_{X,p} \\ & {\scriptstyle v_p^{\mathcal{O}_X}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle v_p^{\mathcal{C}^\infty_X}} & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

Somit gilt für $f \in \mathcal{O}_X(U)$ und alle $p \in U$

$$\beta_U(f)(p) = v_p^{\mathcal{C}^\infty_X}\big([\beta_U(f)]_p\big) = v_p^{\mathcal{C}^\infty_X}\big(\beta_p[f]_p\big) = v_p^{\mathcal{O}_X}\big([f]_p\big).$$

Dies legt $\beta_U(f) : U \to \mathbb{R}$ fest.

Existenz. Für $f \in \mathcal{O}_X(U)$ definiere $\beta_U(f) : U \to \mathbb{R}$ durch

$$\beta_U(f)(p) := v_p^{\mathcal{O}_X}\big([f]_p\big).$$

Für eine Superkarte

$$(\varphi, \Psi) : (U', \mathcal{O}_X|_{U'}) \to (V, \mathcal{O}_{m|n}|_V) \quad \text{mit } p \in U' \subset U$$

gilt:

$$\beta_U(f)|_{U'} = \beta_{U'}(f|_{U'}) = \beta_{U'}\big(\Psi_V \circ \Psi_V^{-1}\big(\varrho_{U',U}(f)\big)\big)$$

Schreibe $\Psi_V^{-1}(\varrho_{U',U}(f)) = \sum\limits_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}$. Dann gilt für $q \in U'$:

$$\begin{aligned}
\beta_U(f)|_{U'}(q) &= \beta_{U'}\Big(\Psi_V\Big(\sum_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}\Big)\Big)(q) \\
&= v_q^{\mathcal{O}_X}\Big(\Big[\Psi_V\Big(\sum_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}\Big)\Big]_{\varphi(q)}\Big) \\
&= v_q^{\mathcal{O}_X}\Big(\Psi_{\varphi(q)}\Big(\Big[\sum_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}\Big]_{\varphi(q)}\Big)\Big) \\
&= v_{\varphi(q)}^{\mathcal{O}_{m|n}}\Big(\Big[\sum_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}\Big]_{\varphi(q)}\Big) \\
&= f_{(0,\ldots,0)}(\varphi(q)),
\end{aligned}$$

d.h. es ist $\beta_U(f)|_{U'} = f_{(0,\ldots,0)} \circ \varphi$ und damit glatt auf U'. Da dies für jedes Superkartengebiet in U gilt, folgt $\beta_U(f) \in C^\infty(U)$.

Diese Rechnung zeigt auch (5).

3) ist klar, wenn U Definitionsbereich einer Superkarte $(U, \mathcal{O}_X|_U) \to (V, \mathcal{O}_{m|n}|_V)$ ist, denn

$$\mathcal{O}^1_{m|n}(V) = \Big\{\sum_{|\varepsilon|\geq 1} f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}\Big\},$$

weil spätestens die $(n+1)$-te Potenz von Superfunktionen dieser Form verschwindet und umgekehrt sind Superfunktionen mit nichttrivialem $f_{(0,\ldots,0)}$-Anteil nicht nilpotent, und

$$\beta_V\Big(\sum_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}\Big) = f_{(0,\ldots,0)}.$$

Für allgemeines offenes $U \subset X$ zeigen wir $\ker \beta_U = \mathcal{O}^1(U)$.

„$\supset$“: Sei $f \in \mathcal{O}^1(U)$. Schreibe $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, wobei die U_α Definitionsbereiche von Superkarten seien.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \varrho_{U_\alpha,U}(f) \in \mathcal{O}^1(U_\alpha) \\
&\Rightarrow \quad \varrho_{U_\alpha,U}(f) \in \ker \beta_{U_\alpha} \\
&\Rightarrow \quad \varrho_{U_\alpha,U}\big(\beta_U(f)\big) = \beta_{U_\alpha}\big(\varrho_{U_\alpha,U}(f)\big) = 0 \quad \text{für alle } \alpha. \\
&\Rightarrow \quad \beta_U(f) = 0 \quad \textit{(lokale Bestimmtheit)} \\
&\Rightarrow \quad f \in \ker \beta_U.
\end{aligned}$$

„$\subset$“: Sei $f \in \ker \beta_U$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \beta_{U_\alpha}\big(\varrho_{U_\alpha,U}(f)\big) = \varrho_{U_\alpha,U}\big(\beta_U(f)\big) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \varrho_{U_\alpha,U}(f) \in \ker \beta_{U_\alpha}
\end{aligned}$$

Nach obiger Überlegung für Superkartengebiete folgt

$$\varrho_{U_\alpha,U}(f^{n+1}) = \big(\varrho_{U_\alpha,U}(f)\big)^{n+1} = 0.$$

Mit der lokalen Bestimmtheit folgt $f^{n+1} = 0$ und somit $f \in \mathcal{O}^1(U)$.

Bleibt noch die Surjektivität von β_U zu zeigen.

Seien $(\varphi_\alpha, \Psi_\alpha) : (U_\alpha, \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}) \to (V_\alpha, \mathcal{O}_{m|n}|_{V_\alpha})$, $\alpha = 1, \dots, N$ Superkarten, die M überdecken. Sei $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ eine zugehörige Teilung der Eins, d.h. $\rho_\alpha \in C^\infty(M)$, $\rho_\alpha \geq 0$, $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$ und $\sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha = 1$.

Sei nun $U \subset M$ offen mit $f \in C^\infty(U)$. Dann ist

$$f = \sum_\alpha \rho_\alpha f, \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{supp}(\rho_\alpha f) \in U_\alpha \cap U.$$

Für jedes Superkartengebiet existiert ein Urbild $g_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U)$ mit $\beta_{U_\alpha}(g_\alpha) = \rho_\alpha f$, dass wir durch 0 auf ganz U fortsetzen können, d.h. für alle α:

$$\exists h_\alpha \in \mathcal{O}_X(U) : \varrho_{U_\alpha \cap U, U}(h_\alpha) = g_\alpha \text{ und } [h_\alpha]_p = 0 \text{ für alle } p \notin \mathrm{supp}(\rho_\alpha f).$$

Für $h := \sum_{\alpha=1}^N h_\alpha$ gilt dann $\beta_U(h) = \sum_{\alpha=1}^N \beta_U(h_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha f = f$.

□

1.3.15 Übung. Sei $(X, \mathcal{O}_X) := (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{1|2})$ die *Supergerade*. Welche Gestalt haben die Garbenhomomorphismen

$$\Psi : (\mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty_\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{1|2})$$

mit $\beta \circ \Psi = \mathrm{id}$?

1.3.16 Satz. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei Supermannigfaltigkeiten und sei*

$$\chi : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$$

ein 1-erhaltender Algebrenhomomorphismus. Sei Y kompakt. Dann existiert genau ein Morphismus

$$(\varphi, \Psi) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y),$$

so dass $\Psi_Y = \chi$.

Beweis.

a) Beh.: Es existiert genau ein 1-erhaltender Algebrenhomomorphismus

$$\widetilde{\chi} : C^\infty(Y) \to C^\infty(X),$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(Y) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{O}_X(X) \\ {\scriptstyle \beta_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_X} \\ C^\infty(Y) & \xrightarrow{\widetilde{\chi}} & C^\infty(X) \end{array}$$

kommutiert.

Bew.: Zu $f \in C^\infty(Y)$ wähle $F \in \mathcal{O}_Y(Y)$ mit $\beta_Y(F) = f$ und setze

$$\widetilde{\chi}(f) := \beta_X(\chi(F)).$$

Dies ist wohldefiniert, denn sind F_1, $F_2 \in \mathcal{O}_Y(Y)$ mit $\beta_Y(F_i) = f$, so ist $\beta_Y(F_1 - F_2) = 0$. Wir wissen, dass $\ker \beta_Y$ aus den nilpotenten Elementen $\mathcal{O}_Y^1(Y)$ besteht, d.h. $F_1 - F_2$ ist nilpotent. Da χ Superalgebrahomomorphismus ist, ist auch $\chi(F_1 - F_2)$ nilpotent, somit $\chi(F_1 - F_2) \in \mathcal{O}_X^1(X) = \ker \beta_X$, also

$$0 = \beta_X(\chi(F_1 - F_2)) = \beta_X(\chi(F_1)) - \beta_X(\chi(F_2)).$$

Aus dem Diagramm liest man nun sofort ab, dass $\widetilde{\chi}$ ein 1-erhaltender Algebrenhomomorphismus ist.

b) Konstruktion von $\varphi : X \to Y$. Sei $x \in X$. Dann ist mit den Bezeichnungen aus Proposition 1.3.11

$$\delta_x \circ \widetilde{\chi} : C^\infty(Y) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \underbrace{\widetilde{\chi}(f)}_{\in C^\infty(X)}(x)$$

ein 1-erhaltender Algebrenhomomorphismus. Nach 1.3.11 existiert genau ein $y \in Y$ mit

$$\delta_x \circ \widetilde{\chi} = \delta_y.$$

Setze $\varphi(x) := y$. Wir halten fest, dass für $f \in C^\infty(Y)$ und $x \in X$ gilt:

$$\delta_x(\widetilde{\chi}(f)) = \widetilde{\chi}(f)(x) = f(\varphi(x)) = \delta_{\varphi(x)}(f).$$

c)Beh.: Sei M eine beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für x_i, $x \in M$ ist

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in C^\infty(M) : \lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(x).$$

Beh.:„$\Rightarrow$“ klar, da alle f stetig.

„$\Leftarrow$“ (Kontraposition) Konvergiere $(x_i)_i$ nicht gegen x, d.h. es existiert eine offene Umgebung U von x und eine Teilfolge $(x_{i_j})_j$, so dass $x_{i_j} \notin U$ für alle j. Wähle nun $f \in C^\infty(M)$ mit

$$f(x) = 1 \quad \text{ und } \quad f \equiv 0 \text{ auf } M - U.$$

Dann ist $f(x_{i_j}) = 0$ für alle j, d.h. das Bild der Teilfolge konvergiert nicht gegen das Bild $f(x) = 1$. Also konvergiert auch $(f(x_i))_i$ nicht gegen $f(x)$.

d)Beh.: Die in Teil b) konstruierte Abbildung $\varphi : X \to Y$ ist stetig.

Bew.: Sei $x_i \to x$ eine konvergente Folge in X und sei $f \in C^\infty(Y)$.

$$\begin{aligned} f(\varphi(x_i)) &= \delta_{\varphi(x_i)}(f) \overset{\circledast}{=} \delta_{x_i}(\widetilde{\chi}(f)) \qquad (\circledast \text{ nach Def. von } \varphi) \\ &= \widetilde{\chi}(f)(x_i) \to \widetilde{\chi}(f)(x) \overset{\circledast}{=} f(\varphi(x)). \end{aligned}$$

Mit c) folgt nun $\varphi(x_i) \to \varphi(x)$.

e) Konstruktion des Garbenhomomorphismus

$$\Psi : \mathcal{O}_Y \to \varphi_* \mathcal{O}_X \quad \text{mit} \quad \Psi_Y = \chi.$$

Sei $V \in \mathcal{T}_Y$ und sei $f \in \mathcal{O}_Y(V)$. Setze $U := \varphi^{-1}(V) \subset X$.

Im Allgemeinen kann f (leider) nicht zu einer Superfunktion in $\mathcal{O}_Y(Y)$ fortgesetzt werden. Wir können allerdings f mit einer Abschneidefunktion (existiert in Superkartengebiet) multiplizieren, die auf einer kleinen Umgebung von $y \in V$ identisch 1 ist und Träger in V hat. Durch diese Konstruktion erhalten wir zu jedem $y \in V$ ein $g_y \in \mathcal{O}_Y(Y)$ und eine offene Umgebung $W_y \subset V$ mit

$$\varrho_{W_y,Y}(g_y) = \varrho_{W_y,V}(f).$$

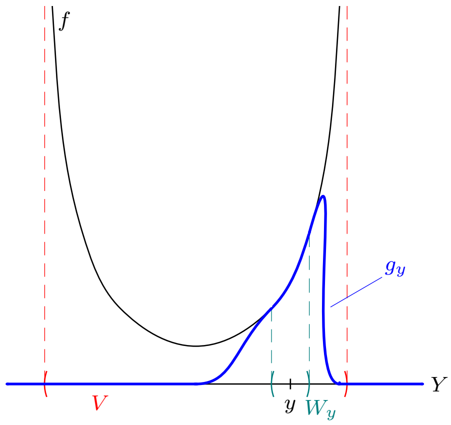


Abb. 2: f kann nicht stetig auf Y fortgesetzt werden, aber g_y ist auf ganz Y definiert.

Insbesondere gilt für $y,\ z \in V$:

$$\begin{aligned}
\varrho_{W_y\cap W_z,Y}(g_z) &= \varrho_{W_y\cap W_z,W_z} \circ \varrho_{W_z,Y}(g_z)\\
&= \varrho_{W_y\cap W_z,W_z} \circ \varrho_{W_z,V}(f)\\
&= \varrho_{W_y\cap W_z,V}(f)\\
&= \varrho_{W_y\cap W_z,W_y} \circ \varrho_{W_y,V}(f)\\
&= \varrho_{W_y\cap W_z,W_y} \circ \varrho_{W_y,Y}(g_y)\\
&= \varrho_{W_y\cap W_z,Y}(g_y).
\end{aligned}$$

Setze $h_y := \varrho_{U_y,X} \circ \chi(g_y) \in \mathcal{O}_X(U_y)$, wobei $U_y = \varphi^{-1}(W_y) \subset U = \varphi^{-1}(V)$.

$$\begin{aligned}
\varrho_{U_y\cap U_z,U_y}(h_y) &= \varrho_{U_y\cap U_z,X}(\chi(g_y))\\
&= \varrho_{U_y\cap U_z,X}(\chi(g_z)) + \varrho_{U_y\cap U_z,X}(\chi(g_y - g_z))\\
&= \varrho_{U_y\cap U_z,U_z}(\chi(h_z)) + \underbrace{\varrho_{U_y\cap U_z,X}(\chi(g_y - g_z))}_{\mathrm{II}}
\end{aligned}$$

Fakt: (Beweis später) χ ist *lokal*, d.h. für $k \in \mathcal{O}_Y(Y)$ mit $\varrho_{U,Y}(k) = 0$ gilt

$$\varrho_{\varphi^{-1}(U),X}(\chi(k)) = 0.$$

Mit $k = g_y - g_z$ ergibt sich

$$\mathrm{II} = \varrho_{U_y\cap U_z,X}(\chi(g_y - g_z)) = 0.$$

Mit dem Garben-Axiom 4 *(Zusammenkleben)* folgt:

$$\exists h \in \mathcal{O}_X(U): \ \forall y \in V: \quad \varrho_{U_y,U}(h) = h_y.$$

Setze

$$\Psi_V(f) := h \in \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)) = \varphi_*\mathcal{O}_X(V).$$

Das Garben-Axiom 3 *(Lokale Bestimmtheit)* und die Lokalität von χ liefern, dass Ψ_V wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl der g_y. Man sieht dann leicht, dass Ψ_V ein 1-erhaltender Superalgebrenhomomorphismus ist. Es gilt auch $\Psi_Y = \chi$, denn in diesem Fall können wir einfach für alle $y \in Y$: $g_y = f$ wählen.

f) Eindeutigkeit von φ. Nach Satz 1.3.14.5 kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(Y) & \xrightarrow{\Psi_Y} & \mathcal{O}_X(X) \\ {\scriptstyle \beta_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_X} \\ C^\infty(Y) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^\infty(X) \end{array}$$

Dadurch ist der pull-back φ^* von φ und somit φ selbst eindeutig bestimmt.

g) Eindeutigkeit von Ψ. Für $V \in \mathcal{T}_Y$ muss Ψ_V erfüllen:

$$\begin{aligned} \varrho_{U_y,U}\Psi_V(f) &= \Psi_{W_y}\big(\varrho_{W_y,V}(f)\big) = \Psi_{W_y}\big(\varrho_{W_y,Y}(g_y)\big) \\ &= \varrho_{U_y,X}\big(\Psi_Y(g_y)\big) = \varrho_{U_y,X}\big(\chi(g_y)\big) \\ &= h_y. \end{aligned}$$

Mit der lokalen Bestimmtheit folgt nun, dass $\Psi_V(f)$ dadurch festgelegt ist.

□

1.3.17 Korollar. *Eine kompakte Supermannigfaltigkeit $(X, \mathcal{O}_X)$ ist durch die Superalgebra $\mathcal{O}_X(X)$ bis auf Isomorphie bestimmt.*

Beweis. Ist $\chi : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ ein Isomorphismus von Superalgebren, so existieren eindeutig bestimmte Morphismen

$$\begin{aligned} & (\varphi, \Psi) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y) \\ \text{und} \quad & (\varphi', \Psi') : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X) \\ \text{mit} \quad & \Psi_Y = \chi \quad \text{und} \quad \Psi'_X = \chi^{-1}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$(\varphi', \Psi') \circ (\varphi, \Psi) : (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

ein Morphismus, wobei $(\Psi' \circ \Psi) = \chi^{-1} \circ \chi = \mathrm{id}$. Die in Satz 1.3.16 bewiesene Eindeutigkeit eines solchen 1-erhaltenden Homomorphismus von Superalgebren liefert

$$(\varphi', \Psi') \circ (\varphi, \Psi) = (\mathrm{id}, \mathrm{id}).$$

Analog sieht man $(\varphi, \Psi) \circ (\varphi', \Psi') = (\mathrm{id}, \mathrm{id})$ und somit folgt wie gewünscht

$$(\varphi', \Psi') = (\varphi, \Psi)^{-1}.$$

□

1.3.18 Korollar. *(Spezialfall von 1.3.17) Jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit M ist durch die Algebra $C^\infty(M)$ der glatten Funktionen auf M bis auf Diffeomorphie eindeutig bestimmt.*

1.3.19 Bemerkung. Mit obigen Sätzen können wir also die differentialgeometrische Fragestellung nach der Struktur einer (Super-)Mannigfaltigkeit übersetzen in die algebraische Fragestellung nach der entsprechenden reellen (Super-)Algebra.

Für komplexe Strukturen steht uns dieses Mittel nicht zur Verfügung:

Ist X eine kompakte und zusammenhängende *komplexe* Mannigfaltigkeit, dann ist jede holomorphe Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ konstant, da beschränkt. Somit enthält die Algebra

$$\mathrm{Hol}_X(X) \cong \mathbb{C}$$

keinerlei Information über X.

Der wesentliche Unterschied zum Fall reellwertiger Funktionen besteht darin, dass wir für holomorphe Funktionen keine Abschneidefunktionen, die die Beweise möglich machten, konstruieren können, denn eine holomorphe Funktion, die auf einer offenen Teilmenge verschwindet, ist insgesamt null.

1.3.20 Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Supermannigfaltigkeit und $U \in \mathcal{T}_X$. Eine Unteralgebra der geraden Superfunktionen auf U

$$C(U) \subset \mathcal{O}_X(U)_0$$

heißt *Funktionenfaktor auf U*, falls

$$\beta_U|_{C(U)} : C(U) \to C^\infty(U)$$

ein Isomorphismus von Algebren mit Eins ist.

1.3.21 Beispiel. 1) In die (lokalen) Superfunktionen auf U

$$\mathcal{O}_{m|n}(U) = C^\infty(U) \otimes \Lambda^* \mathbb{R}^n$$

sind die glatten Funktionen auf U auf natürliche Weise eingebettet:

$$C(U) = C^\infty(U) \otimes \Lambda^0 \mathbb{R}^n.$$

Lokal existieren also Funktionenfaktoren immer.

2) Funktionenfaktoren sind allerdings i.Allg. nicht eindeutig bestimmt, wie folgendes Beispiel zeigt. Betrachte die Supergerade aus Aufgabe 1.3.15:

$$\mathcal{O}_{1|2}(\mathbb{R})_0 = C^\infty(U) \oplus C^\infty(U) \cdot \theta_1\theta_2.$$

Für $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ setze

$$C(U) = \{f + h \cdot f' \cdot \theta_1\theta_2 \,|\, f \in C^\infty(\mathbb{R})\}.$$

$C(U)$ definiert eine Unteralgebra, die vermöge β_U offensichtlich zu $C^\infty(\mathbb{R})$ isomorph ist. Die Abgeschlossenheit unter der Multiplikation sieht man so:

$$(f + hf'\theta_1\theta_2)(g + hg'\theta_1\theta_2) = fg + h(fg' + gf')\theta_1\theta_2 = fg + h(fg)'\theta_1\theta_2.$$

1.3.22 Bemerkung. Mit ähnlichen Argumenten wie bisher (Teilung der Eins, Abschneidefunktionen, Zusammenkleben, etc.) zeigt man:

1) Jede Supermannigfaltigkeit $(X, \mathcal{O}_X)$ besitzt einen Funktionenfaktor $C(X)$ auf ganz X.

2) Nach Wahl eines globalen Funktionenfaktors $C(X)$ existiert für jedes $U \in \mathcal{T}_X$ ein eindeutiger Funktionenfaktor $C(U)$, so dass

$$\varrho_{U,X}(C(X)) \subset C(U).$$

(Im Allgemeinen gilt nicht Gleichheit, da $C(U)$ i.Allg. Elemente enthält, die sich nicht global fortsetzen lassen.)

3) Die so induzierte Zuordnung

$$U \mapsto C(U)$$

definiert eine Untergarbe von $\mathcal{O}_X$.

4) Für jedes $f \in C(U)$ ist

$$\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(\beta_U(f)),$$

wobei wir den *Träger einer Superfunktion* definieren durch

$$\mathrm{supp}(f) := \{x \in U \,|\, [f]_x \neq 0\}.$$

1.4 Der Satz von Batchelor

Wir erinnern uns an Beispiel 1.3.10.3 Seite 18:

Sei X eine m-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang n. Dann ist $(X, \mathcal{O}_E)$ eine Supermannigfaltigkeit der Dimansion $m|n$, wobei $\mathcal{O}_E$ die Garbe der glatten Schnitte im Graßmannbündel

$$\Lambda^* E = \Lambda^0 E \oplus \Lambda^1 E \oplus \cdots \oplus \Lambda^n E$$

ist. Superkarten wurden konstruiert aus klassischen Karten $\varphi : U \to V$ von X ($U \in \mathcal{T}_X$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, φ Diffeomorphismus), über denen das Bündel E trivial ist, d.h. es gibt glatte Schnitte $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ von $E|_U \to U$, so dass $\vartheta_1(x), \ldots, \vartheta_n(x)$ eine Basis von E_x bilden für alle $x \in U$. Für eine offene Teilmenge $V' \subset V$ ist dann

$$\Psi_{V'} : \mathcal{O}_{m|n}(V') \to \mathcal{O}_E(\varphi^{-1}(V'))$$
$$f = \sum_{\varepsilon} f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n} \mapsto \sum_{\varepsilon} (f_\varepsilon \circ \varphi) \vartheta_1^{\varepsilon_1} \cdots \vartheta_n^{\varepsilon_n},$$

wobei $\theta_1 \cdots \theta_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n = \Lambda^1 \mathbb{R}^n$ ist.

Ferner ist $C(U) := C^\infty(U, \Lambda^0 E) \cong C^\infty(U)$ ein Funktionenfaktor. Der Garbenhomomorphismus

$$\beta_U : \mathcal{O}_E(U) \to C^\infty(U)$$

ist gegeben durch die Projektion auf $\Lambda^0 E$, also ist

$$\ker \beta_U = \mathcal{O}^1(U) = C^\infty(U, \bigoplus_{k \geq 1} \Lambda^k E).$$

1.4.1. Satz (Batchelor 1980). *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Supermannigfaltigkeit der Dimension $m|n$ und sei $C(X) \subset \mathcal{O}_X(X)$ ein Funktionenfaktor.*
Dann existiert ein Vektorbündel $E \to X$ vom Rang n, so dass $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorph ist zu $(X, \mathcal{O}_E)$. Das Vektorbündel E ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und hängt nicht von der Wahl des Funktionenfaktors $C(X)$ ab. Unter dem Isomorphismus $(X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_E)$ der Supermannigfaltigkeiten wird $C(X)$ auf $C^\infty(X, \Lambda^0 E)$ abgebildet.

1.4.2 Bemerkung. Da jede Supermannigfaltigkeit einen Funktionenfaktor besitzt, erhalten wir eine 1 : 1–Korrenpondenz

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Supermannigfaltigkeiten}\\ \text{der Dim. } m|n \text{ mod. Iso-}\\ \text{morphie von Supermgfen.}\end{array}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{array}{l}\text{Vektorbündel vom Rang } n \text{ über}\\ m\text{–dim. diff.baren Mannigfaltig-}\\ \text{keiten mod. Isomorphie von Vek-}\\ \text{torbündeln.}\end{array}\right\}.$$

Vorsicht: Morphismen zwischen Supermannigfaltigkeiten werden im Allgemeinen nicht durch Vektorbündelhomomorphismen induziert! (D.h. man erhält keine Korrespondenz der Kategorien.)

Zwar induziert – wie in 1.3.10.3 beschrieben – jeder Vektorbündelhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array}$$

der faserweise ein Isomorphismus ist, einen Morphismus $(\varphi, \Psi) : (M, \mathcal{O}_E) \to (M', \mathcal{O}_F)$ der zugehörigen Supermannigfaltigkeiten, es sind aber nicht alle Morphismen $(M, \mathcal{O}_E) \to (M', \mathcal{O}_F)$ von dieser Form (vgl. Bsp. 1.3.10.2 Seite 17).

Bevor wir den Beweis von Satz 1.4.1 angehen, wollen wir sehen, wie man Vektorbündel mittels der Angabe von glatten (Basisschnitt–) Transformationsabbildungen beschreiben kann. Diese Sicht auf Vektorbündel ist implizit in der Physik recht gebräuchlich.

1.4.3 Lemma. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit offener Überdeckung $(U_\alpha)_\alpha$ und seien*

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

glatte matrixwertige Abbildungen. Für alle α, β, γ gelte auf $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ die Kozykelbedingung

$$g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}.$$

Dann existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Vektorbündel $E \to X$, das auf U_α durch glatte Basisschnitte $e_{\alpha,1}, \ldots, e_{\alpha,n}$ trivialisiert wird, so dass für alle α, β und alle $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{\alpha\beta}(x)_{ij} e_{\beta,j}(x) = e_{\alpha,i}(x).$$

1.4.4 Bemerkung. Aus der Kozykelbedingung folgt unmittelbar

$$g_{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}, \quad \text{also} \quad g_{\alpha\alpha} = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}.$$

Beweis von Lemma 1.4.3.

a) Eindeutigkeit. Sind E, $\widetilde{E} \to X$ zwei solche Vektorbündel und $e_{\alpha,i}$ bzw. $\widetilde{e}_{\alpha,i}$ die entsprechenden Basisschnitte auf U_α, so definiere

$$\Phi : E \to \widetilde{E} \quad \text{durch} \quad \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_{\alpha,i}(x)\right) := \sum_{i=1}^{n} c_i \widetilde{e}_{\alpha,i}(x).$$

Φ ist wohldefiniert, denn für $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} e_{\alpha,i}(x) & = & \sum_j g_{\alpha\beta}(x)_{ij} e_{\beta,j}(x) \\ {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ \widetilde{e}_{\alpha,i}(x) & = & \sum_j g_{\alpha\beta}(x)_{ij} \widetilde{e}_{\beta,j}(x). \end{array}$$

Offensichtlich ist Φ glatt, fasernweise ein Isomorphismus und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr] & & \widetilde{E} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. Φ ist ein Vektorbündelisomorphismus.

b) Existenz. Definiere

$$E := \dot{\bigcup_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n \big/ \sim$$

wobei
$$U_\alpha \times \mathbb{R}^n \ni (x,v) \sim (y,w) \in U_\beta \times \mathbb{R}^n$$
genau dann, wenn $x = y$ und $w = g_{\alpha\beta}(x)^t v$.

Aus der Kozykelbedingung (beachte die Bemerkung 1.4.4 oben) folgt, dass die Relation „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation ist. Durch
$$\pi : E \to X, \qquad \pi([x,v]) = x,$$
wird ein Vektorbündel über X definiert. Für $x \in U_\alpha$ und die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ setze
$$e_{\alpha,i}(x) := [x, e_i].$$
Diese $e_{\alpha,i}$ haben die gewünschte Transformationseigenschaft, denn für $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ gilt:
$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n g_{\alpha\beta}(x)_{ij} e_{\beta,j}(x) &= \left[\overset{\substack{U_\beta \\ \rotatebox{90}{$\in$}}}{x}, \sum_{j=1}^n g_{\alpha\beta}(x)_{ij} e_j\right] \\
&= \left[x, \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(x)_{i1} \\ \vdots \\ g_{\alpha\beta}(x)_{in} \end{pmatrix}\right] \\
&= \left[x, g_{\alpha\beta}(x)^t e_i\right] \\
&= [\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ U_\alpha}}{x}, e_i] = e_{\alpha,i}(x)
\end{aligned}$$
$\square$

1.4.5 Übung. Anwendung des Lemmas auf S^2.

Überdecke $X = S^2$ durch zwei Kappen U_1 und U_2, wobei U_1 die südliche Hemisphäre mit einem kleinen Rand nördlich des Äquators und U_2 die nördliche Hemisphäre mit einem kleinen Rand südlich des Äquators sei.

Beschreibe TS^2 durch
$$g_{12} : U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}).$$

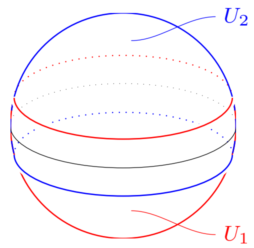


Abb. 3: Überdeckung der S^2 durch zwei Kappen U_1 und U_2.

Beweis von Satz 1.4.1.

a) Sei $C(X) \subset \mathcal{O}_X(X)$ ein Funktionenfaktor. Nach 1.3.22.2 existiert dann für $U \subset X$ offen ein eindeutiger Funktionenfaktor $C(U)$ mit $\rho_{U,X}(C(X)) \subset C(U)$.

   Sei wie zuvor $\mathcal{O}^1(U) = \ker \beta_U$ das Ideal der nilpotenten Elemente in $\mathcal{O}_X(U)$. Bezeichne das von $\mathcal{O}^1(U) \cdot \mathcal{O}^1(U)$ in $\mathcal{O}_X(U)$ erzeugte Ideal mit $\mathcal{O}^2(U)$. Offenbar ist $\mathcal{O}^2(U) \subset \mathcal{O}^1(U)$. Sei
$$\mathcal{E}(U) := \mathcal{O}^1(U) \big/ \mathcal{O}^2(U).$$
   Ferner setze
$$\sigma_U : C^\infty(U) \to C(U) \subset \mathcal{O}_X(U), \qquad \sigma_U := \left(\beta_U|_{C(U)}\right)^{-1}.$$

Definiere für $f \in C^\infty(U)$ und $\varphi \in \mathcal{O}^1(U)$:

$$f \cdot \overline{\varphi} := \overline{\sigma_U(f) \cdot \varphi},$$

wobei $\overline{\varphi} = \varphi + \mathcal{O}^2(U)$ die Restklasse von φ in $\mathcal{E}(U)$ bezeichne. Da $\mathcal{O}^1(U)$ und $\mathcal{O}^2(U)$ Ideale sind, ist dies eine wohldefinierte Multiplikation. Dadurch wird $\mathcal{E}(U)$ zu einem $C^\infty(U)$–Modul.

b) Beh.: Ist $U \subset U'$ in einer Superkarte enthalten, so ist $\mathcal{E}(U)$ ein freier $C^\infty(U)$–Modul vom Rang n. Für eine Superkarte

$$(\varphi, \Psi) : (U', \mathcal{O}_X|_{U'}) \to (V', \mathcal{O}_{m|n}|_{V'})$$

ist

$$\overline{\theta}_i := \Psi_V \theta_i + \mathcal{O}^2(U), \qquad V = \varphi(U) \subset V',$$

eine $C^\infty(U)$–Basis, wobei $\theta_1, \ldots, \theta_n$ Erzeuger von $\Lambda^* \mathbb{R}^n$ seien.

Bew.: Es genügt, in $\mathcal{O}_{m|n}(V)$ zu rechnen, da mit Hilfe der Superkarte alles nach $\mathcal{O}_X(U)$ übertragen werden kann. Die zu betrachtenden Ideale können wir in Koordinaten beschreiben:

$$\mathcal{O}^1_{m|n}(V) = \Big\{ \sum_{|\varepsilon| \geq 1} f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n} \Big\},$$
$$\mathcal{O}^2_{m|n}(V) = \Big\{ \sum_{|\varepsilon| \geq 2} f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n} \Big\}.$$

Der Quotient ist

$$\mathcal{E}(V) = \mathcal{O}^1_{m|n}(V) \big/ \mathcal{O}^2_{m|n}(V) \cong \Big\{ \sum_{|\varepsilon| = 1} f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n} \Big\} = \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i \theta_i \Big\}.$$

Dann ist $\mathcal{E}(V)$ ein freier $C^\infty(V)$–Modul vom Rang n für die durch

$$f \bullet \overline{\psi} := \overline{f \cdot \psi} \qquad \text{für } f \in C^\infty(V) \text{ und } \psi \in \mathcal{O}^1_{m|n}(V)$$

gegebene $C^\infty(V)$-Modulstruktur. Für $f \in C^\infty(V)$ ist $\beta_V \sigma_V(f) = f$ nach Definition von σ_V, d.h.

$$\sigma_V(f) = f + \nu_V(f),$$

wobei $\nu_V(f) \in \mathcal{O}^1_{m|n}(V)$ der nilpotente Anteil sei. Wir sehen nun, dass die von $C(U)$ induzierte Modulstruktur auf $\mathcal{E}(V)$ mit der durch „$\bullet$“ definierten übereinstimmt:

$$f \cdot \overline{\psi} = \overline{\sigma_V(f) \cdot \psi} = \overline{f \cdot \psi} + \overline{\underbrace{\nu_V(f) \cdot \psi}_{\substack{\cap \\ \mathcal{O}^1 \cdot \mathcal{O}^1}}} = \overline{f \cdot \psi} = f \bullet \overline{\psi}.$$

c) Konstruktion des Vektorbündels $E \to X$. Überdecke X durch Superkarten

$$(\varphi_\alpha, \Psi_\alpha) : (U_\alpha, \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}) \to (V_\alpha, \mathcal{O}_{m|n}|_{V_\alpha}).$$

Wähle für die $\theta_i \in \mathcal{O}_{m|n}(V_\alpha)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, d.h. die Standarderzeuger von $\Lambda^* \mathbb{R}^n$. Setze

$$\overline{\theta}_{\alpha,i} = \Psi_{\alpha, V_\alpha} \theta_i + \mathcal{O}^2(U_\alpha) \in \mathcal{E}(U_\alpha).$$

Im Schnitt $U_\alpha \cap U_\beta$ von zwei Superkartengebieten gilt:

$$\overline{\theta}_{\alpha,i}(x) = \sum_j g_{\alpha\beta}(x)_{ij}\overline{\theta}_{\beta,j}(x), \qquad (*)$$

wobei die Koeffizienten $g_{\alpha\beta}(\cdot)_{ij}$ der Basisdarstellung im Modul $\mathcal{E}(U_\alpha \cap U_\beta)$ Elemente von $C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)$ sind. Die so erhaltenen Matrizen $g_{\alpha\beta} \in \mathrm{GL}(n, C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta))$ von glatten Funktionen können gleichzeitig aufgefasst werden als glatte Abbildung $U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, so dass wir uns der Situation des Lemmas nähern. Es ist noch nachzurechnen, dass auf $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ die Kozykelbedingung

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma}$$

erfüllt ist. Nun gilt aber auf $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ einerseits (Anwendung von $(*)$ für α und γ):

$$\overline{\theta}_{\alpha,i}(x) = \sum_k g_{\alpha\gamma}(x)_{ik}\overline{\theta}_{\gamma,k}(x),$$

und andererseits (Anwendung von $(*)$ erst für α und β, dann für β und γ):

$$\overline{\theta}_{\alpha,i}(x) = \sum_j g_{\alpha\beta}(x)_{ij}\overline{\theta}_{\beta,j}(x) = \sum_{j,k} g_{\alpha\beta}(x)_{ij}g_{\beta\gamma}(x)_{jk}\overline{\theta}_{\gamma,k}(x).$$

Mit Koeffizientenvergleich (Basisdarstellungen!) folgt die Kozykelbedingung. Sei $E \to X$ das nach Lemma 1.4.3 von den $g_{\alpha\beta}$ bestimmte Vektorbündel vom Rang n über X. E wird auf U_α durch glatte Basisschnitte $e_{\alpha,1}, \ldots, e_{\alpha,n}$ trivialisiert.

d) Konstruktion des Garbenisomorphismus $\Phi : \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_X$; zunächst für offene Teilmengen U von X, die in einer Superkarte enthalten sind. Für $V \subset \mathbb{R}^m$ offen gilt

$$\mathcal{O}_{m|n}(V) \cong \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{O}^k_{m|n}(V) \Big/ \mathcal{O}^{k+1}_{m|n}(V),$$

wobei $\mathcal{O}^k_{m|n}(V)$ das von $\underbrace{\mathcal{O}^1_{m|n}(V)\cdots\mathcal{O}^1_{m|n}(V)}_{k\text{-mal}}$ erzeugte Ideal sei, also

$$\mathcal{O}^k_{m|n}(V) = \Big\{ \sum_{|\varepsilon|\geq k} f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n} \Big\}.$$

Für $\mathcal{O}^k_{m|n}(V) \ni g = \sum_{|\varepsilon|\geq k} g_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n}$ bezeichnen wir mit

$$\overline{g}^{(k)} \in \mathcal{O}^k_{m|n}(V) \Big/ \mathcal{O}^{k+1}_{m|n}(V) \cong \Big\{ \sum_{|\varepsilon|=k} g_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n} \Big\}$$

die Restklasse von g. Identifiziere $\overline{g}^{(k)}$ mit $\displaystyle\sum_{|\varepsilon|=k} g_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n}$.

Sei $U \subset U_\alpha$ für eine Superkarte $(\varphi_\alpha, \Psi_\alpha) : (U_\alpha, \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}) \to (V_\alpha, \mathcal{O}_{m|n}|_{V_\alpha})$ von $(X, \mathcal{O}_X)$ und sei $V := \varphi_\alpha(U) \subset V_\alpha$. Wie oben bemerkt, ist $E|_{U_\alpha} \to U_\alpha$ trivial mit lokalem Rahmen $e_{\alpha,1}, \ldots, e_{\alpha,n}$. Wir definieren

$$\Phi_{k,U,\alpha} : C^\infty(U, \Lambda^k E) \to \mathcal{O}^k_X(U)/\mathcal{O}^{k+1}_X(U)$$
$$f = \sum_{|\varepsilon|=k} f_\varepsilon e_{\alpha,1}^{\varepsilon_1}\cdots e_{\alpha,n}^{\varepsilon_n} \mapsto \overline{\Psi_{\alpha,V}\Big(\sum_{|\varepsilon|=k} (f_\varepsilon \circ \varphi_\alpha^{-1})\theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n} \Big)}^{(k)}.$$

Man rechnet mit Hilfe der Übergangsfunktionen nach, dass für $U \subset U_\alpha \cap U_\beta$ gilt

$$\Phi_{k,U,\alpha} = \Phi_{k,U,\beta}.$$

Damit erhalten wir für U, die in einer Superkarte enthalten sind, einen Isomorphismus

$$\Phi_{1,U} : \mathcal{O}_E(U) = C^\infty(U, \Lambda^* E) \to \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{O}_X^k(U)/\mathcal{O}_X^{k+1}(U), \qquad \Phi_{1,U} = \sum_{k=0}^{n} \Phi_{k,U}.$$

Nun liefert jede Superkarte $(\varphi, \Psi) : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (V, \mathcal{O}_{m|n}|_V)$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{O}_X^k(U) \Big/ \mathcal{O}_X^{k+1}(U) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{O}_{m|n}^k(V) \Big/ \mathcal{O}_{m|n}^{k+1}(V) \cong \mathcal{O}_{m|n}(V) \cong \mathcal{O}_X(U).$$

Allerdings hängt dieser Isomorphismus von der Wahl der Superkarte ab. Mittels einer Überdeckung durch Superkarten und einer untergeordneten Teilung der Eins können wir mit den Einschränkungen verträgliche Isomorphismen konstruieren

$$\Phi_{2,U} : \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{O}_X^k(U)/\mathcal{O}_X^{k+1}(U) \to \mathcal{O}_X(U).$$

Wir erhalten dann den gesuchten Garbenhomomorphismus

$$\Phi : \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_X, \quad \Phi_U := \Phi_{2,U} \circ \Phi_{1,U}$$

zumindest für „kleine“ U, d. h. für solche, die in einer Superkarte enthalten sind.

e) Konstruktion des Garbenisomorphismus $\Phi : \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_X$ für beliebige offene Teilmengen U von X. Dies ist ein allgemeingültiges Argument für beliebige Garben. Hat man eine Familie von Homomorphismen $\Phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für alle U aus einer Basis der Topologie von X konstruiert, die mit den Einschränkungsmorphismen verträglich sind, so setzt sich diese Familie in eindeutiger Weise zu einem Garbenhomomorphismus für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ fort.

   Ist nämlich $U \subset X$ eine beliebige offene Teilmenge, so schreibe $U = \cup_\alpha U_\alpha$ als Vereinigung von Elementen aus der Basis. Für $f \in \mathcal{F}(U)$ setze $g_\alpha := \Phi_{U_\alpha}(\rho_{U_\alpha,U}(f))$ und beachte, dass für alle α und β gilt

$$\begin{aligned} \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(g_\alpha) &= \Phi_{U_\alpha \cap U_\beta}(\rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(f_\alpha)) \\ &= \Phi_{U_\alpha \cap U_\beta}(\rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U}(f)) \\ &= \Phi_{U_\alpha \cap U_\beta}(\rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta}(f_\beta)) \\ &= \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta}(g_\beta). \end{aligned}$$

   Somit gibt es ein eindeutiges $g \in \mathcal{G}(U)$ mit $\rho_{U_\alpha,U}(g) = g_\alpha$. Dann leistet $\Phi_U(f) := g$ das Gewünschte.

f) Eindeutigkeit von E. Die Garbe der glatten Schnitte in $\Lambda^* E$ legt das Algebrenbündel bis auf Isomorphie fest. Dann ist auch E festgelegt, da

$$E = \bigoplus_{k\geq 1} \Lambda^k E \Big/ \bigoplus_{k \geq 2} \Lambda^k E$$

   wobei $\bigoplus_{k\geq 1} \Lambda^k E$ das Ideal der nilpotenten Elemente und $\bigoplus_{k\geq 2} \Lambda^k E$ das von Produkten zweier nilpotenter Elemente erzeugte Ideal ist.

□

1.5 Vektorfelder

1.5.1 Definition. Sei $A = A_0 \oplus A_1$ eine superkommutative Superalgebra über $\mathbb{K}$. Ein $\delta \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(A)$ heißt *Superderivation auf A*, falls die homogenen Bestandteile η von δ

$$\eta(f \cdot g) = \eta(f) \cdot g + (-1)^{p(f)p(\eta)} f \cdot \eta(g)$$

erfüllen für allen homogenen $f, g \in A$. Schreibe $\mathrm{Der}(A)$ für den $\mathbb{K}$-Vektorraum der Superderivationen auf A.

1.5.2 Lemma. $\mathrm{Der}(A)$ *wird vermöge*

$$(f \cdot \delta)(g) := f \cdot \delta(g)$$

zu einem A-Links-Supermodul.

Beweis. Seien $f, g, h \in A$ und $\delta \in \mathrm{Der}(A)$ homogen. Dann gilt, da A superkommutativ ist,

$$\begin{aligned}(f \cdot \delta)(g \cdot h) &= f \cdot \delta(g \cdot h)\\ &= f \cdot \delta(g) \cdot h + (-1)^{p(\delta)p(g)} f \cdot g \cdot \delta(h)\\ &= f \cdot \delta(g) \cdot h + (-1)^{p(\delta)p(g)+p(f)p(g)} g \cdot f \cdot \delta(h)\\ &= (f \cdot \delta)(g) \cdot h + (-1)^{(p(\delta)+p(f))p(g)} g \cdot (f \cdot \delta)(h).\end{aligned}$$

Also ist $f \cdot \delta$ eine Derivation der Parität $p(\delta) + p(f)$. □

1.5.3 Übung. Zeige, dass $\mathrm{Der}(A)$ mit dem Superkommutator eine Lie-Superalgebra bildet.

Sei ab nun wieder $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Supermannigfaltigkeit der Dimension $m|n$. Schreibe für $U \in \mathcal{T}_X$

$$\mathrm{Der}(U) := \mathrm{Der}(\mathcal{O}_X(U)).$$

1.5.4 Lemma. *Superderivationen sind lokale Operationen, d.h. sind $g \in \mathcal{O}_X(U)$ und $\delta \in \mathrm{Der}(U)$, so gilt für $V \subset U$ offen:*

$$\varrho_{V,U}(g) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho_{V,U}(\delta(g)) = 0.$$

Somit gilt $\mathrm{supp}(\delta(g)) \subset \mathrm{supp}(g)$.

Beweis. OBdA sei δ homogen. Sei $p \in V$. Wähle eine Funktion $\varphi \in C^\infty(U)$, die in einer offenen Ungebung $W_1 \subset V$ von p verschwindet und konstant 1 ist auf einer offenen Menge $W_2 \supset U - V$.

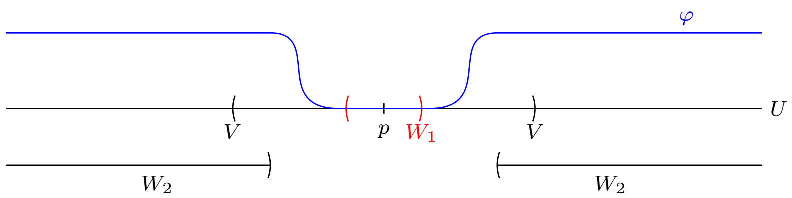


Abb. 4: Ausschneidefunktion φ um p.

Setze $\widetilde{\varphi} := \sigma_U(\varphi) \in \mathcal{O}_X(U)_0$, wobei σ_U die Einbettung eines Funktionenfaktors ist. Dann ist auch $\widetilde{\varphi} \equiv 1$ auf W_2, denn

$$\varrho_{W_2,U}(\widetilde{\varphi}) = \varrho^{\mathcal{O}_X}_{W_2,U}(\sigma_U(\varphi)) = \sigma_{W_2}(\varrho^{C^\infty}_{W_2,U}(\varphi)) = \sigma_{W_2}(1_{C^\infty(W_2)}) = 1_{\mathcal{O}_X(W_2)},$$

also

$$\varrho_{W_2,U}(\widetilde{\varphi}\cdot g) = \varrho_{W_2,U}(\widetilde{\varphi})\cdot \varrho_{W_2,U}(g) = \varrho_{W_2,U}(g).$$

Ferner

$$\varrho_{V,U}(\widetilde{\varphi}\cdot g) = \varrho_{V,U}(\widetilde{\varphi})\cdot \underbrace{\varrho_{V,U}(g)}_{=0} = 0 = \varrho_{V,U}(g).$$

Aus dem Garben-Axiom 3 der lokalen Bestimmtheit folgt $\widetilde{\varphi}\cdot g = g$. Da δ Superderivation ist und $\widetilde{\varphi}$ gerade, folgt hiermit:

$$\begin{aligned}\varrho_{W_1,U}(\delta(g)) &= \varrho_{W_1,U}(\delta(\widetilde{\varphi}\cdot g)) = \varrho_{W_1,U}\big(\delta(\widetilde{\varphi})\cdot g + \widetilde{\varphi}\cdot\delta(g)\big)\\ &= \varrho_{W_1,U}(\delta(\widetilde{\varphi}))\cdot \underbrace{\varrho_{W_1,U}(g)}_{=0} + \underbrace{\varrho_{W_1,U}(\widetilde{\varphi})}_{=0}\cdot \varrho_{W_1,U}(\delta(g))\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $p \in V$. Also ist $\varrho_{V,U}(\delta(g)) = 0$. $\square$

Mit diesem Lemma haben wir gezeigt, dass eine Derivation auf $\mathcal{O}_X(U)$ für $p \in U$ auch eine Derivation auf dem Halm $\mathcal{O}_{X,p}$ induziert.

Wie im Beweis von Satz 1.3.16 konstruiert man Einschränkungsmorphismen

$$\varrho'_{V,U} : \mathrm{Der}(U) \to \mathrm{Der}(V),$$

die durch

$$\varrho'_{V,U}(\delta)(\varrho_{V,U}(f)) := \varrho_{V,U}(\delta(f))$$

charakterisiert sind. Dadurch wird

$$U \mapsto \mathrm{Der}(U)$$

zu einer $\mathcal{O}_X$-Supermodulgarbe $\mathrm{Der}\,\mathcal{O}_X$.

1.5.5 Definition. Die Garbe $\mathrm{Der}\,\mathcal{O}_X$ heißt *Garbe der Supervektorfelder auf $(X, \mathcal{O}_X)$*.

Wir bestimmen die Supervektorfelder auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{O}_{m|n})$. Für geraden Koordinaten x_i, $i = 1, \dots, m$ setze

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n}\Big) := \sum_\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}\theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n}.$$

Alle $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sind gerade Supervektorfelder. Wir nennen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ auch *gerades Koordinatenfeld*. Für ungeraden Koordinaten θ_j, $j = 1, \dots, n$ setze

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j}\Big(\sum_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n}\Big) := \sum_\varepsilon f_\varepsilon\cdot\varepsilon_j\cdot(-1)^{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{j-1}}\theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\widehat{\theta_j^{\varepsilon_j}}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n}.$$

Damit werden ungerade Supervektorfelder $\frac{\partial}{\partial \theta_j}$ definiert, die *ungeraden Koordinatenfelder*.

Bemerkung. Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}x_i = \delta_{ij}, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta_j}x_i = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\theta_i = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta_j}\theta_i = \delta_{ij}.$$

1.5.6 Lemma. Der $\mathcal{O}_{m|n}(V)$ *ist ein freier* $\mathcal{O}_{m|n}(V)$*–Supermodul mit angepasster Basis*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_n}.$$

Der Superkommutator von je zweien dieser Koordinatenfelder verschwindet. Insbesondere ist

$$\Big(\frac{\partial}{\partial \theta_j}\Big)^2 = 0, \qquad \textit{für alle } j = 1, \dots, n.$$

Beweis.

a) Die Aussage über die Superkommutatoren ergibt sich direkt aus der Definition.

b) Lineare Unanhängigkeit der Koordinatenfelder. Schreibe $\xi_i := x_i$, $i = 1, \dots, m$, $\xi_{m+j} := \theta_j$, $j = 1, \dots, n$. Sei

$$\sum_{k=1}^{m+n} f_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} = 0, \qquad f_k \in \mathcal{O}_{m|n}(V).$$

Dann folgt mit obiger Bemerkung

$$0 = \sum_{k=1}^{m+n} f_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}\xi_j = f_j \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, m+n.$$

c) Koordinatenfelder erzeugen alle Superderivationen. Sei $\delta \in \operatorname{Der}\mathcal{O}_{m|n}(V)$. Setze

$$\delta' := \delta - \sum_{k=1}^{m+n} \delta(\xi_k)\frac{\partial}{\partial \xi_k}.$$

Wir zeigen $\delta' = 0$. Wir wissen, wieder aus obiger Bemerkung, dass $\delta'(\xi_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, m+n$. Da δ' eine Superderivation ist, verschwindet δ' also auf allen Polynomen in $\xi_1, \dots, \xi_{m+n}$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\delta'\Big(\sum_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n}\Big) &= \sum_\varepsilon \Big(\delta'(f_\varepsilon)\theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n} + f_\varepsilon \underbrace{\delta'(\theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n})}_{=0,\text{ da polynomial}}\Big)\\ &= \sum_\varepsilon \delta'(f_\varepsilon)\theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n}.\end{aligned}$$

Man beachte, das wegen $C^\infty(V) \subset \mathcal{O}_{m|n}(V)_0$ hier keine Vorzeichen auftreten. Es reicht nun zu zeigen, dass $\delta'(f) = 0$ für alle $f \in C^\infty(V) \subset \mathcal{O}_{m|n}(V)$. Schreibe das Bild von f in Basisdarstellung mit Koeffizienten $\delta'_\varepsilon(f)$:

$$\delta'(f) =: \sum_\varepsilon \delta'_\varepsilon(f)\theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n}.$$

Da für g, $f \in C^\infty(V)$ einerseits gilt

$$\delta'(f\cdot g) = f\cdot\delta'(g) + \delta'(f)\cdot g = \sum_\varepsilon \big(f\cdot\delta'_\varepsilon(g) + \delta'_\varepsilon(f)\cdot g\big)\theta_1^{\varepsilon_1}\cdots\theta_n^{\varepsilon_n},$$

und andererseits
$$\delta'(f \cdot g) = \sum_\varepsilon \delta'_\varepsilon(f \cdot g)\theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n},$$
folgt mit Koeffizientenvergleich, dass $\delta'_\varepsilon : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ für alle ε eine Derivation auf $C^\infty(V)$ ist. Für diese wissen wir aber aus der Differentialgeometrie I, dass sie von den (geraden) Koordinatenfeldern $\frac{\partial}{\partial x_i}$ erzeugt werden. Also verschwinden alle δ'_ε auf $x_1, \ldots, x_m$, und somit sind alle $\delta'_\varepsilon = 0$.

□

1.5.7 Bemerkung. Man schreibt statt $\frac{\partial}{\partial\theta_j}$ auch $\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial\theta_j}}$ für die Ableitung von links zur Unterscheidung von $\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\theta_j}}$, der Ableitung von rechts, die man definiert durch

$$\Big(\sum_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}\Big)\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\theta_j}} := \sum_\varepsilon f_\varepsilon \cdot \varepsilon_j \cdot (-1)^{\varepsilon_{j+1}+\cdots+\varepsilon_n}\theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \widehat{\theta_j^{\varepsilon_j}} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}.$$

1.5.8 Bemerkung. Ist $(\varphi_\alpha, \Psi_\alpha) : (U_\alpha, \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}) \to (V_\alpha, \mathcal{O}_{m|n}|_{V_\alpha})$ eine Superkarte, so definiert man die entsprechenden Superderivationen auf $\mathcal{O}_X(U)$, $U \subset U_\alpha$ offen, und bezeichnet sie mit demselben Symbol. Mit $V := \varphi(U)$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_X(U) & \xleftarrow[\cong]{\Psi_V} & \mathcal{O}_{m|n}(V) \\
{\scriptstyle \frac{\partial}{\partial\xi_k}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \frac{\partial}{\partial\xi_k}} \\
\mathcal{O}_X(U) & \xleftarrow[\cong]{\Psi_V} & \mathcal{O}_{m|n}(V)
\end{array}$$

Für jedes offene $U \subset X$, das in einer Superkarte enthalten ist, ist $\mathrm{Der}(U)$ ein freier $\mathcal{O}_X(U)$-Links-Supermodul vom Rang $m|n$ mit durch die Superkarte induzierten Koordinatenfeldern als angepasster Basis. Man beachte, dass folglich die Schreibweise

$$\delta = \sum_{k=1}^{m+n} f_k \frac{\partial}{\partial\xi_k}, \qquad f_k \in \mathcal{O}_X(U),$$

immer eine Kartenwahl voraussetzt.

1.6 Differentialrechnung

Sei $(V, \mathcal{O}_{m|n}|_V)$ ein Supergebiet mit Koordinaten $x_1 = \xi_1, \ldots, x_m = \xi_m$, $\theta_1 = \xi_{m+1}, \ldots, \theta_n = \xi_{m+n}$. Sei $(W, \mathcal{O}_{r|s}|_W)$ ein weiteres Supergebiet mit Koordinaten $y_1 = \eta_1, \ldots, y_r = \eta_r$, $\tau_1 = \eta_{r+1}, \ldots, \tau_s = \eta_{r+s}$. Sei

$$(\varphi, \Psi) : (V, \mathcal{O}_{m|n}|_V) \to (W, \mathcal{O}_{r|s}|_W)$$

ein gerader Morphismus. Setze

$$\Psi_k := \Psi_W(\eta_k) \in \mathcal{O}_{m|n}(V), \qquad k = 1, \ldots, r+s.$$

1.6.1 Lemma.

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i} \circ \Psi_W = \sum_{k=1}^{r+s} \frac{\partial\Psi_k}{\partial\xi_i} \cdot \Big(\Psi_W \circ \frac{\partial}{\partial\eta_k}\Big) : \mathcal{O}_{r|s}(W) \to \mathcal{O}_{m|n}(V).$$

Beweis. Definiere

$$D_i := \frac{\partial}{\partial \xi_i} \circ \Psi_W - \sum_{k=1}^{r+s} \frac{\partial \Psi_k}{\partial \xi_i} \Big(\Psi_W \circ \frac{\partial}{\partial \eta_k} \Big)$$

und berechne die „Derivationsregel längs Ψ_W“:

$$D_i(f \cdot g) = D_i(f) \cdot \Psi_W(g) + (-1)^{p(D_i)p(f)} \Psi_W(f) \cdot D_i(g),$$

wobei $f,\, g \in \mathcal{O}_{r|s}(W)$ homogene Superfunktionen seien und $p(D_i) := p(\xi_i)$. Es gilt ferner

$$D_i(\eta_j) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Psi_j - \sum_{k=1}^{r+s} \frac{\partial \Psi_k}{\partial \xi_i} \underbrace{\Psi_W(\delta_{jk})}_{=\delta_{jk}} = 0.$$

Mit der Derivationsregel längs Ψ_W folgt, dass D_i auf allen Polynomen in $\eta_1, \ldots, \eta_{r+s}$ verschwindet. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 1.5.6 folgt dann $D_i = 0$. □

Wir schreiben die Aussage von Lemma 1.6.1 in Matrixschreibweise:

Für $f \in \mathcal{O}_{r|s}(W)$ beliebig gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Psi_W(f) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \xi_{m+n}} \Psi_W(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_{r+s}}{\partial \xi_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_{m+n}} & \cdots & \frac{\partial \Psi_{r+s}}{\partial \xi_{m+n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_W\big(\frac{\partial f}{\partial \eta_1}\big) \\ \vdots \\ \Psi_W\big(\frac{\partial f}{\partial \eta_{r+s}}\big) \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt dies im „klassischen Fall“, d.h. im Fall $n = s = 0$. Dann ist diese Matrix die Transponierte der Jacobimatrix von φ.

1.6.2 Definition. Die Supertransponierte

$$J(\varphi, \Psi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_{r+s}}{\partial \xi_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_{m+n}} & \cdots & \frac{\partial \Psi_{r+s}}{\partial \xi_{m+n}} \end{pmatrix}^{st} \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{O}_{m|n}(V)}(m|n, r|s)$$

heißt *Jacobimatrix des Morphismus* (φ, Ψ).

1.6.3 Bemerkung. Die Jacobimatrix ist eine gerade Matrix. Im Detail sieht sie so aus:

$$J(\varphi,\Psi) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_r}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_{r+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{r+s}}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial\Psi_r}{\partial x_m} & \frac{\partial\Psi_{r+1}}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{r+s}}{\partial x_m} \\ \hline \frac{\partial\Psi_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_r}{\partial \theta_1} & \frac{\partial\Psi_{r+1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{r+s}}{\partial \theta_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Psi_1}{\partial \theta_n} & \cdots & \frac{\partial\Psi_r}{\partial \theta_n} & \frac{\partial\Psi_{r+1}}{\partial \theta_n} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{r+s}}{\partial \theta_n} \end{array}\right)^{st}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_m} & -\frac{\partial\Psi_1}{\partial \theta_1} & \cdots & -\frac{\partial\Psi_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Psi_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_r}{\partial x_m} & -\frac{\partial\Psi_r}{\partial \theta_1} & \cdots & -\frac{\partial\Psi_r}{\partial \theta_n} \\ \hline \frac{\partial\Psi_{r+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{r+1}}{\partial x_m} & \frac{\partial\Psi_{r+1}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{r+1}}{\partial \theta_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Psi_{r+s}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{r+s}}{\partial x_m} & \frac{\partial\Psi_{r+s}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial\Psi_{r+s}}{\partial \theta_n} \end{array}\right)$$

1.6.4. Satz (Kettenregel). *Seien*

$$\begin{aligned} &(\varphi_1,\Psi_1) : (V,\mathcal{O}_{m|n}|_V) \to (W,\mathcal{O}_{r|s}|_W) \\ \textit{und}\quad &(\varphi_2,\Psi_2) : (W,\mathcal{O}_{r|s}|_W) \to (Q,\mathcal{O}_{p|q}|_Q) \end{aligned}$$

Morphismen. Dann gilt:

$$J\big((\varphi_2,\Psi_2)\circ(\varphi_1,\Psi_1)\big) = \Psi_{1,W}\big(J(\varphi_2,\Psi_2)\big)\cdot J(\varphi_1,\Psi_1)$$

Ende des Satzes *Beweis.* Wir verwenden Koordinaten wie oben, wobei die Koordinaten auf $(Q,\mathcal{O}_{p|q}|_Q)$ mit ζ_l, $l=1,\dots,p+q$ bezeichnet seien. Wir benutzen Lemma 1.6.1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi_i}\circ\Psi_{1,W}\circ\Psi_{2,Q} &= \sum_{k=1}^{r+s}\frac{\partial\Psi_{1,k}}{\partial\xi_i}\cdot\Big(\Psi_{1,W}\circ\frac{\partial}{\partial\eta_k}\circ\Psi_{2,Q}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{r+s}\frac{\partial\Psi_{1,k}}{\partial\xi_i}\cdot\Big(\Psi_{1,W}\circ\sum_{l=1}^{p+q}\frac{\partial\Psi_{2,l}}{\partial\eta_k}\cdot\Big(\Psi_{2,Q}\circ\frac{\partial}{\partial\zeta_l}\Big)\Big) \\ &= \sum_{l=1}^{p+q}\Big(\sum_{k=1}^{r+s}\frac{\partial\Psi_{1,k}}{\partial\xi_i}\cdot\Psi_{1,W}\Big(\frac{\partial\Psi_{2,l}}{\partial\eta_k}\Big)\Big)\cdot\Psi_{1,W}\circ\Psi_{2,Q}\circ\frac{\partial}{\partial\zeta_l} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$J\big((\varphi_2,\Psi_2)\circ(\varphi_1,\Psi_1)\big)^{st} = J(\varphi_1,\Psi_1)^{st}\cdot\Psi_{1,W}\big(J(\varphi_2,\Psi_2)\big)^{st}.$$

Die Supertransposition dieser Gleichung liefert die Behauptung. (Jetzt ist klar, warum wir die *Super*-transponierte in der Definition der Jacobimatrix gewählt haben! So kommen die Vorzeichen richtig hin.) □

1.6.5. Satz (Umkehrsatz). *Sei $(\varphi, \Psi) : (V, \mathcal{O}_{m|n}|_V) \to (W, \mathcal{O}_{m|n}|_W)$ ein Morphismus und sei $p \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) (φ, Ψ) ist nahe p ein Isomorphismus, d.h. es gibt eine offene Umgebung W' von $\varphi(p)$ in W, so dass für $V' := \varphi^{-1}(W')$ die Einschränkung

$$(\varphi, \Psi)|_{(V', \mathcal{O}_{m|n}|_{V'})} : (V', \mathcal{O}_{m|n}|_{V'}) \to (W', \mathcal{O}_{m|n}|_{W'})$$

ein Isomorphismus ist.

2) Die Jacobimatrix im Punkt p, $J(\varphi, \Psi)(p) \in \mathrm{Mat}_{\Lambda^*\mathbb{R}^n}(m|n)$, ist invertierbar.

Beweis. Die Richtung „1) ⇒ 2)“ ist eine simple Folgerung aus der Kettenregel: Ist nämlich $(\varphi_1, \Psi_1) := (\varphi, \Psi)|_{(V', \mathcal{O}_{m|n}|_{V'})}$ und $(\varphi_2, \Psi_2) = (\varphi_1, \Psi_1)^{-1}$, dann gilt:

$$\mathbf{1}_{m|n} = J(\mathrm{id}, \mathrm{id}) = \Psi_{1,W'}\big(J(\varphi_2, \Psi_2)\big) \cdot J(\varphi_1, \Psi_1)$$

und analog

$$\mathbf{1}_{m|n} = \Psi_{2,V'}\big(J(\varphi_1, \Psi_1)\big) \cdot J(\varphi_2, \Psi_2),$$

also

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{m|n} &= \Psi_{1,W'}(\mathbf{1}_{m|n}) = \Psi_{1,W'}\Big(\Psi_{2,V'}\big(J(\varphi_1, \Psi_1)\big) \cdot J(\varphi_2, \Psi_2)\Big)\\ &= J(\varphi_1, \Psi_1) \cdot \Psi_{1,W'}\big(J(\varphi_2, \Psi_2)\big).\end{aligned}$$

Also ist $J(\varphi_1, \Psi_1)$ invertierbar in $\mathrm{Mat}_{\mathcal{O}_{m|n}(V')}(m|n)$ mit

$$J(\varphi_1, \Psi_1)^{-1} = \Psi_{1,W'}\big(J(\varphi_2, \Psi_2)\big).$$

Dann ist auch $J(\varphi_1, \Psi_1)(p)$ invertierbar in $\mathrm{Mat}_{\Lambda^*\mathbb{R}^n}(m|n)$ mit

$$\big(J(\varphi_1, \Psi_1)(p)\big)^{-1} = \Psi_{1,W'}\big(J(\varphi_2, \Psi_2)\big)(p).$$

Für die nichttriviale Richtung „1) ⇒ 2)“ konsultiere man [ConGro S.198ff]. □

1.6.6 Bemerkung. Nach Satz 1.1.20 ist die Matrix $J(\varphi, \Psi) \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{O}_{m|n}(V)}(m|n)$ genau dann invertierbar, wenn sie nach Annulation des nilpotenten Anteils invertierbar ist, d.h. wenn

$$\beta_V\big(J(\varphi, \Psi)\big) \in \mathrm{Mat}_{C^\infty(V)}(m|n)$$

invertierbar ist. Dementsprechend ist $J(\varphi, \Psi)(p) \in \mathrm{Mat}_{\Lambda^*\mathbb{R}^n}(m|n)$ invertierbar genau dann, wenn

$$v_p\big(J(\varphi, \Psi)\big) = \beta_V\big(J(\varphi, \Psi)\big)(p) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m|n)$$

invertierbar ist.

1.6.7 Bemerkung. Lemma 1.6.1 liefert die Transformationsformel für Koordinatenfelder: Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Supermannigfaltigkeit und seien

$$\begin{aligned}&(\varphi_1, \Psi_1) : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (V, \mathcal{O}_{m|n}|_V)\\ \text{und}\quad &(\varphi_2, \Psi_2) : (U, \mathcal{O}_X|_U) \to (W, \mathcal{O}_{m|n}|_W)\end{aligned}$$

zwei Superkarten. Der Deutlichkeit halber wollen wir für den Augenblick die auf $\mathcal{O}_X(U)$ induzierten Koordinatenfelder mit $\widetilde{\frac{\partial}{\partial\xi_i}}$ resp. $\widetilde{\frac{\partial}{\partial\eta_k}}$ bezeichnen und sie dadurch von den Superderivationen $\frac{\partial}{\partial\xi_i}$ auf $\mathcal{O}_{m|n}|_V$ bzw. $\frac{\partial}{\partial\eta_k}$ auf $\mathcal{O}_{m|n}|_W$ unterscheiden. Sie sind so definiert, dass die beiden Teildiagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{m|n}(W) \arrow[r, "\Psi_{2,W}", "\cong"'] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial\eta_k}"'] & \mathcal{O}_X(U) \arrow[d, "\widetilde{\frac{\partial}{\partial\eta_k}}"', "\widetilde{\frac{\partial}{\partial\xi_i}}"] & \mathcal{O}_{m|n}(V) \arrow[l, "\Psi_{1,V}"', "\cong"] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial\xi_i}"] \\
\mathcal{O}_{m|n}(W) \arrow[r, "\Psi_{2,W}", "\cong"'] & \mathcal{O}_X(U) & \mathcal{O}_{m|n}(V) \arrow[l, "\Psi_{1,V}"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Setze

$$(\varphi,\Psi) := (\varphi_2,\Psi_2)\circ(\varphi_1,\Psi_1)^{-1} : (V,\mathcal{O}_{m|n}|_V) \to (W,\mathcal{O}_{m|n}|_W),$$

d.h. $\varphi = \varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ und $\Psi_W = \Psi_{1,V}^{-1}\circ\Psi_{2,W}$. Dann ergibt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\frac{\partial}{\partial\xi_i}} &= \Psi_{1,V}\circ\frac{\partial}{\partial\xi_i}\circ\Psi_{1,V}^{-1} \\
&= \Psi_{1,V}\circ\frac{\partial}{\partial\xi_i}\circ\Psi_W\circ\Psi_{2,W}^{-1} \\
&= \Psi_{1,V}\circ\sum_{k=1}^{m+n}\frac{\partial\Psi_k}{\partial\xi_i}\big(\Psi_W\circ\frac{\partial}{\partial\eta_k}\circ\Psi_{2,W}^{-1}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{m+n}\underbrace{\Psi_{1,V}\big(\frac{\partial\Psi_k}{\partial\xi_i}\big)}_{=:\frac{\partial\eta_k}{\partial\xi_i}}\cdot\underbrace{\big(\Psi_{2,W}\circ\frac{\partial}{\partial\eta_k}\circ\Psi_{2,W}^{-1}\big)}_{=\widetilde{\frac{\partial}{\partial\eta_k}}} \\
&= \sum_{k=1}^{m+n}\frac{\partial\eta_k}{\partial\xi_i}\widetilde{\frac{\partial}{\partial\eta_k}}
\end{aligned}$$

die Transformationsformel

$$\boxed{\widetilde{\frac{\partial}{\partial\xi_i}} = \sum_{k=1}^{m+n}\frac{\partial\eta_k}{\partial\xi_i}\widetilde{\frac{\partial}{\partial\eta_k}}}$$

1.6.8 Bemerkung. Der Umkehrsatz hat ähnliche Konsequenzen wie in der „klassischen Analysis“:

- ⊛ Satz über implizite Funktionen
- ⊛ gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten
- ⊛ Submersionen

⋮

1.7 Mechanik von Punktteilchen mit Spin

1.7.1. Lagrangeformulierung der klassischen Mechanik von Punktteilchen. Gegeben sei eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M, genannt *Konfigurationsraum*, und eine glatte Funktion

$$L : TM \to \mathbb{R},$$

die *Lagrangefunktion*. Zu gegebenen $t_0 < t_1$ und p_0, $p_1 \in M$ betrachte das Wirkungsfunktiononal

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \quad : \quad & \Omega := \{c \in C^\infty\big([t_0,t_1],M\big) \mid c(t_0)=p_0,\, c(t_1)=p_1\} \to \mathbb{R},\\ & \mathcal{L}(c) = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot c(t))\,dt.\end{aligned}$$

Wir suchen die „kritischen Punkte“ von $\mathcal{L}$, d.h. diejenigen Kurven $c \in \Omega$, für die

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(c_s)\Big|_{s=0} = 0$$

für alle glatten Variationen c_s von c in Ω, d.h. für alle $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ ist

$$c_s \in \Omega, \quad c_0 = c$$

und die Abbildung

$$(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_0,t_1] \to M,\ (s,t) \mapsto c_s(t),$$

ist glatt.

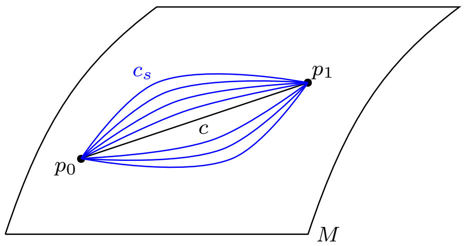


Abb. 5: Variation der Kurve c mit festen Endpunkten p_0, p_1

1.7.2. Sind $x_1,\dots,x_m$ lokale Koordinaten einer Karte $x : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ von M, dann schreibt sich jeder Tangentialvektor X mit Fußpunkt in U in eindeutiger Weise in der Form

$$X = \sum_{j=1}^m y_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Dann bilden $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m$ lokale Koordinaten von TM. Schreibe also lokal

$$L = L(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m).$$

Für eine Kurve c mit Koordinaten $x_1(t),\dots,x_m(t)$ hat $\dot c$ die Koordinaten $x_1(t),\dots,x_m(t),\dot x_1(t),\dots,\dot x_m(t)$. Für eine Variation c_s setze

$$v_j(t) := \frac{\partial}{\partial s}x_j(s,t)\Big|_{s=0}$$

und berechne

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{L}(c_s)\Big|_{s=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial s} L\big(x_1(s,t),\ldots,x_m(s,t),\dot{x}_1(s,t),\ldots,\dot{x}_m(s,t)\big)\Big|_{s=0} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial x_j}\big(x(t),\dot{x}(t)\big)\cdot v_j(t) + \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial y_j}\big(x(t),\dot{x}(t)\big)\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} x_j(s,t)\Big|_{s=0}}_{\dot{v}_j(t)} \Big) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\partial L}{\partial x_j}\big(x(t),\dot{x}(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_j}\big(x(t),\dot{x}(t)\big)\Big)\cdot v_j(t)\, dt + \\
&\qquad\qquad + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial y_j}\big(x(t),\dot{x}(t)\big) v_j(t)\Big|_{t=t_0}^{t_1}
\end{aligned}
$$

Wegen $v_j(t_0) = v_j(t_i) = 0$ folgt

$$
\frac{d}{ds}\mathcal{L}(c_s)\Big|_{s=0} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{\partial L}{\partial x_j}\big(x(t),\dot{x}(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_j}\big(x(t),\dot{x}(t)\big)\Big)\cdot v_j(t)\, dt.
$$

Ein Standardargument liefert, dass eine Kurve $c \in \Omega$ genau dann kritisch ist, wenn die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_j}\big(x(t),\dot{x}(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial x_j}\big(x(t),\dot{x}(t)\big), \qquad j = 1,\ldots,m.
$$

gelten.

1.7.3. Beispiele.

1) Sei der Konfigurationsraum eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) und die Lagrangefunktion L sei

$$
L(X) = \frac{1}{2}\langle X,X\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} g_{jk}(x) y_j y_k.
$$

Dann ist die Euler-Lagrange-Gleichung genau die Geodätengleichung

$$
\frac{\nabla}{\mathrm{dt}}\dot{c} = 0.
$$

2) Modell für Punktteilchen der Masse m_0 im Gravitationspotential V. Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $V : M \to \mathbb{R}$ glatt, $\mathbb{R} \ni m_0 > 0$ und

$$
L : TM \to \mathbb{R}, \qquad L(X) = \frac{m_0}{2}\langle X,X\rangle - V(\pi(X)),
$$

wobei $\pi : TM \to M$ die Fußpunktabbildung sei. Dann ist die Euler-Lagrange-Gleichung

$$
m_0 \frac{\nabla}{\mathrm{dt}}\dot{c}(t) = -\operatorname{grad} V(c(t)).
$$

1.7.4. Sei nun $L \in \mathcal{O}_{0|2n}\big(\{0\}\big)$, d.h. L ist ein Polynom in den ungeraden Variablen $\theta_1, \ldots, \theta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$. Wir nehmen an, dass der Grad von L nicht größer als n ist. Betrachte nun L als Abbildung

$$L : \underbrace{(\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1 \times \cdots \times (\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1}_{2n} \to \Lambda^*\mathbb{R}^n.$$

Desweiteren betrachte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \Omega_1 &\to \Lambda^*\mathbb{R}^n \\ \mathcal{L}(c) &= \int_{t_0}^{t_1} L\big(c_1(t), \ldots, c_n(t), \dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t)\big)\, dt, \end{aligned}$$

wobei

$$\Omega_1 := \big\{c = (c_1, \ldots, c_n) \in C^\infty\big([t_0,t_1], (\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1 \times \cdots \times (\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1\big) \;\big|\; \text{mit} \\ c(t_0) = p_0,\ c(t_1) = p_1\big\},$$

und $p_0, p_1 \in ((\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1)^n$ fest. Wir suchen wieder die kritischen Punkte. Bei der Berechnung im klassischen Fall 1.7.2 haben wir die Produktregel angewendet. Wir wollen kurz überlegen, wie es sich dabei mit der Differentiation von Superfunktionen verhält. Seien φ_i, $i = 1, \ldots, k$ glatte Kurven in $((\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1)^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\varphi_1 \cdots \varphi_k) &= \varphi_1' \cdot \varphi_1 \cdots \varphi_k + \varphi_1 \cdot \varphi_2' \cdots \varphi_k + \ldots + \varphi_1 \cdots \varphi_{k-1} \cdot \varphi_k' \\ &= \varphi_1' \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_k - \varphi_2' \cdot \varphi_1 \cdot \widehat{\varphi_2} \cdots \varphi_k \pm \ldots + (-1)^{k-1} \varphi_k' \cdot \varphi_1 \cdots \varphi_{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{k} \varphi_j' \frac{\partial}{\partial \varphi_j}(\varphi_1 \cdots \varphi_k), \end{aligned}$$

da wir die ungeraden Koordinatenfelder $\frac{\partial}{\partial \varphi_j}$ gerade so definiert hatten, dass die auftretenden Vorzeichen übereinstimmen.

Nun berechnen wir die kritischen Punkte des obigen Wirkungsfunktionals $\mathcal{L}$ analog zu 1.7.2:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mathcal{L}(c_s)\Big|_{s=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial s} L(c_{s,1}(t), \ldots, c_{s,n}(t), \dot{c}_{s,1}(t), \ldots, \dot{c}_{s,n}(t))\Big|_{s=0} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \Big(v_j(t) \frac{\partial L}{\partial \theta_j}\big(c_1(t), \ldots, c_n(t), \dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t)\big) + \dot{v}_j(t) \frac{\partial L}{\partial \eta_j}\big(c(t), \dot{c}(t)\big)\Big)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} v_j(t) \cdot \Big(\frac{\partial L}{\partial \theta_j}\big(c(t), \dot{c}(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_j}\big(c(t), \dot{c}(t)\big)\Big)\, dt. \end{aligned}$$

Somit ist $c \in \Omega_1$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn

$$\int_{t_0}^{t_1} v_j(t) \cdot \Big(\frac{\partial L}{\partial \theta_j}\big(c(t), \dot{c}(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_j}\big(c(t), \dot{c}(t)\big)\Big)\, dt = 0$$

für alle glatten $v_j : [t_0, t_1] \to (\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1$ mit $v_j(t_0) = v_j(t_1) = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_j}\big(c(t), \dot{c}(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial \theta_j}\big(c(t), \dot{c}(t)\big), \qquad j = 1, \ldots, n$$

sind hierfür sicherlich hinreichend. Sie sind aber auch notwendig. Da nämlich L als Polynom höchstens Grad n hat, haben die partiellen Ableitungen von L höchstens Grad $n-1$. Somit nimmt der Ausdruck $EL_j(t) := \frac{\partial L}{\partial \theta_j}\big(c(t), \dot{c}(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_j}\big(c(t), \dot{c}(t)\big)$ seine Werte in $\bigoplus_{k=0}^{n-1} \Lambda^k \mathbb{R}^n$ an. Wäre nun ein $EL_j(t') \neq 0$ für ein $t' \in [t_0, t_1]$, so könnten wir ein $v_j^0 \in \Lambda^1 \mathbb{R}^n$ finden mit $EL_j(t') \cdot v_j^0 \neq 0$. Dann setzen wir $v_j(t) := \chi(t) v_j^0$, wobei χ eine nichtnegative Abschneidefunktion mit $\chi(t') = 1$ und hinreichend kleinem Träger um t' ist. Dann wäre aber auch $\int_{t_0}^{t_1} v_j(t) EL_j(t) dt \neq 0$.

1.7.5 Beispiel. Sei $n = 3$ und seien b_1, b_2, $b_3 \in \mathbb{R}$. Setze

$$L := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \theta_i \eta_i + b_1\theta_2\theta_3 + b_2\theta_3\theta_1 + b_3\theta_1\theta_2.$$

Für die Euler-Lagrange-Gleichung berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_j}\big(c(t), \dot{c}(t)\big) &= -\frac{1}{2}\dot{c}_j \quad \text{und} \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\big(c(t), \dot{c}(t)\big) &= \frac{1}{2}\dot{c}_1 - b_2 c_3 + b_3 c_2, \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\big(c(t), \dot{c}(t)\big) &= \frac{1}{2}\dot{c}_2 + b_1 c_3 - b_3 c_1, \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_3}\big(c(t), \dot{c}(t)\big) &= \frac{1}{2}\dot{c}_3 - b_1 c_2 + b_2 c_1.
\end{aligned}$$

In Matrixform lautet die Euler-Lagrange-Gleichung also:

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung $\dot{c} = Bc$ hat die Lösung

$$c(t) = \exp(tB) \cdot c(0),$$

wobei exp die Exponentialabbildung für Matrizen ist. Da B schiefsymmetrisch ist, d. h. $B \in \mathfrak{so}(3)$, der Liealgebra von SO(3), ist $\exp(tB) \in \mathrm{SO}(3)$. Diese Lagrange-Superfunktion beschreibt den Spin eines Punktteilchens.

Jetzt können wir (mit $\varphi = c$, $\dot{\varphi} = \dot{c}$ und $L(c, \dot{c}) = (c, \dot{c})$) auch den Eingangsdialog zwischen dem Mathematiker **M** und dem Physiker **P**, der derzeit als Motivation diente, verstehen.

1.7.6. Betrachte nun Superfunktionen auf einer Supermannigfaltigkeit $(TM, \mathcal{O}_{TM})$ der Dimension $2m|2n$, wobei

$$\mathcal{O}_{TM}(U) = C^\infty(U) \otimes \Lambda^* \mathbb{R}^{2n}$$

sei. Wir fassen L auf als Abbildung

$$L : TU \times \underbrace{(\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1 \times \cdots \times (\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1}_{2n} \to \Lambda^*\mathbb{R}^n$$

und erhalten für die kritischen Punkte

$$c : [t_0, t_1] \to U \times \underbrace{(\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1 \times \cdots \times (\Lambda^*\mathbb{R}^n)_1}_{n}$$

durch Kombination der vorherigen Situationen die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y_i}(x, \dot{x}, c, \dot{c}) &= \frac{\partial L}{\partial x_i}(x, \dot{x}, c, \dot{c}), \qquad i = 1, \dots m \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_j}(x, \dot{x}, c, \dot{c}) &= \frac{\partial L}{\partial \theta_j}(x, \dot{x}, c, \dot{c}), \qquad j = 1, \dots n. \end{aligned}$$

1.7.7 Beispiel. Sei M der euklidische Raum $\mathbb{R}^3$, $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ glatt, $m > 0$ und $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Wir setzen:

$$L(x, y, \theta, \eta) := \frac{m}{2}\langle y, y\rangle - V(x) + \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{3}\theta_k\eta_k + i\big(b_1(x)\theta_2\theta_3 + b_2(x)\theta_3\theta_1 + b_3(x)\theta_1\theta_2\big).$$

Die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\operatorname{grad} V + i\big(\operatorname{grad} b_1(x)\theta_2\theta_3 + \operatorname{grad} b_2(x)\theta_3\theta_1 + \operatorname{grad} b_3(x)\theta_1\theta_2\big) \\ \dot{\theta} &= \overrightarrow{b}(x) \times \theta = B(x) \cdot \theta \quad \text{ mit } B(x) := \begin{pmatrix} 0 & -b_3(x) & b_2(x) \\ b_3(x) & 0 & -b_1(x) \\ -b_2(x) & b_1(x) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.8 Das Berezin–Integral

Das Ziel dieses Abschnittes ist, zu zeigen, wie man ein Integral auf Supermannigfaltigkeiten einführt. Zunächst wollen wir Superfunktionen auf Supergebieten integrieren.

1.8.1. Heuristische Vorüberlegungen. Sei $(U, \mathcal{O}_{m|n}|_U)$ ein Supergebiet mit gerade Variablen $x_1, \dots, x_m$ und ungerade Variablen $\theta_1, \dots, \theta_n$. Wir wollen folgende Relationen für realisieren:

$$\int 1\, d\theta = 0, \qquad \int \theta\, d\theta = 1, \qquad \theta_i\, d\theta_j = -\, d\theta_j\theta_i, \qquad \theta_i\, dx_j = -\, dx_j\theta_i.$$

Dann gilt für das Integral über den „Top-Grad“ $f_{(1,\dots,1)}\theta_1 \cdots \theta_n$:

$$\begin{aligned} &\int_U f_{(1,\dots,1)}(x_1, \dots, x_m)\theta_1 \cdots \theta_n\, dx_1 \dots dx_m\, d\theta_1 \dots d\theta_n \\ &= (-1)^{nm} \int_U f_{(1,\dots,1)}(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 \dots dx_m\theta_1 \cdots \theta_n\, d\theta_1 \dots d\theta_n \\ &= (-1)^{nm + \frac{n(n-1)}{2}} \int_U f_{(1,\dots,1)}(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 \dots dx_m\theta_1\, d\theta_1 \dots \theta_n\, d\theta_n \\ &= (-1)^{nm + \frac{n(n-1)}{2}} \int_U f_{(1,\dots,1)}(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 \dots dx_m. \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $\varepsilon \neq (1, \ldots, 1)$:

$$\begin{aligned}
&\int_U f_\varepsilon(x_1, \ldots, x_m)\theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n}\, dx_1 \ldots dx_m\, d\theta_1 \ldots d\theta_n \\
&\qquad = \pm \int_U f_\varepsilon(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m \theta_1^{\varepsilon_1}\, d\theta_1 \ldots \theta_n^{\varepsilon_n}\, d\theta_n \\
&\qquad = 0,
\end{aligned}$$

denn da wenigstens ein $\varepsilon_j = 0$, kommt ein Faktor $1\, d\theta_j$, vor, und wir wollten $\int 1\, d\theta_j = 0$. D.h. wir könne das Integral der Superfunktion f auf das gewöhnliche Lebesgue-Integral von $f_{(1,\ldots,1)}$ zurückführen.

1.8.2 Definition. Sei $(U, \mathcal{O}_{m|n}|_U)$ ein Supergebiet wie oben und

$$f = \sum_\varepsilon f_\varepsilon \theta_1^{\varepsilon_1} \cdots \theta_n^{\varepsilon_n} \in \mathcal{O}_{m|n}(U).$$

Dann heißt

$$\int_U f\, \mathrm{d}(x, \theta) = (-1)^{nm + \frac{n(n-1)}{2}} \int_U f_{(1,\ldots,1)}(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m$$

Berezin-Integral von f.

1.8.3. Satz (Transformationsformel) *Seien $(U, \mathcal{O}_{m|n}|_U)$ und $(V, \mathcal{O}_{m|n}|_V)$ zwei Supergebiete mit Koordinaten x_i, θ_j auf U und y_i, η_j auf V. Sei*

$$(\varphi, \Psi) : (U, \mathcal{O}_{m|n}|_U) \to (V, \mathcal{O}_{m|n}|_V)$$

ein Isomorphismus. Sei weiter $f \in \mathcal{O}_{m|n}(V)$ eine Superfunktion mit kompaktem Träger in V. Dann gilt:

$$\int_V f\, \mathrm{d}(y, \eta) = \pm \int_U \Psi(f) \cdot \mathrm{Sdet}\big(J(\varphi, \Psi)\big)\, \mathrm{d}(x, \theta).$$

Dabei gilt „+“, falls φ orientierungserhaltend und „−“, falls φ orientierungsumkehrend ist.

1.8.4 Bemerkung. Die Kompaktheitsvoraussetzung an den Träger von f ist wichtig. Dazu betrachte man das folgende

1.8.5 Beispiel. Als Supergebiet betrachten wir $(U, \mathcal{O}_{m|n}|_U) = (V, \mathcal{O}_{m|n}|_V) = \big((0,1), \mathcal{O}_{1|2}|_{(0,1)}\big)$, also das offene Intervall $(0,1)$ auf der Supergeraden. Sei $\varphi = \mathrm{id}_{(0,1)}$ und Ψ sei gegeben durch

$$\begin{aligned}
&& \eta_1 &\mapsto \theta_1, \\
&& \eta_2 &\mapsto \theta_2 \\
\text{und} \qquad && f_0(y) &\mapsto f_0(x) + f_0'(x)\theta_1\theta_2 \qquad \text{für } f_0 \in C^\infty\big((0,1)\big).
\end{aligned}$$

Wir berechnen die Jacobimatrix von (φ, Ψ). Die Koordinatenfunktionen lauten

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \Psi(y) \ = x + \theta_1\theta_2, \\
\Psi_2 &= \Psi(\eta_1) = \theta_1, \\
\Psi_3 &= \Psi(\eta_2) = \theta_2.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$J(\varphi,\Psi) = \left(\begin{array}{c|cc} \frac{\partial\Psi_1}{\partial x} & -\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta_1} & -\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta_2} \\ \hline \frac{\partial\Psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial\Psi_3}{\partial x} & \frac{\partial\Psi_3}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\Psi_3}{\partial\theta_2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -\theta_2 & \theta_1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun können wir leicht $\operatorname{Sdet}\big(J(\varphi,\Psi)\big)$ berechnen:

$$\operatorname{Sdet}\big(J(\varphi,\Psi)\big) = \det\left((1) - (-\theta_2,\theta_1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = 1.$$

Wähle $f \in \mathcal{O}_{1|2}\big((0,1)\big)$ definiert durch $f(y) = y$. Offenbar ist

$$\int\limits_{(0,1)} f\,\mathrm{d}(y,\eta_1,\eta_2) = 0.$$

„Anwendung“ der Transformationsformel ergibt hingegen:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{(0,1)} \Psi(f)\operatorname{Sdet}\big(J(\varphi,\Psi)\big)\,\mathrm{d}(x,\theta_1,\theta_2)\\
&\qquad= \int\limits_{(0,1)} (x+\theta_1\theta_2)\cdot 1\,\mathrm{d}(x,\theta_1,\theta_2)\\
&\qquad= \int\limits_{(0,1)} \theta_1\theta_2\; dx\,d\theta_1\,d\theta_2\\
&\qquad= -\int\limits_{(0,1)} 1\,dx = -1.
\end{aligned}$$

Ist nun unsere Transformationsformel falsch? Natürlich nicht, denn obiges f hat nicht kompakten Träger in $(0,1)$.

1.8.6 Bemerkung. Man kann ein Konzept von „Supervolumenformen“ auf Supermannigfaltigkeiten einführen, die sich bei Kartenwechsel wie in der Transformationsformel vorgegeben transformieren. Deren Integral kann mittels Teilung der Eins auf das Integral von Superfunktionen auf Superkarten zurückgeführt werden.

Kapitel 2

Nichtkommutative Topologie

Jede Supermannigfaltigkeit $(X, \mathcal{O}_X)$ ist festgelegt durch die Superalgebra $\mathcal{O}_X(X)$. Ab jetzt nehmen wir eine (möglicherweise sehr nicht-kommutative) Algebra als Ausgangsobjekt und tun so, als ob dies die Algebra der auf dem zu beschreibenden Raum definierten Funktionen sei. Wir wollen darauf achten, wie sich topologische Eigenschaften in algebraischen Eigenschaften widerspiegeln.

2.1 C^*–Algebren

2.1.1 Definition. Sei A eine assoziative $\mathbb{C}$-Algebra, sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum A, sei $*: A \to A$, $a \mapsto a^*$, eine $\mathbb{C}$-antilineare Abbildung. Dann heißt $(A, \|\cdot\|, *)$ eine *Prä–C^*–Algebra*, falls für alle a, $b \in A$ gilt:

1) $a^{**} = a$ *($*$ ist eine Involution)*
2) $(ab)^* = b^* a^*$
3) $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$ *(Submultiplikativität)*
4) $\|a^*\| = \|a\|$ *($*$ ist Isometrie)*
5) $\|a^* a\| = \|a\|^2$ *(C^*–Eigenschaft).*

Ist ferner $(A, \|\cdot\|)$ vollständig, dann heißt $(A, \|\cdot\|, *)$ eine *C^*–Algebra*.

2.1.2 Beispiel. 1) Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, sei $A = \mathcal{L}(H)$ die Algebra der beschränkten Operatoren auf H. Sei $\|\cdot\|$ die *Operatornorm*, d.h.

$$\|a\| := \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \|ax\|.$$

a^* sei der zu a adjungierte Operator, d.h.

$$(ax, y) = (x, a^* y) \qquad \text{für alle } x,\ y \in H.$$

Die Axiome 1) bis 4) rechnet man leicht nach. Unter Verwendung der Axiome 3) und 4) und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung zeigen wir nur Ax. 5):

$$\begin{aligned}\|a\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|ax\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (ax, ax) = \sup_{\|x\|=1} (x, a^* a x) \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \cdot \|a^* a x\| = \|a^* a\| \overset{(3)}{\leq} \|a^*\| \cdot \|a\| \overset{(4)}{=} \|a\|^2.\end{aligned}$$

Also gilt bei beiden Ungleichungen Gleichheit, d.h. $\|a\|^2 = \|a^* a\|$.

2) Sei X ein lokal–kompakter Hausdorffraum. Sei

$$A = C_0(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ stetig} \,|\, \forall \varepsilon > 0 \, \exists K \subset X \text{ kompakt, so dass } \forall x \in X - K : |f(x)| < \varepsilon\}.$$

Wir nennen $C_0(X)$ die *Algebra der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden*. Falls X kompakt ist, ist $A = C_0(X) = C(X)$. Alle $f \in C_0(X)$ sind beschränkt und wir können definieren:

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|;$$

$$\text{außerdem sei} \qquad f^*(x) := \overline{f(x)}.$$

Dann ist $(C_0(X), \|\cdot\|, *)$ eine kommutative C^*–Algebra.

3) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei

$$A = C_0^\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ glatt} \,|\, \forall \varepsilon > 0 \, \exists K \subset X \text{ kompakt, so dass } \forall x \in X - K : |f(x)| < \varepsilon\}.$$

Wir nennen $C_0^\infty(X)$ die *Algebra der glatten Funktionen, die im Unendlichen verschwinden*. Norm und $*$-Abbildung definieren wir wie im vorigen Beispiel. Dann ist $(C_0^\infty(X), \|\cdot\|, *)$ eine kommutative Prä–C^*–Algebra.

2.1.3 Definition. Ein Element a einer Prä–C^*–Algebra heißt *selbstadjungiert*, falls $a = a^*$.

2.1.4 Bemerkung. Eine Prä–C^*–Algebra A besitzt höchstens ein Einselement 1, denn ist $1'$ ein weiteres, so gilt

$$1 = 1 \cdot 1' = 1'.$$

Nun ist für alle $a \in A$

$$1^*a = (1^*a)^{**} = (a^*1^{**})^* = (a^*1)^* = a^{**} = a$$

und analog sieht man $a1^* = a$. Also ist auch 1^* das Einselement, d.h. das Einselement ist selbstadjungiert. Ferner ist

$$\|1\| = \|1^*1\| = \|1\|^2,$$

also $\|1\| = 1$ oder $\|1\| = 0$. Im zweiten Fall ist $1 = 0$ und damit $A = 0$. Diesen Fall werden wir ignorieren und somit $\|1\| = 1$ annehmen.

2.1.5 Beispiel. 1) Im Beispiel 2.1.2.1 besitzt $A = \mathcal{L}(H)$ mit $1 = \mathrm{id}_H$ ein Einselement.

2) $A = C_0(X)$ besitzt das Einselement $f \equiv 1$ genau dann, wenn $C_0(X) = C(X)$, d.h. genau dann, wenn X kompakt ist. Hier haben wir also schon eine topologische Eigenschaft von X, die wir übersetzen können in eine Eigenschaft der zugehörigen Algebra.

2.1.6 Proposition. *Sei $(A, \|\cdot\|_A, *)$ eine Prä–C^*–Algebra ohne 1. Wir definieren auf $\widetilde{A} := \mathbb{C} \times A$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $a, b \in A$ folgende Strukturen:*

$$\begin{aligned}
(\alpha, a) + (\beta, b) &:= (\alpha + \beta, a + b) \\
\beta(\alpha, a) &:= (\beta\alpha, \beta a) \\
(\alpha, a) \cdot (\beta, b) &:= (\alpha\beta, \alpha b + \beta a + ab) \\
(\alpha, a)^* &:= (\overline{\alpha}, a^*) \\
\|(\alpha, a)\|_{\widetilde{A}} &:= \sup_{\substack{b \in A \\ \|b\|_A = 1}} \|\alpha b + ab\|_A.
\end{aligned}$$

Dann ist $(\widetilde{A}, \|\cdot\|_{\widetilde{A}}, *)$ eine Prä–C^*–Algebra. Die Algebra A kann mit der Unteralgebra $\{0\} \times A \subset \widetilde{A}$ (mitsamt allen Strukturen) identifiziert werden.

War $(A, \|\cdot\|_A, *)$ eine C^*–Algebra, d.h. $(A, \|\cdot\|_A)$ vollständig, so ist auch $(\widetilde{A}, \|\cdot\|_{\widetilde{A}})$ vollständig, d.h. $(\widetilde{A}, \|\cdot\|_{\widetilde{A}}, *)$ eine C^*-Algebra.

Beweis.

a) Man rechnet leicht nach, dass $\widetilde{A}$ wieder eine assoziative $\mathbb{C}$–Algebra ist. Ferner ist klar, dass $*$ eine $\mathbb{C}$-antilineare Abbildung ist, und 1) und 2) gelten.

b) Wir zeigen, dass $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$ eine Norm auf $\widetilde{A}$ definiert.

b1) Homogenität.

$$\begin{aligned}\|\beta(\alpha, a)\|_{\widetilde{A}} = \|(\beta\alpha, \beta a)\|_{\widetilde{A}} &= \sup_{\|b\|_A=1} \|\beta\alpha b + \beta ab\|_A \\ &= |\beta| \cdot \sup_{\|b\|_A=1} \|\alpha b + ab\|_A = |\beta| \cdot \|(\alpha, a)\|_{\widetilde{A}}.\end{aligned}$$

b2) Positivdefinitheit. Es gilt stets $\|(\alpha, a)\| \geq 0$. Sei $\|(\alpha, a)\| = 0$. Es ist zu zeigen, dass $\alpha = 0$ und $a = 0$ folgt. Ist $\alpha = 0$ und nehmen wir an, $a \neq 0$, so folgt

$$\begin{aligned}0 = \|(\alpha, a)\| = \|(0, a)\| &= \sup_{\|b\|=1} \|ab\| \\ &\geq \|a \cdot \tfrac{a^*}{\|a^*\|}\| = \tfrac{1}{\|a^*\|}\|aa^*\| = \|a^*\| = \|a\|.\end{aligned}$$

Da wir aber wissen, dass die Norm auf A positiv definit ist, folgt hieraus $a = 0$ im Widerspruch zur Annahme. Also war die Annahme $a \neq 0$ falsch, d.h. aus $\alpha = 0$ folgt $a = 0$.

Sei nun $\alpha \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (Homogenität ist bereits gezeigt) sei $\alpha = 1$. Einfache Überlegungen ergeben:

$$\begin{aligned} & 0 = \|(1, a)\| = \sup_{\|b\|=1} \|b + ab\| & \\ \Rightarrow\quad & b + ab = 0 & \text{für alle } b \in A,\ \|b\| = 1 \\ \Rightarrow\quad & b + ab = 0 & \text{für alle } b \in A \\ \Rightarrow\quad & b = -ab & \text{für alle } b \in A \\ \Rightarrow\quad & b^* = b^*(-a^*) & \text{für alle } b \in A \\ \Rightarrow\quad & b = b(-a^*) & \text{für alle } b \in A,\end{aligned}$$

insbesondere gilt $a^* = -aa^* = a$. Damit folgt aber, dass A mit $-a = -a^*$ ein Einselement besitzt. Widerspruch!

b3) Dreiecksungleichung.

$$\begin{aligned}\|(\alpha_1, a_1) + (\alpha_2, a_2)\| &= \|(\alpha_1 + \alpha_2, a_1 + a_2)\| \\ &= \sup_{\|b\|=1} \|(\alpha_1 + \alpha_2)b + (a_1 + a_2)b\| \\ &\leq \sup_{\|b\|=1} \big(\|(\alpha_1 b + a_1 b\| + \|\alpha_2 b + a_2 b\|\big) \\ &\leq \sup_{\|b_1\|=\|b_2\|=1} \big(\|(\alpha_1 b_1 + a_1 b_1\| + \|\alpha_2 b_2 + a_2 b_2\|\big) \\ &= \|(\alpha_1, a_1)\| + \|(\alpha_2, a_2)\|.\end{aligned}$$

c) Submultiplikativität.

$$\begin{aligned}
\|(\alpha_1, a_1)(\alpha_2, a_2)\| &= \|(\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 + a_1 a_2)\| \\
&= \sup_{\|b\|=1} \|\alpha_1\alpha_2 b + \alpha_1 a_2 b + \alpha_2 a_1 b + a_1 a_2 b\| \\
&= \sup_{\|b\|=1} \|\alpha_1(\alpha_2 b + a_2 b) + a_1(\alpha_2 b + a_2 b)\| \\
&\leq \sup_{\|b\|=1} \|\alpha_2 b + a_2 b\| \cdot \|(\alpha_1, a_1)\| \\
&= \|(\alpha_2, a_2)\| \cdot \|(\alpha_1, a_1)\|.
\end{aligned}$$

d) $*$ ist Isometrie.

$$\begin{aligned}
\|(\alpha, a)\|^2 &= \sup_{\|b\|=1} \|\alpha b + ab\|^2 \\
&\overset{(5)}{=} \sup_{\|b\|=1} \|(b^*\overline{\alpha} + b^* a^*)(\alpha b + ab)\| \\
&\leq \sup_{\|b\|=1} \|b^*\| \cdot \|\overline{\alpha}\alpha b + \overline{\alpha} ab + a^*\alpha b + a^* ab\| \\
&= \|(\alpha, a)^* \cdot (\alpha, a)\| \\
&\overset{c)}{\leq} \|(\alpha, a)^*\| \cdot \|(\alpha, a)\| \\
\Rightarrow \qquad \|(\alpha, a)\| &\leq \|(\alpha, a)^*\|.
\end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Rollen von (α, a) und $(\alpha, a)^*$ erhält man

$$\|(\alpha, a)\| = \|(\alpha, a)^*\|.$$

e) C^*–Eigenschaft.

$$\begin{aligned}
\|(\alpha, a)\|^2 &\leq \|(\alpha, a)^*(\alpha, a)\| \quad \text{wie in d) gezeigt} \\
&\leq \|(\alpha, a)^*\| \cdot \|(\alpha, a)\| \\
&= \|(\alpha, a)\|^2 \\
\Rightarrow \qquad \|(\alpha, a)\|^2 &= \|(\alpha, a)^*(\alpha, a)\|.
\end{aligned}$$

f) Einbettung von A in $\widetilde{A}$ und Vollständigkeit von $(\widetilde{A}, \|\cdot\|)$, sofern $(A, \|\cdot\|)$ vollständig. Es gilt

$$\|(\alpha, 0)\| = \sup_{\|b\|=1} \|\alpha b\| = \sup_{\|b\|=1} |\alpha| \cdot \|b\| = |\alpha|.$$

Außerdem

$$\|(0, a)\| = \sup_{\|b\|=1} \|ab\| \leq \|a\| \qquad \text{und} \qquad \|(0, a)\| \geq \|a \cdot \tfrac{a^*}{\|a^*\|}\| = \|a\|,$$

also $\|(0, a)\| = \|a\|$.

Sei nun A vollständig. Setze

$$\delta := \inf_{a \in A} \|(1, a)\| \geq 0.$$

Es gilt $\delta > 0$, denn wäre $\delta = 0$, so gäbe es $a_n \in A$ mit $\|(1, a_n)\| \to 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere wäre $(1, a_n)_n$ eine konvergente Folge, also insbesondere eine Cauchyfolge in $\widetilde{A}$. Wegen

$$\|a_n - a_m\| = \|(0, a_n - a_m)\| = \|(1, a_n) - (1, a_m)\|$$

wäre $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge in A und würde wegen der Vollständigkeit von A konvergieren. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|(1,a_n)\| &= \|(1,a)-(0,a-a_n)\| \geq \|(1,a)\| - \|(0,a-a_n)\| \\ &= \underbrace{\|(1,a)\|}_{>0} - \underbrace{\|a-a_n\|}_{\to 0}\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $\|(1,a_n)\| \to 0$. Also ist $\delta > 0$. Wir sehen für $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$|\alpha|\cdot\delta = \inf_{a\in A}\|(\alpha,\alpha a)\| \leq \underset{(a_1\,\in\,A \text{ bel. fest})}{\|(\alpha,\alpha a_1)\|} = \underset{(a_2\,=\,\alpha a_1\,\in\,A \text{ bel.})}{\|(\alpha,a_2)\|}.$$

Sei nun $(\alpha_n,a_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\widetilde{A}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} & \|(\alpha_n,a_n)-(\alpha_m,a_m)\| = \|(\alpha_n-\alpha_m,a_n-a_m)\| \geq \delta\cdot|\alpha_n-\alpha_m| \\ \Rightarrow\quad & |\alpha_n-\alpha_m| \leq \frac{1}{\delta}\|(\alpha_n,a_n)-(\alpha_m,a_m)\|.\end{aligned}$$

Also ist $(\alpha_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$. Sei α ihr Grenzwert. Auch $(a_n)_n \subset A$ ist eine Cauchyfolge, denn

$$\begin{aligned}\|a_n-a_m\| &= \|(0,a_n-a_m)\| = \|(\alpha_n,a_n)-(\alpha_m,a_m)-(\alpha_n,0)+(\alpha_m,0)\| \\ &\leq \underbrace{\|(\alpha_n,a_n)-(\alpha_m,a_m)\|}_{(\alpha_n,a_n)_n \text{ Cauchyf.}} + \underbrace{|\alpha_n-\alpha_m|}_{(\alpha_n)_n \text{ Cauchyf.}}.\end{aligned}$$

Also existiert $a \in A$ mit $a_n \to a$. Nun können wir den Grenzwert von $(\alpha_n,a_n)_n$ zusammensetzen:

$$\|(\alpha,a)-(\alpha_n,a_n)\| = \|(\alpha-\alpha_n,0)+(0,a-a_n)\| \leq |\alpha-\alpha_n| + \|a-a_n\| \to 0,$$

und somit $(\alpha_n,a_n) \to (\alpha,a) \in \widetilde{A}$.

□

2.1.7 Definition. Ist A eine Prä–C^*–Algebra ohne Eins, so heißt $\widetilde{A}$ die *Vereinsung von A*.

2.1.8 Bemerkung. Sei X ein lokal–kompakter Hausdorffraum mit Topologie $\mathcal{T}_X$. Wir setzen

$$\widehat{X} := X \cup \{\infty\},$$

wobei ∞ ein Symbol für ein Element ist, dass nicht in X enthalten ist, und

$$\mathcal{T}_{\widehat{X}} := \mathcal{T}_X \cup \big\{\{\infty\}\cup(X-K)\,|\,K\subset X \text{ kompakt}\big\}.$$

Dann ist $(\widehat{X},\mathcal{T}_{\widehat{X}})$ ein kompakter Hausdorffraum. $(\widehat{X},\mathcal{T}_{\widehat{X}})$ heißt *Ein–Punkt–Kompaktifizierung von $(X,\mathcal{T}_X)$*.

2.1.9 Übung. Zeige, dass $\widehat{\mathbb{R}^n}$, die Ein–Punkt–Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$, homöomorph zur Sphäre S^n ist.

2.1.10 Übung. Sei X ein nicht kompakter lokal–kompakter Hausdorffraum. Zeige, dass

$$\begin{aligned} C(\widehat{X}) &\to \widetilde{C_0(X)} \\ f &\mapsto (f(\infty),(f-f(\infty))|_X)\end{aligned}$$

einen Algebrenisomorphismus liefert, der $\|\cdot\|$ und $*$ erhält.[1]

Sei A eine C^*–Algebra mit 1. Schreibe $A^\times$ für die Menge der invertierbaren Elemente in A. Ist $a \in A^\times$, so ist auch $a^* \in A^\times$, denn

$$a^* \cdot (a^{-1})^* = (a^{-1}a)^* = 1^* = 1,$$

und ebenso $(a^{-1})^* \cdot a^* = 1$, also $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

2.1.11 Definition. Sei A eine C^*–Algebra mit 1. Für $a \in A$ heißt

$$r_A(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \cdot 1 - a \in A^\times\}$$

Resolventenmenge von a und

$$\sigma_A(a) := \mathbb{C} - r_A(a)$$

heißt das *Spektrum von a*.

Für $\lambda \in r_A(a)$ heißt

$$(\lambda \cdot 1 - a)^{-1} \in A$$

die *Resolvente von a in λ*. Ferner heißt

$$\rho_A(a) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(a)\}$$

der *Spektralradius von a*.

2.1.12 Beispiel. Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $A = C(X)$. Dann ist

$$\begin{aligned} A^\times &= \{f \in C(X) \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in X\} \\ \sigma_{C(X)}(f) &= f(X) \subset \mathbb{C} \\ r_{C(X)}(f) &= \mathbb{C} - f(X) \\ \rho_{C(X)}(f) &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

2.1.13 Proposition. *Sei A eine C^*–Algebra mit 1 und sei $a \in A$. Dann ist $\sigma_A(a) \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere kompakte Teilmenge und die Resolvente*

$$r_A(a) \to A, \qquad \lambda \mapsto (\lambda \cdot 1 - a)^{-1},$$

ist stetig. Ferner gilt

$$\rho_A(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a\|.$$

Beweis.

a) Sei $\lambda_0 \in r_A(a)$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\|^{-1} \tag{$*$}$$

[1] Es wird gezeigt, dass die Vereinsung der Algebra $C_0(X)$ der stetigen Funktionen auf einem nicht kompakten, lokal–kompakten Raum X, die im Unendlichen verschwinden, isomorph ist zur Algebra $C(\widehat{X})$ der stetigen Funktionen auf der Ein–Punkt–Kompaktifizierung des zu Grunde liegenden Raumes. Wir hatten zuvor schon beobachtet, dass $C_0(X)$ genau dann eine Eins enthält, wenn X kompakt ist. Die Entsprechung von Vereinsung und Kompaktifizierung trägt die angestrebte Charakterisierung topologischer Eigenschaften von X durch algebraische Eigenschaften von $C_0(X)$ also weiter.

konvergiert die so genannte Neumann–Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^m (\lambda_0 1 - a)^{-m-1}$$

absolut, denn

$$\begin{aligned}\|(\lambda_0 - \lambda)^m (\lambda_0 1 - a)^{-m-1}\| &\leq |\lambda_0 - \lambda|^m \cdot \|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\|^{m+1} \\ &= \|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\| \cdot \Big(\underbrace{\frac{\|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\|}{|\lambda_0 - \lambda|^{-1}}}_{<1 \text{ wg.}(*)} \Big)^m .\end{aligned}$$

Die Neumann–Reihe wird somit majorisiert durch die geometrische Reihe, ist also absolut konvergent. Da A als vollständig angenommen wurde (für den Prä–C^*–Algebra–Fall könnten wir so nicht schließen!), konvergiert die Reihe auch im gewöhnlichen Sinne in A. Sie konvergiert gegen die Resolvente $(\lambda 1 - a)^{-1}$, denn

$$\begin{aligned}&(\lambda 1 - a) \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^m (\lambda_0 1 - a)^{-m-1} \\ = \;& [(\lambda - \lambda_0) 1 + (\lambda_0 1 - a)] \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^m (\lambda_0 1 - a)^{-m-1} \\ = \;& -\sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^{m+1} (\lambda_0 1 - a)^{-m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^m (\lambda_0 1 - a)^{-m} \\ = \;& 1.\end{aligned}$$

Damit ist $\lambda \in r_A(a)$ gezeigt für alle λ, die $(*)$ erfüllen. Also ist $r_A(a)$ offen und $\sigma_A(a)$ als dessen Komplement abgeschlossen.

b) Stetigkeit der Resolvente. Wir schätzen die Differenz der Resonvente von a in λ_0 und in λ ab, wobei wir zur Abschätzung der Resolvente in λ wieder die Neumann–Reihe von oben verwenden.

$$\begin{aligned}\big\|(\lambda 1 - a)^{-1} - (\lambda_0 1 - a)^{-1}\big\| &= \Big\| \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^m (\lambda_0 1 - a)^{-m-1} - (\lambda_0 1 - a)^{-1} \Big\| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_0 - \lambda|^m \, \|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\|^{m+1} \\ &= \|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\| \cdot \frac{|\lambda_0 - \lambda| \cdot \|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\|}{1 - |\lambda_0 - \lambda| \cdot \|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\|} \\ &= |\lambda_0 - \lambda| \cdot \frac{\|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\|^2}{1 - |\lambda_0 - \lambda| \cdot \|(\lambda_0 1 - a)^{-1}\|} \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{für } \lambda \to \lambda_0\end{aligned}$$

Vor. wie in Teil a): geometrische Reihe konvergiert

Also ist die Resolvente stetig.

c) Wir zeigen $\rho_A(a) \leq \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und sei $|\lambda|^n > \|a^n\|$. Jedes $m \in \mathbb{N}_0$ schreibt sich eindeutig als $m = pn + q$, $p, q \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq q \leq n - 1$. Die Reihe

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{a}{\lambda}\Big)^m = \frac{1}{\lambda} \sum_{q=0}^{n-1} \Big(\frac{a}{\lambda}\Big)^q \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{a^n}{\lambda^n}}_{\|\cdot\|<1} \Big)^p$$

konvergiert absolut, also konvergiert sie und zwar gegen $(\lambda 1 - a)^{-1}$, denn

$$\big(\lambda 1 - a\big) \cdot \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m-1} a^m\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m} a^m - \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m-1} a^{m+1} = 1$$

und analog

$$\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m-1} a^m\Big) \cdot \big(\lambda 1 - a\big) = 1,$$

d.h. für $|\lambda|^n > \|a^n\|$ besitzt $(\lambda 1 - a)$ ein Inverses und damit ist $\lambda \in r_A(a)$. Damit folgt für den Spektralradius:

$$\rho_A(a) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

d) Wir zeigen $\rho_A(a) \geq \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} =: \widetilde{\rho}(a)$.

1.Fall: $\widetilde{\rho}(a) = 0$. Wäre $a \in A^\times$, so wäre wegen

$$1 = \|1\| = \|a^n a^{-n}\| \leq \|a^n\| \cdot \|a^{-n}\|$$

$1 \leq \widetilde{\rho}(a) \cdot \widetilde{\rho}(a^{-1}) = 0$. Widerspruch! Also ist $a \notin A^\times$. Damit ist $0 \in \sigma_A(a)$, d.h. das Spektrum von a ist nicht leer. Dann ist der Spektralradius $\rho_A(a)$ durch 0 nach unten beschränkt, und damit wie gewünscht

$$\widetilde{\rho}(a) = 0 \leq \rho_A(a).$$

2.Fall: $\widetilde{\rho}(a) > 0$. Sind $a_n \in A$ Elemente, für die

$$R_n := (1 - a_n)^{-1}$$

existieren, so gilt

$$a_n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_n \to 1,$$

denn, wie wir in Lemma 2.1.14 zeigen werden, ist die Inversenabbildung $A^\times \to A^\times, a \mapsto a^{-1}$ stetig. Setze

$$S := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| \geq \widetilde{\rho}(a)\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $S \not\subset r_A(a)$, denn dann existiert ein λ mit

$$|\lambda| \geq \widetilde{\rho}(a) \quad \text{und} \quad \lambda \in \sigma_A(a)$$

und somit

$$\rho_A(a) \geq |\lambda| \geq \widetilde{\rho}(a).$$

Angenommen, es wäre $S \subset r_A(a)$. Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine n–te Einheitswurzel, d.h $\omega^n = 1$. Für $\lambda \in S$ existiert dann

$$\Big(\frac{\lambda}{\omega^k} 1 - a\Big)^{-1} = \frac{\omega^k}{\lambda}\Big(1 - \frac{\omega^k a}{\lambda}\Big)^{-1}$$

und somit auch

$$R_n(a, \lambda) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{\omega^k a}{\lambda}\Big)^{-1}, \qquad \lambda \in S \subset r_A(a).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\Big(1-\frac{a^n}{\lambda^n}\Big)R_n(a,\lambda) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Big(\frac{\omega^{k(l-1)}a^{l-1}}{\lambda^{l-1}}-\frac{\omega^{kl}a^l}{\lambda^l}\Big)\Big(1-\frac{\omega^k a}{\lambda}\Big)^{-1} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\omega^{k(l-1)}a^{l-1}}{\lambda^{l-1}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{a^{l-1}}{\lambda^{l-1}}\quad\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(\omega^{l-1})^k}_{\begin{cases}0 \text{ falls } l\geq 2\\ n \text{ falls } l=1\end{cases}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

und analog folgert man $R_n(a,\lambda)\big(1-\frac{a^n}{\lambda^n}\big)=1$. Somit ist

$$R_n(a,\lambda)=\Big(1-\frac{a^n}{\lambda^n}\Big)^{-1},\qquad \lambda\in S\subset r_A(a).$$

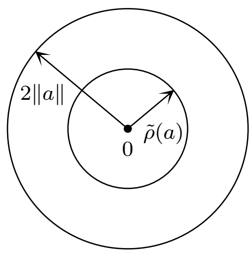
Ferner gilt für $\lambda\in S$:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(1-\frac{a^n}{\widetilde{\rho}(a)^n}\Big)^{-1}-\Big(1-\frac{a^n}{\lambda^n}\Big)^{-1}\Big\| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big\|\Big(1-\frac{\omega^k a}{\widetilde{\rho}(a)}\Big)^{-1}-\Big(1-\frac{\omega^k a}{\lambda}\Big)^{-1}\Big\| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big\|\Big(1-\frac{\omega^k a}{\widetilde{\rho}(a)}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{\omega^k a}{\lambda}-1+\frac{\omega^k a}{\widetilde{\rho}(a)}\Big)\Big(1-\frac{\omega^k a}{\lambda}\Big)^{-1}\Big\| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big\|\Big(\frac{\widetilde{\rho}(a)}{\omega^k}1-a\Big)^{-1}\Big(-\frac{\widetilde{\rho}(a)a}{\omega^k}+\frac{\lambda a}{\omega^k}\Big)\Big(\frac{\lambda}{\omega^k}1-a\Big)^{-1}\Big\| \\
&\leq |\widetilde{\rho}(a)-\lambda|\cdot\|a\|\cdot\sup_{z\in S}\|(z1-a)^{-1}\|^2.
\end{aligned}$$

Das Supremum ist endlich, denn $z\mapsto(z1-a)^{-1}$ ist stetig auf $r_A(a)\supset S$ nach b) und für $|z|\geq 2\cdot\|a\|$ gilt:

$$\|(z1-a)^{-1}\|\leq\frac{1}{|z|}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{\|a\|^n}{|z|^n}}_{\leq(\frac{1}{2})^n}\leq\frac{2}{|z|}\leq\frac{1}{\|a\|}.$$

Außerhalb des Ringes $B_{2\|a\|}(0)-B_{\widetilde{\rho}(a)}(0)$ ist $\|(z1-a)^{-1}\|$ also beschränkt durch $\frac{1}{\|a\|}$ und auf dem kompakten Ring ist sie als stetige Funktion sowieso beschränkt.



Definiere

$$C:=\|a\|\cdot\sup_{z\in S}\|(z1-a)^{-1}\|^2.$$

Damit gilt:

$$\|R_n(a,\widetilde{\rho}(a))-R_n(a,\lambda)\|\leq C\cdot|\widetilde{\rho}(a)-\lambda|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda \in S$. Mit $\lambda = \widetilde{\rho}(a) + \frac{1}{j}$ erhalten wir

$$\left\| \left(1 - \frac{a^n}{\widetilde{\rho}(a)^n}\right)^{-1} - \underbrace{\left(1 - \underbrace{\frac{a^n}{(\widetilde{\rho}(a) + \frac{1}{j})^n}}_{\to 0 \text{ für } n \to \infty}\right)^{-1}}_{\to 1 \text{ für } n \to \infty} \right\| \leq \frac{C}{j}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \limsup_{n\to\infty} \left\| \left(1 - \frac{a^n}{\widetilde{\rho}(a)^n}\right)^{-1} - 1 \right\| \leq \frac{C}{j} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \qquad & \limsup_{n\to\infty} \left\| \left(1 - \frac{a^n}{\widetilde{\rho}(a)^n}\right)^{-1} - 1 \right\| = 0 \\
\Rightarrow \qquad & \left(1 - \frac{a^n}{\widetilde{\rho}(a)^n}\right)^{-1} \longrightarrow 1 \qquad \text{für } n \to \infty \\
\Rightarrow \qquad & \frac{\|a^n\|}{\widetilde{\rho}(a)^n} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Aber das widerspricht der Definition von $\widetilde{\rho}(a)$, denn

$$\begin{aligned}
\|a^{n+1}\|^{\frac{1}{n+1}} &\leq \|a\|^{\frac{1}{n+1}} \cdot \|a^n\|^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \|a\|^{\frac{1}{n+1}} \cdot \|a^n\|^{-\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \|a\|^{\frac{1}{n+1}} \cdot \|a\|^{-\frac{n}{n(n+1)}} \cdot \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \\
&= \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Also ist die Folge $\left(\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und damit

$$\widetilde{\rho}(a) = \limsup_{k\to\infty} \|a^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt aber

$$1 \leq \frac{\|a^n\|}{\widetilde{\rho}(a)^n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Widerspruch!

e) Das Spektrum ist nicht leer. Denn wäre $\sigma(a) = \emptyset$, dann wäre

$$\rho_A(a) = -\infty$$

im Widerspruch zu

$$\rho_A(a) = \lim_{n\to\infty} \|a\|^{\frac{1}{n}} \geq 0$$

□

2.1.14 Lemma. *Sei A eine Prä–C^*–Algebra. Dann sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned}
A \times A \to A, &\qquad (a,b) \mapsto a + b, \\
\mathbb{C} \times A \to A, &\qquad (\alpha, a) \mapsto \alpha a, \\
A \times A \to A, &\qquad (a,b) \mapsto a \cdot b, \\
A^\times \to A^\times, &\qquad a \mapsto a^{-1}
\end{aligned}$$

stetig.

Beweis.

a) Die ersten beiden Abbildungen sind in allen normierten Vektorräumen stetig, wie man leicht aus der Dreiecksungleichung und der Homogenität der Norm folgert.

b) Stetigkeit der Multiplikation. Seien a_0, $b_0 \in A$. Dann gilt für a, $b \in A$ mit $\|a - a_0\| < \varepsilon$ und $\|b - b_0\| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned}\|ab - a_0 b_0\| &= \|ab - a_0 b + a_0 b - a_0 b_0\| \\ &\le \|a - a_0\| \cdot \|b\| + \|a_0\| \cdot \|b - b_0\| \\ &\le \varepsilon\big(\|b - b_0\| + \|b_0\|\big) + \|a_0\| \cdot \varepsilon \\ &\le \varepsilon\big(\varepsilon + \|b_0\|\big) + \|a_0\| \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

c) Stetigkeit der Inversenabbildung. Sei $a_0 \in A^\times$. Dann gilt für alle $a \in A^\times$ mit $\|a - a_0\| < \varepsilon < \|a_0^{-1}\|^{-1}$:

$$\begin{aligned}\|a^{-1} - a_0^{-1}\| &= \|a^{-1}(a_0 - a)a_0^{-1}\| \\ &\le \|a^{-1}\| \cdot \|a_0 - a\| \cdot \|a_0^{-1}\| \\ &\le \big(\|a^{-1} - a_0^{-1}\| + \|a_0^{-1}\|\big) \cdot \varepsilon \cdot \|a_0^{-1}\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\big(1 - \varepsilon\|a_0^{-1}\|\big)}_{>0, \text{ da } \varepsilon < \|a_0^{-1}\|^{-1}} \|a^{-1} - a_0^{-1}\| \le \varepsilon \cdot \|a_0^{-1}\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|a^{-1} - a_0^{-1}\| \le \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon\|a_0^{-1}\|} \cdot \|a_0^{-1}\|^2.$$

□

2.1.15 Definition. Sei A eine Prä–C^*–Algebra mit Eins. Dann heißt $a \in A$

normal, falls $aa^* = a^*a$,

Isometrie, falls $a^*a = 1$ und

unitär, falls $a^*a = aa^* = 1$.

Bemerkung. Insbesondere sind selbstadjungierte Elemente normal. In einer kommutativen Algebra sind alle Elemente normal.

2.1.16 Satz. *Sei A eine C^*–Algebra mit Eins und sei $a \in A$. Dann gilt:*

1) $\sigma_A(a^*) = \overline{\sigma_A(a)}$

2) Falls $a \in A^\times$: $\sigma_A(a^{-1}) = \sigma_A(a)^{-1}$.

3) Falls a normal: $\rho_A(a) = \|a\|$.

4) Falls a Isometrie: $\rho_A(a) = 1$.

5) Falls a unitär: $\sigma_A(a) \subset S^1 \subset \mathbb{C}$.

6) Ist a selbstadjungiert, so gilt $\sigma_A(a) \subset [-\|a\|, \|a\|]$ und ferner $\sigma_A(a^2) \subset [0, \|a\|^2]$.

7) Ist $P(z)$ ein Polynom und $a \in A$ beliebig, so gilt

$$\sigma_A\big(P(a)\big) = P\big(\sigma_A(a)\big).$$

Beweis.

Zu 1): λ ist nicht im Spektrum von a genau dann, wenn $(\lambda 1 - a)$ invertierbar ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $(\lambda 1 - a)^* = \overline{\lambda} 1 - a^*$ invertierbar ist, d.h. genau dann, wenn $\overline{\lambda}$ nicht im Spektrum von a^* ist.

Zu 2): Falls a invertierbar ist, so ist 0 weder im Spektrum $\sigma_A(a)$ von a noch im Spektrum $\sigma_A(a^{-1})$ von a^{-1}. Ferner gilt für $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} & (\lambda 1 - a) = \lambda a(a^{-1} - \lambda^{-1} 1) \\ \text{und} \qquad & (\lambda^{-1} 1 - a^{-1}) = \lambda^{-1} a^{-1}(a - \lambda 1). \end{aligned}$$

Also ist $(\lambda 1 - a)$ genau dann invertierbar, wenn $(\lambda^{-1} 1 - a^{-1})$ invertierbar ist.

Zu 3): Sei a normal. Unter Verwendung der C^*–Eigenschaft erhalten wir (induktiv):

$$\begin{aligned} \|a^{2^n}\|^2 &= \|(a^{2^n})^* a^{2^n}\| = \|(a^*)^{2^n} a^{2^n}\| = \|(a^*a)^{2^n}\| \\ &= \|(\underbrace{a^*a}_{\text{selbstadj.}})^{2^{n-1}} (a^*a)^{2^{n-1}}\| = \|(a^*a)^{2^{n-1}}\|^2 \\ &= \dots = \|a^*a\|^{2^n} = \|a\|^{2^{n+1}} \\ \Rightarrow \quad \rho_A(a) &= \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \|a\| = \|a\|. \end{aligned}$$

Zu 4): Sei a Isometrie. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|a^n\|^2 &= \|(a^n)^* a^n\| = \|(a^*)^n a^n\| = \|1\| = 1. \\ \Rightarrow \quad \rho_A(a) &= \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 1. \end{aligned}$$

Zu 5): Sei a unitär. Zum Einen gilt nach (4):

$$\sigma_A(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| \leq 1\}.$$

Zum Anderen gilt

$$\sigma_A(a) \overset{(1)}{=} \overline{\sigma_A(a^*)} = \overline{\sigma_A(a^{-1})} \overset{(2)}{=} \overline{\sigma_A(a)}^{-1}.$$

Beides zusammen ergibt: $\sigma_A(a) \subset S^1$.

Zu 6): Sei a selbstadjungiert. Zu zeigen ist $\sigma_A(a) \subset \mathbb{R}$. Wähle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda^{-1} > \|a\|$. Dann ist $1 + i\lambda a = \lambda(\lambda^{-1} + ia)$ invertierbar. Setze

$$U := (1 - i\lambda a)(1 + i\lambda a)^{-1}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} U^*U &= (1 - i\lambda a)^{-1} \cdot (1 + i\lambda a)(1 - i\lambda a)(1 + i\lambda a)^{-1} \\ &= (1 - i\lambda a)^{-1}(1 - i\lambda a)(1 + i\lambda a)(1 + i\lambda a)^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

und analog ist $UU^* = 1$, d.h. U ist unitär. Dann ist nach Teil 5) $\sigma_A(U) \subset S^1$. Eine kleine Fingerübung im Rechnen mit komplexen Zahlen zeigt, dass

$$|(1 - i\lambda\mu)(1 + i\lambda\mu)^{-1}| = 1 \quad \iff \quad \mu \in \mathbb{R},$$

also ist

$$(1 - i\lambda\mu)(1 + i\lambda\mu)^{-1} \cdot 1 - U \quad \text{invertierbar, falls } \mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}&(1-i\lambda\mu)(1+i\lambda\mu)^{-1}\cdot 1-U\\&\quad=(1+i\lambda\mu)^{-1}\big((1-i\lambda\mu)(1+i\lambda a)1-(1+i\lambda\mu)(1-i\lambda a)\big)(1+i\lambda a)^{-1}\\&\quad=2i\lambda(1+i\lambda\mu)^{-1}(a-\mu 1)(1+i\lambda\mu)^{-1}\end{aligned}$$

ist $(a-\mu 1)$ invertierbar für alle $\mu\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$, d.h. $\mu\in r_A(a)$ für alle $\mu\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ und also $\sigma_A(a)\subset\mathbb{R}$.

Die Aussage über $\sigma_A(a^2)$ folgt dann aus Teil 7).

Zu 7): Zerlege das Polynom $P(z)-\lambda$ in Linearfaktoren:

$$P(z)-\lambda=\alpha\cdot\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j-z),\qquad \alpha,\alpha_j\in\mathbb{C}.$$

Wir setzen ein Algebraelement $a\in A$ ein:

$$P(a)-\lambda 1=\alpha\cdot\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j 1-a).$$

Da die Faktoren in diesem Produkt kommutieren, ist das Produkt invertierbar genau dann, wenn alle Faktoren invertierbar sind.[2] In unserem Fall bedeutet das

$$\begin{aligned}\lambda\in\sigma_A\big(P(a)\big)\quad&\Longleftrightarrow\quad\text{mind. eine Faktor ist nicht invertierbar}\\&\Longleftrightarrow\quad\alpha_j\in\sigma_A(a)\text{ für ein }j\\&\Longleftrightarrow\quad\lambda=P(\alpha_j)\in P\big(\sigma_A(a)\big),\end{aligned}$$

da die α_j's sämtliche Nullstellen von $P(z)-\lambda 1$ sind.

□

2.1.17 Korollar. *Sei $(A,\|\cdot\|,*)$ eine C^*–Algebra. Dann ist die Norm $\|\cdot\|$ durch A und $*$ eindeutig festgelegt.*

Beweis. OBdA habe A eine Eins; sonst gehe zur Vereinsung $\widetilde{A}$ über.[3] Es gilt für $a\in A$, dass

$$\|a\|^2=\|\underbrace{a^*a}_{\text{selbstad.}}\|\overset{2.1.16.3}{=}\rho_A(a^*a)$$

nur von A und $*$ abhängt. □

2.1.18 Definition. Seien A und B C^*–Algebren. Ein Algebrenhomomorphismus

$$\pi:A\to B$$

heißt *$*$–Morphismus*, falls für alle $a\in A$ gilt:

$$\pi(a^*)=\pi(a)^*.$$

Eine Abbildung $\pi:A\to A$ heißt *$*$–Automorphismus*, wenn sie ein invertierbarer $*$-Morphismus ist.

[2] Dies folgt aus einer ganz allgemeinen Überlegung für Algebren mit Eins: Sei $b=a_1\cdots a_n$ mit kommutierenden Faktoren. Dann ist b invertierbar, falls alle Faktoren invertierbar sind: $b^{-1}=a_n^{-1}\cdots a_1^{-1}$. Ist umgekehrt b invertierbar, so ist $a_i^{-1}=b^{-1}\cdot\prod_{j\neq i}a_j$, wobei wir die Kommutativität der Faktoren verwendet haben.

[3] $(\widetilde{A},*)$ wird festgelegt durch $(A,*)$. Bestimme $\|\cdot\|$ auf $\widetilde{A}$ und schränke diese auf $A\cong\{0\}\times A\subset\widetilde{A}$ ein.

2.1.19 Korollar. *Seien A und B C^*–Algebren (mit Eins). Jeder (einserhaltende) $*$–Morphismus $\pi : A \to B$ erfüllt*

$$\|\pi(a)\| \leq \|a\|$$

für alle $a \in A$. Insbesondere ist π stetig.

Beweis.

a) Betrachte zunächst den Fall, dass A und B eine Eins haben. Für $a \in A^\times$ gilt:

$$\pi(a)\pi(a^{-1}) = \pi(aa^{-1}) = \pi(1) = 1$$

und analog $\pi(a^{-1})\pi(a) = 1$, also ist $\pi(a) \in B^\times$ mit $\pi(a)^{-1} = \pi(a^{-1})$. Ist nun $\lambda \in r_A(a)$, so ist

$$\lambda 1 - \pi(a) = \pi(\lambda 1 - a) \in \pi(A^\times) \subset B^\times,$$

d.h. $\lambda \in r_B(\pi(a))$. Also ist $r_A(a) \subset r_B(\pi(a))$. Dann gilt für die Spektren die umgekehrte Inklusion $\sigma_B(\pi(a)) \subset \sigma_A(a)$. Daraus erhalten wir für die Spektralradien die Ungleichung

$$\rho_B(\pi(a)) \leq \rho_A(a).$$

Nun können wir, da π eine $*$–Morphismus ist, die Norm folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\|^2 &= \|\underbrace{\pi(a)^*\pi(a)}_{\text{selbstadj.}}\| = \rho_B\big(\pi(a)^*\pi(a)\big) = \rho_B\big(\pi(a^*a)\big) \\ &\leq \rho_A(a^*a) = \|a\|^2.\end{aligned}$$

b) Haben A und B keine Eins, so definieren wir zwischen den Vereinsungen $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$ folgende Abbildung

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}, \qquad \widetilde{\pi}\big((\alpha, a)\big) := \big(\alpha, \pi(a)\big).$$

Dann ist $\widetilde{\pi}$ ein einserhaltender $*$-Morphismus. Also gilt

$$\|\pi(a)\|_B = \|(0, \pi(a))\|_{\widetilde{B}} = \|\widetilde{\pi}(0, a)\|_{\widetilde{B}} \overset{(a)}{\leq} \|(0, a)\|_{\widetilde{A}} = \|a\|_A.$$

□

2.1.20 Korollar. *Sei A eine C^*–Algebra (mit Eins). Dann erfüllt jeder (einserhaltende) $*$-Automorphismus $\pi : a \to A$ für alle $a \in A$:*

$$\|\pi(a)\| = \|a\|$$

Beweis.

$$\|\pi(a)\| \leq \|a\| = \|\pi^{-1}\big(\pi(a)\big)\| \leq \|\pi(a)\|.$$

□

2.1.21 Bemerkung. Ist A eine C^*–Algebra ohne Eins und $a \in A$, so schreiben wir

$$\begin{aligned}\sigma_A(a) &:= \sigma_{\widetilde{A}}\big((0, a)\big), \\ r_A(a) &:= r_{\widetilde{A}}\big((0, a)\big), \\ \rho_A(a) &:= \rho_{\widetilde{A}}\big((0, a)\big).\end{aligned}$$

2.1.22 Bemerkung. Sei A ein Banachraum, d.h. ein vollständig normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$. Betrachte den *Dualraum* der stetigen, linearen Funktionale

$$A^* := \{\mu : A \to \mathbb{C} \text{ linear und stetig}\}$$

mit der *Operatornorm*

$$\|\mu\| := \sup_{\substack{a \in A \\ \|a\|=1}} |\mu(a)|.$$

Dann ist $(A^*, \|\cdot\|)$ wieder ein Banachraum.

A^* trägt eine weitere wichtige Topologie, die *schwach–∗–Topologie*: Zu $\mu_0 \in A^*$, $a \in A$, $\delta > 0$ setze

$$U(\mu_0, a, \delta) := \{\mu \in A^* \,|\, |\mu(a) - \mu_0(a)| < \delta\}.$$

Die *schwach–∗–Topologie* ist die von den $U(\mu_0, a, \delta)$ erzeugte Topologie auf A^*, d.h. die offenen Mengen der schwach–∗–Topologie sind beliebige Vereinigungen endlicher Schnitte von Mengen aus[4]

$$\mathcal{S} := \big\{U(\mu_0, a, \delta) \,|\, \mu_0 \in A^*,\, a \in A,\, \delta > 0\big\}.$$

Die Norm–Topologie wird erzeugt durch die Mengen

$$V(\mu_0, \delta) := \{\mu \in A^* \,|\, \|\mu - \mu_0\| < \delta\}.$$

Diese Normen sind *nicht* äquivalent, denn für eine Folge $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in A^* gilt

$$\begin{aligned} \mu_i \to \mu \text{ bzgl. Norm–Topologie} \quad &\Leftrightarrow \quad \mu_i \to \mu \text{ gleichmäßig (als Funktionale)} \\ \mu_i \to \mu \text{ bzgl. schwach–∗–Top.} \quad &\Leftrightarrow \quad \mu_i \to \mu \text{ punktweise.} \end{aligned}$$

2.1.23 Definition. Sei A eine C^*–Algebra. Ein $\mu \in A^*$ heißt *Charakter*, falls

$$\mu \neq 0 \quad \text{und} \quad \mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$$

für alle a, $b \in A$. Die Menge

$$M(A) := \{\text{Charaktere von } A\} \subset A^*$$

zusammen mit der von der schwach–∗–Topologie kommenden Relativtopologie heißt *Gelfand–Spektrum von A*.

2.1.24 Beispiel. 1) Sei $A = \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$, $n \geq 2$. Dann ist $M(A) = \emptyset$ ($\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ ist sozusagen charakterlos), denn für einen Ringhomomorphismus $\mu : A \to \mathbb{C}$ muss gelten:

$$\mu(a^{-1}ba) = \mu(a)^{-1}\mu(b)\mu(a) = \mu(b),$$

d.h. μ ist konstant auf Konjugationsklassen. Deshalb läßt sich μ ausdrücken in elementarsymmetrischen Funktionen der Eigenwerte. Nun soll μ aber linear sein, also muss

$$\mu(a) = \mathrm{const} \cdot \mathrm{tr}(a)$$

gelten, was aber nicht multiplikativ ist für const $\neq 0$.

[4] $\mathcal{S}$ heißt *(topologische) Subbasis* der erzeugten Topologie

2) Sei $A = \mathbb{C}_0(X)$, wobei X ein lokal–kompakter Hausdorffraum sein. Für $p \in X$ ist $\mu_p(f) := f(p)$ ein Charakter. Die Abbildung

$$X \to M(C_0(X)), \qquad p \mapsto \mu_p,$$

ist injektiv und stetig:

Injektivität. Seien $p \neq q \in X$. Weil X lokal–kompakt ist, kann man in $C_0(X)$ Punkte trennen, d.h. es existiert $f \in C_0(X)$ mit $f(p) \neq f(q)$. Wegen $\mu_p(f) = f(p) \neq f(q) = \mu_q(f)$ ist $\mu_p \neq \mu_q$.

Stetigkeit. Ist $p_i \to p$ eine konvergente Folge in X, so gilt für jedes $f \in C_0(X)$:

$$\mu_{p_i}(f) = f(p_i) \to f(p) = \mu_p(f),$$

d.h. $\mu_{p_i} \to \mu_p$ konvergiert punktweise, also in der schwach–$*$–Topologie.

Tatsächlich ist die Abbildung ein Homöomorphismus, wie wir in 2.1.33 sehen werden.

2.1.25 Bemerkung. Sei A eine C^*–Algebra mit Eins. Dann gilt für alle $\mu \in M(A)$ und alle $a \in A$:

$$\mu \neq 0 \quad \text{ und } \quad \mu(a) = \mu(1a) = \mu(1)\mu(a),$$

d.h. Charaktere sind „automatisch" einserhaltend:

$$\boxed{\mu(1) = 1.}$$

Wäre $\mu(a) \in r_A(a)$, so wäre $\mu(a)1 - a \in A^\times$, also

$$\mathbb{C} - \{0\} = \mathbb{C}^\times \supset \mu(A^\times) \ni \mu(\mu(a)1 - a) = \mu(a)\mu(1) - \mu(a) = 0.$$

Widerspruch! Also gilt für alle $a \in A$ und $\mu \in M(A)$:

$$\boxed{\mu(a) \in \sigma_A(a).}$$

Hieraus folgt einerseits

$$|\mu(a)| \leq \rho_A(a) \leq \|a\|,$$

und nach Definition der Operatornorm folgt daraus

$$\|\mu\| \leq 1.$$

Andererseits gilt

$$\|\mu\| = \sup_{\|a\|=1} |\mu(a)| \geq |\mu(1)| = 1,$$

somit:

$$\boxed{\|\mu\| = 1}$$

2.1.26 Bemerkung. Sei A eine C^*–Algebra ohne Eins. Sei $\widetilde{A}$ die Vereinsung von A. Ist $\widetilde{\mu} \in M(\widetilde{A})$, so ist

$$\mu := \widetilde{\mu}|_A \in M(A) \quad \text{ oder } \quad \widetilde{\mu}|_A = 0.$$

Im letzteren Fall gilt

$$\widetilde{\mu}\big((\alpha, a)\big) = \underbrace{\widetilde{\mu}\big((\alpha, 0)\big)}_{=\alpha \cdot \widetilde{\mu}((1,0))} + \underbrace{\widetilde{\mu}\big((0, a)\big)}_{=0} = \alpha,$$

So erhalten wir eine Bijektion

$$M(\widetilde{A}) \to M(A) \cup \{0\}, \qquad \widetilde{\mu} \mapsto \widetilde{\mu}|_A.$$

2.1.27 Lemma. *Sei A eine C^*–Algebra. Dann ist $M(A)$ ein lokal–kompakter Hausdorffraum. Besitzt A eine Eins, so ist $M(A)$ kompakt.*

Beweis.

a) Beh.: $M(A) \cup \{0\}$ ist schwach–$*$–abgeschlossen in A^*.

Bew.: Wir können $M(A) \cup \{0\}$ folgendermaßen schreiben:

$$M(A) \cup \{0\} = \big\{\mu \in A^* \mid \mu(ab) - \mu(a)\mu(b) = 0 \text{ für alle } a,\, b \in A\big\}.$$

Seien $a,\, b \in A$. Dann ist die Funktion

$$\Phi_{a,b} : A^* \to \mathbb{C}, \qquad \Phi_{a,b}(\mu) := \mu(ab) - \mu(a)\mu(b)$$

stetig in der schwach–$*$–Topologie. Mit obiger Charakterisierung von $M(A) \cup \{0\}$ gilt

$$\Phi_{a,b}|_{M(A)\cup\{0\}} \equiv 0$$

und aus der Stetigkeit folgt

$$\Phi_{a,b}|_{\overline{M(A)\cup\{0\}}} \equiv 0.$$

Hieraus folgt $\overline{M(A) \cup \{0\}} = M(A) \cup \{0\}$, also die Behauptung.

b) Nach dem Satz von Banach–Alaoglu ist die Einheitssphäre in A^* in der schwach–$*$–Topologie kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge ist $M(A) \cup \{0\}$ ebenfalls kompakt.

Mit der schwach–$*$–Topologie ist A^* hausdorffsch, denn für $\mu_1 \neq \mu_2 \in A^*$ wähle ein $a \in A$ mit $\mu_1(a) \neq \mu_2(a)$. Setze

$$\delta := \frac{1}{2}|\mu_1(a) - \mu_2(a)|.$$

Dann sind $U(\mu_1, a, \delta)$ und $U(\mu_2, a, \delta)$ disjunkte Umgebungen von μ_1 bzw. μ_2.

c) Lokal–Kompaktheit. Sei $\mu \in M(A)$. Wähle disjunkte offene Umgebungen U_1 von μ und U_2 von 0 in $M(A) \cup \{0\}$. Dann ist wegen

$$\mu \in U_1 \subset \underbrace{M(A) \cup \{0\} - U_2}_{\text{kompakt}} \subset M(A)$$

$M(A) \cup \{0\} - U_2$ eine kompakte Umgebung von μ in $M(A)$. Also ist $M(A)$ lokal–kompakt.

d) Die Algebra A besitze eine Eins. Betrachte die Funktion

$$M(A) \cup \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad \mu \mapsto \mu(1).$$

Sie ist stetig und es gilt

$$\mu(1) = \begin{cases} 1, & \mu \in M(A) \\ 0, & \mu = 0. \end{cases}$$

Also muss 0 isoliert in $M(A) \cup \{0\}$ liegen. Mit b) folgt, dass dann auch $M(A)$ kompakt ist.

□

2.1.28 Definition. Sei A eine C^*–Algebra. Für $a \in A$ setze

$$\widehat{a} : M(A) \to \mathbb{C}, \qquad \widehat{a}(\mu) = \mu(a).$$

Die Abbildung

$$\mathcal{G} : A \to C_0(M(A)), \qquad a \mapsto \widehat{a},$$

heißt *Gelfandtransformation*.

2.1.29 Bemerkung. Da $M(A)$ die schwach–$*$–Topologie trägt, ist $\widehat{a}$ stetig. Ferner setzt sich $\widehat{a}$ stetig auf $M(A) \cup \{0\}$ fort vermöge

$$\widehat{a}(0) = 0(a) = 0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine offene Umgebung $U = U(0, a, \varepsilon)$ in der schwach–$*$–Topologie, so dass

$$|\widehat{a}(\mu)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \mu \in U.$$

Weil U offen und $M(A) \cup \{0\}$ kompakt ist, ist dann

$$K := \big(M(A) \cup \{0\}\big) - U$$

kompakt und $K \subset M(A)$. Dann gilt

$$|\widehat{a}(\mu)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } \mu \in M(A) - K = U - \{0\}.$$

Somit verschwindet $\widehat{a}$ im Unendlichen, $\widehat{a} \in C_0(M(A))$.

2.1.30 Lemma. *Sei A eine kommutative C^*–Algebra. Sei $a \in A$ und $\lambda \in \sigma_A(a)$. Falls A eine Eins hat oder falls $\lambda \neq 0$, so existiert ein $\mu \in M(A)$ mit*

$$\mu(a) = \lambda.$$

Beweis.

a) Zunächst habe A eine Eins. Da $\lambda \in \sigma_A(a)$, ist

$$(\lambda 1 - a) \notin A^\times,$$

und daher ist

$$(\lambda 1 - a)A \subsetneq A$$

ein echtes Ideal.

Beh.: Es gibt ein maximales, echtes Ideal

$$I_\lambda \subsetneq A \quad \text{mit} \quad (\lambda 1 - a)A \subset I_\lambda.$$

Bew.: Wir streben eine Anwendung des Lemmas von Zorn an. Dafür brauchen wir eine partiell geordnete Menge, in der jede aufsteigende Kette eine obere Schranke besitzt. Setze

$$J := \{I \subsetneq A \text{ Ideal} \,|\, (\lambda 1 - a)A \subset I\}.$$

J ist partiell geordnet durch die Inklusion „$\subset$“. Betrachte eine aufsteigene Kette

$$I_j \in J, \quad I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots .$$

Setze $I := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$. Im Allgemeinen ist beliebige Vereinigung von Idealen kein Ideal, aber I ist ein Ideal in A, denn ist $a \in A$, b, b_1, $b_2 \in I$, α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$, so existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit b, b_1, $b_2 \in I_j$. Somit ist

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \in I_j \subset I \quad \text{und} \quad a \cdot b \in I_j \subset I.$$

Jedes I_j ist ein echtes Ideal in A, also ist $1 \notin I_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist die Eins aber auch nicht in I, d.h. $I \subsetneq A$ ist ein echtes Ideal und damit in J enthalten. Da nach Konstruktion $I_j \subset I$ für alle $j \in \mathbb{N}$, haben wir die gesuchte obere Schranke gefunden.

Anwendung des Lemmas von Zorn liefert nun, dass J ein maximales Element enthält, d.h. es gibt ein maximales, echtes Ideal, das $(\lambda 1 - a)A$ enthält. Dies sei I_λ.

b) Beh.: I_λ ist abgeschlossen in A.

Bew.: Der Abschluss $\overline{I_\lambda}$ ist ein Ideal in A, da die Algebraverknüpfungen nach Lemma 2.1.14 stetig sind. Da I_λ aber maximal ist, folgt $\overline{I_\lambda} = I_\lambda$ oder $\overline{I_\lambda} = A$. Wir zeigen $\overline{I_\lambda} \subsetneq A$.

Ist $b \in A$ mit $\|b\| < 1$, so ist $1 + b \in A^\times$, denn

$$\sigma_A(1+b) = 1 + \sigma_A(b) \subset 1 + B_{\mathbb{C}}(0,1) \not\ni 0,$$

weil $\rho_A(b) \leq \|b\| < 1$. Wäre $\overline{I_\lambda} = A$, dann wäre $I_\lambda \subset A$ dicht, somit

$$\emptyset \neq I_\lambda \cap B_A(1,1) \subset I_\lambda \cap A^\times$$

und daher $I_\lambda = A$ im Widerspruch zur Definition von I_λ. Also ist $\overline{I_\lambda} \subsetneq A$ und somit $I_\lambda = \overline{I_\lambda}$.

c) Nun ist A/I_λ eine kommutative $\mathbb{C}$–Algebra ohne nichttriviale Ideale. Sonst wäre nämlich das Urbild eines nichttrivialen Ideals unter

$$A \to A/I_\lambda, \qquad a \mapsto a + I_\lambda,$$

ein Ideal I mit $I_\lambda \subsetneq I \subsetneq A$ im Widerspruch zur Maximalität von I_λ. Somit ist jedes Element $\neq 0$ in A/I_λ invertierbar, da es andernfalls ein nichttriviales Ideal erzeugen würde. Daher ist A/I_λ ein Körper.

A/I_λ erbt eine submultiplikative Norm durch

$$\|b + I_\lambda\|_{A/I_\lambda} := \inf_{C \in I_\lambda} \|b + c\|_A.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von I_λ (Teil b) das Beweises) definiert dies eine Norm auf A/I_λ.

Die Diskussion, die uns zu der Aussage „Das Spektrum eines Elementes einer C^*–Algebra ist niemals leer“ geführt hat, benutzt $*$ nicht und gilt daher auch für Algebren mit submultiplikativer Norm.

Sei $b + I_\lambda \in A/I_\lambda$. Wähle $\nu \in \sigma_{A/I_\lambda}(b + I_\lambda)$, d.h. $\nu 1 - (b + I_\lambda)$ ist nicht invertierbar in A/I_λ. Da dies ein Körper ist, folgt $\nu 1 - (b + I_\lambda) = 0$, also $b + I_\lambda = \nu 1$ und somit $A/I_\lambda \cong \mathbb{C}$. Die Projektion

$$\mu : A \to A/I_\lambda \cong \mathbb{C}$$

ist ein Algebrenhomomorphismus mit $\mu(1) = 1$ und

$$0 = \mu(\underbrace{\lambda 1 - a}_{\in I_\lambda}) = \lambda\mu(1) - \mu(a).$$

Also haben wir den gesuchten Charakter μ mit

$$\mu(a) = \lambda$$

gefunden.[5]

d) Sei nun A eine C^*–Algebra ohne Eins. Wir gehen zur Vereinsung $\widetilde{A}$ über und erhalten $\widetilde{\mu} \in M(\widetilde{A})$ mit $\widetilde{\mu}\big((0,a)\big) = \lambda$. Dann ist

$$\mu := \widetilde{\mu}|_{\{0\}\times A}$$

ein Charakter von $A \cong \{0\} \times A$, da $\lambda \neq 0$ und somit $\mu \neq 0$.

□

2.1.31 Korollar. *Sei A eine kommutative C^*–Algebra. Sei $a \in A$. Dann gilt*

$$\|\widehat{a}\| = \rho_A(a).$$

Beweis.

$$\|\widehat{a}\| = \sup_{\mu \in M(A)} |\widehat{a}(\mu)| = \sup_{\mu \in M(A)} |\mu(a)| = \sup_{\lambda \in \sigma_A(a)} |\lambda| = \rho_A(a),$$

wobei das vorangehende Lemma in der vorletzten Gleichung Anwendung findet. □

2.1.32. Satz (Gelfand–Naimark). *Sei A eine kommutative C^*–Algebra. Dann ist die Gelfandtransformation*

$$\mathcal{G} : A \to C_0(M(A))$$

ein isometrischer $*$–Isomorphismus.

Beweis.

a)Beh.: $\mathcal{G}$ ist $*$-Morphismus.

Bew.: Sei $a \in A$ und $\mu \in M(A)$. Setze $a_1 := \frac{1}{2}(a^* + a)$ und $a_2 := \frac{i}{2}(a^* - a)$. Dann sind a_1 und a_2 selbstadjungiert und $a = a_1 + ia_2$.

$$\begin{aligned}
\widehat{a^*}(\mu) &= \mu(a^*) = \mu(a_1 - ia_2) \\
&= \underbrace{\mu(a_1)}_{\substack{\in\sigma_A(a_1)\subset\mathbb{R} \\ \text{da } a_1 \text{ selbstadj.}}} - i\underbrace{\mu(a_2)}_{\in\mathbb{R}} = \overline{\mu(a_1) + i\mu(a_2)} \\
&= \overline{\mu(a)} = \overline{\widehat{a}(\mu)} = (\widehat{a})^*(\mu).
\end{aligned}$$

b)Beh.: $\mathcal{G}$ ist isometrisch und injektiv.

Bew.: $\|\widehat{a}\|^2 = \|(\widehat{a})^*\widehat{a}\| \overset{a)}{=} \|\widehat{a^*}\widehat{a}\| = \|\widehat{a^*a}\| \overset{2.1.31}{=} \rho_A(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2.$

c)Beh.: $\mathcal{G}$ ist surjektiv.

Bew.: $\mathcal{G}(A) \subset C_0(M(A))$ ist vollständige Unteralgebra (wegen b)) und damit abgeschlossen. Nun gilt für diese Unteralgebra:

(iii) $\mathcal{G}(A)$ trennt Punkte, d.h. sind $\mu_1,\ \mu_2 \in M(A)$ mit $\mu_1 \neq \mu_2$, so existiert $a \in A$ mit $\mu_1(a) \neq \mu_2(a)$, d.h. $\widehat{a}(\mu_1) \neq \widehat{a}(\mu_2)$.

[5] Um den Algebrahomomorphismus μ zu bestimmen, haben wir zuerst seinen Kern, das Ideal I_λ, konstruiert.

(iii) $\mathcal{G}$ verschwindet auf keinem Punkt von $M(A)$ identisch, d.h. für alle $\mu \in M(A)$ existiert ein $a \in A$ mit $\widehat{a}(\mu) = \mu(a) \neq 0$ (sonst wäre $\mu = 0$ und damit kein Charakter)

(iii) $\mathcal{G}(A)$ ist abgeschlossen unter komplexer Konjugation, d.h. unter $*$.

Nun können wir den Satz von Stone–Weierstraß anwenden und folgern:

$$\mathcal{G}(A) = C_0\big(M(a)\big).$$

$\square$

2.1.33 Bemerkung. Zu jedem lokal–kompakten Hausdorffraum X erhalten wir die kommutative C^*–Algebra $C_0(X)$. Zu jeder kommutativen C^*–Algebra erhalten wir den lokal–kompakten Hausdorffraum $M(A)$. Die Zuordnungen $C_0(\cdot)$ und $M(\cdot)$ sind invers zueinander (bis auf $*$-Isomorphie bzw. Homöomorphie). Denn:

Satz 2.1.32 besagt, dass $C_0(M(A))$ $*$-isomorph zu A ist.

Sei umgekehrt ein lokal–kompakter Hausdorffraum X gegeben. Sei X zunächst kompakt. Betrachte:

$$X \to M(C(X)), \qquad p \mapsto \mu_p, \qquad \text{wobei } \mu_p(f) = f(p).$$

Diese Abbildung ist, wie wir in 2.1.24.2 gesehen haben, injektiv und stetig. Gäbe es einen weiteren Charakter $\mu \in M(C(X))$, d.h. für alle $p \in X$: $\mu \neq \mu_p$, dann wären

$$\{\mu_p \,|\, p \in X\} \quad \text{und} \quad \{\mu\}$$

disjunkte, kompakte Teilmengen von $M(C(X))$. Wähle stetige Funktion

$$F : M(C(X)) \to \mathbb{C} \qquad \text{mit} \quad \begin{cases} F(\mu_p) = 0 & \text{für alle } p \in X, \\ F(\mu) = 1. \end{cases}$$

Aus Satz 2.1.32 folgt, dass ein $f \in C(X)$ existiert mit $F = \widehat{f}$. Für alle $p \in X$ gilt

$$0 = F(\mu_p) = \widehat{f}(\mu_p) = \mu_p(f) = f(p),$$

also $f = 0$ und daraus $F = \widehat{f} = 0$ im Widerspruch zu $F(\mu) = 1$. Damit ist $X \to M(C(X))$ stetig und bijektiv. Da X kompakt und $M(C(X))$ hausdorffsch ist, folgt, dass $X \to M(C(X))$ eine Homöomorphismus ist.

Ist X nicht kompakt, so betrachte folgendes Diagramm, wobei $\widehat{X}$ die Ein–Punkt–Kompaktifizierung von X ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{X} & \xrightarrow{\approx} & M(C(\widehat{X})) & \approx & M(\widetilde{C_0(X)}) & \approx & M(C_0(X)) \cup \{0\} \\
\cup & & & & & & \cup \\
X & & & \xrightarrow{\qquad\qquad\approx\qquad\qquad} & & & M(C_0(X))
\end{array}$$

2.1.34 Bemerkung. Ist $\varphi : X_1 \to X_2$ stetig und eigentlich, d.h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt, so erhalte

$$\begin{aligned} \pi_\varphi : C_0(X_2) &\to C_0(X_1), \\ f &\mapsto f \circ \varphi. \end{aligned}$$

π_φ ist ein $*$–Morphismus.

Umgekehrt: Ist $\pi : A_2 \to A_1$ ein $*$–Morphismus, $\pi \neq 0$, so erhalte

$$\begin{aligned} \varphi_\pi : M(A_1) &\to M(A_2) \\ \mu &\mapsto \mu \circ \pi. \end{aligned}$$

φ_π ist stetig und eigentlich.

2.1.35 Übung. Zeige, dass $\varphi \mapsto \pi_\varphi$ und $\pi \mapsto \varphi_\pi$ invers zueinander sind.

2.1.36 Bemerkung. Die Zuordnungen $M(\cdot)$ und $C_0(\cdot)$ liefern das „Wörterbuch“

Topologie	Algebra
lokal–kompakter Hausdorffraum	kommutative C^*–Algebra
kompakter Hausdorffraum	kommutative C^*–Algebra mit Eins
1–Pkt.-Kompaktifizierung	Vereinsung
stetige und eigentliche Abbildung	$*$–Morphismus
Homöomorphismus	$*$–Isomorphismus
Punkt	Charakter

2.2 Nichtkommutative Tori

Fixiere $\theta \in \mathbb{R}$. Betrachte den komplexen Hilbertraum $H := L^2(T^2, \mathbb{C})$, wobei $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der 2–dimensionale Torus ist. Sei $\mathcal{L}(H)$ die C^*–Algebra der beschränkten Operatoren auf H, vgl. Beispiel 2.1.2.1 Seite 49.

Wir definieren $V \in \mathcal{L}(H)$ durch

$$(V\xi)(x,y) := e^{2\pi ix} \cdot \xi(x, y+\theta),$$

wobei $\xi \in L^2(T^2, \mathbb{C})$ als $\mathbb{Z}^2$–periodische $\mathbb{C}$–wertige Funktion auf $\mathbb{R}^2$ aufgefasst wird. Es gilt für alle ξ, $\eta \in L^2(T^2, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
(V\xi, \eta)_H &= \int_{T^2} V\xi(x,y) \cdot \overline{\eta(x,y)}\, dx\, dy \\
&= \int_{T^2} e^{2\pi ix} \cdot \xi(x, y+\theta) \cdot \overline{\eta(x,y)}\, dx\, dy \\
&= \int_{T^2} \xi(x, y+\theta) \cdot \overline{e^{-2\pi ix} \cdot \eta(x,y)}\, dx\, dy \\
&\overset{y'=y+\theta}{=} \int_{T^2} \xi(x, y') \cdot \overline{e^{-2\pi ix} \cdot \eta(x, y'-\theta)}\, dx\, dy' \\
&= (\xi, V^{-1}\eta)_H
\end{aligned}$$

Also ist der adjungierte Operator $V^* = V^{-1}$, d.h. V ist unitär. Definiere ein weiteres unitäres Element $U \in \mathcal{L}(H)$ durch

$$(U\xi)(x,y) := e^{2\pi iy} \cdot \xi(x,y).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
(VU\xi)(x,y) &= e^{2\pi ix}(U\xi)(x, y+\theta) \\
&= e^{2\pi ix} \cdot e^{2\pi i(y+\theta)} \cdot \xi(x, y+\theta) \\
&= e^{2\pi i(y+\theta)} \cdot V\xi(x,y) \\
&= e^{2\pi i\theta} \cdot (UV\xi)(x,y).
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\boxed{VU = e^{2\pi i\theta} UV.}$$

Die von U und V in $\mathcal{L}(H)$ erzeugte C^*–Unteralgebra mit Eins, d.h. der Operatornormanschluss der von 1, U, $U^* = U^{-1}$, V und $V^* = V^{-1}$ erzeugten Unteralgebra, bezeichnen wir mit

$$A_\theta \subset \mathcal{L}(H).$$

2.2.1 Bemerkung. Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $A_{\theta+k} = A_\theta$. Desweiteren ist A_θ genau dann kommutativ, wenn $\theta \in \mathbb{Z}$.

2.2.2 Proposition. *Die C^*–Algebren A_0 und $C(T^2)$ sind isomorph, in Zeichen*

$$A_0 \cong C(T^2).$$

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$C(T^2) \to \mathcal{L}(H) \qquad f \mapsto M_f, \quad \text{wobei } M_f(\xi) = f \cdot \xi.$$

Sie ist ein $*$–Morphismus. Insbesondere gilt

$$\|M_f\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|f\|_{C(T^2)}.$$

Sei $f \in C(T^2)$ und sei $(x, y) \in T^2$ ein Punkt in dem das Maximum von $|f|$ angenommen wird, d.h. $|f(x, y)| = \|f\|_{C(T^2)}$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei U eine Umgebung von (x, y) in T^2, so dass

$$|f(x', y')| \geq \|f\|_{C(T^2)} - \varepsilon \qquad \text{für alle } (x', y') \in U.$$

Wähle $\xi \in H$ mit $\|\xi\|_H = 1$ und $\operatorname{supp}(\xi) \subset U$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|M_f\|^2_{\mathcal{L}(H)} &\geq \|M_f \cdot \xi\|^2_H \\
&= \int_{T^2} \underbrace{|f(x', y')|^2}_{\substack{\geq (\|f\| - \varepsilon)^2 \\ \text{auf } U}} \cdot \underbrace{|\xi(x', y')|^2}_{\substack{=0 \\ \text{außerhalb } U}} \, dx' \, dy' \\
&\geq \big(\|f\|_{C(T^2)} - \varepsilon\big)^2 \cdot \underbrace{\|\xi\|^2_H}_{=1}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\|M_f\|_{\mathcal{L}(H)} \geq \|f\|_{C(T^2)} - \varepsilon \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt

$$\|M_f\|_{\mathcal{L}(H)} \geq \|f\|_{C(T^2)}$$

und also

$$\|M_f\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{C(T^2)}.$$

Somit ist $f \mapsto M_f$ ein isometrischer $*$–Morphismus, insbesondere damit injektiv.[6]

Es bleibt zu zeigen, dass das Bild

$$\{M_f \mid f \in C(T^2)\} = A_0.$$

[6] Sei $\mathbb{C}(T^2) \ni f \neq 0$. Dann ist $\|f\|_{C(T^2)} \neq 0$. Unter dem $*$–Morphismus wird f deshalb abgebildet auf M_f mit $\|M_f\| \neq 0$. Dann ist aber auch $M_f \neq 0$. Also ist der Kern des Morphismus trivial und damit als Abbildung injektiv.

Da $\theta = 0$, gelten

$$M_1 = 1, \quad M_{e^{2\pi ix}} = V, \quad M_{e^{-2\pi ix}} = V^{-1}, \quad M_{e^{2\pi iy}} = U, \quad M_{e^{-2\pi iy}} = U^{-1}.$$

Die Erzeuger von A_0 sind also im Bild enthalten und damit

$$A_0 \subset \{M_f \mid f \in C(T^2)\}.$$

Umgekehrt: Für jedes $f \in C(T^2)$ existiert die gleichmäßig konvergente Fourier–Reihe

$$f = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_{n,m} \cdot e^{2\pi i(nx+my)}.$$

Dann ist wegen der Stetigkeit von $f \mapsto M_f$

$$M_f = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_{n,m} V^n U^m \in A_0$$

und somit folgt

$$A_0 = \{M_f \mid f \in C(T^2)\}.$$

□

2.2.3 Proposition. *Sei $\theta \in \mathbb{Q}$, $\theta = \frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann ist A_θ $*$–isomorph zur Algebra der stetigen Schnitte in einem Algebrenbündel über T^2 mit Faser* $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$.

2.2.4 Lemma. *Sei $\pi : E \to M$ ein Vektor- oder Algebrenbündel. Sei Γ eine endliche Gruppe, die auf M durch Diffeomorphismen wirkt, so dass wann immer für $\gamma \in \Gamma$ ein $x \in M$ existiert mit $\gamma x = x$, folgt $\gamma = 1$. Ferner wirke Γ auf E durch Diffeomorphismen, so dass für alle $\gamma \in \Gamma$ das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\gamma} & E \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ M & \xrightarrow{\gamma} & M \end{array}$$

kommutiert und die Abbildung $\gamma|_{E_x} : E_x \to E_{\gamma x}$ sei Homomorphismus für alle $x \in M$ und alle $\gamma \in \Gamma$.

Dann wird $\pi' : E/\Gamma \to M/\Gamma$ in eindeutiger Weise ein Vektor– bzw. Algebrenbündel, so dass

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E/\Gamma \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ M & \longrightarrow & M/\Gamma \end{array}$$

kommutiert und faserweise ein Isomorphismus ist. Ist s ein Schnitt von $E/\Gamma \to M/\Gamma$, so existiert genau ein Schnitt $\widetilde{s}$ von $E \to M$, so dass

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E/\Gamma \\ {\scriptstyle\widetilde{s}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle s} \\ M & \longrightarrow & M/\Gamma \end{array} \tag{$*$}$$

kommutiert. Es gilt für alle $x \in M$ und alle $\gamma \in \Gamma$ die Äquivarianzbedingung

$$\gamma^{-1}\widetilde{s}(\gamma x) = \widetilde{s}(x). \tag{Ä}$$

Umgekehrt: Ist $\widetilde{s}$ ein Schnitt in $E \to M$, der (Ä) erfüllt, dann existiert genau ein Schnitt s von $E/\Gamma \to M/\Gamma$, so dass $(*)$ kommutiert.

Es gilt

$$s \in C^k(M/\Gamma, E/\Gamma) \iff \widetilde{s} \in C^k(M, E).$$

2.2.5 Beispiel. Sei $M = S^1 \subset \mathbb{C}$, $E = S^1 \times \mathbb{R}$ und $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$. Die Wirkung von Γ auf M sei die komplexe Multiplikation

$$\{1,-1\} \times S^1 \to S^1, \qquad (\gamma, z) \mapsto \gamma z,$$

und die Wirkung von Γ auf E sei

$$\{1,-1\} \times S^1 \times \mathbb{R}, \qquad (\gamma, z, t) \mapsto (-z, -t).$$

Γ wirkt faserweise durch Vektorraumhomomorphismen (keinesfalls Algebrenhomomorphismen!). Wir erhalten ein Vektorbündel vom Rang 1 über S^1/Γ

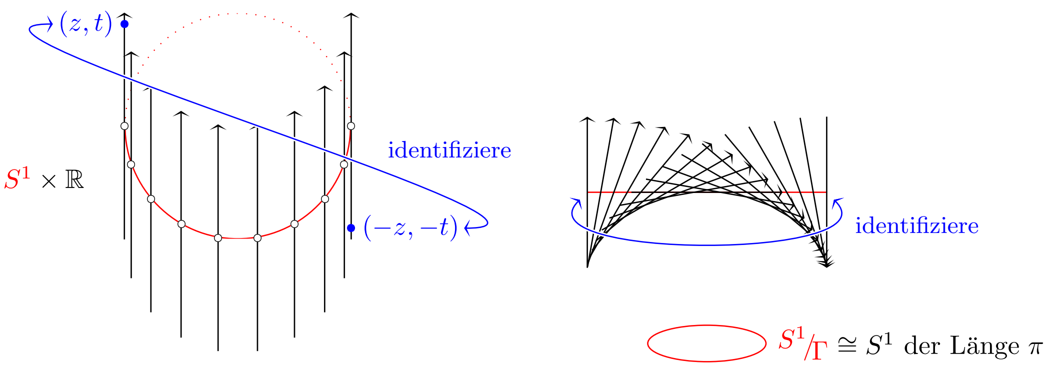


Abb. 6: Konstruktion eines Möbiusbandes aus trivialem Gradenbündel über S^1.

Beweis des Lemmas (Skizze).

Aus den Bedingungen an die Wirkung von Γ auf M folgt, dass M/Γ in eindeutigen Weise eine Mannigfaltigkeitsstruktur trägt, so dass die Quotientenabbildung $M \to M/\Gamma$ eine endliche Überlagerung wird (Γ war n.V. endlich). Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\gamma} & E \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ M & \xrightarrow{\gamma} & M \end{array}$$

liefert die Wohldefiniertheit der Abbildung

$$E/\Gamma \to M/\Gamma, \qquad [e] \mapsto [\pi(e)].$$

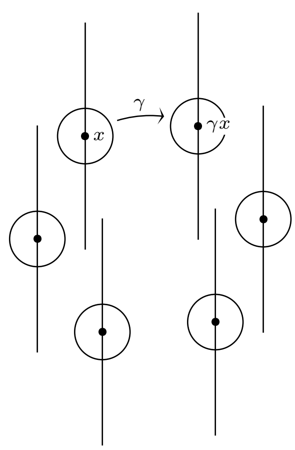


Abb. 7: Gruppenoperation liefert endliche Überlagerung des Quotienten.

Die Abbildung

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_{\gamma x} \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_{\gamma x}\Big/\Gamma = \left(E/\Gamma\right)_{[x]}$$

ist surjektiv. Dann ist auch $E_x \to \left(E/\Gamma\right)_{[x]}$ surjektiv. Die Abbildung ist auch injektiv, denn gilt für e_1, $e_2 \in E_x$, dass $[e_1] = [e_2]$, so ist $e_2 = \gamma e_1$ für ein $\gamma \in \Gamma$. Für dieses ist $x = \pi(e_2) = \pi(\gamma e_1) = \gamma\pi(e_1) = \gamma x$, also $\gamma = 1$ und somit $e_1 = e_2$.

Wir versehen $\left(E/\Gamma\right)_{[x]}$ mit der eindeutigen Vektorraum- bzw. Algebrastruktur, die die Abbildung $E_x \to \left(E/\Gamma\right)_{[x]}$ zu einem Isomorphismus macht. Da

$$\begin{tikzcd}
E_x \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr] & & E_{\gamma x} \arrow[dl] \\
& \left(E/\Gamma\right)_{[x]} &
\end{tikzcd}$$

kommutiert und $\gamma : E_x \to E_{\gamma x}$ ein Isomorphismus ist, hängt die Vektorraum- bzw. Algebrastruktur nicht von der Wahl des Repräsentanten ab. Lokale Trivialisierung von $E \to M$ und lokale Diffeomorphismen von $M \to M/\Gamma$ liefern lokale Trivialisierungen von $E/\Gamma \to M/\Gamma$. Die Eigenschaften für Schnitte folgen leicht. □

Beweis der Proposition 2.2.3. Sei wie in der Proposition $\theta \in \mathbb{Q}$, $\theta = \frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ teilerfremd.

a) Wir wenden Lemma 2.2.4 an mit $M := T^2$, $E := T^2 \times \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$, $\Gamma = \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/m$. Auf $M = T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ wirkt Γ durch

$$(p,q)\cdot(x,y) := (x + p\theta, y - q\theta).$$

Zur Beschreibung der Wirkung von Γ auf E setze

$$R := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & e^{2\pi i\theta} & & & \\ & & e^{2\pi i 2\theta} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{2\pi i(m-1)\theta} \end{pmatrix}$$

$$S := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

S und R sind unitär, $S^m = R^m = 1_{\mathrm{Mat}}$ und $RS = e^{2\pi i\theta} SR$.

Die Gruppenwirkung von Γ auf E definieren wir durch:

$$(p,q)\cdot\big((x,y),A\big) := \big((x+p\theta, y-q\theta),\ \underbrace{R^q S^p A S^{-p} R^{-q}}_{= S^p R^q A R^{-q} S^{-p}}\ \big).$$

Die Voraussetzungen von Lemma 2.2.4 für Algebrenbündel sind erfüllt, so dass wir ein Algebrenbündel $E/\Gamma \to M/\Gamma$ erhalten.

Wie wir im Lemma gesehen haben ist die C^*–Algebra der stetigen Schnitte $\Gamma\left({}^{M}\!/_{\Gamma}, {}^{E}\!/_{\Gamma}\right)$ isomorph zu

$$\left\{s \in \Gamma(M,E) \text{ stetig} \,|\, \forall p \in M\, \forall \gamma \in \Gamma : \gamma^{-1}s(\gamma p) = s(p)\right\}.$$

In unserem Fall ist das (beachte, dass $E = T^2 \times \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$ das triviale Bündel ist):

$$\Big\{s : T^2 \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m) \text{ stetig} \,|\, \forall (x,y) \in T^2\ \forall (p,q) \in \Gamma :$$
$$\underbrace{s(x+p\theta, y-q\theta) = R^q S^p s(x,y) S^{-p} R^{-q}}_{\text{Äquivarianzbedingung}}\Big\}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese C^*–Algebra $*$–isomorph zu A_θ ist, denn

$$\begin{aligned} {}^{M}\!\Big/_{\Gamma} &= {}^{T^2}\!\Big/_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} = {}^{S^1 \times S^1}\!\Big/_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \\ &= \left({}^{S^1}\!\Big/_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}\right) \times \left({}^{S^1}\!\Big/_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}\right) \cong S^1 \times S^1 = T^2. \end{aligned}$$

b) Fourier–Zerlegung für $s : T^2 \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$:

$$s(x,y) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i(\alpha x + \beta y)} A_{\alpha\beta}, \quad \text{wobei } A_{\alpha\beta} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m).$$

Einerseits:
$$\begin{aligned} s(x+p\theta, y-q\theta) &= \sum_{\alpha,\beta} e^{2\pi i(\alpha(x+p\theta)+\beta(y-q\theta))} A_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha,\beta} e^{2\pi i(\alpha x+\beta y)} \cdot e^{2\pi i(\alpha p - \beta q)\theta} A_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Andererseits:
$$R^q S^p s(x,y) S^{-p} R^{-q} = \sum_{\alpha,\beta} e^{2\pi i(\alpha x+\beta y)} R^q S^p A_{\alpha\beta} S^{-p} R^{-q}.$$

Durch Koeffizientenvergleich sehen wir, dass die Äquivarianzbedingung genau dann erfüllt ist, wenn für alle $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}$ und alle $p,\ q \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$:

$$R^q S^p A_{\alpha\beta} S^{-p} R^{-q} = e^{2\pi i(\alpha p + \beta q)\theta} A_{\alpha\beta}.$$

Speziell für $p = 1$ und $q = 0$ erhalten wir

$$S A_{\alpha\beta} S^{-1} = e^{2\pi i \alpha\theta} A_{\alpha\beta}$$

und für $p = 0$, $q = 1$ haben wir

$$R A_{\alpha\beta} R^{-1} = e^{-2\pi i \beta\theta} A_{\alpha\beta}.$$

Aus diesen beiden Spezialfällen folgt wieder die allgemeine Bedingung. Wir haben somit gezeigt:

$$s(x,y) = \sum_{\alpha,\beta} e^{2\pi i(\alpha x+\beta y)} A_{\alpha\beta}$$

erfüllt genau dann die Äquivarianzbedingung, wenn für alle $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}$:

$$S A_{\alpha\beta} S^{-1} = e^{2\pi i \alpha\theta} A_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad R A_{\alpha\beta} R^{-1} = e^{-2\pi i \beta\theta} A_{\alpha\beta}.$$

Dies ist eine Eigenwertgleichung im Vektorraum $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$.

c) Beh.: Für $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$ gilt

$$SA_{\alpha\beta}S^{-1} = e^{2\pi i\alpha\theta}A_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad RA_{\alpha\beta}R^{-1} = e^{-2\pi i\beta\theta}A_{\alpha\beta}$$

genau dann, wenn

$$A = z \cdot R^{-\alpha}S^{-\beta}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Bew.: Direktes Nachrechnen unter Verwendung von $RS = e^{2\pi i\theta}SR$ zeigt, dass $R^{-\alpha}S^{-\beta}$ die beiden Relationen erfüllt. Ferner sind die Matrizen $R^{-\alpha}S^{-\beta}$, $\alpha,\ \beta = 0, \ldots, m-1$ linear unabhängig, und bilden daher eine Vektorraumbasis von $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$. Sie sind somit die simultane Eigenvektorbasis für die beiden linearen Abbildungen $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m) \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$, $A \mapsto SAS^{-1}$ resp. $A \mapsto RAR^{-1}$.

d) Durch die eben gewonnene Charakterisierung der Äquivarianzbedingung gewinnen wir wiederum eine neue Charakterisierung der C^*–Algebra der stetigen Schnitte im Algebrenbündel $E/\Gamma \to M/\Gamma$:

$$\begin{aligned}
&\Gamma\big(M/\Gamma, E/\Gamma\big) \cong \\
&\quad \cong \Big\{s : T^2 \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m) \text{ stetig} \,\big|\, s(x,y) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i(\alpha x+\beta y)} \cdot z_{\alpha,\beta} \cdot R^{-\alpha}S^{-\beta}\Big\} \\
&\quad = \Big\{s : T^2 \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m) \text{ stetig} \,\big|\, s(x,y) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}} z_{\alpha,\beta} \cdot v^\alpha u^\beta\Big\},
\end{aligned}$$

wobei $v := e^{2\pi ix}R^{-1}$ und $u := e^{2\pi iy}S^{-1}$. Es folgt, dass $\Gamma\big(M/\Gamma, E/\Gamma\big)$ als Algebra von u und v erzeugt wird. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
vu &= e^{2\pi i(x+y)}R^{-1}S^{-1} = e^{2\pi i(x+y)}(SR)^{-1} \\
&= e^{2\pi i(x+y)}(e^{-2\pi i\theta}RS)^{-1} = e^{2\pi i(x+y)}e^{2\pi i\theta}S^{-1}R^{-1} \\
&= e^{2\pi i\theta}uv.
\end{aligned}$$

Der durch $U \mapsto u$, $V \mapsto v$ festgelegte Algebrahomomorphismus bildet also[7] einen $*$–Isomorphismus

$$A_\theta \to \Gamma\big(M/\Gamma, E/\Gamma\big).$$

□

2.2.6 Definition. Sei A eine Algebra. Dann heißt

$$Z(A) = \{a \in A \,|\, \forall b \in A : ab = ba\}$$

das *Zentrum von A*.

2.2.7 Beispiel. 1) Es gilt $Z(A) = A$ genau dann, wenn A kommutativ ist.

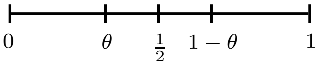
2) $Z\big(\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)\big) = \{z \cdot 1_{\mathrm{Mat}} \,|\, z \in \mathbb{C}\}$. In einem solchen Fall bezeichnet man das Zentrum als *trivial*.

2.2.8 Korollar. *Ist $\theta \in \mathbb{Q}$, so ist $Z(A_\theta)$ isomorph zu $C(T^2) = A_0$.*

Beweis. $A_\theta \cong \Gamma(T^2, \mathcal{E})$, wobei $\mathcal{E}$ ein Algberenbündel über T^2 mit Faser $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$ sei. Für $s \in Z(A_\theta)$ muss gelten: $s(x,y) \in Z(\mathcal{E}_{(x,y)}) \cong Z\big(\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)\big) \cong \mathbb{C} \cdot 1$. Also ist $s(x,y) = z(x,y) \cdot 1_{\mathcal{E}_{(x,y)}}$ mit einer stetigen Funktion $z : T^2 \to \mathbb{C}$. Somit ist $Z(A_\theta) \cong C(T^2)$. □

[7] vgl. Box S.70

2.2.9 Bemerkung. In Bem.2.2.1 hatten wir festgestellt, dass $A_{\theta_1} \cong A_{\theta_2}$ wenn $\theta_1 \equiv \theta_2 \mod \mathbb{Z}$. Nun liefert die Abbildung $U \mapsto V$, $V \mapsto U$, einen Isomorphismus $A_\theta \to A_{-\theta} = A_{1-\theta}$. Im Wesentlichen läuft θ also in $[0, \frac{1}{2}]$:



Man kann zeigen, dass die A_θ für $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ paarweise nicht isomorph sind.

2.2.10 Übung. Zeige, dass für $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ gilt: $Z(A_\theta) \cong \mathbb{C}$.

2.3 Vektorbündel

2.3.1 Definition. Sei A eine Algebra mit Eins. Ein A–Rechtsmodul P heißt *projektiv*, falls für alle A–Rechtsmoduln E, G, alle A–linearen Abbildungen $\varphi : R \to G$ und alle surjektiven A–linearen Abbildungen $\eta : E \to G$ eine A–lineare Abbildung $\psi : P \to E$ existiert mit $\eta \circ \psi = \varphi$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ E \arrow[r, two heads, "\eta"'] & G \end{tikzcd}$$

2.3.2 Beispiel. Jeder freie A-Rechtsmodul, insbesondere jeder Vektorraum, ist projektiv. Ist nämlich $B \subset P$ eine Basis, so wähle für jedes $b \in B$ ein $e_b \in E$ mit $\eta(e_b) = \varphi(b)$ (existieren, da η surjektiv). Dann tut's die Abbildung

$$\psi\Big(\sum_{b \in B} b \cdot a_b\Big) := \sum_{b \in B} e_b \cdot a_b.$$

(Man beachte, dass wir es mit Rechtsmoduln zu tun haben.)

2.3.3 Proposition. *Sei J eine beliebige Indexmenge und sei*

$$P = \bigoplus_{j \in J} P_j$$

direkte Summe von A–Rechtsmoduln. P ist genau dann projektiv, wenn alle P_j projektiv sind.

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Sei P projektiv, $\eta : E \twoheadrightarrow G$ surjektiv und A–linear. Sei $j_0 \in J$ beliebig und $\varphi_{j_0} : P_{j_0} \to G$ A–linear. Für alle $j \in J$, $j \neq j_0$ setze $\varphi_j := 0$ und definiere $\varphi : P \to G$ durch

$$\varphi\Big(\sum_{j \in J} p_j\Big) := \sum_{j \in J} \varphi_j(p_j)$$

Da φ offenbar A–linear ist, existiert $\psi : P \to E$ mit $\eta \circ \psi = \varphi$, denn P ist projektiv. Nun gilt

$$\eta \circ \psi|_{P_{j_0}} = \varphi|_{P_{j_0}} = \varphi_{j_0}.$$

Also ist P_{j_0} projektiv. Da j_0 beliebig war, folgt die Behauptung.

„$\Leftarrow$“ zeigt man in ähnlicher Weise.

$\square$

2.3.4 Proposition. *Sei P ein A–Rechtsmodul. Dann sind äquivalent:*

1) P ist projektiv

2) Jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to E \overset{\varphi}{\hookrightarrow} G \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} P \to 0$$

von A–Rechtsmoduln spaltet, d.h. es existiert eine Abbildung $\chi : P \to G$ mit $\psi \circ \chi = \mathrm{id}_P$. Insbesondere ist dann $G = \varphi(E) \oplus \chi(P) \cong E \oplus P$.

3) P ist direkter Summand eines freien A–Rechtsmoduls, d.h. es existiert ein A–Rechtsmodul Q, so dass $P \oplus Q$ frei ist.

4) Es gibt einen freien A–Rechtsmodul F und $\varepsilon \in \mathrm{End}_A(F)$ mit $\varepsilon^2 = \varepsilon$, so dass $P \cong \varepsilon(F)$.

Beweis.

(i) ⇒ (ii) Sei P projektiv und sei

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, hook, "\varphi"] & G \arrow[r, two heads, "\psi"] & P \arrow[r] & 0 \\ & & & P \arrow[u, "\mathrm{id}_P"'] \arrow[ul, "\exists\chi"] & \end{tikzcd}$$

eine kurze exakte Sequenz. Da P projektiv ist, existiert $\chi : P \to G$ mit $\psi \circ \chi = \mathrm{id}_P$.

(ii) ⇒ (iii) Sei $\{p_j \mid j \in J\} \subset P$ ein Erzeugendensystem von P. Wähle einen freien Modul F mit Basis $\{f_j \mid j \in J\}$. Betrachte die A–lineare Abbildung

$$\eta : F \to P \quad \text{gegeben durch} \quad \eta(f_j) = p_j \quad \text{für alle } j \in J.$$

η ist surjektiv. Zusammen mit der Inklusion des Kerns von η in F erhalten wir also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \ker \eta \hookrightarrow F \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} P \to 0.$$

Nach (ii) existiert $\chi : P \to F$ mit $\eta \circ \chi = \mathrm{id}_P$ und $F \cong \underbrace{\ker \eta}_{=:Q} \oplus P$.

(iii) ⇒ (i) Sei $P \oplus Q$ frei, also projektiv nach Beispiel 2.3.2. Nach Proposition 2.3.3 ist dann P projektiv.

(iii) ⇒ (iv) Sei $F := P \oplus Q$ frei. ε sei die Projektion von F auf P mit Kern Q.

(iv) ⇒ (iii) Sei F frei und ε idempotenter A–Endomorphismus von F mit $P \cong \varepsilon(F)$. Setze $Q := (\mathrm{id} - \varepsilon)(F)$. Jedes Element $f \in F$ schreibt sich als

$$f = (\mathrm{id} - \varepsilon)(f) + \varepsilon(f).$$

Also ist F Summe von P und Q. Für die Direktheit dieser Summe ist noch zu zeigen, dass $P \cap Q = \{0\}$. Sei nun $f \in P \cap Q$, d.h. $f = \varepsilon(f_1) = (\mathrm{id} - \varepsilon)(f_2)$. Dann ist, da ε idempotent ist, einerseits $\varepsilon(f) = \varepsilon^2(f_1) = \varepsilon(f_1) = f$ und andererseits

$$(\mathrm{id} - \varepsilon)(f) = (\mathrm{id} - \varepsilon)^2(f_2) = (\mathrm{id}^2 - \varepsilon - \varepsilon + \varepsilon^2)(f_2) = (\mathrm{id} - \varepsilon)(f_2) = f.$$

Damit ist $f = (\mathrm{id} - \varepsilon)(f) + \varepsilon(f) = f + f$, also $f = 0$. Somit ist $F = P \oplus Q$.

□

2.3.5 Beispiel. Sei $A = \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$. $P = \mathbb{C}^m = \big\{(z_1, \ldots, z_m) \,|\, z_j \in \mathbb{C}\big\}$ ist ein $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$–Rechtsmodul vermöge Matrixmultiplikation von rechts. $F := \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$ ist ein freier $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$–Rechtsmodul vom Rang 1.

Sei $\varepsilon \in \mathrm{End}_A(F) = \mathrm{End}_{\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)}(\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m))$ die Linksmultiplikation mit $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

ε ist $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m)$–linear und es ist $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Für das Bild von ε gilt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(F) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ [-1ex] & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{C} \right\} \\
&\cong P.
\end{aligned}$$

Mit Proposition 2.3.4.4 folgt, dass P projektiv ist.

Bemerkung. Im Folgenden werden wir Vektorbündel über topologischen Räumen betrachten. Wir verallgemeinern dafür das Konzept von differenzierbaren Vektorbündeln über Mannigfaltigkeiten in naheliegender Weise: Man ersetze in der Definition überall „differenzierbar“ durch „stetig“. Es gilt dann

- ⊛ Jedes stetige Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M ist (stetig-) isomorph zu einem differenzierbaren Vektorbündel über M.
- ⊛ Zwei differenzierbare Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit sind genau dann stetig isomorph, wenn sie differenzierbar isomorph sind.

Betrachten wir Isomorphieklassen von Vektorbündeln über Mannigfaltigkeiten, so besteht also kein Unterschied zwischen stetigen und differenzierbaren Vektorbündeln.

Nach Definition von Vektorbündeln ist ihr Rang lokal konstant. Mehr wollen wir aber auch nicht verlangen, d.h. wir lassen zu, das der Rang eines Vektorbündels nicht global konstant ist. Er kann auf verschiedenen Zusammenhangskomponenten von M unterschiedlich sein.

Desweiteren wollen wir nur Vektorbündel mit endlichdimensionalen Fasern betrachten, d.h. der Rang sei überall endlich.

2.3.6 Lemma. *Sei M ein kompakter Hausdorff–Raum. Dann spaltet jede kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln über M*

$$0 \to E' \overset{\varphi}{\hookrightarrow} E \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} E'' \to 0.$$

Insbesondere ist $E \cong E' \oplus E''$.

Beweis. Benutze eine Teilung der Eins, um eine stetige riemannsche bzw. hermitesche Metrik auf E zu konstruieren.[8] Sei nun $E''' \subset E$ das orthogonale Komplement

[8] Für den differenzierbaren Fall haben wir dies in der Vorlesung Differentialgeometrie II durchgeführt.

zu $\varphi(E') \subset E$ bezüglich dieser Metrik. Dann ist $\psi|_{E'''} : E''' \to E''$ ein Isomorphismus. Definiere

$$\chi := (\psi|_{E'''})^{-1} : E'' \to E''' \subset E.$$

$\square$

2.3.7. Lemma (Existenz eines trivialisierenden Komplements) *Sei M ein kompakter Hausdorff–Raum. Dann existiert ein Vektorbündel $E' \to M$, so dass $E \oplus E'$ trivial ist.*

Beweis. Wähle eine endliche offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in \underline{m}}$ von M, so dass $E|_{U_i}$ trivial ist für alle $i = 1, \ldots, m$, d.h.

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} U_i, \qquad U_i \subset M \text{ offen} \quad \text{und} \qquad E|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{C}^{n_i},$$

wobei n_i der Rang von E über U_i ist. Wähle Basisschnitte s_i^j von $E|_{U_i}$, $j = 1, \ldots, n_i$, $i = 1, \ldots, m$. Sei $\{\varrho_i\}_{i \in \underline{m}}$ eine $\{U_i\}_{i \in \underline{m}}$ untergeordnete Teilung der Eins. Setze $\varrho_i s_i^j$ stetig durch 0 zu einem Schnitt $\widetilde{s}_i^j$ auf ganz M fort für alle $i \in \underline{m}$, $j \in \underline{n_i}$. Definiere nun

$$\begin{array}{rccc} \psi : & M \times \mathbb{C}^{n_1 + \ldots + n_m} & \to & E, \\ & \big(x, (v_i^j)_{\substack{i \in \underline{m} \\ j \in \underline{n_i}}}\big) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} v_i^j \widetilde{s}_i^j(x). \end{array}$$

ψ ist surjektiv. Setze $N := n_1 + \ldots + n_m$. Dann erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \;\to\; \ker\psi \;\hookrightarrow\; M \times \mathbb{C}^N \;\overset{\psi}{\twoheadrightarrow}\; E \;\to\; 0.$$

Nach Lemma 2.3.6 spaltet diese Sequenz und es folgt $M \times \mathbb{C}^N \cong E \oplus E'$. $\square$

2.3.8 Bemerkung. Sei M ein kompakter Hausdorff–Raum. Sei $E \to M$ ein komplexes Vektorbündel. Dann bildet

$$\Gamma(M, E) = \{\text{stetige Schnitte in } E\}$$

einen $C(M)$–Modul vermöge

$$\Gamma(M, E) \times C(M) \to \Gamma(M, E), \qquad (s, f) \mapsto f \cdot s,$$

wobei $(f \cdot s)(x) := f(x) \cdot s(x)$ sei.

2.3.9 Lemma. *$\Gamma(M, E)$ ist ein endlich erzeugter projekiver $C(M)$–Modul.*

Beweis.

a) Sei E' ein trivialisierendes Komplement von E und $E \oplus E'$ habe den Rang N. Dann gilt:

$$\Gamma(M, E) \oplus \Gamma(M, E') \cong \Gamma(M, E \oplus E') \cong \Gamma(M, M \times \mathbb{C}^N) \cong C(M)^N$$

und $C(M)^N$ ist frei. Mit Proposition 2.3.4.3 folgt, dass $\Gamma(M, E)$ projektiv ist.

b) Seien $e_1, \ldots, e_N$ Basisschnitte in $M \times \mathbb{C}^N = E \oplus E'$. Sei $\pi : M \times \mathbb{C}^N \to E$ die Projektion mit Kern E'. Dann bilden $\pi e_1, \ldots, \pi e_N$ ein endliches Erzeugendensystem, denn einen Schnitt $s \in \Gamma(M, E)$ können wir schreiben als $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} f_i e_i$

und damit ist

$$
\begin{aligned}
s(x) = \pi s(x) &= \pi\Big(\sum_{i=1}^{N} f_i(x) e_i(x)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\pi\big(e_i(x)\big) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{N} f_i \cdot \pi e_i\Big)(x).
\end{aligned}
$$

□

2.3.10 Bemerkung. Seien E, $F \to M$ komplexe Vektorbündel und $\varphi : E \to F$ ein Vektorbündelhomomorphismus. Dann erhalten wir eine $C(M)$–lineare Abbildung

$$\Gamma\varphi : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, F)$$

durch

$$\big(\Gamma\varphi\big)(s)(x) := \varphi\big(s(x)\big).$$

Ist umgekehrt $h : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, F)$ eine $C(M)$–lineare Abbildung, so existiert ein Vektorbündelhomomorphismus $\varphi : E \to F$ mit $\Gamma\varphi = h$, den man folgendermaßen erhält:

Wähle ein trivialisierendes Komplement E' von E und definiere

$$H := h \oplus 0 : \Gamma(M, E) \oplus \Gamma(M, E') \to \Gamma(M, F).$$

Da $E \oplus E'$ trivial ist existierten globale stetige Basisschnitte $s_1, \dots s_N$ von $E \oplus E'$. Schreibe nun $e \in E_x$, $x \in M$, in eindeutiger Weise als $e = \sum a_i s_i(x)$. Setze

$$\varphi(e) := \sum_{i=1}^{N} a_i H(s_i)(x).$$

Dann gilt für $s \in \Gamma(M, E)$, $s = \sum f_i s_i$:

$$
\begin{aligned}
\big(\Gamma\varphi\big)(s)(x) = \varphi\big(s(x)\big) &= \varphi\Big(\sum_{i=1}^{N} f_i(x) s_i(x)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} f_i(x) H(s_i)(x) = H\Big(\sum_{i=1}^{N} f_i s_i\Big)(x) \\
&= H(s)(x) = h(s)(x).
\end{aligned}
$$

Also ist $\Gamma\varphi = h$.

2.3.11 Proposition. *Sei M ein kompakter Hausdorff–Raum und sei P ein endlich erzeugter projektiver $C(M)$–Modul. Dann existiert ein Vektorbündel $E \to M$, so dass $P \cong \Gamma(M, E)$.*

Beweis.

a) Da P endlich erzeugt ist, existiert ein surjektiver Homomorphismus $\eta : C(M) \to P$. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker\eta \arrow[r, hook] & C(M)^N \arrow[r, two heads, "\eta"] & P \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "h"] & 0. \end{tikzcd}$$

Da P projektiv ist, spaltet diese Sequenz, d.h. es existiert $h : P \to C(M)^N$ mit $\eta \circ h = \mathrm{id}_P$. h ist injektiv und deshalb ist $P \cong h(P) \subset C(M)^N$.

b) Sei oBdA $P \subset C(M)^N$ ein Untermodul. Für $\varepsilon := h \circ \eta \in \mathrm{End}_{C(M)}\big(C(M)^N\big)$ gilt

$$\varepsilon^2 = h \circ \underbrace{\eta \circ h}_{\text{id}} \circ \eta = h \circ \eta = \varepsilon \quad \text{und} \quad \varepsilon\big(C(M)^N\big) = P.$$

Sei e der Vektorbündelhomomorphismus $M \times \mathbb{C}^N \to M \times \mathbb{C}^N$ mit $\Gamma e = \varepsilon$. Dann gilt $e^2 = e$. Die Abbildung $M \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto \mathrm{rang}\, e_x$, ist unterhalbstetig. Genauso ist $x \mapsto \mathrm{rang}(1 - e_x)$ ebenfalls unterhalbstetig.

Es gilt $(1-e)^2 = 1 - e - e + e^2 = 1 - e$. Außerdem

$$\{x\} \times \mathbb{C}^N = \mathrm{im}(e_x) + \mathrm{im}(1 - e_x).$$

Ist $v \in \mathrm{im}(e_x) \cap \mathrm{im}(1 - e_x)$, so ist

$$v = e_x v = (1 - e_x) e_x v = e_x v - e_x^2 v = 0.$$

Also ist $\mathrm{im}(e_x) \cap \mathrm{im}(1 - e_x) = 0$ und damit obige Summe direkt, d.h.

$$\{x\} \times \mathbb{C}^N = \mathrm{im}(e_x) \oplus \mathrm{im}(1 - e_x).$$

Folglich ist

$$\underbrace{\mathrm{rang}(e_x)}_{\text{oberhalbstetig}} + \underbrace{\mathrm{rang}(1 - e_x)}_{\text{unterhalbstetig}} = \underbrace{N}_{\text{konst.}},$$

also ist $x \mapsto \mathrm{rang}(e_x)$ stetig und somit lokal konstant. Daraus folgt, dass $E := e(M \times \mathbb{C}^N)$ ein Untervektorbündel von $M \times \mathbb{C}^N$ ist. Dieses ist das gesuchte, denn

$$\begin{aligned}
\Gamma(M, E) &= \big\{ e \circ s \,|\, s \in \Gamma(M, M \times \mathbb{C}^N) \big\} \\
&= \big\{ \varepsilon(s) \,|\, s \in \Gamma(M, M \times \mathbb{C}^N) \big\} \\
&= \varepsilon\big(\Gamma(M, M \times \mathbb{C}^N)\big) \\
&= \varepsilon\big(\,\mathrm{Mat}_{C(M)}(N)\big) \\
&= P.
\end{aligned}$$

□

Wir fassen zusammen:

2.3.12. Satz (Serre–Swan) *Sei M ein kompakter Hausdorff–Raum. Dann liefert die Zuordnung $E \mapsto \Gamma(M, E)$ und $\varphi \mapsto \Gamma\varphi$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der $\mathbb{C}$–Vektorbündel über M und der Kategorie der endlich erzeugten projektiven $C(M)$–Moduln.* □

2.3.13 Bemerkung. Wir können unser Wörterbuch ergänzen:

Topologie	Algebra
$\mathbb{C}$–Vektorbündel	endlich erzeugte projektive Moduln
Vektorbündelhomomorphismen	Modulhomomorphismen

2.4 Topologische K-Theorie

2.4.1 Die Grothendieck–Gruppe oder die Einführung der negativen Zahlen

2.4.1 Definition. Sei $(M, +, 0)$ eine abelsche Halbgruppe. Auf $M \times M$ definiere die Äquivalenzrelation

$$(m, n) \sim (m', n') \;:\Longleftrightarrow\; \exists p \in M : \; m + n' + p = m' + n + p.$$

Setze

$$\begin{aligned} S(M) &:= M \times M/_{\sim}\,, \\ [(m,n)] + [(m', n')] &:= [(m + m', n + n')], \\ 0_{S(M)} &= [(0,0)], \\ -[(m,n)] &:= [(n,m)]. \end{aligned}$$

2.4.2 Bemerkung. Mit diesen Bezeichnungen ist das Tripel $\big(S(M), +, 0_{S(M)}\big)$ eine abelsche Gruppe. Die Abbildung

$$\begin{aligned} s : M &\to S(M) \\ s(m) &= (m, 0) \end{aligned}$$

ist ein Halbgruppenhomomorphismus.

2.4.3 Definition. Die Gruppe $S(M)$ heißt *Grothendieck–Gruppe von M*.

2.4.4 Beispiele. 1) $(M, +, 0) = (\mathbb{N}_0, +, 0)$, $\quad (S(M), +, 0) = (\mathbb{Z}, +, 0)$ und die Inklusion $s : \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \mathbb{Z}$.

2) $(M, +, 0) = (\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot, 1)$, $\quad (S(M), +, 0) = (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot, 1)$ und die Inklusion $s : \mathbb{Z} - \{0\} \hookrightarrow \mathbb{Q} - \{0\}$.

3) $(M, +, 0) = (\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, $(S(M), +, 0) = (\{1\}, \cdot, 1)$, die triviale Gruppe.

Die Grothendieck–Gruppe $S(M)$ hat die folgende *universelle Eigenschaft*:

2.4.5 Lemma. *Für jede abelsche Gruppe G und jeden Halbgruppenhomomorphismus $f : M \to G$ existiert ein eindeutig bestimmter Gruppenhomomorphismus $s(f) : S(M) \to G$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "f"'] & & S(M) \arrow[dl, dashed, "s(f)"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Beweis. Eindeutigkeit: Sei $s(f)$ ein Gruppenhomomorphismus für den das Diagramm kommutiert. Dann gilt

$$f(m) = s(f)(s(m)) = s(f)\big([(m,0)]\big)$$

Folglich gilt für alle $[(m,n)] \in S(M)$

$$s(f)\big([(m,n)]\big) = s(f)\big([(m,0)] - [(n,0)]\big) = f(m) - f(n).$$

Zum Nachweis der Existenz benutze man diese Formel zur Definition von $s(f)$ und überprüfe die Wohldefiniertheit. $\square$

2.4.6 Bemerkung. Diese universelle Eigenschaft charakterisiert $S(M)$ bis auf Isomorphie.

2.4.2 Die Gruppe $K(X)$

In diesem Abschnitt sei X stets ein kompakter Hausdorff–Raum und $M(X)$ bezeichne die Menge aller Isomorphieklassen komplexer Vektorbündel über X:

$$M(X) := \{\text{Isomorphieklassen komplexer Vektorbündel über } X\}$$

Wir setzen voraus, dass der Rang eines komplexen Vektorbündels lokal, aber nicht notwendig global, konstant sei. So kann der Rang auf verschiedenen Zusammenhangskomponenten von X unterschiedlich sein.

Die Whitney–Summe $\oplus$ von (Isomorphieklassen von) Vektorbündeln macht $M(X)$ zu einer abelschen Halbgruppe. Die Grothendieck–Gruppe von $(M(X), \oplus, [\{0\}])$ bezeichne als die *(topologische) K-Gruppe von X*, in Zeichen

$$K(X) := S(M(X)).$$

Für ein Element $[(E, F)] \in K(X)$ schreibe anstatt der eben verwendeten Notation zukünftig

$$[E] - [F] \in K(X).$$

2.4.7 Satz. *1) Jedes Element von $K(X)$ kann in der Form*

$$[E] - [\underline{\mathbb{C}^n}]$$

geschrieben werden, wobei $\underline{\mathbb{C}^n}$ das triviale Bündel vom Rang n bezeichne.

2) Für alle natürlichen Zahlen n, m sowie Vektorbündel E und F über X gilt:

$$[E] - [\underline{\mathbb{C}^n}] = [F] - [\underline{\mathbb{C}^m}] \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k: \; E \oplus \underline{\mathbb{C}^{m+k}} = F \oplus \underline{\mathbb{C}^{n+k}}.$$

3) Für alle Vektorbündel E, F über X gilt:

$$[E] = [F] \in K(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k: \; E \oplus \underline{\mathbb{C}^k} = F \oplus \underline{\mathbb{C}^k}.$$

Beweis.

zu 1) Betrachte ein Element $[E] - [F] \in K(X)$. Nach Lemma 2.3.7 existiert ein trivialisierendes Komplement F' von F. Damit ist

$$[E] - [F] = [E \oplus F'] - [F \oplus F'] = [E \oplus F'] - [\underline{\mathbb{C}^n}].$$

zu 2) Sei einerseits $[E] - [\underline{\mathbb{C}^n}] = [F] - [\underline{\mathbb{C}^m}]$. Dann existiert ein komplexes Vektorbündel G mit $E \oplus \underline{\mathbb{C}^m} \oplus G = F \oplus \underline{\mathbb{C}^n} \oplus G$. Für ein trivialisierendes Komplement G' von G gilt dann

$$E \oplus \underline{\mathbb{C}^m} \oplus \underbrace{G \oplus G'}_{\underline{\mathbb{C}^k}} = F \oplus \underline{\mathbb{C}^n} \oplus \underbrace{G \oplus G'}_{\underline{\mathbb{C}^k}}.$$

Die andere Implikation der Äquivalenz ist klar.

zu 3) Dies ist ein Spezialfall von 2).

$\square$

2.4.8 Beispiel. Sei $X = S^n$ die n-Sphäre und $E = T_{\mathbb{C}}S^n$ ihr komplexifiziertes Tangentialbündel. Dann ist E für $n \notin \{1, 3, 7\}$ nicht trivial. Aber die zugehörige Äquivalenzklasse in $K(S^n)$ ist trivial, denn das komplexifizierte Normalenbündel ist ein triviales Geradenbündel $\underline{\mathbb{C}}$ über S^n und daher

$$T_{\mathbb{C}}S^n \oplus \underline{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}}\mathbb{R}^{n+1}\big|_{S^n} = \underline{\mathbb{C}^{n+1}} = \underline{\mathbb{C}^n} \oplus \underline{\mathbb{C}}.$$

Folglich gilt

$$[T_{\mathbb{C}}S^n] = [\mathbb{C}^n] \in K(S^n).$$

Betrachte nun eine stetige Funktion $f : X_1 \to X_2$, d.h. einen Morphismus der kompakten Hausdorff–Räume X_1 und X_2. Durch das Pullback von Vektorbündeln wird eine Abbildung

$$f^* : M(X_2) \to M(X_1)$$

induziert, die aufgrund der universellen Eigenschaften der zugehörigen Grothendieck–Gruppen $K(X_2)$ und $K(X_1)$ (siehe Diagramm) einen Gruppenhomomorphismus $f^* : K(X_2) \to K(X_1)$ induziert:

$$\begin{tikzcd} M(X_2) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "s_2"'] \arrow[dr] & M(X_1) \arrow[d, "s_1"] \\ K(X_2) \arrow[r, "\exists! f^*"'] & K(X_1) \end{tikzcd}$$

Trivialerweise sind die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1) Wenn $X_1 = X_2$ und $f = \mathrm{id}_{X_1}$ ist, so ist $f^* = \mathrm{id}_{K(X_1)}$.

2) Sind X_1, X_2, X_3 kompakte Hausdorff–Räume und f, g stetige Funktionen

$$X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{g} X_3,$$

so gilt

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Wir haben also einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der kompakten Hausdorff–Räume und stetigen Abbildungen in die Kategorie der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen konstruiert.

2.4.9 Beispiel. Der Raum $X := \{\text{pkt}\}$ bestehe aus nur einem Punkt. Die Isomorphieklasse eines Vektorbündels E über diesem Punkt hängt nur vom Rang von E ab. Daher ist $M(\{\text{pkt}\}) = \mathbb{N}_0$ und folglich $K(\{\text{pkt}\}) = \mathbb{Z}$.

2.4.3 Reduzierte und relative K-Theorie

2.4.10 Definition. Sei X ein kompakter Hausdorff–Raum mit Basispunkt $x \in X$, der Inklusion $\iota :\ \{x\} \hookrightarrow X$ und der induzierten Abildung

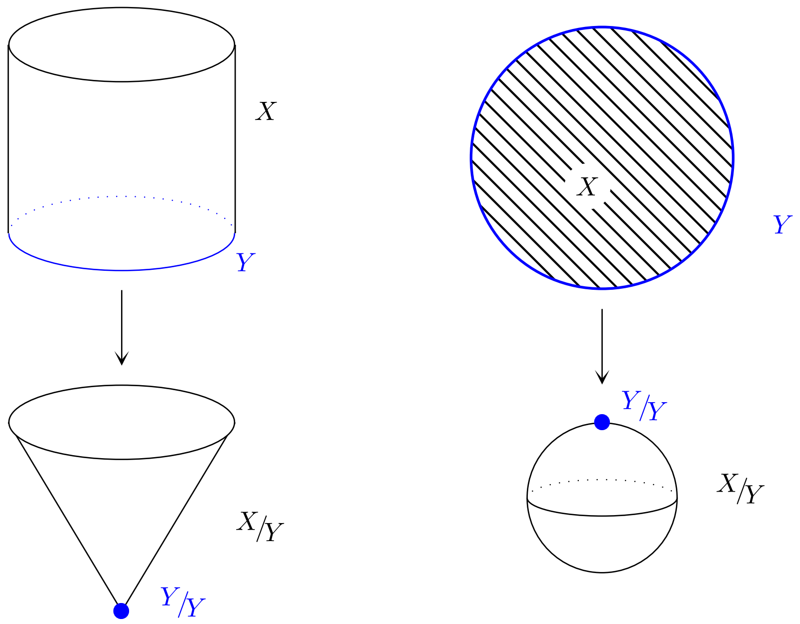
$$\iota^* : \quad K(X) \longrightarrow K(\{x\}) \cong \mathbb{Z}.$$

Die *reduzierte K-Gruppe von X in x* ist der Kern dieser Abbildung, in Zeichen

$$\widetilde{K}(X, x) := \ker(\iota^*).$$

Wenn X zusammenhängend ist, so ist $\widetilde{K}(X, x)$ unabhängig von der Wahl von x.

2.4.11 Definition. Sei $Y \subset X$ eine nichtleere, *abgeschlossene* Teilmenge und $X/_Y$ der Quotientenraum mit Basispunkt $Y/_Y$:



Dann heißt $K(X,Y) := \widetilde{K}\big(X/_Y, Y/_Y\big)$ *relative K-Gruppe*.

2.4.12 Definition. Seien (X,x) und (Y,y) zwei Räume mit Basispunkten. Dann heißt

$$X \wedge Y := X \times Y /_{X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y}$$

ihr *Smash–Produkt*.

Mit den kanonischen Basispunkten heißt das Smash–Produkt mit einer 1-Sphäre

$$\Sigma X := S^1 \wedge X$$

reduzierte Einhängung und

$$\Sigma^n X := \Sigma(\Sigma \ldots \Sigma X)$$

heißt *n-te reduzierte Einhängung*.

2.4.13 Beispiel. (Vergleiche rechtes Bild oben)

$$\begin{aligned}\Sigma S^1 = S^1 \wedge S^1 &= S^1 \times S^1 /_{S^1 \times \{y\} \cup \{x\} \times S^1} \\ &= I \times I /_{(I \times \partial T) \cup (\partial I \times I)} \\ &= I \times I /_{\partial(I \times I)} = S^2.\end{aligned}$$

2.4.14 Bemerkung. Für die n-te reduzierte Einhängung gilt

$$\Sigma^n X = \underbrace{S^1 \wedge \cdots \wedge S^1}_{S^n} \wedge X = S^n \wedge X.$$

2.4.15 Definition. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned}\widetilde{K}^{-n}(X,x) &:= \widetilde{K}(\Sigma^n X) \\ K^{-n}(X,Y) &:= \widetilde{K}^{-n}\big(X/_Y\big) = \widetilde{K}\big(\Sigma^n\big(X/_Y\big)\big) \\ K^{-n}(X) &:= K^{-n}(X,\emptyset) := K^{-n}(X \cup \{\infty\}, \infty) = \widetilde{K}\big(\Sigma^n(X \cup \{\infty\})\big),\end{aligned}$$

wobei $X \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von X sei.

2.4.16 Bemerkung. Wenn $f: \ X_1 \to X_2$ eine stetige Funktion mit $f(x_1) = x_2$ ist, dann existiert eine stetige Funktion $\Sigma^n f = \mathrm{id}_{S^n} \wedge f: \ \Sigma^n X_1 \to \Sigma^n X_2$. Diese induziert eine Abbildung

$$(\Sigma^n f)^*: \ \widetilde{K}^{-n}(X_2, x_2) = \widetilde{K}(\Sigma^n X_2) \to \widetilde{K}^{-n}(X_1, x_1) = \widetilde{K}(\Sigma^n X_1).$$

zwischen den reduzierten K-Gruppen. Analog für relative K-Gruppen.

2.4.17 Beispiel.

$$\Sigma(S^1 \cup \{\infty\}) = S^1 \times (S^1 \cup \{\infty\}) \big/ (S^1 \times \{\infty\}) \cup (\{x\} \cup S^1 \cup \{\infty\})$$

2.4.4 Kohomologische Eigenschaften der K-Theorie

2.4.18 Satz. *(Lange exakte Sequenz) Sei $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz*

$$\begin{tikzcd} K^0(X,Y) \arrow[r, "j^*"] & K^0(X) \arrow[r, "i^*"] & K^0(Y) \\ K^{-1}(X,Y) \arrow[r, "j^*"] & K^{-1}(X) \arrow[r, "i^*"] & K^{-1}(Y) \arrow[llu, "\delta"] \\ \cdots \arrow[r, "j*"] & K^{-2}(X) \arrow[r, "i^*"] & K^{-2}(Y) \arrow[llu, "\delta"] \end{tikzcd}$$

wobei $i: \ Y \hookrightarrow X$ und $j: \ (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, Y)$ die Inklusionen sind.

Beweisskizze.

a) Es ist hinreichend, die folgende exakte, aus fünf Termen bestehende Sequenz zu konstruieren:

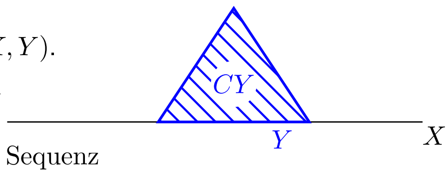
$$\widetilde{K}^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta} K^0(X,Y) \xrightarrow{j^*} \widetilde{K}^0(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}^0(Y)$$

Denn ersetzt man X durch $\Sigma^n X$ und Y durch $\Sigma^n Y$, so erhält man die lange exakte Sequenz der reduzierten K-Theorie.

Ersetzt man andererseits X durch $X \cup \{\infty\}$ und Y durch $Y \cup \{\infty\}$, so erhält man die lange exakte Sequenz für die unreduzierte K-Theorie.

b) Exaktheit in $\widetilde{K}^0(X)$. Definiere i^* als die Einschränkung von X nach Y und j^* als das Pullback entlang $X \to X/Y$. Die Behauptung folgt aus den Definitionen und einigen technischen Überlegungen.

c) Konstruktion von δ und Exaktheit in $K^0(X,Y)$.
Betrachte das Paar $(X \cup_Y CY, X)$, wobei CY den Kegel über Y bezeichne.
Mit Teil b) erhalten wir die kurze exakte Sequenz



$$K(X \cup_Y CY, X) \xrightarrow{m^*} \widetilde{K}(X \cup_Y CY) \xrightarrow{k^*} \widetilde{K}(X),$$

wobei m und k die Inklusionen bezeichnen. Da der Kegel CY zusammenziehbar ist, folgt, dass die Abbildung $p: X \cup_Y CY \to X \cup_Y CY/CY$ eine Bijektion

$$p^*: \ M\big(X \cup_Y CY/CY\big) \longrightarrow M(X \cup_Y CY)$$

induziert. Da aber $(X \cup_Y CY)/CY = X/Y$ ist, erhält man den Isomorphismus

$$p^*: \ \widetilde{K}\big(X/Y\big) \xrightarrow{\cong} \widetilde{K}(X \cup_Y CY).$$

Mit $\widetilde{K}\big(X/Y\big) = K^0(X,Y)$ setzt man folgendes Diagramm zusammen:

$$\begin{tikzcd}
K(X \cup_Y CY, X) \arrow[r, "m^*"] & \widetilde{K}(X \cup_Y CY) \arrow[r, "k^*"] & \widetilde{K}(X) \\
K^{-1}(Y) \arrow[r] & K^0(X,Y) \arrow[u, "p^*", "\cong"'] \arrow[ur, "j^*"'] &
\end{tikzcd}$$

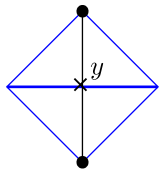
Nun ist

$$\begin{aligned}
K(X \cup_Y CY, X) &= \widetilde{K}\big(X \cup_Y CY/X\big) \\
&= \widetilde{K}\big(CY/Y\big)
\end{aligned}$$

und weil $I \times \{y\} \subset CY/Y$ zusammenziehbar ist:

$$\begin{aligned}
&\cong \widetilde{K}\Big(CY/Y\Big/(I \times \{y\})\Big) \\
&\cong \widetilde{K}(\Sigma Y) = \widetilde{K}^{-1}(Y).
\end{aligned}$$

Zur letzten Zeile betrachte



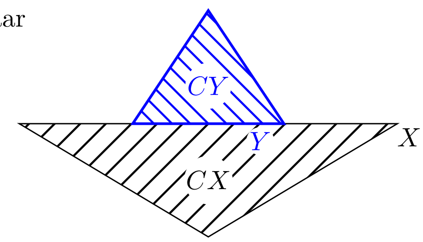
$$\begin{aligned}
&I \times Y\Big/(\{0\} \times Y \cup \{1\} \times Y \cup I \times \{y\}) \\
&= S^1 \times Y\Big/\{0\} \times Y \cup S^1 \times \{y\} \\
&= S^1 \wedge Y = \Sigma Y.
\end{aligned}$$

Definiere schließlich $\delta := (p^*)^{-1} \circ m^* \circ \theta$, womit direkt die Exaktheit folgt.

d) Exaktheit in $\widetilde{K}^{-1}(Y)$. Man verwende das Paar

$$\big((X \cup_Y CY) \cup_X CX, X \cup_Y CY\big)$$

und ähnliche Argumente wie zuvor.



$\square$

2.4.19 Korollar. *Wenn $Y \subset X$ ein Retrakt ist, d.h. wenn eine stetige Abbildung*

$$r : X \to Y \quad \textit{mit} \quad r|_Y = \mathrm{id}_Y$$

existiert, dann ist

$$K^{-n}(X) \cong K^{-n}(X,Y) \oplus K^{-n}(Y).$$

Beweis. Unter Verwendung der Retraktions–Abbildung r spaltet die exakte Sequenz:

$$K^{-n}(X,Y) \xrightarrow{j^*} K^{-n}(X) \underset{r^*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} K^{-n}(Y).$$

Folglich ist

$$K^{-n}(X) = j^* K^{-n}(X,Y) \oplus r^* K^{-n}(Y).$$

$\square$

2.4.20 Korollar. *Sind X_1 und X_2 zwei Räume, so induzieren die Projektionen $X_1 \times X_2 \to X_i$ Isomorphismen*

$$\widetilde{K}^{-n}(X_1 \times X_2) \cong \widetilde{K}^{-n}(X_1 \wedge X_2) \oplus \widetilde{K}^{-n}(X_1) \oplus \widetilde{K}^{-n}(X_2)$$

Beweis. Einerseits ist $X_1 = X_1 \times \{x_2\} \subset X_1 \times X_2$ ein Retrakt, andererseits ist $X_2 \subset X_1 \times X_2/X_1$ ein Retrakt. Für beide wird das vorangehende Korollar angewandt:

$$\begin{aligned}\widetilde{K}^{-n}(X_1 \times X_2) &\cong K^{-n}(X_1 \times X_2, X_1) \oplus \widetilde{K}^{-n}(X_1)\\ &= \widetilde{K}^{-n}\big((X_1 \times X_2)/X_1\big) \oplus \widetilde{K}^{-n}(X_1)\\ &= K^{-n}\big((X_1 \times X_2)/X_1, X_2\big) \oplus \widetilde{K}^{-n}(X_2) \oplus \widetilde{K}^{-n}(X_1)\\ &= \widetilde{K}^{-n}(X_1 \wedge X_2) \oplus \widetilde{K}^{-n}(X_1) \oplus \widetilde{K}^{-n}(X_2)\end{aligned}$$

□

2.4.5 Bott–Periodizität

Wir betrachten Tensorprodukte in folgendem Sinne:

$$\begin{array}{ccc} K^0(X_1) \otimes K^0(X_2) & \longrightarrow & K^0(X_1 \times X_2) \\ [E] \otimes [F] & \longmapsto & [E \boxtimes F], \end{array}$$

wobei $(E \boxtimes F)_{(x_1,x_2)} = E_{x_1} \otimes F_{x_2}$ ist.

Analog bildet man

$$\widetilde{K}^0(X_1) \otimes \widetilde{K}^0(X_2) \longrightarrow \widetilde{K}^0(X_1 \times X_2) \longrightarrow \widetilde{K}^0(X_1 \wedge X_2).$$

Ersetzen von X_1 und X_2 durch ΣX_1 resp. ΣX_2 ergibt

$$\begin{aligned}\widetilde{K}^{-n}(X_1) \otimes \widetilde{K}^{-m}(X_2) \longrightarrow \widetilde{K}^0(\Sigma^n X \wedge \Sigma^m X_2) &= \widetilde{K}^0(S^n \wedge X_1 \wedge S^m \wedge X_2)\\ &= \widetilde{K}^0\big(\Sigma^{n+m}(X_1 \wedge X_2)\big)\\ &\longrightarrow \widetilde{K}^{-n-m}(X_1 \wedge X_2).\end{aligned}$$

Ersetzen von X_1 durch $X_1 \cup \{\infty_1\} =: X_1^+$ und X_2 durch $X_2 \cup \{\infty_2\} =: X_2^+$, $X_1^+ \wedge X_2^+ = (X_1 \times X_2)^+$, ergibt

$$\boxed{K^{-n}(X_1) \otimes K^{-m}(X_2) \longrightarrow K^{-n-m}(X_1 \times X_2)}$$

2.4.21 Satz. *(Bott–Periodizität) Die Gruppe $K^{-2}(\{pkt\}) = \widetilde{K}(S^2) \cong \mathbb{Z}$ wird erzeugt durch*

$$[Hopf] - [\underline{\mathbb{C}^1}]$$

Für alle X und alle $n \in \mathbb{N}^0$ ist die Abbildung

$$K^{-2}(\{pkt\}) \otimes K^{-n}(X) \longrightarrow K^{-n-2}(X)$$

ein Isomorphismus. Insbesondere ist $K^{-n-2}(X) \cong K^{-n}(X)$.

2.4.22 Bemerkung. Der Satz besagt, dass die gesamte K-Theorie 2-periodisch ist! Im Gegensatz zur hier betrachteten komplexen K-Theorie ist die reelle K-Theorie 8-periodisch.

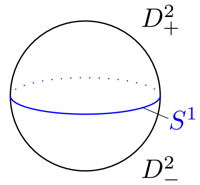
Beweisskizze. Die lange exakte Homotopiesequenz von

$$U(n+1)\Big/U(n) = S^{2n+1}$$

liefert die Isomorphie

$$\pi_1(U(n)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(U(n+1)).$$

Wir schreiben die 2-Sphäre als $S^2 = D^2_+ \cup_{S^1} D^2_-$. Jedes Bündel über S^2 ist trivial auf D^2_+ und D^2_-, also isomorph zu $D^2_+ \times \mathbb{C}^n$ resp. $D^2_- \times C^n$, da D^2_+ und D^2_- zusammenziehbar sind. Daher ist jedes Bündel über S^2 bestimmt durch eine Abbildung $S^1 \longrightarrow U(n,\mathbb{C})$, die das Bündel über dem Äquator beschreibt. Dabei ergeben homotope Abbildungen isomorphe Bündel.



Nun sind Homotopieklassen von Abbildungen $S^1 \to U(n)$ nichts anderes als Elemente von $\pi_1(U(n))$. Somit sind Bündel über S^2 charakterisiert durch Elemente von $\pi_1(U(n))$. Das Hopf–Bündel entspricht dabei einem der zwei Erzeuger von $\pi_1(U(1)) \cong \mathbb{Z}$.

In der langen exakten Sequenz der K-Theorie entspricht Tensorproduktbildung mit $K^{-2}(\{\text{pkt}\})$ einer Verschiebung der gesamten Sequenz um 6 Terme nach links. $\square$

Für positive $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, definiert man induktiv $K^n := K^{n-2}$, sowie $\widetilde{K}^n := \widetilde{K}^{n-2}$. Dann nimmt die lange exakte Sequenz folgende Form an:

$$\begin{tikzcd}
K^0(X,Y) \arrow[r, "j^*"] & K^0(X) \arrow[r, "i^*"] & K^0(Y) \arrow[d, "\delta"] \\
K^1(Y) \arrow[u] & K^1(X) \arrow[l] & K^1(X,Y) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

2.4.6 Weitere kohomologische Eigenschaften

Homotopieinvarianz. Sind f_1 und f_2 homotope Abbildungen $X \longrightarrow Y$, so ist $f_1^* = f_2^*$ bezüglich der K-Theorie. Sind insbesondere X und Y homotopieäquivalent, so haben sie dieselbe K-Theorie.

Ausschneidung. Sei $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, $U \subset Y$ offen und $\tau : X \longrightarrow [0,1]$ stetig mit $U \subset \tau^{-1}(0)$ und $\tau^{-1}\big([0,1]\big) \subset Y$. Dann ist

$$K^n(X-U, Y-U) \xleftarrow{\cong} K^n(X,Y)$$

ein Isomorphismus.

Mayer–Vietoris–Sequenz. Sei $X = X_1 \cup X_2$. Dann existiert eine exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K^n(X) \arrow[r, "(i_1^*, i_2^*)"] & K^n(X_1) \oplus K^n(X_2) \arrow[r, "(j_1^*, j_2^*)"] & K^n(X_1 \cap X_2) \arrow[dll, rounded corners] \\
 & \mathbb{K}^{n+1}(X) \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

2.4.7 K-Theorie versus Kohomologie

2.4.23 Satz. *(Atiyah–Hirzebruch) Sei X eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit (oder ein endlicher CW–Komplex). Dann existiert ein Ringisomorphismus*

$$\mathrm{ch} : K^n(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \bigoplus_{k \equiv n \bmod 2} H^k(X, \mathbb{Q}),$$

der sogenannte Chern–Charakter.

2.5 Algebraische K–Theorie

2.5.1. Ziel: Finde eine Kohomologietheorie für nichtkommutative Räume.

2.5.2. Algebraisierung der K–Theorie. Sei stets A eine assoziative $\mathbb{C}$–Algebra mit Eins. Vektorbündel entsprechen endlich erzeugten projektiven Rechtsmoduln $e \cdot A^n$, wobei $e \in \mathrm{Mat}_A(n)$ mit $e^2 = e$. (Schreibe auch eA^n.)

2.5.3 Notation. Identifiziere

$$\mathrm{Mat}_A(n) \hookrightarrow \mathrm{Mat}_A(n+1), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und setze

$$\mathrm{Mat}_A(\infty) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Mat}_A(n).$$

Beachte, dass $\mathrm{Mat}_A(\infty)$ eine Algebra ohne Eins ist.

Für idempotente Matrizen schreiben wir

$$Q_A(n) := \{e \in \mathrm{Mat}_A(n) \mid e^2 = e\},$$
$$Q_A(\infty) := \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_A(n) \subset \mathrm{Mat}_A(\infty).$$

Für invertierbare Matrizen identifiziere

$$\mathrm{GL}_A(n) \hookrightarrow \mathrm{GL}_A(n+1), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und setze

$$\mathrm{GL}_A(\infty) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}_A(n).$$

Beachte, dass $\mathrm{GL}_A(\infty)$ eine Gruppe ist, allerdings *keine* Teilmenge von $\mathrm{Mat}_A(\infty)$.

Setze ferner für $e \in Q_A(\infty)$

$$e \cdot A^\infty := e \cdot A^n,$$

wobei n so gewählt sei, dass $e \in Q_A(n)$. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von n.

2.5.4 Lemma. *Seien $e, f \in Q_A(\infty)$. Dann gilt:*

$$eA^\infty \cong fA^\infty \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathrm{GL}_A(\infty) \text{ mit } aea^{-1} = f.$$

Beweis.

„$\Leftarrow$“ Sei $a \in \mathrm{GL}_A(\infty)$ mit $aea^{-1} = f$. Wähle n mit $e, f \in Q_A(n)$ und $a \in \mathrm{GL}_A(n)$. Dann ist

$$e \cdot A^\infty = e \cdot A^n \cong a \cdot e \cdot A^n = f \cdot \underbrace{a \cdot A^n}_{A^n} = f \cdot A^n = f \cdot A^\infty,$$

wobei der Isomorphismus zwischen $e \cdot A^n$ und $a \cdot e \cdot A^n$ gegeben ist durch die Linksmultiplikation mit a.

„$\Rightarrow$“ Sei $eA^\infty \cong fA^\infty$ und sei n so, dass $e, f \in Q_A(n)$. Sei $\varphi : eA^n \to fA^n$ Isomorphismus. Es gilt $eA^n \oplus (1-e)A^n = A^n = fA^n \oplus (1-f)A^n$. Setze φ auf $(1-e)A^n$ durch 0 fort zu einem Homomorphismus $\psi : A^n \to A^n$, und setze φ^{-1} auf $(1-f)A^n$ durch 0 fort zu einem Homomorphismus $\chi : A^n \to A^n$. Wir betrachten ψ und χ als Elemente in $\mathrm{Mat}_A(n)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \psi\chi &= f, & \psi &= \psi e = f\psi, \\ \chi\psi &= e, & \chi &= \chi f = e\chi. \end{aligned}$$

Setze

$$a := \begin{pmatrix} \psi & 1-f \\ 1-e & \chi \end{pmatrix} \qquad \text{und berechne} \qquad a^{-1} = \begin{pmatrix} \chi & 1-e \\ 1-f & \psi \end{pmatrix}.$$

Für dieses $a \in \mathrm{GL}_A(2n)$ gilt:

$$\begin{aligned} aea^{-1} &= \begin{pmatrix} \psi & 1-f \\ 1-e & \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi & 1-e \\ 1-f & \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi e & 0 \\ e-e^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi & 1-e \\ 1-f & \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi\chi & \psi e - \psi e^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

2.5.5 Bemerkung. Wir definieren

$$V^{\mathrm{alg}}(A) := Q_A(\infty)\big/\sim\,,$$

wobei $e \sim f$ genau dann, wenn ein $a \in \mathrm{GL}_A(\infty)$ existiert, so dass $aea^{-1} = f$. Zu $e, f \in Q_A(\infty)$ setze

$$[e] + [f] := \left[\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right].$$

Es gilt $[e] + [f] = [f] + [e]$, denn

$$\left[\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\right], \text{ da}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

$V^{\mathrm{alg}}(A)$ bildet mit „+“ eine abelsche Halbgruppe.

2.5.6 Definition. Die Grothendieck–Gruppe $K_0(A)$ zu $V^{\mathrm{alg}}(A)$ heißt *algebraische K-Gruppe von A*.

Im Fall $A = C(M)$, M ein kompakter Hausdorff–Raum, ist $V^{\text{alg}}(A) \cong V^{\text{top}}(M)$.

2.5.7 Proposition. *Ist M ein kompakter Hausdorff–Raum, so gilt*

$$K^0(M) \cong K_0\big(C(M)\big).$$

2.5.8 Bemerkung. Ist $\varphi : A \to B$ ein 1–erhaltender Algebrenhomomorphismus, so induziert dies für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ (und damit auch für $n = \infty$) eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathrm{Mat}_A(n) \to \mathrm{Mat}_B(n), \qquad (a_{ij})_{ij} \mapsto \big(\varphi(a_{ij})\big)_{ij}.$$

Für diese gilt $\varphi\big(Q_A(n)\big) \subset Q_B(n)$ und $\varphi : \mathrm{GL}_A(n) \to \mathrm{GL}_B(n)$. Seien $e, f \in Q_A(\infty)$ mit $e \sim f$, d.h. es existiert ein $a \in \mathrm{GL}_A(\infty)$ mit $aea^{-1} = f$. Nun ist $\varphi(f) = \varphi(aea^{-1}) = \varphi(a)\varphi(e)\varphi(a)^{-1}$, da φ ein Algebrenhomomorphismus ist, und $\varphi(a) \in \mathrm{GL}_B(\infty)$. Also gilt $\varphi(e) \sim \varphi(f)$ in $Q_B(\infty)$. Wir haben damit gezeigt, dass φ einen (wohldefinierten) Halbgruppenhomomorphismus

$$\varphi_* : V^{\text{alg}}(A) \to V^{\text{alg}}(B), \qquad [e] \mapsto [\varphi(e)]$$

induziert. Dieser induziert wiederum einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi_* : K_0(A) \to K_0(B)$$

der zugehörigen Grothendieckgruppen.

2.5.9 Übung. Sind M, N kompakte Hausdorff–Räume und ist $f : M \to N$ stetig, dann liefert Pull–Back einen Homomorphismus

$$f^* : K^0(N) \to K^0(M).$$

Zurückziehen von Funktionen liefert einen 1–erhaltenden Algebrenhomomorphismus

$$\varphi := f^* : C(N) \to C(M), \qquad u \mapsto u \circ f.$$

Zeige, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^0(N) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "f^*"] & K_0\big(C(N)\big) \arrow[d, "\varphi_*"] \\ K^0(M) \arrow[r, phantom, "\cong"] & K_0\big(C(M)\big) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

2.5.10 Beispiel. Sei $A = \mathbb{C}$. Dann ist $V^{\text{alg}}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{N}_0$, denn endlich erzeugte komplexe $\mathbb{C}$–Moduln sind endlichdimensionale $\mathbb{C}$–Vektorräume, deren Isomorphieklasse durch ihre Dimension bestimmt wird. Somit ist $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$.

2.5.11 Proposition. *Seien A und B assoziative Algebren mit Eins. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

1) $K_0(A \times B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B)$

2) $K_0(\mathrm{Mat}_A(n)) \cong K_0(A)$.

Beweis.

zu 1) Für die involvierten Algebren gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{A\times B}(\infty) &\cong \mathrm{Mat}_A(\infty)\times \mathrm{Mat}_B(\infty),\\ Q_{A\times B}(\infty) &\cong Q_A(\infty)\times Q_B(\infty),\\ \mathrm{GL}_{A\times B}(\infty) &\cong \mathrm{GL}_A(\infty)\times \mathrm{GL}_B(\infty).\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Quotienten modulo $\sim$

$$V^{\mathrm{alg}}(A\times B)\cong V^{\mathrm{alg}}(A)\oplus V^{\mathrm{alg}}(B)$$

und damit für die zugehörigen Grothendieck–Gruppen

$$K_0(A\times B)\cong K_0(A)\oplus K_0(B).$$

zu 2) Setze $\mathcal{A} := \mathrm{Mat}_A(n)$. Unterteilung der Matrizen in $\mathrm{Mat}_A(\infty)$ in $n\times n$–Blöcke liefert einen Isomorphismus

$$\mathrm{Mat}_A(\infty)\cong \mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(\infty).$$

Man mache sich klar, dass dies in der Tat ein Algebrenisomorphismus ist, d.h. dass auch die Multiplikation mit diesem Isomorphismus verträglich ist. Dabei wird $Q_A(\infty)$ isomorph auf $Q_{\mathcal{A}}(\infty)$ abgebildet. Genauso sieht man

$$\mathrm{GL}_A(\infty)\cong \mathrm{GL}_{\mathcal{A}}(\infty).$$

Daraus folgt wie oben $V^{\mathrm{alg}}(A)\cong V^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$ und damit

$$K_0(A)\cong K_0(\mathcal{A}).$$

□

2.5.12 Beispiel. 1) $V^{\mathrm{alg}}\big(\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)\big)\cong V^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C})\cong \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow\quad K_0\big(\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n)\big)\cong K_0(\mathbb{C})\cong\mathbb{Z}$.

2) $$\begin{aligned}K_0\big(\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n_1)\times\cdots\times \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n_r)\big) &\cong K_0\big(\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n_1)\big)\times\cdots\times K_0\big(\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n_r)\big)\\ &\cong \mathbb{Z}^r.\end{aligned}$$

2.5.13 Bemerkung. Man kann das algebraische Äquivalent zur Einhängung topologischer Räume definieren und damit auch höhere K–Gruppen $K_n(A)$ konstruieren. Es gilt dann wie im topologischen Fall Bott–Periodizität:

$$K_{n+2}(A)\cong K_n(A).$$

2.6 Penrose–Kachelungen

2.6.1 Definition. Eine *Kachel* ist eine zusammenhängende, kompakte Teilmenge $K\subset\mathbb{R}^2$ mit $K=\overline{\mathring{K}}$.

Eine *Kachelung* (oder *ebene Pflasterung*) aus den Kacheln $K_1,\ldots,K_n$ ist eine Zerlegung

$$\mathbb{R}^2=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,$$

so dass

1) für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und ein $\varphi \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2)$ mit $\varphi(A_k) = K_j$.

2) $\overset{\circ}{A}_k \cap \overset{\circ}{A}_l = \emptyset$ für alle k, $l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$.

2.6.2 Beispiel. *Badezimmerkachelung* aus der Kachel $K = [0,1] \times [0,1]$.

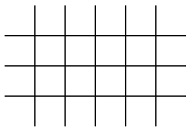
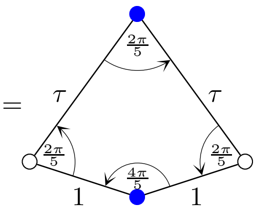


Abb. 8: Badezimmerkacheln

2.6.3. Penrose–Kachelungen

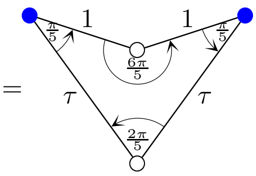
Die Kacheln:

$D =$



(Drachen)

$P =$

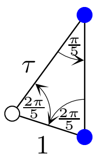


(Pfeil)

Abb. 9: Penrose–Kachelung: Drachen und Pfeil.

Eine *Penrose–Kachelung* ist eine Kachelung aus den Kacheln D und P, so dass sich je zwei Kacheln nur in gleich langen Seiten und in gleichfarbigen Ecken treffen.

Wir berechnen τ für den Drachen:



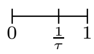
Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{\tau}{\sin(\frac{2\pi}{5})} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{5})}$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{\sin(\frac{2\pi}{5})}{\sin(\frac{\pi}{5})} = \frac{2\sin(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{\pi}{5})}{\sin(\frac{\pi}{5})} = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

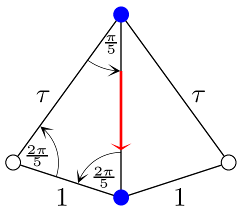
$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

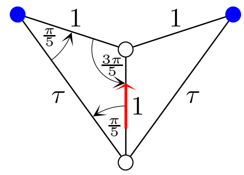
2.6.4 Bemerkung. Dies ist der so genannte Goldene Schnitt



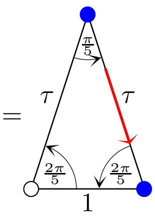
$$\frac{1}{\frac{1}{\tau}} = \frac{\frac{1}{\tau}}{1 - \frac{1}{\tau}}$$

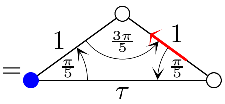
2.6.5. Wir ziehen in die beiden Kacheln orientierte Seiten ein



und


Dadurch ergibt sich aus der Penrose–Kachelung eine sogannante Typ–A–Kachelung mit den Kacheln

$G_1 :=$


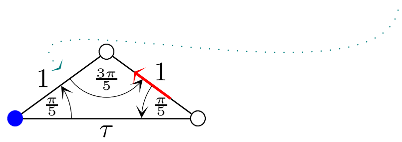
und $K_1 :=$


mit den Eigenschaften

- ⊛ nur gleichlange Seiten werden aneinandergelegt,
- ⊛ nur gleichfarbige Ecken werden aneinandergelegt und
- ⊛ nur gleichorientierte Seiten werden aneinandergelegt.

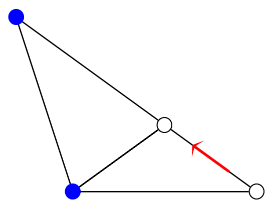
2.6.6. Konstruktion einer Folge von Kachelungen.

Wir starten mit einer Typ–A–Kachelung $\mathcal{K}_0$. Was kann sich an diese Seite von K_1 anschließen?

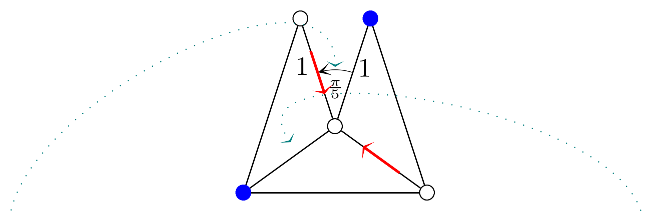


Wir erhalten zwei Möglichkeiten:

1) Dreieck vom Typ G_1:

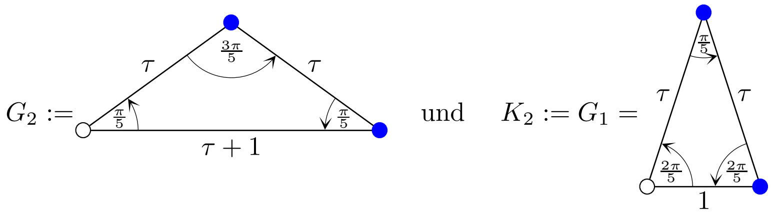


2) Dreieck vom Typ K_1



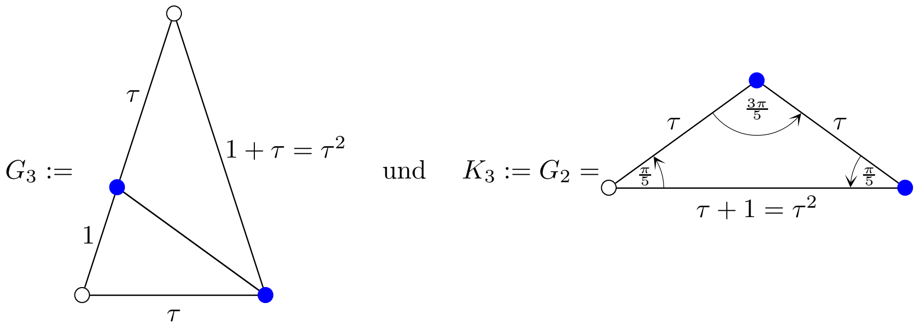
Da man hier keine der Kacheln mehr anbringen kann, muss an dieser Seite ein Dreieck vom Typ G_1 angelegt sein.

Also: Entfernen der Seiten mit Länge 1 und Versehen mit farbigen Enden von kleinen Dreiecken (vom Typ K_1) liefert neue Kachelung vom Typ B aus den Kacheln



mit denselben Eigenschaften, nur ohne Orientierung.

Eine ähnliche Argumentation liefert: An jeder Seite von K_2 der Länge τ mit blauen Enden ● muss eine Kachel vom Typ G_2 anliegen.



Wir erhalten eine Kachelung aus Kacheln G_3, K_3. Diese Kacheln sind die selben Kacheln wie G_1 und K_1, nur multipliziert mit τ und vertauschten Farben.

Iterieren wir diese Prozedur, so erhalten wir eine Folge von Kachelungen $\mathcal{K}_n$, abwechselnd vom Typ A und vom Typ B.

2.6.7. Die assoziierte Folge einer Penrose–Kachelung. Wir starten mit einer Penrose–Kachelung $\mathcal{K}_0$ und gehen über zur ersten Typ–A–Kachelung. Nun wählen wir einen Punkt p im Inneren eines der Dreiecke. Setze

$$x_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } p \text{ für die Kachelung } \mathcal{K}_n \text{ in einer Kachel vom Typ } K_n \text{ liegt,} \\ 0, & \text{falls } p \text{ für die Kachelung } \mathcal{K}_n \text{ in einer Kachel vom Typ } G_n \text{ liegt,} \end{cases}$$

und setze $(x_n)_n =: \mathcal{F}(\mathcal{K}_0, p)$.

Jede kleine Kachel K_n geht in der nächsten Kachelung in einer großen Kachel G_{n+1} auf, d.h.

$$x_n = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = 0. \tag{$*$}$$

Eine Folge $x : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, die $(*)$ erfüllt, nennen wir *zulässig*.

Wir haben also jeder Penrose–Kachelung $\mathcal{K}$ und jeder Wahl von p eine zulässige Folge $\mathcal{F}(\mathcal{K}, p)$ zugeordnet. Man zeigt nun unschwer das folgende

2.6.8 Lemma. *1) Ist $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, so gilt*

$$\mathcal{F}(\mathcal{K}, p) = \mathcal{F}\big(\varphi\mathcal{K}, \varphi(p)\big).$$

2) Für je zwei Startpunkte p, q existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{F}(\mathcal{K}, p)$ und $\mathcal{F}(\mathcal{K}, q)$ ab dem n_0–ten Glied übereinstimmen.

3) *Zu jeder zulässigen Folge $(x_n)_n$ existiert eine Penrose–Kachelung $\mathcal{K}$ und ein Startpunkt p mit*
$$(x_n)_n = \mathcal{F}(\mathcal{K}, p).$$
Das Paar $(\mathcal{K}, p)$ ist bis auf Isometrie eindeutig durch $\mathcal{F}(\mathcal{K}, p)$ bestimmt.

2.6.9 Definition. Zwei zulässige Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ heißen *äquivalent*, $(x_n)_n \sim (y_n)_n$, falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n = y_n$ für alle $n \geq n_0$.

2.6.10 Übung. Zeige: Es gibt überabzählbar unendlich viele Äquivalenzklassen von zulässigen Folgen.

2.6.11 Korollar. *Es gibt überabzählbar unendlich viele Isometrieklassen von Penrose–Kachelungen.*

2.6.12 Bemerkung. Zu jeder zulässigen Folge $(x_n)_n$ betrachte die reelle Zahl $t \in [0, 1]$ mit Binärentwicklung $t = 0, x_1x_2x_3 \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i}x_i$. Diese Zuordnung $(x_n)_n \mapsto t$ ist injektiv, denn wegen der Zulässigkeitsbedingung tritt 1 als Periode nicht auf. Wir betrachten die Menge X aller zulässigen Folgen als Teilmenge des reellen Intervalls $[0, 1]$. Dadurch erhält X eine Topologie.

2.6.13 Lemma. *1) X ist kompakt*

2) Die Quotiententopologie auf $X/_\sim$ ist die Klumpentopologie[9]*. Insbesondere sind alle stetigen Funktionen auf $X/_\sim$ konstant.*

Beweis.

a) Es ist zu zeigen, dass $X \subset [0, 1]$ abgeschlossen ist. Seien $t_i \in X$ mit $t_i \to t \in [0, 1]$. Zu zeigen: $t \in X$. Angenommen, $t \notin X$, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x_{n+1} = 1$,
$$t = 0, x_1x_2 \ldots x_{n-1}11x_{n+2} \ldots$$
Für hinreichend großes i hat aber t_i dieselben Binärziffern bis $n + 1$ im Widerspruch zu $t_i \in X$.

b) Zu zeigen: Für $t \in X$ ist die Äquivalenzklasse als Teilmenge $[t] \subset X$ dicht. Schreibe $t = x_1x_2x_3 \ldots$ und nimm $s = y_1y_2y_3 \ldots \in X$ beliebig. Setze
$$t_n := \begin{cases} 0, y_1y_2 \ldots y_nx_{n+1}x_{n+2} \ldots & \text{falls } y_n = 0 \\ 0, y_1y_2 \ldots y_ny_{n+1}x_{n+2}x_{n+3} \ldots & \text{falls } y_n = 1. \end{cases}$$
Dann gilt: $t_n \in [t]$ und $t_n \to s$ für $n \to \infty$.

□

2.6.14. Fazit. *Es gibt eine natürliche Bijektion*
$$\{\textit{Isometrieklassen von Penrose–Kachelungen}\} \quad \xleftrightarrow{1:1} \quad X/_\sim .$$
Der Raum $X/_\sim$ trägt eine natürliche Topologie, aber diese ist trivial.

2.6.15. Konstruktion der C^*–Algebra A_{Penrose}.

Zu einer abzählbaren Menge Y sei $l^2(Y)$ der separable Hilbertraum
$$l^2(Y) := \{f : Y \to \mathbb{C} \mid \|f\|_{l^2(Y)} < \infty\},$$

[9] Ist Y eine Menge, so ist die Klumpentopologie $= \{\emptyset, Y\}$. Sie wird auch *indiskrete Topologie* genannt. Als topologischer Raum lässt sich Y dann durch stetige Funktionen nicht von einem einpunktigen Raum unterscheiden, ist also topologisch trivial.

wobei die Norm auf $l^2(Y)$ gegeben sei durch

$$\|f\|^2_{l^2(Y)} = \sum_{y\in Y} |f(y)|^2.$$

Die Elemente a von A_{Penrose} werden jeder Äquivalenzklasse $[t] \in X/\sim$ einen Operator $a([t]) \in \mathcal{L}\big(l^2([t])\big)$ zuordnen.

Wir führen nun einige Notationen ein. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$\begin{aligned}
X_n &:= \big\{(x_1,\dots,x_n) \,|\, x_i \in \{0,1\},\, x_i = 1 \Rightarrow x_{i+1} = 0\big\}\\
X_n^0 &:= \big\{(x_1,\dots,x_{n-1},0) \in X_n\big\}\\
X_n^1 &:= \big\{(x_1,\dots,x_{n-1},1) \in X_n\big\}\\
d_n &:= \#X_n^0 \quad \text{und} \quad d'_n = \#X_n^1.
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{gathered}
\#X_n = d_n + d'_n,\\
d_1 = d'_1 = 1, \qquad d'_{n+1} = d_n, \qquad d_{n+1} = d_n + d'_n.
\end{gathered}$$

Es folgt, dass $d_{n+1} = d_n + d_{n-1}$ und $d_1 = 1$. Setzen wir noch $d_0 := 1$, so steht die *Fibonacci–Folge* da.

Auf X definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim_n$ durch

$$t \sim_n s \quad :\Leftrightarrow \quad \forall j \geq n :\ t_j = s_j.$$

Offenbar folgt aus $t \sim_n s$, dass $t \sim_{n+1} s$. Außerdem ist $t \sim s$ äquivalent zur Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit $t \sim_n s$. Sei nun

$$\widetilde{a} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^{X_n^0}) \times \operatorname{End}(\mathbb{C}^{X_n^1}) \cong \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d_n) \times \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d'_n).$$

Für $f,\, g \in l^2([t])$ definiere

$$\big(a([t])f, g\big)_{l^2([t])} := \sum_{s,u\sim_n t} f(s)\overline{g}(u)(\widetilde{a}\cdot e_s, e_u),$$

wobei e_s, e_u die zu s bzw. u gehörigen Basisvektoren von $\mathbb{C}^{X_n^0\cup X_n^1} = \mathbb{C}^{X_n}$ sind. Sei weiter

$$\begin{aligned}
A_n :&= \big\{a \,|\, \widetilde{a} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^{X_n^0}) \times \operatorname{End}(\mathbb{C}^{X_n^1})\big\}\\
&\cong \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d_n) \times \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d'_n).
\end{aligned}$$

Die Einbettung $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ entspricht unter dem Isomorphismus mit $\operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d_n) \times \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d'_n)$ der Einbettung

$$\begin{gathered}
\operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d_n) \times \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d'_n) \hookrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d_{n+1}) \times \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d'_{n+1})\\
(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2) \mapsto \left(\begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{a}_2 \end{pmatrix}, \widetilde{a}_1 \right)
\end{gathered}$$

Es gilt $\|a([t])\| = \|\widetilde{a}\|$ für alle $[t] \in X/\sim$ und $a \in A_n$. Setze

$$\|a\| := \|\widetilde{a}\|, \qquad A_{\text{Penrose}} := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}^{\|\cdot\|}.$$

2.6.16. K–Theorie von A_{Penrose}.

Wir wissen aus Proposition 2.5.11, dass

$$K_0(A_n) \cong K_0\big(\operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d_n) \times \operatorname{Mat}_{\mathbb{C}}(d'_n)\big) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Die von der Einbettung $i : A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ induzierte Abbildung

$$\begin{tikzcd} i_* : K_0(A_n) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & K_0(A_{n+1}) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)"'] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

ist invertierbar über $\mathbb{Z}$. Man kann außerdem zeigen, dass K_0 mit projektiven Limites vertauscht. Daher ist

$$K_0(A_{\text{Penrose}}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Allgemein für eine assoziative $\mathbb{C}$–ALgebra A mit Eins sei $K_{0+}(A)$ das Bild der kanonischen Abbildung

$$V^{\text{alg}}(A) \to K_0(A).$$

Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \cong \arrow[d, "\cdot\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] & K_{0+}(A_n) \arrow[d, "i_*"] & \subset & K_0(A_n) \arrow[d, "i_*", "\cong"'] & \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[d, "\cdot\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)", "\cong"'] \\ \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \cong & K_{0+}(A_{n+1}) & \subset & K_0(A_{n+1}) & \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} K_{0+}(A_{\text{Penrose}}) \cong \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{0+}(A_n) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-n} (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{n} (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \begin{pmatrix} d_{n-1} & -d_n \\ -d_n & d_{n+1} \end{pmatrix} (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

Die Vektorenpaare $\binom{-d_n}{d_{n+1}}$, $\binom{d_{n-1}}{-d_n}$ begrenzen einen Quadranten im $\mathbb{R}^2$. Seine Begrenzung konvergiert gegen die Grade mit Steigung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

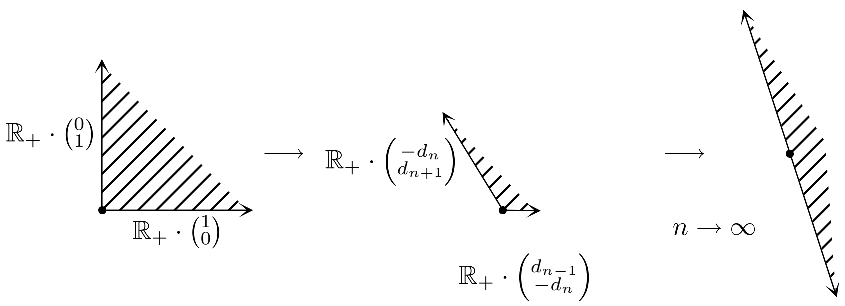


Abb. 10: Von $\mathbb{R}_+ \cdot \binom{-d_n}{d_{n+1}}$ und $\mathbb{R}_+ \cdot \binom{d_{n-1}}{-d_n}$ aufgespannte Quadranten des $\mathbb{R}^2$ für $n \to \infty$.

Kapitel 3

Nichtkommutative Differentialgeometrie

3.1 Spektraltripel

3.1.1 Lemma. *Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und seien $p,\, q \in M$. Dann lässt sich die riemannsche Abstandsfunktion d wie folgt beschreiben:*

$$d(p,q) = \sup\{f(q) - f(p) \,|\, f : M \to \mathbb{R} \text{ glatt}, |\operatorname{grad} f| \leq 1\}.$$

Beweis.

a) Sei c eine glatte Kurve mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$, sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $|\operatorname{grad} f| \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\, dt = \int_0^1 \langle \operatorname{grad} f, \dot{c} \rangle\, dt \\ &\leq \int_0^1 |\operatorname{grad} f| \cdot |\dot{c}|\, dt \leq \int_0^1 |\dot{c}|\, dt = L[c] \\ \Rightarrow \qquad f(q) - f(p) &\leq d(p,q) \end{aligned}$$

b) Sei $\varepsilon > 0$. Betrachte die Funktion $f_0 : M \to \mathbb{R}$, $f_0(x) := d(p,x)$. Diese Funktion ist Lipschitz-stetig auf M mit Lipschitz-Konstante 1. Man kann f_0 nun durch eine glatte Funktion f_ε approximieren, so dass $|f_0 - f_\varepsilon| \leq \varepsilon$ und die Lipschitz-Konstante von f_ε ist $\leq 1 + \varepsilon$. Für $f := \frac{1}{1+\varepsilon} f_\varepsilon$ gilt dann $|\operatorname{grad} f| \leq 1$ und

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)(f(q) - f(p)) &= f_\varepsilon(q) - f_\varepsilon(p) \\ &\geq d(p,q) - \varepsilon - d(p,p) - \varepsilon \\ &= d(p,q) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt $f(q) - f(p) \geq \frac{1}{1+\varepsilon} d(p,q) - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Der Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ liefert die Behauptung.

$\square$

3.1.2 Definition. Ein *Spektraltripel* ist ein Tripel $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, wobei $\mathcal{A}$ eine Prä–C^*–Algebra ist, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, D ein selbstadjungierter (i. Allg. unbeschränkter) Operator auf $\mathcal{H}$ und $\mathcal{A}$ hat eine $*$–Darstellung auf $\mathcal{H}$, d.h. es existiert ein $*$–Morphismus $\mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (d.h. $\mathcal{A}$ wirkt auf $\mathcal{H}$) mit den Eigenschaften

1) Für alle $a \in \mathcal{A}$ ist der Operator $[D, a]$ auf einer dichten Teilmenge von $\mathcal{H}$ definiert und beschränkt und setzt sich damit zu einem beschränkten Operator auf $\mathcal{H}$ fort.

2) Für alle $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ ist $(D - \lambda)^{-1}$ kompakt.

3.1.3. Einschub: Erinnerung an den Dirac–Operator. Sei M eine n–dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit. Falls M eine Spinstruktur besitzt, so existiert das Spinorbündel $\Sigma M \to M$. ΣM ist ein hermitesches Vektorbündel vom Rang $2^{[\frac{n}{2}]}$.

Der Levi–Civita–Zusammenhang von M induziert einen metrischen Zusammenhang ∇ auf ΣM. Ferner existiert die Clifford–Multiplikation

$$TM \otimes \Sigma M \to \Sigma M, \qquad X \otimes \varphi \mapsto X \cdot \varphi$$

mit der charakterisierenden Eigenschaft

$$Y \cdot X \cdot \varphi + X \cdot Y \cdot \varphi = -2\langle X, Y\rangle \varphi$$

Der Dirac–Operator

$$D : C^\infty(M, \Sigma M) \to C^\infty(M, \Sigma M)$$

kann lokal beschrieben werden durch

$$D\varphi := \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i} \varphi,$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ lokale Orthonormalbasisschnitte von TM seien. Man zeigt, dass D nicht von der Wahl der Basis abhängt.

Eigenschaften des Dirac–Operators:

⊛ D ist formal selbstadjungiert, d.h. für φ, $\psi \in C^\infty(M, \Sigma M)$ mit kompaktem Träger gilt

$$(D\varphi, \psi)_{L^2} := \int_M \langle D\varphi, \psi\rangle \, d\mathrm{vol} = (\varphi, D\psi)_{L^2}$$

⊛ D ist elliptisch

Ist M zusätzlich kompakt, so gilt:

⊛ D ist wesentlich selbstadjungiert im Hilbertraum $L^2(M, \Sigma M)$.

⊛ Das Spektrum des selbstadjungierten Abschlusses von D, den wir wieder mit D bezeichnen, ist reell.

⊛ Ist $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, so ist die Resolvente $(D - \lambda)^{-1}$ kompakt.

⊛ Es existieren $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$ und $\varphi_j \in C^\infty(M, \Sigma M)$, so dass

  ◎ $D\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ für alle $j \in \mathbb{Z}$

  ◎ $\{\varphi_j\}_j$ bildet eine Hilbertraum–Orthonormalbasis (Orthonormalbasissystem) von $L^2(M, \Sigma M)$,

  ◎ das Spektrum

$$-\infty \leftarrow \cdots \leq \lambda_{j-1} \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \cdots \to +\infty$$

  ist beidseitig unbeschränkt und jedes λ tritt nur endlich oft auf,

⊚ für $N(\Lambda) := \#\{j \mid |\lambda_j| \le \Lambda\}$ gilt die *Weyl'sche Eigenwertasymptotik*

$$N(\Lambda) \overset{\Lambda\to\infty}{\sim} c(n) \cdot \mathrm{vol}(M) \cdot \Lambda^n,$$

wobei $c(n) = \frac{2^{[n/2]}}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.

3.1.4 Beispiel. Sei M eine kompakte riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit. Betrachte folgendes Tripel:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= C^\infty(M,\mathbb{C})\\ \mathcal{H} &= L^2(M,\Sigma M)\\ D &= \text{ Dirac–Operator.}\end{aligned}$$

$\mathcal{A} = C^\infty(M,\mathbb{C})$ wirke auf $\mathcal{H} = L^2(M,\Sigma M)$ durch punktweise Multiplikation. Wir berechnen für $a \in C^\infty(M,\mathbb{C})$ und φ zunächst im Definitionsbereich von D:

$$\begin{aligned}[D,a]\varphi &= D(a\varphi) - aD\varphi\\ &= \sum_i \Big(e_i \cdot \nabla_{e_i}(a\varphi) - a \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i}\varphi\Big)\\ &= \sum_i \big(e_i \cdot \partial_{e_i} a \cdot \varphi + e_i \cdot a \cdot \nabla_{e_i}\varphi - a \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i}\varphi\big)\\ &= \mathrm{grad}\, a \cdot \varphi.\end{aligned}$$

$[D,a]$ wirkt also durch Clifford–Multiplikation mit $\mathrm{grad}\, a$. Da $\mathrm{grad}\, a$ ein glattes, beschränktes Vektorfeld ist, hat $[D,a]$ eine eindeutige Fortsetzung zu einem beschränkten Operator auf ganz $L^2(M,\Sigma M)$.

Das Spektraltripel $(\mathcal{A},\mathcal{H},D) = (C^\infty(M,\mathbb{C}), L^2(M,\Sigma M), D)$ heißt *kanonisches Spektraltripel* der riemannschen Spin–Mannigfaltigkeit M.

Frage: Kann man aus dem kanonischen Spektraltripel die Mannigfaltigkeit M rekonstruieren?

Wir übersetzen Lemma 3.1.1 für den vorliegenden Fall: Für alle p, $q \in M$ gilt:

$$d(p,q) = \sup\{|a(p) - a(q)| \,\big|\, a \in \mathcal{A},\ \|[D,a]\| \le 1\}.$$

Also legt das kanonische Spektraltripel den metrischen Raum (M,d) (bis auf Isometrie) fest.

Im folgenden Lemma 3.1.5 sehen wir, dass dann M auch als riemannsche Mannigfaltigkeit durch $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ festgelegt wird.

3.1.5 Lemma. *Seien (M_1,g_1) und (M_2,g_2) zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeiten und seien d_1, d_2 die zugehörigen riemannschen Abstandsfunktionen. Ist*

$$\varphi : (M_1,d_1) \to (M_2,d_2)$$

eine Isometrie metrischer Räume, so ist φ auch eine Isometrie der riemannschen Mannigfaltigkeiten, d.h. φ ist glatt und $\varphi^* g_2 = g_1$.

Beweis.

a) $c : I \to M$ ist *genau dann* eine Geodätische mit $|\dot c| \equiv \alpha$, *wenn*

$$d\big(c(t),c(s)\big) = \alpha \cdot |t-s| \qquad \text{für } t \text{ und } s \text{ hinreichend nahe beieinander.}$$

Da φ eine Isometrie der metrischen Räume ist, gilt also

$$\begin{aligned} & c : I \to M_1 && \text{Geodätische mit } |\dot c| \equiv \alpha\\ \Rightarrow\quad & \varphi \circ c : I \to M_2 && \text{ist Geodätische mit } \left|\tfrac{d}{dt}(\varphi\circ c)\right| \equiv \alpha.\end{aligned}$$

b) Sei nun $p \in M_1$ und $q := \varphi(p) \in M_2$. Wähle $r > 0$ mit $r < \operatorname{injrad}(p)$. Dann bildet φ den Ball $B(p,r) \subset M_1$ homöomorph auf den Ball $B(q,r) \subset M_2$ ab.

Zu $X \in T_pM_1$ ist $t \mapsto \exp_p(tX) =: c(t)$ eine Geodätische in M_1 mit $|\dot{c}| \equiv |X|$. Anwendung von Beweisteil a) liefert, dass $t \mapsto \varphi(\exp_p(tX))$ eine Geodätische in M_2 mit $\left|\frac{d}{dt}(\varphi \circ c)\right| \equiv |X|$ ist. Daher existiert ein eindeutig bestimmtes $\widehat{X} \in T_qM_2$ mit $\varphi(\exp_p(tX)) = \exp_q(t\widehat{X})$ (Eindeutigkeit der Lösung der Geodätengleichung). Setze

$$\varphi_* : T_pM_1 \to T_qM_2, \qquad \varphi_*(X) := \widehat{X}.$$

Es gilt damit

$$\varphi(\exp_p(tX)) = \exp_q(t\varphi_*X) \quad \text{und} \quad |\varphi_*(X)| = |X|.$$

c) Für $X, Y \in T_pM_1$ gilt

$$\begin{aligned}
|X - Y| &= \lim_{t\to 0} \frac{d(\exp_p(tX), \exp_p(tY))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{d\big(\varphi(\exp_p(tX)), \varphi(\exp_p(tY))\big)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{d\big(\exp_q(t\varphi_*(X)), \exp_q(t\varphi_*(Y))\big)}{t} \\
&= |\varphi_*(X) - \varphi_*(Y)|.
\end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt, dass $\varphi_* : T_pM_1 \to T_qM_2$ eine nullerhaltende Isometrie euklidischer Räume ist. Also ist φ_* orthogonal, damit insbesondere linear.

d) Auf $B(p,r)$ gilt wegen $r < \operatorname{injrad}(p)$

$$\varphi = \exp_q \circ \varphi_* \circ \exp_p^{-1}.$$

Also ist φ glatt in p mit orthogonalem Differential $d\varphi|_p = \varphi_*$. Somit ist φ eine Isometrie riemannscher Mannigfaltigkeiten.

□

3.1.6 Beispiel. Wir konstruieren den „einfachsten nichtkommutativen Fall". Betrachte

$$Y = \{1, 2\}, \qquad \mathcal{A} = C(Y) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ endlichdimensionale Hilberträume. Setze $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Sei $M \in \operatorname{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Setze

$$D := \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}$ wirke auf $\mathcal{H}$ vermöge

$$a = (a_1, a_2) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \operatorname{id}_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & a_2 \operatorname{id}_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}.$$

Da die betrachteten Hilberträume endlichdimensional sind, stellen die funktionalanalytischen Bedingungen keine zusätzlichen Bedingungen dar. Wir berechnen

$[D, a]$ für $a \in \mathcal{A} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$Da = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 M^* \\ a_1 M & 0 \end{pmatrix}$$

$$aD = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 M^* \\ a_2 M & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad [D, a] = (a_2 - a_1) \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ -M & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \|[D, a]\| = |a_2 - a_1| \cdot \|M\|.$$

Den kommutativen Fall imitierend, betrachten wir den „nichtkommutativen Abstand“:

$$\begin{aligned} d(1, 2) &= \sup\{|a_2 - a_1| \,\big|\, a \in \mathbb{C} \times \mathbb{C},\ \|[D, a]\| \leq 1\} \\ &= \frac{1}{\|M\|} \end{aligned}$$

3.1.7 Definition. Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ ein Spektraltripel. Eine *Graduierung von $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$* ist ein Operator $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

1) $\Gamma^* = \Gamma$
2) $\Gamma^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$
3) $D\Gamma + \Gamma D = 0$
4) Für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt $\Gamma a = a\Gamma$.

$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ heißt *gerade*, falls es eine Graduierung besitzt, sonst *ungerade*.

3.1.8 Beispiel. Sei M kompakte riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit mit gerader Dimension n. Dann zerfällt das Spinorbündel

$$\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M.$$

Eine Graduierung des kanonischen Spektraltripels $(C^\infty(M, \mathbb{C}), L^2(M, \Sigma M), D)$ ist gegeben durch

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\Sigma^+ M} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_{\Sigma^- M} \end{pmatrix}.$$

Genauere Beschreibung von Γ:

Zu $p \in M$ wähle eine positiv orientierte Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ von $T_p M$. Dann ist

$$\Sigma_p M = \Sigma_p^+ M \oplus \Sigma_p^- M$$

die Eigenraumzerlegung zum Operator, der gegeben ist durch Clifford–Multiplikation mit $i^{\frac{n}{2}} e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n$. Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis $e_1, \ldots, e_n$.

3.1.9 Beispiel. In Beispiel 3.1.6 liefert

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathcal{H}_1} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_{\mathcal{H}_2} \end{pmatrix}$$

eine Graduierung.

3.1.10 Bemerkung. Wegen der Weyl'schen Eigenwertasymptotik

$$N(\Lambda) \overset{\Lambda\to\infty}{\sim} c(n) \cdot \mathrm{vol}(M) \cdot \Lambda^n$$

(M sei stets kompakt) sind $\dim(M) = n$ und $\mathrm{vol}(M)$ durch das Spektrum des Dirac–Operators auf M bestimmt. Allerdings gibt es Beispiele kompakter riemannscher Spin–Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2, die nicht isometrisch sind, deren Dirac–Operatoren jedoch dasselbe Spektrum haben. Zur Festlegung der Geometrie von M wird somit das ganze Spektraltripel $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ benötigt.[1]

3.1.11 Notation. Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Für[2]

$$T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) := \{\text{kompakte Operatoren auf } \mathcal{H}\}$$

schreibe für die Eigenwerte von $|T|$

$$\mu_1(|T|) \geq \mu_2(|T|) \geq \mu_3(|T|) \geq \dots .$$

Setze nun

$$\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H}) := \big\{T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \,\big|\, \mu_j(|T|) := O\big(\tfrac{1}{j}\big)\big\}.$$

3.1.12 Beispiel. Betrachte eine kompakte riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit M mit invertierbarem Dirac–Operator D. Aus der Weyl'schen Eigenwertasymptotik folgt in diesem Fall

$$T := D^{-n} \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}\big(L^2\big(M, \Sigma M\big)\big).$$

3.1.13 Bemerkung. Für $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ gilt

$$\mu_j(|T|) = \sup_{\substack{V \subset \mathcal{H} \\ \dim V = j}} \inf_{\substack{\varphi \in V \\ \varphi \neq 0}} \frac{(|T|\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)},$$

wobei das Supremum angenommen wird für

$$V = \text{ Spann der Eigenvektoren zu } \mu_1(|T|), \dots, \mu_j(|T|).$$

Dort wird das Infimum vom Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert von $|T|$ angenommen und das ist $\mu_j(|T|)$, da das Spektrum monoton fallend notiert war.

Hieraus folgt für $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} \mu_j(|TB|) &\leq \|B\| \cdot \mu_j(|T|) \\ \mu_j(|BT|) &\leq \|B\| \cdot \mu_j(|T|). \end{aligned}$$

Also sind für $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ und $B \in \mathcal{L}(B)$ auch BT und $TB \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$. Somit ist $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ ein *beidseitiges Ideal* in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

3.1.14. Dixmier–Spur.

Um eine Verallgemeinerung der Spur zu finden, wollen wir die Reihe der Eigenwerte zum Konvergieren „zwingen". Wir suchen daher eine geeignete Verallgemeinerung des Konvergenzbegriffs (Stichwort für Kenner: *Ultrafilter*).

Für $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ ist i. Allg.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(|T|) = \infty.$$

[1] Die Spin–Struktur über M kann allerdings nicht aus $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ alleine rekonstruiert werden.
[2] Ein Operator heißt *kompakt*, wenn Bilder beschränkter Mengen relativ kompakt sind.

Allerdings ist für geeignete Konstanten C, C'

$$\frac{1}{\ln N}\sum_{j=1}^{N}\mu_j(|T|) \;\leq\; \frac{1}{\ln N}\sum_{j=1}^{N}\frac{C}{j} \leq C'.$$

Setze

$$\begin{aligned}\sigma_N\big(|T|\big) &:= \sum_{j=1}^{N}\mu_j(|T|)\\ \gamma_N\big(|T|\big) &:= \frac{\sigma_N(|T|)}{\ln N}\end{aligned}$$

3.1.15 Lemma. *Es gelten die Abschätzungen*

$$\sigma_N(|T_1|+|T_2|) \leq \sigma_N(|T_1|)+\sigma_N(|T_2|) \leq \sigma_{2N}(|T_1|+|T_2|).$$

Beweis.

a) Man sieht leicht, dass

$$\sigma_N(|T|) = \sup_{\substack{V\subset\mathcal{H}\\ \dim V=N}} \operatorname{tr}(P_V\circ|T|\circ P_V),$$

wobei $P_V : \mathcal{H}\to V$ die Orthonormalprojektion auf V ist. Dabei wird das Supremum angenommen vom Vektorraum, der von den Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\mu_1(|T|),\ldots,\mu_N(|T|)$ aufgespannt wird.

b) Sei V der Spann der Eigenvektoren zu $\mu_1\big(|T_1|+|T_2|\big),\ldots,\mu_N\big(|T_1|+|T_2|\big)$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \sigma_N\big(|T_1|+|T_2|\big) &= \operatorname{tr}\big(P_V\circ\big(|T_1|+|T_2|\big)\circ P_V\big)\\ &= \operatorname{tr}\big(P_V\circ|T_1|\circ P_V\big)+\operatorname{tr}\big(P_V\circ|T_2|\circ P_V\big)\\ &\leq \sigma_N\big(|T_1|\big)+\sigma_N\big(|T_2|\big).\end{aligned}$$

c) Sei V_i, $i=1,2$ der Spann der Eigenvektoren zu $\mu_1\big(|T_i|\big),\ldots,\mu_N\big(|T_i|\big)$. Wähle $V\subset\mathcal{H}$ mit $\dim V=2N$ und $V_1, V_2\subset V$ (ergänze die Summe V_1+V_2, sofern diese nicht direkt ist).

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \sigma_N\big(|T_1|\big)+\sigma_N\big(|T_2|\big) &= \operatorname{tr}\big(P_{V_1}\circ|T_1|\circ P_{V_1}\big)+\operatorname{tr}\big(P_{V_2}\circ|T_2|\circ P_{V_2}\big)\\ &\leq \operatorname{tr}\big(P_V\circ|T_1|\circ P_V\big)+\operatorname{tr}\big(P_V\circ|T_2|\circ P_V\big)\\ &= \operatorname{tr}\big(P_V\circ\big(|T_1|+|T_2|\big)\circ P_V\big)\\ &\leq \sigma_{2N}\big(|T_1|+|T_2|\big).\end{aligned}$$

□

3.1.16 Folgerung.

$$\gamma_N\big(|T_1|+|T_2|\big) \;\leq\; \gamma_N\big(|T_1|\big)+\gamma_N\big(|T_2|\big) \;\leq\; \underbrace{\frac{\ln(2N)}{\ln N}}_{1+\frac{\ln 2}{\ln N}\xrightarrow{N\to\infty}1}\;\gamma_{2N}\big(|T_1|+|T_2|\big)$$

Falls die Folgen (γ_N) *für* $N\to\infty$ *konvergieren, so folgt*

$$\lim_{N\to\infty}\gamma_N\big(|T_1|+|T_2|\big) = \lim_{N\to\infty}\gamma_N\big(|T_1|\big)+\lim_{N\to\infty}\gamma_N\big(|T_2|\big).$$

Wähle eine stetige Linearform $\omega : l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ auf dem Banachraum der beschränkten Folgen, so dass für alle $(a_N)_N \in l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ gilt:

1) $\omega\big((a_N)_N\big) = \lim\limits_{N\to\infty} a_N$, falls $(a_N)_N$ konvergiert,

2) $\omega\big((a_N)_N\big) \geq 0$, falls $a_N \geq 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$,

3) $\omega\big((a_{2N})_N\big) = \omega\big((a_N)\big)$.

Setze für $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und $T \geq 0$:

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) := \omega\Big(\big(\gamma_N(T)\big)_N\Big).$$

Dann gilt für alle selbstadjungierten und nicht negativen $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$:

$$\mathrm{Tr}_\omega(T_1 + T_2) = \mathrm{Tr}_\omega(T_1) + \mathrm{Tr}_\omega(T_2)$$
$$\mathrm{Tr}_\omega(aT) = a \cdot \mathrm{Tr}_\omega(T).$$

Nun kann Tr_ω in eindeutiger Weise linear auf ganz $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ fortgesetzt werden:

Man kann $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ in seinen selbstadjungierten Anteil T_1 und seinen anti–selbstadjungierten Anteil iT_2 zerlegen, so dass $T = T_1 + iT_2$ ist mit T_1, T_2 selbstadjungiert. Diese Zerlegung ist eindeutig. Sei also oBdA T selbstadjungiert. Zerlege dieses wiederum in $T = T_+ - T_-$ mit $T_\pm$ selbstadjungiert und $T_\pm \geq 0$. Setze sodann

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) := \mathrm{Tr}_\omega(T_+) - \mathrm{Tr}_\omega(T_-).$$

Tr_ω heißt *Dixmier–Spur*.

3.1.17 Beispiel. Die 1-Sphäre (der Länge 2π) $M = S^1 = \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ besitzt zwei Spin–Strukturen. Für die erste Spin–Struktur hat der Dirac–Operator die Eigenwerte k, $k \in \mathbb{Z}$, jeweils mit Multiplizität 1. Für die zweite Spin–Struktur hat der Dirac–Operator die Eigenwerte $k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, ebenfalls alle mit Multiplizität 1. Wir wählen die zweite Spin–Struktur, denn dann ist D invertierbar. Dann hat

$$T := |D|^{-1} \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}\big(L^2(S^1, \Sigma S^1)\big)$$

das Spektrum $\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} = \left(\frac{1}{j-\frac{1}{2}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, alle Eigenwerte mit Multiplizität 2.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\omega(|D|^{-1}) &= \omega\Big(\underbrace{\frac{2}{\ln 2N}\sum_{j=1}^{N}\frac{2}{2j-1}}_{\gamma_{2N}}\Big)_N = 2\lim_{N\to\infty}\Big(\frac{1}{\ln(2N)}\sum_{j=1}^{N}\frac{2}{2j-1}\Big)\\ &= 2.\end{aligned}$$

3.1.18. Satz (Connes). *Sei M eine kompakte riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit der Dimension n. Sei der Dirac–Operator D invertierbar. Dann gilt für $f \in C(M)$:*

$$\mathrm{Tr}_\omega\left(f \cdot |D|^{-n}\right) = c_1(n) \cdot \int_M f \,\mathrm{dvol},$$

wobei $c_1(n) := \frac{1}{n 2^{[n/2]-1}\Gamma(\frac{n}{2})\pi^{n/2}}$.

Ohne Beweis.

3.1.19. Nichtkommutative Integration. Ist $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ ein Spektraktripel mit invertierbarem D, so dass $|D|^{-n} \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$, so setze für alle $a \in \mathcal{A}$:

$$\int a := \frac{1}{c_1(n)} \operatorname{Tr}_\omega \left(a \cdot |D|^{-n}\right).$$

Bemerkung. Wir können unser Wörterbuch ergänzen, dass nun die Sprache der Geometrie übersetzt:

Geometrie	Algebra
kompakte riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit	Spektraltripel
Volumenelement	$\lvert D\rvert^{-n}$
Integral	Tr_ω

3.1.20 Definition. Ein Spektraltripel $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ heißt *n–summierbar*, $n \geq 0$, falls D invertierbar ist und $|D|^{-n} \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$. Dann existiert obiges Integral auf $\mathcal{A}$.

3.1.21 Beispiel. 1) Das kanonische Spektraltripel einer kompakten riemannschen Spin–Mannigfaltigkeit der Dimension n ist n–summierbar.

2) Das Spektraltripel

$$\mathcal{A} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 3.1.6 ist 0–summierbar, da $\mathcal{H}$ endlichdimensional ist.

3.1.22 Definition. Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ ein n–summierbares Spektraltripel. Eine *reelle Struktur* ist eine antilineare Isometrie

$$J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

mit den Eigenschaften

1) $J^2 = \varepsilon(n) \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, wobei $\varepsilon(n) := \begin{cases} 1, & n \equiv 0, 1, 6, 7 \mod 8, \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$

2) $JD = \varepsilon'(n) DJ$, wobei $\varepsilon'(n) := \begin{cases} 1, & n \equiv 0, 2, 3, 4, 6, 7 \mod 8, \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$

3) $[a, b^0] = 0$ für alle a, $b \in \mathcal{A}$, wobei $b^0 := Jb^*J^*$.

4) $\big[[D, a], b^0\big] = 0$ für alle a, $b \in \mathcal{A}$, wobei wieder $b^0 := Jb^*J^*$.

Trägt $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ eine Graduierung Γ, so fordert man ferner

5) $J\Gamma = i^n \Gamma J$.

3.1.23 Beispiel. Die Klassifikation der reellen Clifford–Algebren zeigt, dass es für das kanonische Spektraltripel einer kompakten riemannschen Spin–Mannigfaltigkeit ein solches J gibt, induziert durch einen antilinearen Vektorbündelisomorphismus auf ΣM. Dann ist $b^0 = b$. J wird in der Physik auch *Ladungskonjugation* genannt.

3.1.24. Produkte von Spektraltripeln

Seien $(\mathcal{A}_1, \mathcal{H}_1, D_, \Gamma_1)$ und $(\mathcal{A}_2, \mathcal{H}_2, D_2)$ Spektraltripel, das erste mit einer Graduierung Γ_1. Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{H} &:= \mathcal{H}_1 \overline{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2 \\ D &= D_1 \otimes \mathrm{id} + \Gamma_1 \otimes D_2, \end{aligned}$$

wobei $\overline{\otimes}_{\mathbb{C}}$ das Tensorprodukt im Sinne von Hilberträumen sei, d.h. $\mathcal{H}$ ist die Vervollständigung des algebraischen Tensorproduktes $\mathcal{H}_1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2$. Dann bildet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ ein Spektraltripel. Es gilt

$$D^2 = D_1^2 \otimes \mathrm{id} + D_1 \Gamma_1 \otimes D_2 + \Gamma_1 D_1 \otimes D_2 + \Gamma_1^2 \otimes D_2^2 = D_1^2 \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes D_2^2.$$

3.1.25 Übung. Zeige: Sind $(\mathcal{A}_i, \mathcal{H}_i, D_i)$ n_i–summierbar, $i = 1, 2$, so ist $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ $(n_1 + n_2)$–summierbar.

3.1.26. Äquivalenz von Spektraltripeln

Seien $(\mathcal{A}_1, \mathcal{H}_1, D_1)$ und $(\mathcal{A}_1, \mathcal{H}_2, D_2)$ Spektraltripel. Sie heißen *äquivalent*, falls es einen $*$–Isomorphismus $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ und eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ gibt, so dass

1) $UaU^* = \varphi(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}_1$ und
2) $UD_1U^* = D_2$.

Tragen die Spektraltripel Graduierungen Γ_1 bzw. Γ_2, so fordere ferner

3) $U\Gamma_1U^* = \Gamma_2$.

Tragen sie reelle Strukturen J_1 bzw. J_2, so fordere

4) $UJ_1U^* = J_2$.

3.2 Differentialformen

3.2.1. Generalvoraussetzung. A sei eine assoziative $\mathbb{C}$–Algebra mit Eins.

3.2.2. Universelle 0– und 1–Formen.

Den Fall kanonischer Spektraltripel im Hinterkopf behaltend setzen wir:

$$\Omega^0 A := A.$$

Sei $\mu : A \otimes_{\mathbb{C}} A \to A, \quad \mu(a \otimes_{\mathbb{C}} b) := a \cdot b$. Setze

$$\Omega^1 A := \ker \mu \subset A \otimes_{\mathbb{C}} A.$$

$\Omega^0 A = A$ ist in natürlicher Weise ein A–Bimodul. Für $\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i \in \Omega^1 A$, d.h. $\sum_i a_i \cdot b_i = 0 \in A$, gilt:

$$\begin{aligned} \mu\Big(\Big(\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i\Big) \cdot c\Big) &= \mu\Big(\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i \cdot c\Big) = \sum_i a_i \cdot (b_i \cdot c) = \Big(\sum_i a_i \cdot b_i\Big) \cdot c \\ &= 0 \cdot c = 0. \end{aligned}$$

Aus der analogen Überlegung für die kanonische A–Linksmodulstruktur auf $A \otimes_{\mathbb{C}} A$ folgt, dass $\Omega^1 A$ ebenfalls ein A–Bimodul ist.

Definiere (im Hinterkopf: Analogon zur äußeren Ableitung)

$$\delta : \Omega^0 A \to \Omega^1 A, \qquad \delta a := 1 \otimes_{\mathbb{C}} a - a \otimes_{\mathbb{C}} 1.$$

3.2.3 Lemma. *δ ist $\mathbb{C}$–linear und erfüllt*

$$\delta(a \cdot b) = a \cdot \delta b + \delta a \cdot b \qquad \textit{und} \qquad \delta 1 = 0.$$

Beweis. Die $\mathbb{C}$–Linearität ist klar. δ ist eine Derivation, denn

$$\begin{aligned} a \cdot \delta b + \delta a \cdot b &= a(1 \otimes_{\mathbb{C}} b - b \otimes_{\mathbb{C}} 1) + (1 \otimes_{\mathbb{C}} a - a \otimes_{\mathbb{C}} 1)b \\ &= a \otimes_{\mathbb{C}} b - a \cdot b \otimes_{\mathbb{C}} 1 + 1 \otimes_{\mathbb{C}} a \cdot b - a \otimes_{\mathbb{C}} b \\ &= \delta(a \cdot b) \end{aligned}$$

Wie für alle Derivationen auf Algebren mit Eins (und mit Char. $\neq 2$) ist $\delta 1 = 0$, denn

$$\delta 1 = \delta(1 \cdot 1) = 1 \cdot \delta 1 + \delta 1 \cdot 1 = 2 \cdot \delta 1$$

□

3.2.4 Lemma.

$$\Omega^1 A = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \delta b_i \,\Big|\, a_i,\, b_i \in A,\, n \in \mathbb{N}_0 \Big\}$$

Beweis.

„$\supset$“ klar, da $\delta(A) \subset \Omega^1 A$ und $\Omega^1 A$ ist A–Linksmodul.

„$\subset$“ Sei $\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i \in \Omega^1 A$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i = \sum_i a_i (1 \otimes_{\mathbb{C}} b_i) &= \sum_i a_i (\delta b_i + b_i \otimes_{\mathbb{C}} 1) \\ &= \sum_i a_i \cdot \delta b_i + \underbrace{\sum_i a_i \cdot b_i}_{=0} \otimes_{\mathbb{C}} 1 \\ &= \sum_i a_i \cdot \delta b_i . \end{aligned}$$

□

3.2.5. Proposition (Universelle Eigenschaft von $\Omega^1 A$). *Sei M ein A–Bimodul und sei $\Delta : A \to M$ eine $\mathbb{C}$–lineare Abbildung mit $\Delta(a \cdot b) = \Delta a \cdot b + a \cdot \Delta b$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Bimodul–Homomorphismus $\varrho : \Omega^1 A \to M$, so dass*

$$\begin{tikzcd} \Omega^1 A \arrow[dr, dashed, "\varrho"] & \\ A \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\Delta"] & M \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis.

a) Eindeutigkeit. Sei $\sum_i a_i \cdot \delta b_i \in \Omega^1 A$. Dann wird ϱ durch Δ festgelegt, denn

$$\varrho\Big(\sum_i a_i \cdot \delta b_i \Big) = \sum_i a_i \cdot \varrho(\delta b_i) = \sum_i a_i \cdot \Delta b_i .$$

b) Existenz. Definiere $\mathbb{C}$–lineare Abbildung

$$\varrho_1 : A \otimes_{\mathbb{C}} A \to M \quad \text{durch} \quad \varrho_1(a \otimes_{\mathbb{C}} b) := a \cdot \Delta b$$

und setze

$$\varrho := \varrho_1|_{\Omega^1 A} : \Omega^1 A \to M.$$

Dann kommutiert das Diagramm, denn

$$\varrho(\delta a) = \varrho(1 \otimes_{\mathbb{C}} a - a \otimes_{\mathbb{C}} 1) = 1 \cdot \Delta a - a \cdot \Delta 1 = \Delta a,$$

da Δ eine Derivation ist und somit $\Delta 1 = 0$. Um zu zeigen, dass ϱ ein Bimodul–Homomorphismus ist, müssen wir noch die A–Bilinearität zeigen:

Sei $\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i \in \Omega^1 A$ und $c \in A$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varrho\Big(\Big(\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i\Big) \cdot c\Big) &= \varrho\Big(\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i \cdot c\Big) \\
&= \sum_i a_i \cdot \Delta(b_i \cdot c) \\
&= \sum_i a_i \cdot (\Delta b_i \cdot c + b_i \cdot \Delta c) \\
&= \varrho\Big(\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i\Big) \cdot c + \underbrace{\sum_i a_i \cdot b_i}_{=0} \cdot \Delta c
\end{aligned}$$

für die A–Rechtsmodulstruktur und für die A–Linksmodulstruktur gilt:

$$\begin{aligned}
\varrho\Big(c \cdot \Big(\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i\Big)\Big) &= \varrho\Big(\sum_i c \cdot a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i\Big) = \sum_i c \cdot a_i \cdot \Delta b_i = c \cdot \sum_i a_i \cdot \Delta b_i \\
&= c \cdot \varrho\Big(\sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i\Big).
\end{aligned}$$

□

3.2.6 Lemma. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus*

$$\begin{aligned}
\underbrace{(A \otimes_{\mathbb{C}} A) \otimes_A (A \otimes_{\mathbb{C}} A) \otimes_A \cdots \otimes_A (A \otimes_{\mathbb{C}} A)}_{n-mal} &\to \underbrace{A \otimes_{\mathbb{C}} A \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} A}_{n+1-mal} \\
(a_1 \otimes_{\mathbb{C}} b_1) \otimes_A \cdots \otimes_A (a_n \otimes_{\mathbb{C}} b_n) &\mapsto a_1 \otimes_{\mathbb{C}} b_1 \cdot a_2 \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} b_{n-1} \cdot a_n \otimes_{\mathbb{C}} b_n.
\end{aligned}$$

Beweis. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$c_1 \otimes_{\mathbb{C}} c_2 \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} c_{n+1} \mapsto (c_1 \otimes_{\mathbb{C}} c_2) \otimes_A (1 \otimes_{\mathbb{C}} c_3) \otimes_A \cdots \otimes_A (1 \otimes_{\mathbb{C}} c_{n+1}).$$

□

3.2.7 Definition. Setze

$$\Omega^n A := \underbrace{\Omega^1 A \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1 A}_{n\text{–mal}} \hookrightarrow \underbrace{A \otimes_{\mathbb{C}} A \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} A}_{n+1\text{–mal}}$$

Definiere

$$\delta : \Omega^1 A \to \Omega^2 A \quad \text{für} \quad \omega = \sum_i a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i = \sum_i a_i \cdot \delta b_i \in \Omega^1 A$$

durch

$$\begin{aligned}\delta\omega :&= \sum_i \delta a_i \otimes_A \delta b_i \\ &= \sum_i (1 \otimes_{\mathbb{C}} a_i - a_i \otimes_{\mathbb{C}} 1) \otimes_A (1 \otimes_{\mathbb{C}} b_i - b_i \otimes_{\mathbb{C}} 1) \\ &\widehat{=} \sum_i (1 \otimes_{\mathbb{C}} a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i - \underbrace{1 \otimes_{\mathbb{C}} a_i \cdot b_i \otimes_{\mathbb{C}} 1}_{\sum_i a_i \cdot b_i = 0} - a_i \otimes_{\mathbb{C}} 1 \otimes_{\mathbb{C}} b_i + a_i \otimes_{\mathbb{C}} b_i \otimes_{\mathbb{C}} 1) \\ &= (m_1 - m_2 + m_3)\omega,\end{aligned}$$

wobei $m_i : A \otimes_{\mathbb{C}} A \to A \otimes_{\mathbb{C}} A \otimes_{\mathbb{C}} A$ durch tensorieren mit 1 an der i–ten Stelle gegeben ist.

3.2.8 Bemerkung. $\delta^2 : \Omega^0 A \to \Omega^2 A$ ist die Nullabbildung, denn

$$\delta^2 a = \delta(1 \cdot \delta a) = \underbrace{\delta 1}_{=0} \otimes_A \delta a = 0.$$

3.2.9 Definition. Wir setzen δ für Formen höheren Grades mit Hilfe der Leibnitz–Regel fort:

$$\begin{aligned}\delta : \Omega^n A &\to \Omega^{n+1} A \\ \omega_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \omega_n &\mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \omega_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \delta\omega_i \otimes_A \cdots \otimes_A \omega_n.\end{aligned}$$

3.2.10 Bemerkung. Man sieht leicht, dass $\delta^2 = 0$ für alle Grade.

3.2.11 Definition. Die Algebra

$$\Omega^* A := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n A$$

zusammen mit den δ's heißt *universelle Algebra der Formen über A*.

3.2.12 Übung. Berechne die Kohomologie des Komplexes

$$0 \longrightarrow \Omega^0 A \xrightarrow{\delta} \Omega^1 A \xrightarrow{\delta} \Omega^2 A \xrightarrow{\delta} \cdots .$$

3.2.13 Lemma. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\Omega^n A = \Big\{ \sum_i b_{0i} \cdot \delta b_{1i} \otimes_A \cdots \otimes_A \delta b_{ni} \,\Big|\, b_{ji} \in A \Big\}.$$

Beweis. Induktion über n.

$n = 1$: Haben wir in Lemma 3.2.4 gezeigt.

$n \to n+1$: Die Inklusion „$\supset$“ ist klar. Zeige die Inklusion „$\subset$“:

Betrachte $\omega_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \omega_{n+1} \in \Omega^{n+1} A$. Nach Induktionsannahme können wir $\omega_2 \otimes_A \cdots \otimes_A \omega_{n+1} = \sum_i c_i \cdot \delta e_{1i} \otimes_A \cdots \otimes_A \delta e_{ni}$ und $\omega_1 = f_j \cdot \delta g_j$ schreiben.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\omega_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \omega_{n+1} &= \sum_{i,j} f_j \cdot \delta g_j \otimes_A c_i \cdot \delta e_{1i} \otimes_A \cdots \otimes_A \delta e_{ni} \\
&= \sum_{i,j} f_j \cdot \delta g_j \cdot c_i \otimes_A \delta e_{1i} \otimes_A \cdots \otimes_A \delta e_{ni} \\
&= \sum_{i,j} f_j \cdot \big(\delta(g_j \cdot c_j) - g_j \cdot \delta c_i\big) \otimes_A \delta e_{1i} \otimes_A \cdots \otimes_A \delta e_{ni} \\
&= \sum_{i,j} \big(f_j \cdot \delta(g_j \cdot c_i) \otimes_A \delta e_{1i} \otimes_A \cdots \otimes_A \delta e_{ni} + \\
&\qquad - f_j \cdot g_j \cdot \delta c_i \otimes_A \delta e_{1i} \otimes_A \cdots \otimes_A \delta e_{ni}\big).
\end{aligned}$$

□

3.2.14. Proposition (Universelle Eigenschaft von $\Omega^* A$). *Sei (Γ^*, Δ) eine graduierte Differentialalgebra, $\Gamma^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^n$, und sei $\varrho : A \to \Gamma^0$ ein einserhaltender Algebrahomomorphismus. Dann existiert ein eindeutiger graduierter Algebrahomomorphismus $\widetilde{\varrho} : \Omega^* A \to \Gamma^*$, so dass $\widetilde{\varrho}^0 = \varrho$ und*

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^n A & \xrightarrow{\widetilde{\varrho}^n} & \Gamma^n \\
\big\downarrow \delta & & \big\downarrow \Delta \\
\Omega^{n+1} A & \xrightarrow{\widetilde{\varrho}^{n+1}} & \Gamma^{n+1}
\end{array}$$

kommutiert für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Beweis.

a) Eindeutigkeit.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varrho}^n\Big(\sum_i b_{0i} \cdot \delta b_{1i} \otimes_A \cdots \otimes_A \delta b_{ni}\Big) &= \sum_i \widetilde{\varrho}^0(b_{0i}) \cdot \widetilde{\varrho}^1(\delta b_{1i}) \cdots \widetilde{\varrho}^1(\delta b_{ni}) \\
&= \sum_i \varrho(b_{0i}) \cdot \Delta(\varrho(b_{1i})) \cdots \Delta(\varrho(b_{ni})).
\end{aligned}$$

b) Existenz. Benutze diese Formel zur Definition von $\widetilde{\varrho}$ und weise die Wohldefiniertheit sowie die gewünschten Eigenschaften nach.

□

3.2.15 Bemerkung. Ist A eine Prä–C^*–Algebra, so erbt $\Omega^* A$ eine Involution $*$ vermöge

$$\begin{aligned}
(\delta a)^* &:= -\delta(a^*) \\
(a_0 \delta a_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \delta a_n)^* &:= \delta(a_n)^* \cdots (\delta a_1)^* a_0^*.
\end{aligned}$$

Schreibe für das Produkt „$\otimes_A$“ in $\Omega^* A$ von nun an einfach „$\cdot$“.

3.2.16 Beispiel. Sei M ein kompakter Hausdorff–Raum, $A = C(M)$.

$$\begin{aligned}
\underbrace{A \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} A}_{n+1\text{–mal}} &\hookrightarrow C(\underbrace{M \times \cdots \times M}_{n+1\text{–mal}}) \\
f_1 \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} f_{n+1} &\mapsto \big((x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{n+1}(x_{n+1})\big).
\end{aligned}$$

Für $f \in A$ ist

$$(\delta f)(x_1, x_2) = (1 \otimes_{\mathbb{C}} f - f \otimes_{\mathbb{C}} 1)(x_1, x_2) = f(x_2) - f(x_1).$$

Also verschwinden alle Funktionen der Form $\sum_j g_j \delta f_j$ auf der Diagonalen $\{(x, x) \in M \times M \,|\, x \in M\}$.

Um $\delta : \Omega^1 A \to \Omega^2 A$ zu berechnen, schreibe

$$f(x_1, x_2) = \sum_i (f_i \otimes_{\mathbb{C}} g_i)(x_1, x_2) = \sum_i f_i(x_1) g_i(x_2)$$

mit $\sum_i f_i g_i = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\delta f)(x_1, x_2, x_3) &= \left(\delta \sum_i f_i \delta g_i\right)(x_1, x_2, x_3) \\
&= \left(\sum_i \delta f_i \otimes_A \delta g_i\right)(x_1, x_2, x_3) \\
&= \sum_i (\delta f_i)(x_1, x_2)(\delta g_i)(x_2, x_3) \\
&= \sum_i (f_i(x_2) - f_i(x_1))(g_i(x_3) - g_i(x_2)) \\
&= \sum_i (f_i(x_2) g_i(x_3) - \underbrace{f_i(x_2) g_i(x_2)}_{\text{liefert } 0} - f_i(x_1) g_i(x_3) + f_i(x_1) g_i(x_2)) \\
&= f(x_2, x_3) - f(x_1, x_3) + f(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

δ für höhere Grade: Sei $f = F_1 \otimes_A \cdots \otimes_A F_n$ mit $F_i \in \Omega^1 A$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&(\delta f)(x_1, \ldots, x_{n+2}) = \\
&= \delta(F_1 \otimes_A \cdots \otimes_A F_n)(x_1, \ldots, x_{n+2}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} F_1 \otimes_A \cdots \otimes_A \delta F_i \otimes_A \cdots \otimes_A F_n(x_1, \ldots, x_{n+2}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} F_1(x_1, x_2) F_2(x_2, x_3) \cdots F_{i-1}(x_{i-1}, x_i) \cdot \\
&\quad \cdot \big(F_i(x_{i+1}, x_{i+2}) - F_i(x_i, x_{i+2} + F_i(x_i, x_{i+1})\big) F_{i+1}(x_{i+2}, x_{i+3}) \cdots F_n(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} F_1(x_1, x_2) \cdots F_{i-1}(x_{i-1}, x_i) F_i(x_{i+1}, x_{i+2}) F_{i+1}(x_{i+2}, x_{i+3}) \cdots F_n(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} F_1(x_1, x_2) \cdots F_{i-1}(x_{i-1}, x_i) F_i(x_i, x_{i+2}) F_{i+1}(x_{i+2}, x_{i+3}) \cdots F_n(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} F_1(x_1, x_2) \cdots F_{i-1}(x_{i-1}, x_i) F_i(x_i, x_{i+1}) F_{i+1}(x_{i+2}, x_{i+3}) \cdots F_n(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&= F_1(x_2, x_3) \cdots F_n(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} F_1(x_1, x_2) \cdots F_{i-1}(x_{i-1}, x_i) F_i(x_i, x_{i+2}) F_{i+1}(x_{i+2}, x_{i+3}) \cdots F_n(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + (-1)^{n+1} F_1(x_1, x_2) \cdots F_n(x_n, x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(x_1, \ldots, \widehat{x}_{i+1}, \ldots, x_{n+2})
\end{aligned}$$

Das Produkt $\Omega^n A \otimes_A \Omega^m A \to \Omega^{n+m} A$ ist gegeben durch

$$(f \cdot h)(x_1, \ldots, x_{n+m+1}) = f(x_1, \ldots, x_{n+1}) \cdot h(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m+1})$$

Die A–Bimodulstruktur ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(gf)(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= g(x_1) f(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\ (fg)(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= f(x_1, \ldots, x_{n+1}) g(x_{n+1}) \\ &= g(x_{n+1}) f(x_1, \ldots, x_{n+1}).\end{aligned}$$

für $g \in A$ und $f \in \Omega^n A$. Man beachte, dass selbst in diesem einfachsten Fall die Links- und Rechtsmodulstruktur verschieden sind.

3.2.17. Universelle Differentialformen und Spektraltripel.

Sei nun $(A, \mathcal{H}, D)$ ein Spektraltripel. Dann ist $\Delta : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\Delta a := [D, a]$, eine Derivation, denn

$$\Delta(ab) = D(ab) - abD = [D, a]b + aDb - \big(a[b, D] + aDb\big) = (\Delta a)b + a\Delta b.$$

Nach der universellen Eigenschaft von $\Omega^1 A$ (Proposition 3.2.5) existiert ein eindeutig bestimmter Bimodulhomomorphismus

$$\pi^1 : \Omega^1 A \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad \text{mit} \quad \pi^1 \circ \delta = \Delta.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \Omega^1 A \arrow[dl, dashed, "\exists! \pi^1"] \\ \mathcal{L}(\mathcal{H}) & \end{tikzcd}$$

Wir setzen π^1 multiplikativ auf $\Omega^* A$ fort, d.h.

$$\begin{aligned}\pi^n &: \Omega^n A \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \pi^n(\omega_1 \cdots \omega_n) &:= \pi^1(\omega_1) \cdots \pi^1(\omega_n), \qquad \text{wobei } \omega_i \in \Omega^1 A.\end{aligned}$$

Der Homomorphismus

$$\pi : \Omega^* A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

ist gegeben durch

$$\pi^n\Big(\sum_i a_{0i} \cdot \delta a_{1i} \cdots \delta a_{ni}\Big) = \sum_i a_{0i}[D, a_{1i}] \cdots [D, a_{ni}].$$

3.2.18. Das Müllideal. (engl. „junk ideal“)

Setze für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} J_0^n &:= \ker\big(\pi|_{\Omega^n A} : \Omega^n A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})\big), \\ J_0 &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty} J_0^n, \\ J &:= J_0 + \delta J_0, \qquad \text{das } \textit{Müllideal}, \\ J^k &:= J_0^k + \delta J_0^{k-1}. \end{aligned}$$

3.2.19 Lemma. *J ist ein zweiseitiges Ideal in $\Omega^* A$ mit $\delta J \subset J$.*

Beweis.

a) $\delta J = \delta J_0 + \underbrace{\delta^2 J_0}_{=0} = \delta J_0 \subset J$.

b) Sei $\omega = \omega_1 + \delta\omega_2 \in J$, $\omega_1 \in J_0^n$, $\omega_2 \in J_0^{n-1}$. Sei ferner $\eta \in \Omega^m A$.

$$\begin{aligned}\omega \cdot \eta &= \omega_1 \cdot \eta + \delta\omega_2 \cdot \eta \\ &= \omega_1 \cdot \eta + \delta(\omega_2 \cdot \eta) - (-1)^{n-1}\omega_2 \cdot \delta\eta \\ &= \underbrace{(\omega_1 \cdot \eta + (-1)^n \omega_2 \cdot \delta\eta)}_{\substack{\Cap \\ J_0^{n+m}}} + \delta(\underbrace{\omega_2 \cdot \eta}_{\substack{\Cap \\ J_0^{n+m-1}}}) \in J^{n+m}.\end{aligned}$$

Analog zeigt man $\eta \cdot \omega \in J^{n+m}$.

□

3.2.20 Definition. Die graduierte Differentialalgebra

$$\Omega_D^* A := \Omega^* A \big/ J$$

heißt *Algebra der Connes–Formen für das Spektraltripel* $(A, \mathcal{H}, D)$.

Wegen $\delta J \subset J$ induziert δ eine Abbildung

$$d : \Omega_D^n A \to \Omega_D^{n+1} A, \qquad d\big([\omega]\big) := [\delta\omega].$$

d ist eine Derivation und $d^2 = 0$.

3.2.21 Bemerkung. Sei $(A, \mathcal{H}, D)$ ein Spektraltripel. OBdA sei die Darstellung von A auf $\mathcal{H}$ treu, d.h. $A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sei injektiv (sonst ersetze A durch $A \big/ \ker(A \to \mathcal{L}(\mathcal{H}))$).

⊛ 0–Formen.

$$\begin{aligned} J^0 &= J_0^0 = \ker(A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})) = 0 \\ \Omega_D^0 A &= \Omega^0 A = A. \end{aligned}$$

⊛ 1–Formen.

$$\begin{aligned} J^1 &= J_0^1 + \delta J_0^0 = J_0^1 = \ker(\pi^1 : \Omega^1 A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})) \\ \Omega_D^1 A &= \Omega^1 A \big/ \ker \pi^1 \cong \pi(\Omega^1 A) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ &= \Big\{ \sum_i a_{0i}[D, a_{1i}] \,\Big|\, a_{ji} \in A \Big\}. \end{aligned}$$

⊛ 2–Formen.

$$\begin{aligned} J_0^2 &= \ker(\pi^2 : \Omega^2 A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})) \\ \Omega_D^2 A &\cong \pi(\Omega^2 A) \big/ \pi(\delta J_0^1) \\ &= \frac{\big\{ \sum_i a_{0i}[D, a_{1i}][D, a_{2i}] \,\big|\, a_{ji} \in A \big\}}{\big\{ \sum_i [D, b_{0i}][D, b_{1i}] \,\big|\, b_{ji} \in A,\ \sum_i b_{0i}[D, b_{1i}] = 0 \big\}} \end{aligned}$$

⊛ n–Formen.

$$\begin{aligned} \Omega_D^n A &\cong \pi(\Omega^n A) \big/ \pi(\delta J_0^{n-1}) \\ &\cong \frac{\big\{ \sum_i a_{0i}[D, a_{1i}] \cdots [D, a_{ni}] \,\big|\, a_{ji} \in A \big\}}{\big\{ \sum_i [D, b_{0i}] \cdots [D, b_{n-1,i}] \,\big|\, b_{ji} \in A,\ \sum_i b_{0i}[D, b_{1i}] \cdots [D, b_{n-1,i}] = 0 \big\}} \end{aligned}$$

3.2.22 Satz. *Sei M eine kompakte riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit. Sei* $(A,\mathcal{H},D) = (C^\infty(M), L^2(M,\Sigma M), \mathrm{Dirac})$ *das kanonische Spektraltripel von M. Dann ist*

$$(\Omega_D^* A, d) \cong (\Omega^*(M), d).$$

Beweisskizze.

a) Die Darstellung der Cliffordalgebra $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$ auf Σ_n, $\gamma : \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{End}(\Sigma_n)$ ist injektiv und liefert die Cliffordmultiplikation

$$C^\infty(M, \mathbb{C}\mathrm{l}(TM)) \to C^\infty(M, \mathrm{End}(\Sigma M)).$$

Setze

$$\mathbb{C}\mathrm{l}^m(\mathbb{R}^n) := \Big\{ \sum_i v_{i1} \cdot \ldots \cdot v_{im_i} \,\Big|\, v_{ij} \in \mathbb{R}^n,\, m_i \le m,\, m_i \equiv m \mod 2 \Big\}.$$

Dann gilt

- ⊛ $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{m=0}^n \mathbb{C}\mathrm{l}^m(\mathbb{R}^n)$,
- ⊛ $\mathbb{C}\mathrm{l}^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{C}\mathrm{l}^{m+2}(\mathbb{R}^n)$,
- ⊛ $\mathbb{C}\mathrm{l}^{m_1}(\mathbb{R}^n) \cdot \mathbb{C}\mathrm{l}^{m_2}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{C}\mathrm{l}^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n)$.

Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathrm{l}^m(\mathbb{R}^n) \big/ \mathbb{C}\mathrm{l}^{m-2}(\mathbb{R}^n) &\xrightarrow{\cong} \Lambda_{\mathbb{C}}^m \mathbb{R}^n \cong \Lambda_{\mathbb{C}}^m((\mathbb{R}^n)^*) \\ [v_1 \cdot \ldots \cdot v_m] &\longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_m. \end{aligned}$$

b) Für den „Zähler“ des Quotienten $\Omega_D^m C^\infty(M)$ gilt:

$$\begin{aligned} \pi\big(\Omega^m C^\infty(M)\big) &= \Big\{ \sum_i a_{0i}[D, a_{1i}] \cdots [D, a_{mi}] \,\Big|\, a_{ji} \in C^\infty(M) \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_i a_{0i}\, \mathrm{grad}(a_{1i}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{grad}(a_{mi}) \,\Big|\, a_{ji} \in C^\infty(M) \Big\} \\ &= C^\infty\big(M, \mathbb{C}\mathrm{l}^m(TM)\big). \end{aligned}$$

c) Es bleibt noch zu zeigen, dass

$$\pi(\delta J_0^{m-1}) = C^\infty\big(M, \mathbb{C}\mathrm{l}^{m-2}(TM)\big).$$

Für den Fall $m = 2$ geben wir dies als Übung.

⊟

3.2.23 Übung. Zeige: $\pi(\delta J_0^1) = C^\infty(M)$.

3.2.24 Bemerkung. (Verallgemeinerung des L^2–Skalarproduktes für Connes–Formen) Sei $(A, \mathcal{H}, D)$ ein n–summierbares Spektraltripel, d.h. wir können wie in 3.1.19 ein Integral für $a \in A$ erklären, wobei $|D|^{-n} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert und dem Volumenelement entspricht. Für T_1, $T_2 \in \Omega^m A$ betrachte nun das Funktional

$$\mathrm{Tr}_\omega\left(\pi(T_1^*)|D|^{-n}\pi(T_2)\right).$$

Man kann zeigen, dass für das kanonische Spektraltripel einer kompakten n–dimensionalen riemannschen Spin–Mannigfaltigkeit M unter dem Isomorphismus

$$\pi(\Omega^m A) \cong \bigoplus_{0 \le j \le \frac{m}{2}} \Omega^{m-2j}(M)$$

gilt:

$$\operatorname{Tr}_\omega\left(\pi(T_1^*)|D|^{-n}\pi(T_2)\right) = \sum_{0\le j\le \frac{m}{2}} c(n, m-2j)\cdot \int_M \langle T_1^{(m-2j)}, T_2^{(m-2j)}\rangle \,\mathrm{dvol},$$

wobei $T_i^{(k)}$ der k-Formenanteil von T_i ist.

3.3 Eichtheorie

3.3.1 Definition. Sei $(A, \mathcal{H}, D)$ ein n–summierbares Spektraltripel. Sei E ein endlich erzeugter projektiver A–Rechtsmodul von A. Ein *Zusammenhang* ist eine $\mathbb{C}$–lineare Abbildung

$$\nabla : E \to E \otimes_A \Omega_D^1 A,$$

so dass für alle $\eta \in E$ und alle $a \in A$

$$\nabla(\eta\cdot a) = \nabla\eta\cdot a + \eta\otimes_A da.$$

3.3.2 Definition. Eine *hermitesche Struktur auf E* ist eine $\mathbb{C}$–sesquilineare Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to A$$

mit den Eigenschaften

1) $\langle\eta\cdot a, \xi\cdot b\rangle = a^*\langle\eta,\xi\rangle b$

2) $\langle\eta,\xi\rangle^* = \langle\xi,\eta\rangle$

3) $\langle\eta,\eta\rangle \ge 0$, d.h. $\langle\eta,\eta\rangle = a^*a$ für ein $a\in A$.

4) $\langle\eta,\eta\rangle = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$.

3.3.3 Definition. Ein Zusammenhang ∇ heißt *metrisch für $\langle\cdot,\cdot\rangle$*, falls

$$d\langle\xi,\eta\rangle = \langle\nabla\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\nabla\eta\rangle,$$

wobei die hermitesche Struktur folgendermaßen fortzusetzen ist:

$$\begin{aligned}
\langle\cdot,\cdot\rangle &: \left(E\otimes_A \Omega_D^1 A\right)\times E \to \Omega_D^1 A, & \langle\eta\otimes_A\omega,\xi\rangle &:= -\omega^*\cdot\langle\eta,\xi\rangle\\
\langle\cdot,\cdot\rangle &: E\times\left(E\otimes_A \Omega_D^1 A\right) \to \Omega_D^1 A, & \langle\eta,\xi\otimes_A\omega\rangle &:= \langle\eta,\xi\rangle\cdot\omega.
\end{aligned}$$

3.3.4 Definition. Sei ∇ ein Zusammenhang auf E. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\nabla^1 : E\otimes_A\Omega_D^1 A &\to E\otimes_A \Omega_D^2 A,\\
\nabla^1(\eta\otimes_A\omega) &:= \underbrace{\underbrace{\nabla\eta}_{\in\, E\otimes_A\Omega_D^1 A}\cdot\underbrace{\omega}_{\in\,\Omega_D^1 A}}_{\in\, E\otimes_A\Omega_D^2 A} + \eta\otimes_A d\omega,
\end{aligned}$$

wobei $\nabla\eta\cdot\omega$ zu einem Element aus $E\otimes_A\Omega_D^2 A$ wird, indem man den $\Omega_D^1 A$–Anteil von $\nabla\eta\in E\otimes_A\Omega_D^1 A$ mit $\omega\in\Omega_D^1 A$ multipliziert im Sinne von Connes–Formen.

Dann heißt

$$\Omega : E\to E\otimes_A\Omega_D^2 A, \qquad \Omega := \nabla^1\circ\nabla,$$

Krümmung von ∇.

3.3.5 Bemerkung. Man zeigt, dass es ein $F \in \Omega_D^2 A$ gibt mit

$$\Omega(\eta) = \eta \otimes_A F.$$

3.3.6. Yang–Mills–Funktional.

$$\mathrm{YM}(\nabla) := \mathrm{Tr}_\omega \left(F^* |D|^{-n} F \right)$$

3.3.7 Beispiel. Wir betrachten wieder den „einfachsten nichtkommutativen Fall“ aus Beispiel 3.1.6 sowie dessen Ergänzungen in 3.1.9 und 3.1.21.2, d.h. es sei

$$\begin{aligned} &Y = \{1,2\}, \quad A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \\ &D = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } 0 \neq M \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2). \end{aligned}$$

Sei nun $E = A$ der zu betrachtende freie Modul vom Rang 1. Sei $e := (1,0) \in A$. Dann ist e, $1-e$ eine Basis von $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Mit Lemma 3.2.4 folgt, dass $e \cdot \delta e$, $(1-e) \cdot \delta e$ eine Basis von $\Omega^1 A$ bildet. Für $a = (a_1, a_2) \in A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ gilt damit

$$\delta a = \delta(a_1 e, a_2(1-e)) = a_1 \delta e - a_2 \delta e = \Delta a \cdot \delta e,$$

wobei $\Delta a := a_1 - a_2$.

Diese Eigenschaften der universellen Formen übertragen sich auf die Connes–Formen (mit d anstelle δ), denn für alle $\eta = \lambda e \cdot \delta e + \mu(1-e) \cdot \delta e \in \Omega^1 A$, λ, $\mu \in \mathbb{C}$, gilt

$$\begin{aligned} \pi(\lambda e \delta e + \mu(1-e)\delta e) &= \lambda e[D,e] + \mu(1-e)[D,e] \\ &= \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & -M^* \\ M & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\lambda M^* \\ \mu M & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. $\eta \in \ker \pi$ genau dann, wenn $\lambda = \mu = 0$, d.h. π ist injektiv und damit ist $\Omega^1(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \cong \Omega_D^1(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$. Insbesondere ist d ein Zusammenhang.

Fixiere $\varphi \in \mathbb{C}$ und betrachte das „Potential“

$$V := -\overline{\varphi} e \cdot de + \varphi(1-e) \cdot de = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\varphi} M^* \\ \varphi M & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiere einen Zusammenhang durch

$$\nabla^\varphi := d + V.$$

Die Krümmung von ∇^φ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} F &= dV + V^2 \\ &= -\big(|\varphi + 1|^2 - 1\big) de \cdot de \\ &= -\big(|\varphi + 1|^2 - 1\big) \begin{pmatrix} -M^* M & 0 \\ 0 & -M M^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da $(A, \mathcal{H}, D)$ nach 3.1.21.2 0–summierbar ist und die betrachteten Hilberträume endlichdimensional waren, also Dixmier–Spur und gewöhnliche Spur übereinstimmen, lautet das Yang–Mills–Funktional einfach

$$\mathrm{YM}(\nabla^\varphi) = \mathrm{tr}(F^2) = 2(|\varphi+1|^2 - 1)^2 \,\mathrm{tr}\left(|M^*M|^2\right).$$

Die Menge der gesuchten absoluten Minima von $\varphi \mapsto \mathrm{YM}(\nabla^\varphi)$ ist $S^1 - 1$.

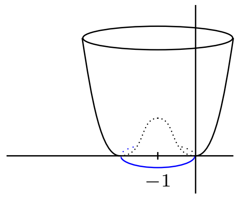


Abb. 11: Graph von $\varphi \mapsto \mathrm{YM}(\nabla^\varphi)$

3.3.8 Beispiel. Sei X eine kompakte 4–dimensionale riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit mit zugehörigem geradem kanonischen Spektraltripel $(A_X, \mathcal{H}, D_X, \Gamma_X)$. Sei $(A_Y, \mathcal{H}_Y, D_Y)$ das soeben in Beispiel 3.3.7 diskutierte Spektraltripel. Wir betrachten das Produkt

$$\begin{aligned}
&A := A_X \otimes_{\mathbb{C}} A_Y = A_X \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}\times\mathbb{C}) = C^\infty(X) \times C^\infty(X)\\
&\mathcal{H} = \mathcal{H}_X \overline{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_Y = (\mathcal{H}_X \overline{\otimes}_C \mathcal{H}_1) \oplus (\mathcal{H}_X \overline{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_2)\\
&D := D_x \otimes \mathrm{id} + \Gamma_X \otimes D_Y = \begin{pmatrix} D_X \otimes \mathrm{id} & \Gamma_X \otimes M^* \\ \Gamma_X \otimes M & D_X \otimes \mathrm{id}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für $f = (f_1, f_2) \in A$ berechne

$$\begin{aligned}
[D, f] &= \left[\begin{pmatrix} D_X \otimes \mathrm{id} & \Gamma_X \otimes M^* \\ \Gamma_X \otimes M & D_X \otimes \mathrm{id}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \otimes \mathrm{id} & 0 \\ 0 & f_2 \otimes \mathrm{id}\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix} D_X f_1 \otimes \mathrm{id} & f_2 \Gamma_X \otimes M^* \\ f_1 \Gamma_X \otimes M & D_X f_2 \otimes \mathrm{id}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 D_X \otimes \mathrm{id} & f_1 \Gamma_X \otimes M^* \\ f_2 \Gamma_X \otimes M & f_2 D_X \otimes \mathrm{id}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} df_1 \otimes \mathrm{id} & -\Delta f\, \Gamma_X \otimes M^* \\ \Delta f\, \Gamma_X \otimes M & df_2 \otimes \mathrm{id}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

wobei $\Delta f = f_1 - f_2$. Wir erinnern uns daran, dass der „nichtkommutative Abstand“ für $p,\, q \in X \times Y$ gegeben ist durch

$$\mathrm{dist}(p, q) = \sup\left\{|f(q) - f(p)| \,\middle|\, f \in A = C^\infty(X) \times C^\infty(X),\ \|[D, f]\| \le 1\right\}.$$

Falls $p_1,\, q_1 \in X \times \{1\}$, so ist $\mathrm{dist}(p_1, q_1) = \mathrm{dist}_X(p_1, q_1)$, denn ein optimales f ist von der Form $f = (f_1, 0)$. Analog ist für $p_2,\, q_2 \in X \times \{2\}$ ein optimales f von der Form $f = (0, f_2)$, also $\mathrm{dist}(p_2, q_2) = \mathrm{dist}_X(p_2, q_2)$, d.h. liegen zwei Punkte auf „demselben Exemplar von X“, so stimmt ihr nichtkommutativer Abstand mit ihrem riemannschen Abstand auf X überein.

Falls $p = (s, 1)$ und $q = (s, 2)$, so ist ein optimales f von der Form $f = (\mathrm{const}_1, \mathrm{const}_2)$. Dann ist

$$\mathrm{dist}(p, q) = \frac{1}{\|M\|}.$$

In Beispiel 3.1.6 war dies der Abstand von 1 und 2.

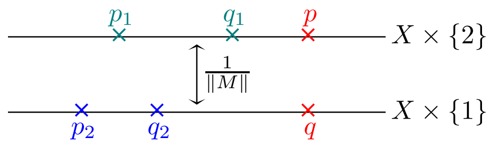


Abb. 12: Zwei Exemplare der Mannigfaltigkeit X; Abstandsmessung.

Das nichtkommutative Standardmodell der Elementarteilchentheorie à la Connes–Lott wird aus einer riemannschen 4–Mannigfaltigkeit und Produkt mit Y gebildet.

Abbildungsverzeichnis

Symbolverzeichnis

Index

Literaturverzeichnis

[Connes1] A. Connes: *Géométrie non commutative.* InterEditions, Paris 1990.

[Connes2] A. Connes: *Noncommutative Geometry.* Academic Press, San Diego 1994.

[ConGro] F. Constantinescu, H. F. de Groote: *Geometrische und algebraische Methoden der Physik: Supermannigfaltigkeiten und Virasoro-Algebren.* Teubner Stuttgart, Stuttgart 1994.

[GraVarFig] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, H. Figueroa: *Elements of Noncommutative Geometry.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin 2001.

[Manin] Y. I. Manin: *Gauge Field Theory and Complex Geometry.* Springer-Verlag, Berlin 1997.