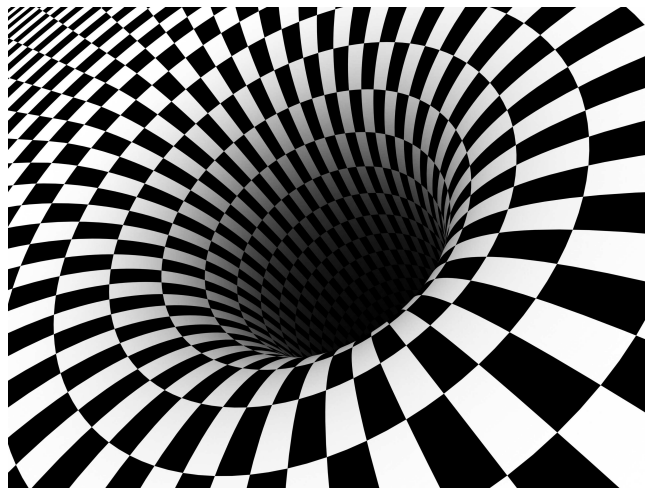


Christian Bär

Geometrische Analysis

Wintersemester 2007/08



Version vom 28. September 2011

Picture on title page taken from www.sxc.hu

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
Vorbemerkungen	1
1 Analytische Grundlagen	3
1.1 Sobolev-Räume	3
1.2 Kompaktheit	24
1.3 Der Gauß'sche Divergenzsatz	35
1.4 Hölder-Räume	40
1.5 Das Maximum-Prinzip	49
1.6 Differentialoperatoren und elliptische Regularität	54
1.7 Green-Funktionen	60
2 Das Yamabe-Problem	67
2.1 Konforme Geometrie	67
2.2 Der Modellfall: Die Sphäre	82
2.3 Die subkritische Gleichung	96
2.4 Nochmal zurück zur Sphäre	104
2.5 Konforme Normalkoordinaten	112
2.6 Green-Funktionen von Y und asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten . . .	128
2.7 Das Positive-Masse-Theorem	137
Lösungen	145
Literaturverzeichnis	153
Index	155

Vorwort

Dies ist das Skript zu der Vorlesung über geometrische Analysis, die ich im Wintersemester 2007/08 an der Universität Potsdam gehalten habe. Ziel der Vorlesung war es, Methoden der nichtlinearen Analysis zu entwickeln, die bei der Behandlung geometrischer Probleme von Nutzen sind. Ursprünglich war geplant, zunächst das Yamabe-Problem zu besprechen und anschließend harmonische Abbildungen zu untersuchen. Dies hat sich bald als im gegebenen Zeitrahmen zu ambitioniert erwiesen. Daher habe ich mich auf zwei Teile beschränkt; einen ersten, in dem analytische Grundlagen wie z.B. Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten entwickelt werden, und einen zweiten, in dem das Yamabe-Problem ausführlich untersucht wird.

Neben den üblichen Grundvorlesungen über lineare Algebra und Analysis wurde lediglich ein wenig Funktionalanalysis vorausgesetzt, nämlich das Konzept von Banach- und Hilberträumen. Daher war die Vorlesung für Studierende der Mathematik ab dem 5. Semester geeignet.

Mein herzlicher Dank geht an Christian Becker, der die Erstversion dieses Skriptes in hervorragender Qualität verfasst hat.

Potsdam, Mai 2011,

Christian Bär

Vorbemerkungen

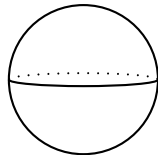
Ziel der Geometrischen Analysis ist, geometrische Probleme durch analytische Methoden zu lösen. Zur Illustration diskutieren wir folgendes

Paradebeispiel

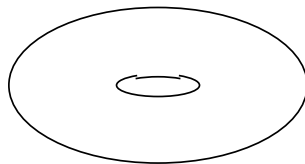
Suche auf einer vorgegebenen, geschlossenen Mannigfaltigkeit (d.h. kompakt und ohne Rand) eine besonders schöne riemannsche Metrik.

Für $\dim(M) = 2$ hat das Problem eine Lösung: Jede geschlossene Fläche besitzt eine riemannsche Metrik konstanter Gauß-Krümmung.

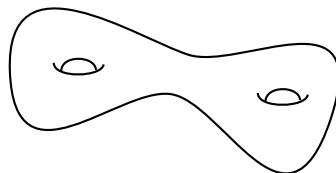
- Auf $M = S^2$ gibt es eine riemannsche Metrik mit $K \equiv 1$.



- Auf $M = T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ gibt es eine riemannsche Metrik mit $K \equiv 0$.



- Auf F_g , $g \geq 2$, gibt es eine riemannsche Metrik mit $K \equiv -1$.



Inhaltsverzeichnis

Für $\dim(M) \geq 3$ gibt es verschiedene Verallgemeinerungen der Frage nach Metriken konstanter Krümmung. Je nachdem, welchen Krümmungsbegriff man zugrunde legt, haben sie mehr oder weniger interessante Antworten:

- Konstante Schnittkrümmung: es gibt Mannigfaltigkeiten, die gar keine Metriken konstanter Schnittkrümmung besitzen können. Z.B. ist eine Metrik mit $K \leq 0$ auf $M = S^{n-1} \times S^1$ nicht möglich, da in diesem Fall der Satz von Hadamard implizierte $\tilde{M} \equiv \mathbb{R}^n$; es ist aber $\tilde{M} \approx S^{n-1} \times \mathbb{R}$. $K \equiv 1$ ist nach dem Satz von Bonnet-Myers ausgeschlossen, da $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ nicht endlich ist.
- Konstante Riccikrümmung: Metriken konstanter Riccikrümmung, so genannte *Einstein-Metriken*, existieren nicht auf allen Mannigfaltigkeiten der Dimensionen 3,4. Für $\dim(M) \geq 5$ ist die Frage offen.
- Konstante Skalarkrümmung: Zur Suche einer Metrik konstanter Skalarkrümmung betrachten wir folgenden Ansatz: für eine gegebene Metrik g auf M setze $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}}$ mit $\varphi \in C^\infty(M), \varphi > 0$. Für die Skalarkrümmung \tilde{s} der neuen Metrik \tilde{g} ergibt sich:

$$\tilde{s} = \varphi^{\frac{2+n}{2-n}} \underbrace{\left(4 \frac{n-1}{n-2} \Delta_g \varphi + s\varphi \right)}_{Y_g(\varphi)}.$$

Das geometrische Problem, eine Metrik konstanter Skalarkrümmung $\tilde{s} \equiv C$ zu finden, übersetzt sich so in das analytische Problem, die nichtlineare Eigenwertgleichung

$$Y(\varphi) = C \cdot \varphi^{\frac{n+2}{n-2}}$$

für den Operator Y zu lösen.

Dieses Problem wollen wir daher im ersten Teil der Vorlesung studieren.

1 Analytische Grundlagen

1.1 Sobolev-Räume

Im Folgenden sei M eine n -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, und $\varrho : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine positive glatte Funktion („Gewichtsfunktion“).

Für $p \geq 1$ und $\beta \in \mathbb{R}$ setze:

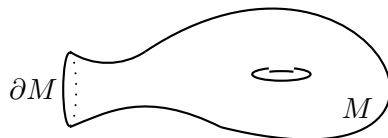
$$L^p_\beta(M, \varrho) := \left\{ u : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|u\|_{L^p_\beta} := \left(\int_M |\varrho^{-\beta} u|^p \varrho^{-n} d\text{vol} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Offensichtlich ist $L^p_\beta(M, \varrho) = L^p(M, \varrho^{-\beta p - n} d\text{vol})$. Ferner gilt für die gewichtete L^p -Norm die folgende Hölder-Ungleichung ($\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$):

$$\begin{aligned} \|u \cdot v\|_{L^1_\beta} &= \left\| \varrho^{-\beta} uv \right\|_{L^1(M, \varrho^{-n} d\text{vol})} \\ &= \left\| \varrho^{-\beta_1} u \varrho^{-\beta_2} v \right\|_{L^1(M, \varrho^{-n} d\text{vol})} \\ &\leq \left\| \varrho^{-\beta_1} u \right\|_{L^p(M, \varrho^{-n} d\text{vol})} \cdot \left\| \varrho^{-\beta_2} v \right\|_{L^{p^*}(M, \varrho^{-n} d\text{vol})} \\ &= \|u\|_{L^p_{\beta_1}} \cdot \|v\|_{L^{p^*}_{\beta_2}}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Typische Beispiele für Gewichtsfunktionen:

1. $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$, $\varrho(x) = |x|$, außerhalb eines Kompaktums.
2. (M, g) riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$ beliebig, $\varrho(x) = \text{dist}(\cdot, x)$.
3. (M, g) Inneres einer kompakten Mannigfaltigkeit mit Rand, $\varrho(x) = \text{dist}(x, \partial M)$ außerhalb eines Kompaktums.



Definition 1.1.1.

$$\|u\|_{L^\infty} := \operatorname{ess-sup}_{x \in M} |\varrho^{-\beta} u(x)|$$

$$L^\infty(M, \varrho) := \left\{ u : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|u\|_{L^\infty} < \infty \right\}$$

Wie üblich werden Funktionen $u, u' : M \rightarrow \mathbb{R}$ identifiziert, falls $u - u' = 0$ außerhalb einer Nullmenge.

Bemerkung 1.1.2. Ist $\|u\|_{L^\infty} < \infty$, so ist $|\varrho^{-\beta} u| \leq C$, d.h. $|u| \leq C \cdot \varrho^\beta$, d.h. $u = O(\varrho^\beta)$.

Bemerkung 1.1.3. Ist M kompakt, so gibt es $c_1, c_2 < \infty$ so dass $c_1 \leq \varrho \leq c_2$. Damit ist $\forall \beta \in \mathbb{R}$ die gewichtete Norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ äquivalent zu $\|\cdot\|_{L^\infty}$, somit also

$$L^\infty(M, \varrho) = L^\infty(M) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Lemma 1.1.4

Die Menge

$$C_c^\infty(M) := \{u : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt} \mid \operatorname{supp}(u) \text{ kompakt}\}$$

liegt dicht in $L^p(M, \varrho)$ für $p \in [1, \infty), \forall \beta \in \mathbb{R}$.

Beweisskizze.

a) Zunächst für $\varrho = 1$, d.h. $L^p(M)$:

a1) Seien $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset M$ kompakte Mengen mit $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = M$. Für $u \in L^p(M)$ setze $u_j := \chi_{K_j} \cdot u$, (wobei χ_{K_j} charakteristische Funktion von K_j). Dann ist der Träger von u_j in K_j enthalten, also kompakt, und $u_j \in L^p(M)$, da offensichtlich $\|u_j\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}$. Ferner gilt $|u_j - u|^p \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ punktweise. Damit erhält man

$$|u_j - u|^p \leq (|u_j| + |u|)^p \leq \underbrace{(2|u|)^p}_{\text{integrierbar}}.$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert dann

$$\|u_j - u\|_{L^p}^p = \int_M |u_j - u|^p d\text{vol} \rightarrow \int_M 0 d\text{vol} = 0,$$

also $u_j \rightarrow u$ in $L^p(M)$. Wir haben gezeigt, dass L^p -Funktionen mit kompaktem Träger in $L^p(M)$ dicht liegen.

- a2) Sei nun $u \in L^p(M)$ mit kompaktem Träger $K := \text{supp}(u)$. Wähle eine glatte Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi \geq 0$, $\text{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x|) dx = 1$. Mit der Substitution $x = \frac{x_0 - y}{\varepsilon}$, $dx = \varepsilon^{-n} dy$ folgt $\varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{|x_0 - y|^2}{\varepsilon^2}\right) dy = 1$.

Setze nun: $u_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \int_M \psi\left(\frac{d(x,y)^2}{\varepsilon^2}\right) u(y) d\text{vol}(y)$. u_ε ist glatt und $\text{supp}(u_\varepsilon)$ liegt in der ε -Umgebung von K . Damit hat man für hinreichend kleines ε , dass $u_\varepsilon \in C_c^\infty(M)$, und man kann zeigen, dass $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$ in $L^p(M)$.

- b) Für β, ϱ beliebig: Sei $u \in L_\beta^p(M, \varrho) = L^p(M, \varrho^{-\beta p - n} d\text{vol})$, also $\varrho^{\beta + \frac{n}{p}} u \in L^p(M)$.
 Nach a) $\exists v_j \in C_c^\infty(M)$ so dass $v_j \xrightarrow{L^p} \varrho^{\beta + \frac{n}{p}} u$. Setze $u_j := \varrho^{-\beta - \frac{n}{p}} v_j \in C_c^\infty(M)$.
 Dann folgt: $u_j \xrightarrow{L_\beta^p(M, \varrho)} u$. □

Das Lemma bedeutet: Wir hätten $L_\beta^p(M, \varrho)$ auch als Vervollständigung von $C_c^\infty(M)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{L_\beta^p}$ definieren können.

Bemerkung 1.1.5. Für $p = \infty$ gilt das Lemma nicht: Die Vervollständigung von $C_c^\infty(M)$ bzgl. $\|\cdot\|_{L_\beta^\infty}$ liefert einen Raum, der nur aus stetigen Funktionen besteht.

Übung 1.1.6 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung)

Seien $p, q, r \geq 1$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ und $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_i \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle messbaren Funktionen $u, v : M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\|u \cdot v\|_{L_\beta^r} \leq \|u\|_{L_{\beta_1}^p} \cdot \|v\|_{L_{\beta_2}^q} . \tag{1.2}$$

Übung 1.1.7

Seien $1 \leq p < q$ und $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_i \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\|u\|_{L_\beta^p} \leq \left(\int_M \varrho^{-n - \beta_1 \frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|u\|_{L_{\beta_2}^q} .$$

Insbesondere gilt für $\varrho = 1$:

$$\|u\|_{L^p} \leq \text{vol}(M)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|u\|_{L^q} .$$

Übung 1.1.8

Sei $M = \mathbb{R}^n$, $\varrho(x) = |x|$ außerhalb eines Kompaktums. Sei $1 \leq p < q$ und $\beta' < \beta$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ so dass gilt:

$$\|u\|_{L^p_\beta} \leq C \cdot \|u\|_{L^q_{\beta'}},$$

Lemma 1.1.9 (Gagliardo-Nirenberg)

Für alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x^j} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{n}}$$

Beweis. Exemplarisch für $n = 3$: Sei $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \int_{-\infty}^{x_0} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) dx \\ &= - \int_{x_0}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) dx. \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass u kompakten Träger hat, so dass keine Randterme bei $\pm\infty$ auftreten. Es folgt

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leq \int_{-\infty}^{x_0} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right| dx$$

und

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leq \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right| dx.$$

Zusammen genommen erhält man also:

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right| dx.$$

Analog verfährt man mit der y - und z -Variable und erhält:

$$|u(x_0, y_0, z_0)|^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0)\right| dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y, z_0)\right| dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z)\right| dz\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Integration über x_0 liefert:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_0, y_0, z_0)|^{\frac{3}{2}} dx_0 &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0)\right| dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y, z_0)\right| dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z)\right| dz\right)^{\frac{1}{2}} dx_0}_{\text{CSU}} \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y, z_0)\right| dy dx_0\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z)\right| dz dx_0\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Integration über y_0 liefert:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_0, y_0, z_0)|^{\frac{3}{2}} dx_0 dy_0 &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z_0)\right| dx dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0)\right| dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z)\right| dz dx_0\right)^{\frac{1}{2}} dy_0 \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z_0)\right| dy dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0)\right| dx dy_0\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z)\right| dz dx_0 dy_0\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

1 Analytische Grundlagen

Integration über z_0 liefert schließlich:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} |u(x_0, y_0, z_0)|^{\frac{3}{2}} dx_0 dy_0 dz_0 \\ & \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) \right| dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) \right| dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \right| dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Also erhält man:

$$\|u\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{3}} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{3}} \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{3}} \quad \square$$

Bemerkung 1.1.10. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhält man wie im obigen Beweis, dass das Lemma von Gagliardo-Nirenberg auch im Fall $n = 1$ gilt, wenn man $L^{\frac{n}{n-1}}$ als L^∞ liest:

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^1}.$$

Aus der trivialen Abschätzung $|\nabla u|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x^1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial u}{\partial x^n} \right|^2 \geq \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2$ erhält man $\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \leq |\nabla u| \forall j$ und damit

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^1} =: \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^1}.$$

Proposition 1.1.11

Sei $n \geq 2$. Für alle $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und alle $p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ gilt:

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \|\nabla u\|_{L^q}.$$

Beweis.

- a) Idee: Wir wollen $\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|_{L^1}$ anwenden mit $\varphi = |u|^{p\frac{n-1}{n}}$.

Der Träger $\text{supp}(\varphi) = \text{supp}(u)$ ist zwar kompakt, aber φ ist i. Allg. nicht überall differenzierbar. Setze daher für $\varepsilon > 0$:

$$\varphi_\varepsilon := (|u|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n}} - \varepsilon^{\frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n}} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Es gilt also:

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2}\|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^1}. \quad (1.3)$$

- b) Für die linke Seite von (1.3) erhält man nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon^{\frac{n}{n-1}}(x) dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{\frac{n}{n-1}}(x) dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \|u\|_{L^p}^{p\frac{n-1}{n}} \end{aligned}$$

- c) Für die rechte Seite von 1.3 erhält man, wiederum mit majorisierter Konvergenz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\nabla\varphi_\varepsilon\|_{L^1} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi_\varepsilon| dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} (|u|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} - 1} \cdot 2|u| \cdot |\nabla u| dx \\ &= \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} (|u|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} - 1} |u| \cdot |\nabla u| dx \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p\frac{n-1}{n} - 1} \cdot |\nabla u| dx \\ &= \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \left\| |u|^{p\frac{n-1}{n} - 1} \cdot |\nabla u| \right\|_{L^1} \end{aligned}$$

1 Analytische Grundlagen

d) Bisher haben wir demnach erreicht:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p}^{p \frac{n-1}{n}} &\leq \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \left\| |u|^{p \frac{n-1}{n} - 1} \cdot |\nabla u| \right\|_{L^1} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \| |u|^{p \frac{n-1}{n} - 1} \|_{L^{q^*}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q}, \end{aligned}$$

wobei q^* so gewählt ist, dass $1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*}$ gilt. Mit

$$\frac{p}{q^*} = p \left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) = p \frac{n-1}{n} - 1$$

finden wir für den u -Term der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \left\| |u|^{p \frac{n-1}{n} - 1} \right\|_{L^{q^*}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q^* (p \frac{n-1}{n} - 1)} dx \right)^{\frac{1}{q^*}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{q^*}} \\ &= \|u\|_{L^p}^{\frac{p}{q^*}} \\ &= \|u\|_{L^p}^{p \frac{n-1}{n} - 1}. \end{aligned}$$

Kürzen von $\|u\|_{L^p}^{p \frac{n-1}{n} - 1}$ liefert schließlich:

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \|\nabla u\|_{L^q}.$$

□

Im Spezialfall $q = 2$, also $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{2n}$, also $p = \frac{2n}{n-2}$ gilt somit:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2 &\leq \left(\frac{2n}{n-2} \cdot \frac{n-1}{2n} \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{n-1}{n-2} \right)^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Sei nun σ_n die optimale Konstante in dieser Abschätzung, d.h.

$$\sigma_n := \sup_{u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2}{\|\nabla u\|_{L^2}^2}$$

Es gilt also:

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq \sqrt{\sigma_n} \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \quad \text{und} \quad \sigma_n \leq \left(\frac{n-1}{n-2} \right)^2.$$

Definition 1.1.12. σ_n heißt *Sobolev-Konstante* von \mathbb{R}^n in Dimension $n \geq 3$.

Nun übertragen wir diese Abschätzungen vom \mathbb{R}^n auf Mannigfaltigkeiten.

Satz 1.1.13

Sei $n \geq 2$, und sei M eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann gilt:

(i) Für alle $p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ gibt es eine Konstante $C_1 > 0$ so dass gilt:

$$\|u\|_{L^p}^q \leq p^q \|\nabla u\|_{L^q}^q + C_1 \|u\|_{L^q}^q \quad \forall u \in C^\infty(M). \quad (1.4)$$

(ii) Im Spezialfall $n \geq 3, q = 2$ haben wir: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $C_3 > 0$ so dass gilt:

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2 \leq (1 + \varepsilon) \sigma_n \|\nabla u\|_{L^2}^2 + C_3 \|u\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in C^\infty(M). \quad (1.5)$$

Beweis.

- a) Sei $0 < \delta < 1$. In riemannschen Normalkoordinaten um einen Punkt in M gilt $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$, d.h. alle Eigenwerte der symmetrischen Matrix $(g_{ij}(0))_{i,j}$ sind 1. Nach evtl. Verkleinerung der Koordinatenumgebung liegen für alle x aus dieser Umgebung alle Eigenwerte der symmetrischen Matrix $(g_{ij}(x))_{i,j}$ in dem Intervall $[1 - \delta, 1 + \delta]$. Für das riemannsche Volumenelement in dieser Koordinatenumgebung gilt dann $(1 - \delta)^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{\det g_{ij}(x)} \leq (1 + \delta)^{\frac{n}{2}}$. Für einen beliebigen Tangentialvektor $Y = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ gilt ferner:

$$(1 - \delta) |\eta|^2 \leq g(Y, Y) = \sum_{j=1}^n g_{ij} \eta^i \eta^j \leq (1 + \delta) |\eta|^2,$$

also:

$$(1 - \delta)^{\frac{1}{2}} |\eta| \leq |Y|_g \leq (1 + \delta)^{\frac{1}{2}} |\eta|.$$

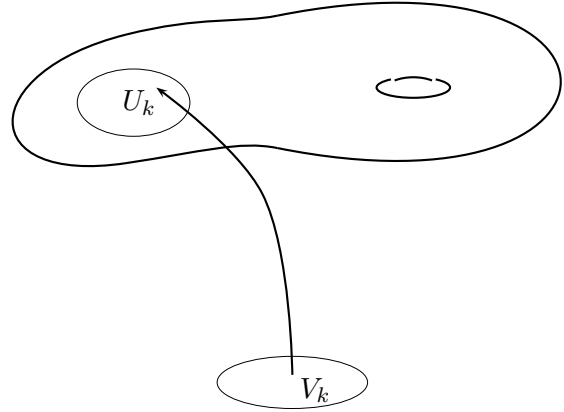
Analog können wir für die inverse Matrix g^{ij} erreichen:

$$(1 - \delta) |\eta|^2 \leq \sum_{j=1}^n g^{ij} \eta_i \eta_j \leq (1 + \delta) |\eta|^2. \quad (1.6)$$

1 Analytische Grundlagen

- b) Überdecke M durch riemannsche Normalkoordinatensysteme wie in a). Da M kompakt ist, genügen $N < \infty$ solche Koordinatensysteme $(U_1, \Phi_1, V_1), \dots, (U_N, \Phi_N, V_N)$, um M zu überdecken.

Wähle eine zugehörige Teilung der 1, d.h. Funktionen $\alpha_k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\text{supp}(\alpha_k) \subset U_k$, $\alpha_k \geq 0$ und $\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1$.



Wähle die Funktionen α_k so, dass in allen Nullstellen von α_k auch alle Ableitungen von α_k verschwinden: Dann sind mit α_k auch die Funktionen $\alpha_k^{1/q}$ glatt.¹

- c) Für $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{L^p}^q &= \left(\int_M |u|^p \, d\text{vol} \right)^{\frac{q}{p}} = \left(\int_M |u|^{q \frac{p}{q}} \, d\text{vol} \right)^{\frac{q}{p}} \\
 &= \| |u|^q \|_{L^{\frac{p}{q}}} \\
 &= \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k |u|^q \right\|_{L^{\frac{p}{q}}} \leq \sum_{k=1}^N \| \alpha_k |u|^q \|_{L^{\frac{p}{q}}} \\
 &= \sum_{k=1}^N \left(\int_{U_k} (\alpha_k |u|^q)^{\frac{p}{q}} \, d\text{vol} \right)^{\frac{q}{p}} \\
 &= \sum_{k=1}^N \left(\int_{V_k} (\alpha_k^{\frac{p}{q}} |u|^p) \circ \Phi_k \cdot \underbrace{\sqrt{\det g_{ij}^{(k)}}}_{\leq (1+\delta)^{\frac{n}{2}}} \, dx \right)^{\frac{q}{p}} \\
 &\leq (1+\delta)^{\frac{nq}{2p}} \sum_{k=1}^N \left(\int_{V_k} \left(\alpha_k^{\frac{p}{q}} |u|^p \right) \circ \Phi_k(x) \, dx \right)^{\frac{q}{p}}
 \end{aligned}$$

¹Dies folgt aus dem Satz von Taylor: Ist z.B. $\alpha : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und verschwinden alle Ableitungen bei $t = 0$, so liefert die Restgliedabschätzung aus dem Satz von Taylor $\alpha(t) = O(t^m)$ für jedes m . Für den Differenzenquotienten von $\alpha^{1/q}$ findet man daher bei hinreichend groß gewähltem m :

$$\left| \frac{\alpha(t)^{\frac{1}{q}} - 0}{t - 0} \right| = \frac{|\alpha(t)|^{\frac{1}{q}}}{|t|} \leq \frac{(Ct^m)^{\frac{1}{q}}}{t} = C^{\frac{1}{q}} |t|^{\frac{m}{q} - 1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Also ist $\alpha^{1/q}$ in 0 differenzierbar mit Ableitung 0. Analog für die höheren Ableitungen.

$$= (1 + \delta)^{\frac{nq}{2p}} \sum_{k=1}^N \left\| \alpha_k^{\frac{1}{q}} |u| \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q.$$

d) Wir betrachten zuerst den Fall (i), also für allgemeines q . Wir können die Abschätzungen im \mathbb{R}^n anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} & \left\| (\alpha_k^{\frac{1}{q}} \cdot u) \circ \Phi_k \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \\ & \leq \left(p \frac{n-1}{2n} \right)^q \left\| \nabla \left(\alpha_k^{\frac{1}{q}} \cdot u \right) \circ \Phi_k \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \\ & = \left(p \frac{n-1}{2n} \right)^q \left\| \nabla \left(\alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \Phi_k \right) \cdot u \circ \Phi_k + \left(\alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \Phi_k \right) \cdot \nabla (u \circ \Phi_k) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \\ & \leq 2^q \left(p \frac{n-1}{2n} \right)^q \max \left(\left\| \nabla \left(\alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \Phi_k \right) \cdot u \circ \Phi_k \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q, \left\| \left(\alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \Phi_k \right) \cdot \nabla (u \circ \Phi_k) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \right) \\ & \leq \left(p \frac{n-1}{n} \right)^q \left(\left\| \nabla \left(\alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \Phi_k \right) \cdot u \circ \Phi_k \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + \left\| \left(\alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \Phi_k \right) \cdot \nabla (u \circ \Phi_k) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \right) \\ & \leq \left(p \frac{n-1}{n} \right)^q \left(C \cdot \|u \circ \Phi_k\|_{L^q(V_k)}^q + \left\| \left(\alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \Phi_k \right) \cdot \nabla (u \circ \Phi_k) \right\|_{L^q(V_k)}^q \right) \end{aligned}$$

Für den ersten Term erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|u \circ \Phi_k\|_{L^q(V_k)}^q &= \int_{V_k} |u|^q \circ \Phi_k(x) \, dx \\ &\leq (1 - \delta)^{\frac{-n}{2}} \int_{V_k} |u|^q \circ \Phi_k(x) \sqrt{\det g_{ij}(x)} \, dx \\ &= (1 - \delta)^{\frac{-n}{2}} \int_{U_k} |u|^q \, d\text{vol} \\ &\leq (1 - \delta)^{\frac{-n}{2}} \int_{\bar{M}} |u|^q \, d\text{vol} \\ &= (1 - \delta)^{\frac{-n}{2}} \|u\|_{L^q(M)}^q. \end{aligned}$$

Für den zweiten Term erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \Phi_k \right) \nabla (u \circ \Phi_k) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q &= \int_{V_k} (\alpha_k \circ \Phi_k)(x) \underbrace{|\nabla(u \circ \Phi_k)|}_{\leq (1-\delta)^{-\frac{1}{2}} |\nabla u|_g \circ \Phi_k}(x)^q \, dx \\ &\leq (1 - \delta)^{-\frac{q}{2}} \int_{V_k} (\alpha_k |\nabla u|_g^q) \circ \Phi_k(x) \, dx \end{aligned}$$

1 Analytische Grundlagen

$$\begin{aligned}
 &\leq (1 - \delta)^{-\frac{q+n}{2}} \int_{V_k} (\alpha_k |\nabla u|_g^q) \circ \Phi_k(x) \sqrt{\det g_{ij}(x)} dx \\
 &= (1 - \delta)^{-\frac{q+n}{2}} \int_{U_k} (\alpha_k |\nabla u|_g^q) dvol.
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir gemäß (1.6) folgendermaßen die Ableitung von u in der Metrik g gegen ihre euklidische Länge abgeschätzt:

$$|\nabla u|_g^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} g^{ij} \geq (1 - \delta) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2.$$

Beide Terme zusammen genommen ergeben also:

$$\begin{aligned}
 &\left\| \left(\alpha_k^{\frac{1}{q}} \cdot u \right) \circ \Phi_k \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \\
 &\leq \left(p \frac{n-1}{n} \right)^q (1 - \delta)^{-\frac{n+q}{2}} \left(C \underbrace{(1 - \delta)^{\frac{q}{2}}}_{\leq 1} \|u\|_{L^q(M)}^q + \int_{U_k} \alpha_k |\nabla u|^q dvol \right)
 \end{aligned}$$

Summation über k liefert daraus:

$$\begin{aligned}
 &\|u\|_{L^p(M)}^q \\
 &\leq (1 + \delta)^{\frac{nq}{2p}} \left(p \frac{n-1}{n} \right)^q (1 - \delta)^{-\frac{n+q}{2}} \sum_{k=1}^N \left(C \cdot \|u\|_{L^q(M)}^q + \int_{U_k} \alpha_k |\nabla u|^q dvol \right) \\
 &= (1 + \delta)^{\frac{nq}{2p}} \left(p \frac{n-1}{n} \right)^q (1 - \delta)^{-\frac{n+q}{2}} \left(N \cdot C \cdot \|u\|_{L^q(M)}^q + \int_M |\nabla u|^q dvol \right).
 \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\delta > 0$ so klein, dass

$$(1 + \delta)^{\frac{nq}{2p}} \cdot (1 - \delta)^{-\frac{n+q}{2}} < \left(\frac{n}{n-1} \right)^q$$

ist, so folgt (i).

e) Im Fall $q = 2$ wählen wir die Abschätzungen im \mathbb{R}^n mit optimaler Konstante σ_n statt $(p \frac{n-1}{2n})^q$ und erhalten daraus:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left(\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot u \right) \circ \Phi_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
 & \leq \sigma_n \left\| \nabla \left(\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot u \right) \circ \Phi_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
 & \leq \sigma_n \left(\left\| \left(\alpha_k^{\frac{1}{2}} \nabla u \right) \circ \Phi_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left\| (u \circ \Phi_k) \cdot \left(\left(\nabla \alpha_k^{\frac{1}{2}} \right) \circ \Phi_k \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^2 \\
 & \leq \sigma_n \left((1 + \delta^2) \left\| \left(\alpha_k^{\frac{1}{2}} \nabla u \right) \circ \Phi_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta^2} \right) \left\| (u \nabla \alpha^{\frac{1}{2}}) \circ \Phi_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right) \\
 & \leq \sigma_n \left((1 + \delta^2) \left\| \left(\alpha^{\frac{1}{2}} \nabla u \right) \circ \Phi_k \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + C'(\delta) \|u \circ \Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right) \\
 & \leq \sigma_n (1 + \delta^2) (1 - \delta)^{-\frac{2+n}{2}} \int_{U_k} \alpha_k |\nabla u|^2 dvol + C'(\delta) (1 - \delta)^{-\frac{n}{2}} \|u\|_{L^2(M)}^2.
 \end{aligned}$$

Summation über k liefert:

$$\|u\|_{L^p(M)} \leq (1 + \delta)^{\frac{nq}{2p}} (1 + \delta^2) (1 - \delta)^{-\frac{2+n}{n}} \sigma_n \|\nabla u\|_{L^2(M)}^2 + C''(\delta) \cdot N \cdot \sigma_n \|u\|_{L^2(M)}^2.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle nun $\delta > 0$ so klein, dass

$$(1 + \delta)^{\frac{nq}{2p}} (1 + \delta^2) (1 - \delta)^{-\frac{n+2}{2}} < 1 + \varepsilon.$$

Damit ist (ii) gezeigt. □

Für $u \in C^\infty(M)$ setze

$$\begin{aligned}
 \nabla^0 u & := u \\
 \nabla u & := \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i
 \end{aligned}$$

und induktiv:

$$\nabla^{i+1} u := \nabla(\nabla^i u)$$

1 Analytische Grundlagen

Beispiel 1.1.14. Für $i = 2$ berechnen wir den Ausdruck in lokalen Koordinaten unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention ² :

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 u &= \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i \right) \\
 &= \nabla \frac{\partial u}{\partial x^i} \otimes dx^i + \frac{\partial u}{\partial x^i} \nabla (dx^i) \\
 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \otimes dx^i - \frac{\partial u}{\partial x^i} \Gamma_{lk}^i dx^l \otimes dx^k \\
 &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial u}{\partial x^k} \Gamma_{ji}^k \right) dx^j \otimes dx^i,
 \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
 (\nabla dx^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \nabla \left(\underbrace{dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)}_{\substack{= \delta_{ij}, \\ \text{insb. konst.}}} \right) - dx^i \left(\nabla \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= -dx^i \left(\Gamma_{lk}^m dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\
 &= -\Gamma_{lk}^i dx^l,
 \end{aligned}$$

also

$$\nabla dx^i = -\Gamma_{lk}^i dx^l \otimes dx^k.$$

Wir betrachten jetzt die punktweise gebildeten Normen

$$\begin{aligned}
 |\nabla^0 u|^2 &= |u|^2 \\
 |\nabla u|^2 &= g \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i, \frac{\partial u}{\partial x^j} dx^j \right) = \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} g(dx^i, dx^j) = \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^i} g^{ij} \\
 |\nabla^2 u|^2 &= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ji}^k \frac{\partial u}{\partial x^k} \right] \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} - \Gamma_{j'i'}^k \frac{\partial u}{\partial x^{k'}} \right] \underbrace{\left\langle dx^i \otimes dx^j, dx^{i'} \otimes dx^{j'} \right\rangle}_{g^{jj'} \cdot g^{ii'}}.
 \end{aligned}$$

²Die Einstein'sche Summenkonvention wird von Leuten geschätzt, die viel in lokalen Koordinaten rechnen, z. B. von vielen Physikern. Sie besagt, dass man einen Index, der in einem Ausdruck doppelt vorkommt, einmal oben und einmal unten, immer als Summationsindex auffasst, das entsprechende Summenzeichen aber weglässt. Man schreibt also z. B. statt $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i$ einfach $\frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i$.

Definition 1.1.15. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$. Die Normen

$$\|u\|_{H_\beta^{k,p}} := \sum_{j=0}^k \|\nabla^j u\|_{L_{\beta-j}^p}$$

heißen **gewichtete Sobolevnormen** (zur **Gewichtsfunktion** ϱ). Damit definiert man die **gewichteten Sobolev-Räume**:

$\mathring{H}_\beta^{k,p}(M, \varrho) :=$ Vervollständigung von $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ bzgl. $\|\cdot\|_{H_\beta^{k,p}}$

$H_\beta^{k,p}(M, \varrho) :=$ Vervollständigung von $\mathcal{C}^\infty(M) \cap \left\{ u \mid \|u\|_{H_\beta^{k,p}} < \infty \right\}$ bzgl. $\|\cdot\|_{H_\beta^{k,p}}$.

Bemerkung 1.1.16. Nach Definition und wegen Lemma 1.1.4 gilt

$$\mathring{H}_\beta^{0,p}(M, \varrho) = H_\beta^{0,p}(M, \varrho) = L_\beta^p(M, \varrho).$$

Übung 1.1.17

Folgende Normen sind äquivalent:

1. $\|u\|_1 := \|u\|_{H_\beta^{k,p}}$
2. $\|u\|_2 := \max_{j=0 \dots k} \|\nabla^j u\|_{L_{\beta-j}^p}$
3. $\|u\|_3 := \left(\sum_{j=1}^k \|\nabla^j u\|_{L_{\beta-j}^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Bemerkung 1.1.18. Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume, ist $U \subset X$ ein Untervektorraum und $U \subset Y$ ebenfalls ein Untervektorraum, und ist $\iota : X \rightarrow Y$ eine stetige lineare Abbildung mit $\iota(u) = u$ für alle $u \in U$, dann gibt es ein $C > 0$ so dass gilt:

$$\|\iota(x)\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

insbesondere

$$\|u\|_Y \leq C \cdot \|u\|_X \quad \forall u \in U.$$

1 Analytische Grundlagen

Umgekehrt gilt: Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-Räume, ist $U \subset X$ dicht und gibt es ein $C > 0$ mit

$$\|u\|_Y \leq C \cdot \|u\|_X \quad \forall u \in U, \quad (1.7)$$

dann setzt sich id_U stetig linear auf X fort: Für gegebenes $x \in X$ wähle $u_i \in U$ mit $u_i \xrightarrow{X} x$. Dann ist $(u_i)_i$ eine X -Cauchyfolge, also mit (1.7) auch eine Y -Cauchyfolge. Da Y vollständig ist, gibt es ein $y \in Y$ mit $u_i \xrightarrow{Y} y$. Setze nun $\iota(x) := y$.

- *Wohldefiniertheit:* Ist u'_i eine weitere Folge in X mit $u'_i \xrightarrow{X} x$, so ist $(u_i - u'_i)$ eine Nullfolge in X , also auch in Y , d.h. $u'_i \xrightarrow{Y} y$.
- *Linearität:* Zu $x, x' \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ wähle Folgen u_i, u'_i in X mit $u_i \xrightarrow{X} x, u'_i \xrightarrow{X} x'$. Dann gilt $u_i \xrightarrow{Y} \iota(x)$ und $u'_i \xrightarrow{Y} \iota(x')$ sowie $\alpha u_i + \beta u'_i \xrightarrow{X} \alpha x + \beta x'$, so dass:

$$\begin{array}{ccc} \alpha u_i + \beta u'_i & \xrightarrow{Y} & \iota(\alpha x + \beta x') \\ \downarrow Y & & \\ \alpha \iota(x) + \beta \iota(x') & & \end{array}$$

- *Stetigkeit:*

$$\begin{aligned} \|\iota(x)\|_Y &= \left\| Y - \lim_{i \rightarrow \infty} (u_i) \right\|_Y \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i\|_Y \\ &\leq C \lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i\|_X \\ &= C \left\| X - \lim_{i \rightarrow \infty} (u_i) \right\|_X \\ &= C \|x\|_X. \end{aligned}$$

- *Injektivität von ι* ist äquivalent zu: Jede $\|\cdot\|_X$ -Cauchyfolge in U , die $\|\cdot\|_Y$ -Nullfolge ist, ist auch $\|\cdot\|_X$ -Nullfolge.

In diesem Fall identifizieren wir X mit $\iota(X)$ und schreiben $X \subset Y$.

Bemerkung 1.1.19. Die Aussagen von Proposition 1.1.11 und Satz 1.1.13 kann man demnach so formulieren: Ist $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ oder (M, g) eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, so gilt:

$$H^{1,q}(M) \subset L^p(M)$$

und die Inklusionsabbildung ist stetig für alle $p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$. Denn die Injektivität lässt sich aufgrund der bewiesenen Abschätzungen leicht nachprüfen: Ist u_i eine L^p -Nullfolge, so ist (nach Übergang zu einer Teilfolge) $u_i \rightarrow 0$ punktweise fast überall. Ist u_i eine $H^{1,q}$ -Cauchyfolge, so gibt es ein $u \in H^{1,q}(M)$ mit $u_i \xrightarrow{H^{1,q}(M)} u$, also auch $u_i \xrightarrow{L^q(M)} u$, also $u_i \rightarrow u$ punktweise fast überall. Damit ist $u = 0$ und u_i eine $H^{1,q}$ -Nullfolge.

Proposition 1.1.20

Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, $q \in [1, n)$. Für $p_1 \geq 1$ mit $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{n}$ setzen wir voraus, dass wir stetige Inklusionen

$$\begin{aligned} H^{1,q}(M) &\subset L^{p_1}(M) \\ \text{oder} \quad \dot{H}^{1,q}(M) &\subset L^{p_1}(M) \end{aligned}$$

haben. Dann gilt für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ und alle $p_l \geq 1$ mit $\frac{1}{p_l} = \frac{1}{q} - \frac{l}{n}$:

$$\begin{aligned} H^{k+l,q}(M) &\subset H^{k,p_l}(M) \\ \text{bzw.} \quad \dot{H}^{k+l,q}(M) &\subset \dot{H}^{k,p_l}(M) \end{aligned}$$

und die Inklusionen sind stetig.

Beweis.

a) Der Fall $l = 0$ ist trivial.

b) Betrachten wir zunächst $l = 1$. Sei $u \in C^\infty(M) \cap H^{1,q}(M)$ bzw. $u \in C_c^\infty(M)$. Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_\varepsilon := \sqrt{|\nabla^j u|^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon \in C^\infty(M)$ bzw. $C_c^\infty(M)$. Dann berechnen wir für den Gradienten:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_\varepsilon &= \frac{2 \langle \nabla^{j+1} u, \nabla^j u \rangle}{2\sqrt{|\nabla^j u|^2 + \varepsilon^2}} \\ &= \left\langle \nabla^{j+1} u, \frac{\nabla^j u}{\sqrt{|\nabla^j u|^2 + \varepsilon^2}} \right\rangle \\ |\nabla \varphi_\varepsilon| &\leq |\nabla^{j+1} u| \cdot \frac{|\nabla^j u|}{\sqrt{|\nabla^j u|^2 + \varepsilon^2}} \\ &\leq |\nabla^{j+1} u|. \end{aligned}$$

Für φ_ε besagen nun die Einbettungssätze, dass $H^{1,q}(M) \subset L^{p_1}(M)$ bzw. $\dot{H}^{1,q}(M) \subset L^{p_1}(M)$: Es gibt ein $C > 0$ so dass gilt:

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^{p_1}} \leq C \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_{H^{1,q}} = C \left(\|\varphi_\varepsilon\|_{L^q} + \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \right).$$

Da $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} |\nabla^j u|$ punktweise, folgt mit dem Satz über majorisierte Konvergenz:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^{p_1}} &\xrightarrow{L^{p_1}} \|\nabla^j u\|_{L^{p_1}} \\ \|\varphi_\varepsilon\|_{L^q} &\xrightarrow{L^q} \|\nabla^j u\|_{L^q}, \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \leq \|\nabla^{j+1} u\|_{L^q}. \end{aligned}$$

1 Analytische Grundlagen

Zusammen genommen folgt also:

$$\|\nabla^j u\|_{L^{p_1}} \leq C \left(\|\nabla^j u\|_{L^q} + \|\nabla^{j+1} u\|_{L^q} \right).$$

Summation über $j = 0 \dots k$ liefert schließlich: $\|u\|_{H^{k,p_1}} \leq 2 \cdot C \cdot \|u\|_{H^{k+1,q}}$ und damit die Behauptung für $l = 1$.

c) Induktion über l liefert:

$$\begin{aligned} H^{k+l,q}(M) &= H^{(k+l-1)+1,q}(M) \\ &\subset H^{k+l-1,p_1}(M) \quad \text{für} \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \\ &\subset H^{k+l-2,p_2}(M) \quad \text{für} \quad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n} \\ &\vdots \\ &\subset H^{k,p_l}(M) \quad \text{für} \quad \frac{1}{p_l} = \frac{1}{q} - \frac{l}{n}. \end{aligned}$$

□

Wir haben damit bewiesen:

Satz 1.1.21 (Sobolev'scher Einbettungssatz, 1. Teil)

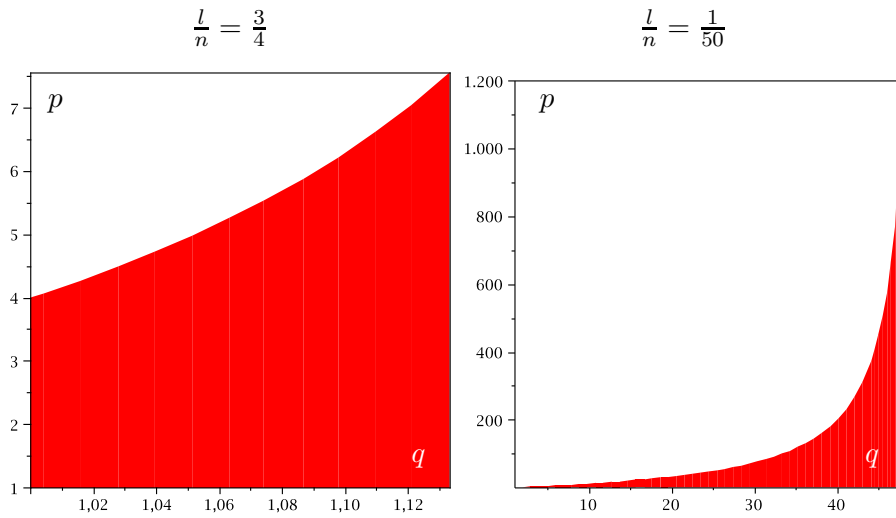
Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ oder (M, g) eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Dann haben wir für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$, $p, q \in [1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{l}{n}$ stetige Inklusionen

$$H^{k+l,q}(M) \subset H^{k,p}(M). \quad (1.8)$$

Bemerkung 1.1.22. Ist M kompakt und $1 \leq p' < p$, so ist nach Übung 1.1.6 $L^p(M) \subset L^{p'}(M)$, also auch $H^{k,p}(M) \subset H^{k,p'}(M)$. Somit ist

$$H^{k+l,q}(M) \subset H^{k,p_l}(M) \subset H^{k,p}(M) \quad \text{für} \quad p \leq p_l, \text{ d.h. für } \frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} - \frac{l}{n}.$$

In den beiden folgenden Abbildungen wird für $\frac{l}{n} = \frac{3}{4}$ bzw. für $\frac{l}{n} = \frac{1}{50}$ der Bereich in der q - p -Ebene rot markiert, für den wir die stetigen Inklusionen $H^{k+l,q}(M) \subset H^{k,p}(M)$ haben.



Nun wollen wir die Einbettungssätze auf gewichtete Sobolev-Räume erweitern:

Satz 1.1.23

Sei $\varrho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte, positive Gewichtsfunktion mit $\|\nabla \varrho\|_\infty < \infty$, und sei $n \geq 2$. Dann haben wir für alle $\beta \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{l}{n}$ stetige Inklusionen

$$H_\beta^{k+l, q}(\mathbb{R}^n, \varrho) \subset H_\beta^{k, p}(\mathbb{R}^n, \varrho).$$

Beweis. Für $l = 1$ betrachten wir $\psi_\varepsilon := \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}} \cdot \varphi_\varepsilon$ mit $\varphi_\varepsilon := \sqrt{|\nabla^j u|^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ und berechnen für den Gradienten:

$$\begin{aligned} \nabla \psi_\varepsilon &= \left(-\beta + j - \frac{n}{p_1}\right) \cdot \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}-1} (\nabla \varrho) \cdot \varphi_\varepsilon + \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}} \nabla \varphi_\varepsilon, \\ |\nabla \psi_\varepsilon| &\leq C_1 \cdot \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}-1} \cdot \varphi_\varepsilon + \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}} |\nabla \varphi_\varepsilon| \\ &\leq C_1 \cdot \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}-1} \cdot \varphi_\varepsilon + \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}} |\nabla^{j+1} u|. \end{aligned}$$

1 Analytische Grundlagen

Proposition 1.1.11 liefert daher:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon\|_{L_{\beta-j}^{p_1}} &= \|\psi_\varepsilon\|_{L^{p_1}} \\ &\leq p_1 \left(\frac{n-1}{2n} \right) \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^q} \\ &\leq C_2 \left(\left\| \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}-1} \cdot \varphi_\varepsilon \right\|_{L^q} + \left\| \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}} \cdot |\nabla^{j+1} u| \right\|_{L^q} \right) \end{aligned}$$

Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert diese Abschätzung gegen

$$\begin{aligned} \|\nabla^j u\|_{L_{\beta-j}^{p_1}} &\leq C_2 \left(\left\| \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}-1} \cdot |\nabla^j u| \right\|_{L^q} + \left\| \varrho^{-\beta+j-\frac{n}{p_1}} \cdot |\nabla^{j+1} u| \right\|_{L^q} \right) \\ &= C_2 \left(\|\nabla^j u\|_{L_{\beta-j}^q} + \|\nabla^{j+1} u\|_{L_{\beta-j-1}^q} \right). \end{aligned}$$

Summation über j liefert die Behauptung für $l = 1$, und Induktion nach l beendet den Beweis. \square

Satz 1.1.24

Sei $\varrho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte, positive Gewichtsfunktion, $\varrho(x) = |x|$ außerhalb eines Kompaktums. Dann liegt $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H_\beta^{k,p}(\mathbb{R}^n, \varrho)$ für $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$; d.h. $\mathring{H}_\beta^{k,p}(\mathbb{R}^n, \varrho) = H_\beta^{k,p}(\mathbb{R}^n, \varrho)$.

Beweis. Sei $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H_\beta^{k,p}(\mathbb{R}^n, \varrho)$. Sei $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit Werten in $[0, 1]$ und $\chi(t) \equiv 1$ für $t \leq 1$ und $\chi(t) \equiv 0$ für $t \geq 2$. Setze $u_j(x) := \chi\left(\frac{|x|}{j}\right) \cdot u(x)$, so dass $u_j \equiv u$ auf $B_j(0)$ und $u_j \equiv 0$ auf $B_{2j}(0)$. Insbesondere ist dann $u_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $u_j \rightarrow u$ punktweise. Zeige also: $u_j \rightarrow u$ in $H_\beta^{k,p}(\mathbb{R}^n, \varrho)$.

a) Im Fall $k = 0$ gilt

$$\varrho^{-\beta-\frac{n}{p}} \cdot (u - u_j) = \varrho^{-\beta-\frac{n}{p}} \cdot \left(1 - \chi \circ \left(\frac{|\cdot|}{j} \right) \right) \cdot u \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{punktweise.}$$

Ferner ist

$$\left| \varrho^{-\beta-\frac{n}{p}} (u - u_j) \right|^p \leq 2^p \underbrace{\left(\varrho^{-\beta-\frac{n}{p}} |u| \right)^p}_{\text{integrierbar}},$$

da nach Voraussetzung $u \in L_\beta^p(\mathbb{R}^n, \varrho)$. Der Satz über majorisierte Konvergenz liefert also $\|u - u_j\|_{L_\beta^p} \rightarrow 0$.

- b) Für $k = 1$ betrachten wir nur hinreichend große j , für die $\varrho(x) = |x|$ für alle $|x| \geq j$.
 Nun berechnen wir für den Gradienten:

$$\begin{aligned} \nabla(u - u_j) &= \nabla u - \chi \circ \left(\frac{|\cdot|}{j}\right) \nabla u - \chi' \circ \left(\frac{|\cdot|}{j}\right) \cdot \frac{\nabla|\cdot|}{j} \cdot u \\ |\nabla(u - u_j)(x)| &\leq \begin{cases} 0, & |x| \leq j \\ |\nabla u(x)| + \frac{C}{j}|u(x)|, & j \leq |x| \leq 2j \\ |\nabla u(x)|, & |x| \geq 2j \end{cases} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\left| \varrho^{-\beta+1-\frac{n}{p}} \nabla(u - u_j)(x) \right| \\ &\leq \begin{cases} 0, & |x| \leq j \\ \left| \varrho^{-\beta+1-\frac{n}{p}} \nabla u(x) \right| + 2C \left| \varrho^{-\beta-\frac{n}{p}} u(x) \right|, & j \leq |x| = \varrho(x) \leq 2j \\ \left| \varrho^{-\beta+1-\frac{n}{p}} \nabla u(x) \right|, & |x| \geq 2j \end{cases} \\ &\leq \left| \varrho^{-\beta+1-\frac{n}{p}} \nabla u(x) \right| + 2C \left| \varrho^{-\beta-\frac{n}{p}} u(x) \right|. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\left| \varrho^{-\beta+1-\frac{n}{p}} \nabla(u - u_j)(x) \right|^p \\ &\leq 2^p \left(\underbrace{\left| \varrho^{-\beta+1-\frac{n}{p}} \nabla u(x) \right|^p}_{\text{integrierbar}} + \underbrace{(2C)^p \left| \varrho^{-\beta-\frac{n}{p}} u(x) \right|^p}_{\text{integrierbar}} \right) \quad \square \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $u \in H_{\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n, \varrho)$. Der Satz über majorisierte Konvergenz liefert dann $\int_{\mathbb{R}^n} \left| \varrho^{-\beta+1-\frac{n}{p}} \nabla(u - u_j)(x) \right|^p \rightarrow 0$, also $|\nabla u_j| \rightarrow |\nabla u|$ in $L_{\beta-1}^p(\mathbb{R}^n, \varrho)$.

Mit a) folgt also $u_j \rightarrow u$ in $H_{\beta}^{1,p}(\mathbb{R}^n, \varrho)$.

- c) Für $k \geq 2$ verfährt man ganz analog unter Benutzung von

$$\left| \nabla^k \left(\chi \circ \left(\frac{|\cdot|}{j} \right) \right) \right| \leq \frac{C}{j^k}.$$

1.2 Kompaktheit

Proposition 1.2.1

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) (X, d) ist überdeckungskompakt, d.h. jede offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.
- (ii) (X, d) ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.
- (iii) (X, d) ist vollständig und präkompakt, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_{N(\varepsilon)} \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(x_i)$.

Beweis.

(i) \Rightarrow (ii):

Angenommen, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in X ohne Häufungspunkt. Dann gilt: $\forall y \in X \exists r_y > 0$ mit $\#\{k \mid x_k \in B_{r_y}(y)\} < \infty$. $(B_{r_y}(y))_{y \in X}$ ist eine offene Überdeckung von X , nach (i) gibt es also y_1, \dots, y_m mit $X = \bigcup_{i=1}^m B_{r_{y_i}}(y_i)$. Damit ist $\#\{k \mid x_k \in X\} < \infty$ im Widerspruch zur Annahme, dass $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X ist.

(ii) \Rightarrow (iii):

- a) Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X . Nach (ii) besitzt $(x_k)_k$ einen Häufungspunkt in $x \in X$; also $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Damit ist die Vollständigkeit von (X, d) gezeigt.
- b) Sei $\varepsilon > 0$ so, dass keine endliche Auswahl von ε -Bällen X überdeckt. Wähle $x_1 \in X$ beliebig. Wähle induktiv $x_{k+1} \in X - (B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_k))$. Nach Konstruktion ist $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ für alle $i \neq j$. Insbesondere besitzt die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – im Widerspruch zu (ii) – keinen Häufungspunkt. Damit ist die Präkompaktheit gezeigt.

(iii) \Rightarrow (i):

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Setze

$$\mathcal{N} := \left\{ Y \subset X \mid Y \subset \bigcup_{j \in J} U_j \Rightarrow |J| = \infty \right\}$$

und zeige: $X \notin \mathcal{N}$. Ist nun $Y \in \mathcal{N}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(x_i)$ wie in (iii) durch ε -Bälle um $x_1^\varepsilon, \dots, x_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$ ein $i_\varepsilon \in \{1, \dots, N(\varepsilon)\}$ mit $Y \cap B_\varepsilon(x_{i_\varepsilon}) \in \mathcal{N}$.

Nehmen wir also an, $X \in \mathcal{N}$. Dann wähle für $\varepsilon = \frac{1}{k}$ induktiv Punkte x_k so, dass $Y_k = B_1(x_1) \cap \dots \cap B_{\frac{1}{k}}(x_k) \in \mathcal{N}$. Wähle ferner beliebige Punkte $y_k \in Y_k$. Für $k \leq l$ ist

dann $y_k, y_l \in Y_k \subset B_{\frac{1}{k}}(x_k)$, also $d(y_k, y_l) < \frac{2}{k}$. Damit ist $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und nach (iii) gibt es ein $y \in X$ mit $y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$. Wähle i_0 mit $y \in U_{i_0}$. Für hinreichend große k gilt dann wegen $\frac{2}{k} + d(y, y_k) \rightarrow 0$:

$$Y_k \subset B_{\frac{1}{k}}(x_k) \subset B_{\frac{2}{k}}(y_k) \subset B_{\frac{2}{k} + d(y, y_k)}(y) \subset U_{i_0}.$$

Somit ist $Y_k \notin \mathcal{N}$ für hinreichend großes k , Widerspruch. \square

Definition 1.2.2. Ein metrischer Raum heißt *kompakt*, falls er eine (und damit alle) der Eigenschaften (i), (ii), (iii) aus Proposition 1.2.1 hat. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *kompakt*, falls $(A, d|_{A \times A})$ kompakt ist.

Bemerkungen 1.2.3

1. Kompakte metrische Räume sind beschränkt: In Überdeckungen durch konzentrische Bälle $(B_k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ genügen bereits endlich viele.
2. Kompakte Teilmengen sind abgeschlossen: Die Grenzwerte ihrer Folgen gehören nach (ii) zu den Teilmengen.
3. Ist (X, d) vollständig, so gilt:

$$A \subset X \text{ präkompakt} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \subset X \text{ kompakt}.$$

4. Ist (X, d) kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A kompakt.
5. Satz von *Heine-Borel*: in $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ gilt:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ abgeschlossen und beschränkt}.$$

In unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen gilt die Implikation \Leftarrow i. Allg. nicht.

6. Satz von *Hopf-Rinow*: Ist (M, d) eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, so gilt ebenfalls

$$A \subset M \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ abgeschlossen und beschränkt},$$

denn jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge liegt in einem – kompakten! – geodätischen Ball.

1 Analytische Grundlagen

Ist M ein kompakter metrischer Raum, so ist $\mathcal{C}^0(M)$ mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0} = \|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in M} |u(x)| = \max_{x \in M} |u(x)|$$

ein Banachraum.

Satz 1.2.4 (Arzela-Ascoli)

Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(M)$ ist kompakt $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit:

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y : d(x, y) < \delta, \quad \forall u \in \mathcal{A}.$$

Beweis.

\Rightarrow : Es ist klar, dass \mathcal{A} abgeschlossen und beschränkt sein muss. Zu $\varepsilon > 0$ wähle eine Überdeckung $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(u_i^\varepsilon)$. Wähle $\delta > 0$ so, dass für die endlich vielen stetigen (und damit gleichmäßig stetigen³) Funktionen $u_1^\varepsilon, \dots, u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$ gilt: $|u_i^\varepsilon(x) - u_i^\varepsilon(y)| < \varepsilon$ wann immer $d(x, y) < \delta$. Zu $u \in \mathcal{A}$ wähle i_ε so dass $\|u - u_{i_\varepsilon}^\varepsilon\| < \varepsilon$. Dann gilt für alle $x, y \in M$ mit $d(x, y) < \delta$:

$$|u(x) - u(y)| \leq \underbrace{|u(x) - u_{i_\varepsilon}^\varepsilon(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|u_{i_\varepsilon}^\varepsilon(x) - u_{i_\varepsilon}^\varepsilon(y)|}_{< \varepsilon \text{ für } d(x,y) < \delta} + \underbrace{|u_{i_\varepsilon}^\varepsilon(y) - u(y)|}_{< \varepsilon} < 3\varepsilon.$$

Somit ist \mathcal{A} gleichgradig stetig.

\Leftarrow : Da \mathcal{A} beschränkt ist, existiert eine Konstante $C > 0$, so dass $\|u\|_{\mathcal{C}^0} \leq C$ für alle $u \in \mathcal{A}$. Sei $\eta > 0$. Wähle $t_i \in \mathbb{R}$, so dass $[-C, C] \subset \bigcup_{i=1}^k (t_i - \eta, t_i + \eta)$. Wähle ferner Punkte $x_j \in M$, $j = 1, \dots, m$, so dass $M = \bigcup_{j=1}^m B_\eta(x_j)$. Für jede Abbildung $\pi : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ setze

$$\mathcal{A}_\pi := \{u \in \mathcal{A} \mid |u(x_j) - t_{\pi(j)}| \leq \eta \quad \forall j = 1, \dots, m\}.$$

Dann gilt: $\mathcal{A} = \bigcup_\pi \mathcal{A}_\pi$. Wähle nun beliebige $u_\pi \in \mathcal{A}_\pi$, falls $\mathcal{A}_\pi \neq \emptyset$. Zu $u \in \mathcal{A}$ wähle ein π mit $u \in \mathcal{A}_\pi$. Zu $x \in M$ wähle j so, dass $x \in B_\eta(x_j)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & |u(x) - u_\pi(x)| \\ & \leq |u(x) - u(x_j)| + \underbrace{|u(x_j) - t_{\pi(j)}|}_{\leq \eta, \text{ da } u \in \mathcal{A}_\pi} + \underbrace{|t_{\pi(j)} - u_\pi(x_j)|}_{\leq \eta, \text{ da } u_\pi \in \mathcal{A}_\pi} + |u_\pi(x_j) - u_\pi(x)| \\ & \leq 2\eta + \sup_{d(y,z) < \varepsilon} \left(\sup_{v \in \mathcal{A}} |v(y) - v(z)| \right) \\ & =: \varepsilon(\eta). \end{aligned}$$

³ M ist kompakt!

Damit ist $\|u - u_\pi\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon(\eta)$, also $\mathcal{A} \subset \bigcup_\pi B_{\varepsilon(\eta)}(u_\pi)$. Für $\eta \rightarrow 0$ gilt $\varepsilon(\eta) \rightarrow 0$ wegen gleichgradiger Stetigkeit. Damit ist also \mathcal{A} präkompakt. \mathcal{A} ist vollständig als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes. \square

Proposition 1.2.5

Sei $T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$ ein flacher Torus, und $p \in [1, \infty)$. Sei $\mathcal{A} \subset L^p(T^n)$ beschränkt. Dann ist $\overline{\mathcal{A}} \subset L^p(T^n)$ kompakt, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit

$$\int_{T^n} |u(x+h) - u(x)|^p dx < \varepsilon \quad \forall u \in \mathcal{A}, \quad \forall h \text{ mit } |h| < \delta. \quad (1.9)$$

Bemerkung 1.2.6. Gilt die Abschätzung (1.9) für alle $u \in \mathcal{A}$, so auch (mit einem geeigneten $\delta' > 0$) für alle $u \in \overline{\mathcal{A}}$: Zu $u \in \overline{\mathcal{A}}$ wähle $u' \in \mathcal{A}$ mit $\|u - u'\|_{L^p} < \varepsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \left\| u(\cdot + h) - u \right\|_{L^p} \\ & \leq \underbrace{\left\| u(\cdot + h) - u'(\cdot + h) \right\|_{L^p}}_{< \varepsilon} + \underbrace{\left\| u'(\cdot + h) - u' \right\|_{L^p}}_{< \varepsilon^{1/p}} + \underbrace{\|u' - u\|_{L^p}}_{< \varepsilon} \\ & = 2\varepsilon + \varepsilon^{1/p}. \end{aligned}$$

Beweis. Wegen obiger Bemerkung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass \mathcal{A} abgeschlossen ist in $L^p(T^n)$, $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

- a) Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ wie in der Bedingung für gleichgradige Stetigkeit. Zu $u \in \mathcal{A}$ setze $u_\delta(x) := \delta^{-n} \int_{T^n} \psi\left(\frac{d(x,y)^2}{\delta^2}\right) u(y) dy$ mit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ wie in der Beweisskizze zu Lemma 1.1.4, also $\text{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$, $\psi > 0$ auf $(-1, 1)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x|^2) dx = 1$. Dann ist $u_\delta \in \mathcal{C}^\infty(T^n) \subset \mathcal{C}^0(T^n)$.

- b) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} |u_\delta(x) - u(x)| &= \left| \delta^{-n} \int_{T^n} \psi\left(\frac{d(x,y)^2}{\delta^2}\right) (u(y) - u(x)) dy \right| \\ &\leq \delta^{-n} \int_{T^n} \psi\left(\frac{d(x,y)^2}{\delta^2}\right) |u(y) - u(x)| dy \end{aligned}$$

1 Analytische Grundlagen

$$= \delta^{-n} \int_{\{|h|<\delta\}} \psi \left(\frac{|h|^2}{\delta^2} \right) |u(x+h) - u(x)| dh.$$

Für die L^p -Norm gilt also:

$$\begin{aligned} & \int_{T^n} |u_\delta(x) - u(x)|^p dx \\ & \leq \int_{T^n} \left| \int_{\{|h|<\delta\}} \delta^{-n} \psi \left(\frac{|h|^2}{\delta^2} \right) |(u(x+h) - u(x))| dh \right|^p dx \\ & \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_{T^n} \left| \left(\int_{\{|h|<\delta\}} \left(\delta^{-n} \psi \left(\frac{|h|^2}{\delta^2} \right) \right)^{(1-\frac{1}{p})p^*} dh \right)^{\frac{1}{p^*}} \right. \\ & \quad \left. \cdot \left(\int_{\{|h|<\delta\}} \delta^{-n} \psi \left(\frac{|h|^2}{\delta^2} \right) |u(x+h) - u(x)|^p dh \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p dx, \end{aligned}$$

mit $\frac{1}{p^*} = 1 - \frac{1}{p}$, also $(1 - \frac{1}{p})p^* = 1$:

$$\begin{aligned} & = \int_{T^n} \int_{\{|h|<\delta\}} \delta^{-n} \psi \left(\frac{|h|^2}{\delta^2} \right) |u(x+h) - u(x)|^p dh dx \\ & \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\{|h|<\delta\}} \int_{T^n} \delta^{-n} \psi \left(\frac{|h|^2}{\delta^2} \right) |u(x+h) - u(x)|^p dx dh \\ & = \int_{\{|h|<\delta\}} \delta^{-n} \psi \left(\frac{|h|^2}{\delta^2} \right) \underbrace{\int_{T^n} |u(x+h) - u(x)|^p dx}_{\leq \sup_{|h|<\delta} \|u(\cdot+h) - u\|_{L^p}^p} dh \\ & \leq \sup_{|h|<\delta} \|u(\cdot+h) - u\|_{L^p}^p \\ & \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist $\|u_\delta - u\|_{L^p} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Damit ist $u_\delta \rightarrow u$ in $L^p(M)$ für $\delta \rightarrow 0$ gezeigt.

c) Zu fixiertem $\delta > 0$ setze $\mathcal{A}_\delta := \{u_\delta \mid u \in \mathcal{A}\}$. \mathcal{A}_δ ist beschränkt in $\mathcal{C}^0(T^n)$, denn

$$|u_\delta(x)| = \left| \int_{T^n} \psi_\delta(h) u(x+h) dh \right|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \|\psi_\delta \cdot u(\cdot + x)\|_{L^1} \\
 &\leq \|\psi_\delta\|_{L^{p^*}} \cdot \underbrace{\|u(\cdot + h)\|_{L^p}}_{=\|u\|_{L^p}} \\
 &\leq C(\delta).
 \end{aligned}$$

d) \mathcal{A}_δ ist gleichgradig stetig: Mit $u_\delta(x) = \int_{T^n} \psi_\delta(x - y)u(y)dy$ ist

$$\begin{aligned}
 |\nabla u_\delta(x)| &\leq \int_{T^n} |\nabla \psi_\delta(x - y)| \cdot |u(y)| dy \\
 &\leq C'(\delta),
 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
 |u_\delta(x) - u_\delta(x')| &= \left| \int_0^1 \underbrace{\frac{d}{dt} u_\delta(tx + (1-t)x')}_{(\nabla u_\delta)(tx+(1-t)x') \cdot (x-x')} dt \right| \\
 &\leq \int_0^1 |(\nabla u_\delta)(tx + (1-t)x')| \cdot |x - x'| dt \\
 &\leq C'(\delta) \cdot |x - x'|.
 \end{aligned}$$

e) Nach Arzela-Ascoli ist somit $\mathcal{A}_\delta \in \mathcal{C}^0(T^n)$ präkompakt. Sei $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{A} . Zeige also: $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Zu $\varepsilon = \frac{1}{k}$ wähle δ_k so dass analog zu b) gilt: $\|u - u_\delta\|_{L^p} \leq \varepsilon$. Für jedes solche δ_k ist \mathcal{A}_{δ_k} präkompakt, daher existiert zu $((u_i)_{\delta_k})_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^0(T^n)$ eine konvergente Teilfolge. Ihren Grenzwert bezeichnen wir mit $u_{\infty,k}$.

Diese konvergenten Folgen können wir auch als Regularisierungen sukzessive gewählter Teilfolgen von $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ wählen: zu einem k sei $(u_i^{(k)})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so dass $((u_i^{(k)})_{\delta_k})_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Zu $k + 1$ wählen wir δ_k wie oben und eine Teilfolge $(u_i^{(k+1)})_{i \in \mathbb{N}}$ von $(u_i^{(k)})_{i \in \mathbb{N}}$, so dass $((u_i^{(k+1)})_{\delta_{k+1}})_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Schreiben wir diese sukzessive Auswahl von Teilfolgen als Folge (indiziert durch k) von Teilfolgen von u_i , so ist die Diagonalfolge $u_k^{(k)}$ eine weitere Teilfolge von u_i , die insbesondere die Konvergenzbedingungen für die δ_k -Regularisierung für alle k erfüllt.

$$\begin{array}{llll}
 u_1, & u_2, & u_3, & \dots \\
 \color{red}{u_1^{(1)}}, & u_2^{(1)}, & u_3^{(1)}, & \dots & \text{mit } (u_i^{(1)})_{\delta_1} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u_\infty^{(1)} \\
 u_1^{(2)}, & \color{red}{u_2^{(2)}}, & u_3^{(2)}, & \dots & \text{mit } (u_i^{(2)})_{\delta_2} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u_\infty^{(2)} \\
 \vdots & & \vdots & & \\
 u_1^{(k)}, & \dots, & \color{red}{u_k^{(k)}}, & \dots & \text{mit } (u_i^{(k)})_{\delta_k} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u_\infty^{(k)} \\
 \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

1 Analytische Grundlagen

Zeige nun: Die Folge der Grenzwerte $(u_\infty^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in L^p . Fixiere dazu k , wähle $l \geq k$; dann gilt für hinreichend großes j :

$$\begin{aligned} \left\| u_\infty^{(k)} - u_\infty^{(l)} \right\|_{L^p} &\leq \underbrace{\left\| u_\infty^{(k)} - (u_j^{(j)})_{\delta_k} \right\|_{L^p}}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{\left\| (u_j^{(j)})_{\delta_k} - u_j^{(j)} \right\|_{L^p}}_{< \frac{1}{k}} \\ &\quad + \underbrace{\left\| u_j^{(j)} - (u_j^{(j)})_{\delta_l} \right\|_{L^p}}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{\left\| (u_j^{(j)})_{\delta_l} - u_\infty^{(l)} \right\|_{L^p}}_{< \frac{1}{k}} \\ &< \frac{4}{k}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass für Mannigfaltigkeiten endlichen Volumens – also auch für kompakte Mannigfaltigkeiten und insbesondere für T^n – die Abschätzung $\|v\|_{L^p(M)} \leq \text{vol}(M)^{1/p} \cdot \|v\|_{C^0(M)}$ gilt. Da $L^p(T^n)$ vollständig ist, gibt es also ein u_∞ mit $u_\infty^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_\infty$ in $L^p(T^n)$. Zeige nun, dass für die oben konstruierte Folge $(u_j^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ gilt: $u_j^{(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u_\infty$ in $L^p(T^n)$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle k so groß, dass $\|u_\infty - u_\infty^{(k)}\|_{L^p} < \varepsilon$ und $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Dann gilt für hinreichend großes j :

$$\begin{aligned} \left\| u_\infty - u_j^{(j)} \right\|_{L^p} &\leq \underbrace{\left\| u_\infty - u_\infty^{(k)} \right\|_{L^p}}_{< \varepsilon} + \underbrace{\left\| u_\infty^{(k)} - (u_j^{(j)})_{\delta_k} \right\|_{L^p}}_{< \varepsilon} + \underbrace{\left\| (u_j^{(j)})_{\delta_k} - u_j^{(j)} \right\|_{L^p}}_{< \frac{1}{k}} \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Definition 1.2.7. Seien X, Y metrische Räume. Dann heißt eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ *kompakt*, falls für jedes beschränkte $A \subset X$ die Bildmenge $f(A) \subset Y$ präkompakt ist.

Übung 1.2.8

Seien X, Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und Y vollständig. Dann ist $f : X \rightarrow Y$ kompakt \Leftrightarrow für jede beschränkte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ hat die Bildfolge $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Bemerkungen 1.2.9

Seien X, Y, Z Banachräume und $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ stetige lineare Abbildungen. Dann gilt:

1. $A \subset X$ beschränkt $\Rightarrow f(A) \subset Y$ beschränkt.
2. $A \subset X$ präkompakt $\Rightarrow f(A) \subset Y$ präkompakt.
3. Ist f oder g kompakt, so auch $g \circ f$.
4. Falls $\dim(Y) < \infty$, so ist nach *Heine-Borel* f kompakt.

Proposition 1.2.10

Sei $T^n = \mathbb{R}^n / \Gamma$ ein flacher Torus. Für jedes $q \in [1, n)$ und jedes $p \geq 1$ mit $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ ist die Einbettung $H^{1,q}(T^n) \subset L^p(T^n)$ kompakt.

Beweis.

- a) Setze $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$. Nach Satz 1.1.13 und Bemerkung 1.1.19 haben wir für $1 \leq p \leq p_1$ eine stetige Einbettung $H^{1,q}(T^n) \subset L^p(T^n)$. Zu zeigen ist also: für $1 \leq p < p_1$ ist die Einbettung kompakt. Sei also $\mathcal{A} \subset H^{1,q}(T^n)$ beschränkt. Dann ist auch \mathcal{A} auch in $L^p(T^n)$ beschränkt. Es gibt also ein $C_1 > 0$ so dass $\|u\|_{L^p(T^n)} \leq C_1$ und $\|u\|_{H^{1,q}(T^n)} \leq C_1$ für alle $u \in \mathcal{A}$.
- b) Wir überprüfen das Kompaktheitskriterium aus Proposition 1.2.5 zunächst im Fall $p = 1$: Für alle $u \in C^\infty(T^n)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{T^n} |u(x+h) - u(x)| dx &= \int_{T^n} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x+th) dt \right| dx \\
 &\leq \int_{T^n} \int_0^1 |(\nabla u)(x+th) \cdot h| dt dx \\
 &\leq |h| \int_{T^n} \int_0^1 |(\nabla u)(x+th)| dt dx \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} |h| \int_0^1 \int_{T^n} |(\nabla u)(x+th)| dx dt \\
 &= |h| \cdot \|\nabla u\|_{L^1(T^n)}
 \end{aligned}$$

1 Analytische Grundlagen

$$\begin{aligned} &\leq |h| \cdot \text{vol}(T^n)^{\frac{q-1}{q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q(T^n)} \\ &\leq |h| \cdot \text{vol}(T^n)^{\frac{q-1}{q}} \cdot \|u\|_{H^{1,q}(T^n)}. \end{aligned}$$

In der resultierenden Ungleichung

$$\|u(\cdot + h) - u\|_{L^1(T^n)} \leq |h| \cdot C_2 \cdot \|u\|_{H^{1,q}(T^n)} \quad (1.10)$$

sind beide Seiten stetig bzgl. der $H^{1,q}$ -Norm, denn $H^{1,q}(T^n) \subset L^1(T^n)$. Da $C^\infty(T^n) \subset H^{1,q}(T^n)$ dicht ist, gilt die Abschätzung (1.10) auch für alle $u \in H^{1,q}(T^n)$. Für alle $u \in \mathcal{A}$ gilt folglich $\|u(\cdot + h) - u\|_{L^1(T^n)} \leq |h| \cdot C_2 \cdot C_1$. Nach dem Kompaktheitskriterium aus Proposition 1.2.5 ist daher $\mathcal{A} \subset L^1(T^n)$ präkompakt.

- c) Sei nun $p \in (1, p_1)$. Setze $r := p \frac{p_1-1}{p_1-p} > p \geq 1$ und $r' := p \frac{p_1-1}{p-1} > p \geq 1$. Dann gilt $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{p}$ und nach der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung somit für alle $u \in L^p(T^n)$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p} &= \left\| |u|^{\frac{1}{r}} \cdot |u|^{1-\frac{1}{r}} \right\|_{L^p} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \left\| |u|^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^r} \cdot \left\| |u|^{1-\frac{1}{r}} \right\|_{L^{r'}} \\ &= \|u\|_{L^1}^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_{T^n} |u|^{(1-\frac{1}{r})r'} \right)^{\frac{1}{r'}} \\ &= \|u\|_{L^1}^{\frac{1}{r}} \cdot \|u\|_{L^{p_1}}^{\frac{p_1}{r}}. \end{aligned}$$

Sei nun $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{A} . Diese konvergiert (nach evtl. Übergang zu einer Teilfolge) in $L^1(T^n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|u_i - u_j\|_{L^p} &\leq \|u_i - u_j\|_{L^1}^{\frac{1}{r}} \cdot \|u_i - u_j\|_{L^{p_1}}^{\frac{p_1}{r}} \\ &\leq C_3 \|u_i - u_j\|_{L^1}^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

da $\mathcal{A} \subset L^{p_1}(T^n)$ beschränkt. Folglich ist $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine L^p -Cauchyfolge, also konvergent. □

Nun übertragen wir die vorstehende Proposition von $M = T^n$ auf beliebige kompakte Mannigfaltigkeiten:

Proposition 1.2.11

Sei (M, g) eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Dann ist für jedes $q \in [1, n)$ und jedes $p \in [1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ die Einbettung $H^{1,q}(M) \subset L^p(M)$ kompakt.

Beweis.

- a) Wir überdecken M durch Karten (U_j, Φ_j, V_j) , $j = 1 \dots N$, die ihrerseits Einschränkungen von Karten (U'_j, Φ'_j, V'_j) , $j = 1 \dots N$, sind mit $U_j \Subset U'_j$, $V_j \Subset V'_j$ und $\Phi_j = \Phi'_j|_{V_j}$, $j = 1 \dots N$. Dann sind die Koordinatengebiete $V_j \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, und die Funktionen $g_{kl}^{(j)}$ sowie alle ihre Ableitungen sind beschränkt auf V_j , $j = 1 \dots N$. Es gibt also ein $C_1 > 0$ so dass für alle $u \in L^p(U_j)$ bzw. $u \in H^{1,q}(M)$, $j = 1 \dots N$, gilt:

$$\frac{1}{C_1} \cdot \|u \circ \Phi_j\|_{L^p(V_j)} \leq \|u\|_{L^p(U_j)} \leq C_1 \cdot \|u \circ \Phi_j\|_{L^p(V_j)} \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{C_1} \cdot \|u \circ \Phi_j\|_{H^{1,q}(V_j)} \leq \|u\|_{H^{1,q}(U_j)} \leq C_1 \cdot \|u \circ \Phi_j\|_{H^{1,q}(V_j)}. \quad (1.12)$$

Sei $(\alpha_j)_{j=1 \dots N}$ eine der Überdeckung $(U_j)_{j=1 \dots N}$ zugeordnete Teilung der Eins auf M , d.h. $\alpha_j \in C^\infty(M)$ mit $\text{supp}(\alpha_j) \subset U_j$, $0 \leq \alpha_j \leq 1$ und $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$. Wähle ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ so groß, dass $\bigcup_{j=1}^N V_j \subset \mathcal{F}$ für einen Fundamentalbereich \mathcal{F} .

- b) Sei nun $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $H^{1,q}(M)$. Dann ist gibt es ein $C_2 > 0$ mit $\|u_i\|_{H^{1,q}(M)} \leq C_2$, $i \in \mathbb{N}$, also auch ein $C_3 > 0$ mit $\|\alpha_j \cdot u_i\|_{H^{1,q}(M)} \leq C_2$, $i \in \mathbb{N}, j = 1 \dots N$. Mit der Abschätzung (1.12) gilt dann (nach Fortsetzung von $(\alpha_j u_i) \circ \Phi_j$ durch 0 auf \mathcal{F} bzw. \mathbb{R}^n/Γ):

$$\|(\alpha_j u_i) \circ \Phi_j\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} = \|(\alpha_j u_i) \circ \Phi_j\|_{H^{1,q}(V_j)} \leq C_1 \|\alpha_j u_i\|_{H^{1,q}(U_j)} \leq C_1 \cdot C_2.$$

Proposition 1.2.10 liefert nach N -maligem Übergang zu einer Teilfolge: $(\alpha_j u_i) \circ \Phi_j \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n/\Gamma)} v_j$, $j = 1 \dots N$. Mit $\text{supp}((\alpha_j u_i) \circ \Phi_j) \subset V_j$ ist auch $\text{supp}(v_j) \subset V_j$. Setze $v_j \circ \Phi_j^{-1}$ durch 0 auf ganz M fort und setze dann $v := \sum_{j=1}^N v_j \circ \Phi_j^{-1} \in L^p(M)$. Dann gilt offenbar $(\alpha_j u_i) \xrightarrow{L^p(U_j)} v_j \circ \Phi_j^{-1}$ und folglich $\sum_{j=1}^N \alpha_j u_i \xrightarrow{L^p(M)} v_j \circ \Phi_j^{-1} = v$.

□

Satz 1.2.12 (Rellich-Kondrakhov, 1. Teil)

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Dann ist für jedes $p, q \geq 1$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{l}{n}$ die Einbettung $H^{k+l,q}(M) \subset H^{k,p}(M)$ kompakt.

Beweis. Die Proposition 1.2.11 liefert bereits den Spezialfall $k = 0, l = 1$.

- a) Betrachte zunächst den Fall $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig, $l = 1$. Sei $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $H^{k+1,q}(M)$. Dann sind also $u_i, \nabla u_i, \dots, \nabla^k u_i \in H^{1,q}(M)$ beschränkt. Nach Übergang zu Teilfolgen konvergieren also $u_i \xrightarrow{L^p(M)} v^{(0)}, \dots, \nabla^k u_i \xrightarrow{L^p(M)} v^{(k)}$. Daher ist $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $H^{k,p}(M)$, folglich konvergent.
- b) Seien nun $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{array}{llll}
 H^{k+l,q}(M) & \begin{array}{l} \text{stetig} \\ \subset \end{array} & H^{k+l-1,p_1}(M) & \text{für } \frac{1}{p_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \\
 & \begin{array}{l} \text{stetig} \\ \subset \end{array} & H^{k+l-2,p_2}(M) & \text{für } \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n} \\
 & \vdots & & \\
 & \begin{array}{l} \text{stetig} \\ \subset \end{array} & H^{k+1,p_{l-1}}(M) & \text{für } \frac{1}{p_{l-1}} = \frac{1}{q} - \frac{l-1}{n} \\
 & \begin{array}{l} \text{kompakt} \\ \subset \end{array} & H^{k,p}(M) & \text{für } \frac{1}{p} > \frac{1}{p_l} = \frac{1}{q} - \frac{l}{n}.
 \end{array}$$

Nach Bemerkung 1.2.9 ist die Verkettung stetiger Abbildungen mit einer kompakten wiederum kompakt. □

Bemerkung 1.2.13. Der Satz von Rellich-Kondrakhov ist falsch für $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$. Als Gegenbeispiel wählen wir etwa $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(u) \subset B_1(0)$ und $u \not\equiv 0$. Setze dann $u_j(x^1, \dots, x^n) := u(x^1 - 2j, x^2, \dots, x^n)$. Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes in \mathbb{R}^n ist $\|u_j\|_{H^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^{k,p}(\mathbb{R}^n)}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Daher ist die Folge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt in $H^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ für alle k, p . Da die u_i disjunkten Träger haben, gilt andererseits für $i \neq j$:

$$\|u_i - u_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \int_{\mathbb{R}^n} |u_i - u_j|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u_i|^q dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u_j|^q dx = 2\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q > 0.$$

Daher ist keine Teilfolge von $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L^q(\mathbb{R}^n)$, folglich auch in keinem der Sobolev-Räume $H^{l,q}(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 1.2.14. Für geeignete gewichtete Sobolev-Räume auf \mathbb{R}^n gibt es ähnliche Kompaktheitssätze wie Satz 1.2.12.

1.3 Der Gauß'sche Divergenzatz

Sei ω eine differenzierbare 1-Form. In lokalen Koordinaten schreibt sich ω dann als $\omega(x) = \omega_j(x)dx^j$.

Definition 1.3.1. Das *Kodifferential* von ω ist die Funktion, die in lokalen Koordinaten gegeben ist durch

$$\delta(\omega) := -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \omega_j \right), \quad (1.13)$$

wobei $\det(g) = \det((g_{ij})_{i,j=1\dots n})$.

Beispiel 1.3.2. In kartesischen Koordinaten auf $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ ist

$$\delta(\omega) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}.$$

Übung 1.3.3

Zeigen Sie, dass $\delta(\omega)$ wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

Bemerkung 1.3.4. Ist (M, g) eine beliebige riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$, und sind x^1, \dots, x^n riemannsche Normalkoordinaten um p , so gilt:

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} + O(|x|^2) \\ \Rightarrow g^{ij}(x) &= \delta^{ij} + O(|x|^2) \\ \Rightarrow \sqrt{\det(g)} &= 1 + O(|x|^2) \\ \Rightarrow (\delta\omega)(p) &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(0). \end{aligned}$$

Lemma 1.3.5

Seien g, \bar{g} konform äquivalente riemannsche Metriken auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M , d.h. $\bar{g} = f^2 \cdot g$ mit $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$. Dann gilt für alle differenzierbaren 1-Formen ω :

$$\delta_{\bar{g}}\omega = f^{-2} \left(\delta_g\omega - (n-2) \left\langle \frac{\nabla f}{f}, \omega \right\rangle_g \right).$$

Beweis. Wir berechnen in lokalen Koordinaten: $\bar{g}_{ij} = f^2 \cdot g_{ij} \Rightarrow \bar{g}^{ij} = f^{-2} \cdot g^{ij}$ und $\sqrt{\det(\bar{g})} = f^n \cdot \sqrt{\det(g)}$. Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{g}}\omega &= -\frac{1}{\sqrt{\det(\bar{g})}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(\bar{g})} \bar{g}^{ij} \omega_j \right) \\ &= -\frac{1}{f^n \sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(f^n \sqrt{\det(g)} f^{-2} g^{ij} \omega_j \right) \\ &= -\frac{f^{n-2} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\det(g)} g^{ij} \omega_j) + \sqrt{\det(g)} g^{ij} \omega_j \frac{\partial}{\partial x^i} f^{n-2}}{f^n \sqrt{\det(g)}} \\ &= f^{-2} \delta_g \omega - f^{-n} g^{ij} \omega_j \cdot (n-2) f^{n-3} \frac{\partial}{\partial x^i} f \\ &= f^{-2} (\delta_g \omega - f^{-1} \langle \nabla f, \omega \rangle_g). \end{aligned}$$

□

Definition 1.3.6. Für $u \in C^2(M)$ setze $\Delta u := \delta \nabla u$. Δ heißt Laplace-Operator.

In lokalen Koordinaten ist der Laplace-Operator gegeben durch:

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i=1}^n \partial_i \left(\sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \partial_j u \right).$$

Hierbei und im Folgenden setzen wir immer $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

In kartesischen Koordinaten von $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ ist $\Delta u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial (x^i)^2}$. Wie oben gilt daher auch auf einer beliebigen riemannschen Mannigfaltigkeit in riemannschen Normalkoordinaten um p : $(\Delta u)(p) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial (x^i)^2}(0)$. Aus Lemma 1.3.5 folgt direkt:

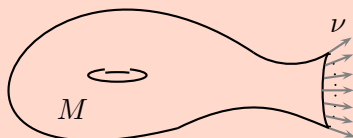
Lemma 1.3.7

Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ist $\bar{g} = f^2 \cdot g$, $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, so ist für alle $u \in C^2(M)$:

$$\Delta_{\bar{g}}u = f^{-2} \left(\Delta_g u - (n-2) \left\langle \frac{\nabla f}{f}, \nabla u \right\rangle_g \right).$$

Satz 1.3.8 (Gauß'scher Divergenzsatz)

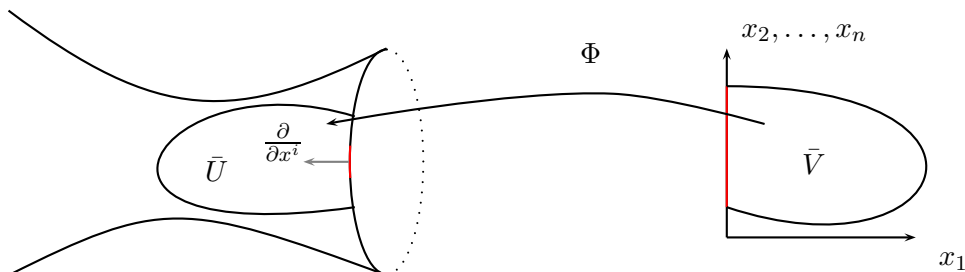
Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und ν das äußere Einheits-Normalenfeld.



Dann gilt für alle stetig differenzierbaren 1-Formen ω mit kompaktem Träger:

$$\int_M \delta\omega \, d\text{vol} = - \int_{\partial M} \omega(\nu) \, d\text{vol}_{\partial M}.$$

Beweis. Betrachte Karten $(U, \Phi, V = (0, a)^n)$, die Einschränkungen von Karten (U', Φ', V') sind, so dass $[0, a]^n \subset V$. Im Fall $\bar{U} \cap \partial M \neq \emptyset$ seien x^2, \dots, x^n Koordinaten auf ∂M , so dass gilt: $\Phi'(\{0\} \times [0, a]^{n-1}) = \bar{U} \cap \partial M$ und $\frac{\partial}{\partial x^1}(0, x^2, \dots, x^n) \perp \partial M$, $|\frac{\partial}{\partial x^1}(0, x^2, \dots, x^n)| = 1$.



1 Analytische Grundlagen

In diesen Koordinaten hat dann die Metrik längs des Randes ∂M die Gestalt

$$(g_{ij})_{i,j=1\dots n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (g_{ij})_{i,j=2\dots n} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $(g_{ij})_{i,j=2\dots n}$ die von g induzierte Metrik des Randes.

Eine endliche Auswahl (U_i, Φ_i, V_i) , $i = 1 \dots N$ solcher Karten überdeckt bereits $\text{supp}(\omega)$. Mittels einer Teilung der Eins zu dieser endlichen Überdeckung von $\text{supp}(\omega)$ können wir ω zerlegen in $\omega = \sum_{k=1}^N \omega_k$ mit $\text{supp}(\omega_k) \subset U_k$. Da die Integrale additiv sind, genügt es, die Behauptung für den Fall zu beweisen, dass $\text{supp}(\omega) \subset U$ für eine solche Karte $(U, \Phi, (0, a)^n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_M \delta\omega \, d\text{vol} &= \int_{[0,a]^n} -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \partial_i \left(\sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \omega_j \right) \sqrt{\det(g)} \, dx^1 \dots dx^n \\ &= - \int_{[0,a]^n} \partial_i \left(\sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \omega_j \right) \, dx^1 \dots dx^n \\ &= - \int_{[0,a]^{n-1}} \left(\sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \omega_j \right) \Big|_{x_i=0}^a \, dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n. \end{aligned}$$

Liegt \bar{U} im Innern von M , so verschwindet ω an den Randkomponenten $x_i = 0$ und $x_i = a$ von $[0, a]^n$, und es folgt $\int_M \delta\omega = 0$. Im anderen Fall haben wir (mit $\omega_1 = \omega(\partial_1) = -\omega(\nu)$ längs ∂M):

$$\begin{aligned} \int_M \delta\omega \, d\text{vol} &= \int_{[0,a]^{n-1}} \sqrt{\det(g)} \cdot g^{1j} \omega_j \, dx^2 \dots dx^n \\ &= \int_{[0,a]^{n-1}} \omega_1 \sqrt{\det(g^{\partial M})} \, dx^2 \dots dx^n \\ &= - \int_{\partial M} \omega(\nu) \, d\text{vol}_{\partial M}. \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 1.3.9

Sei $u \in C^1(M)$ und ω eine stetig differenzierbare 1-Form. Dann gilt:

$$\delta(u \cdot \omega) = u \cdot \delta\omega - \langle \omega, \nabla u \rangle. \quad (1.14)$$

Beweis. Wir berechnen in lokalen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \delta(u \cdot \omega) &= -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \partial_i \left(\sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \cdot u \omega_j \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} u \partial_i \left(\sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \omega_j \right) - g^{ij} \omega_j \partial_i u \\ &= u \delta(\omega) - \langle \omega, \nabla u \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Folgerung 1.3.10 (Green'sche Formeln)

Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und äußerem Einheitsnormalenfeld ν . Sei $u \in \mathcal{C}^1(M)$, ω eine stetig differenzierbare 1-Form und $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(\omega)$ kompakt. Dann gilt:

$$\int_M u \cdot \delta \omega \, d\text{vol} = \int_M \langle \nabla u, \omega \rangle \, d\text{vol} - \int_{\partial M} u \cdot \omega(\nu) \, d\text{vol}_{\partial M}. \quad (1.15)$$

Sei $u \in \mathcal{C}^1(M)$, $v \in \mathcal{C}^2(M)$ und $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(v)$ kompakt. Dann gilt:

$$\int_M u \Delta v \, d\text{vol} = \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, d\text{vol} - \int_{\partial M} u \cdot \nabla_\nu v \, d\text{vol}_{\partial M}. \quad (1.16)$$

Seien $u, v \in \mathcal{C}^2(M)$ und $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(v)$ kompakt. Dann gilt:

$$\int_M u \Delta v \, d\text{vol} = \int_M v \Delta u \, d\text{vol} + \int_{\partial M} (v \cdot \nabla_\nu u - u \cdot \nabla_\nu v) \, d\text{vol}_{\partial M}. \quad (1.17)$$

Proof. (1.15) erhält man durch Integration von (1.14) aus dem Divergenzsatz. (1.16) folgt aus (1.15) mit $\omega = \nabla v$. (1.17) folgt aus (1.16) durch Antisymmetrisieren in u und v . □

Bemerkung 1.3.11. Die Anwendung einer der Formeln (1.15–1.17) bezeichnet man als *partielle Integration*.

Lemma 1.3.12

Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, seien $u, v \in \mathcal{C}^2(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Dann gilt:

$$\Delta(u \cdot v) = u \cdot v - 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle + v \cdot u \quad (1.18)$$

$$\Delta(f \circ u) = (f' \circ u) \cdot \Delta u - (f'' \circ u) \cdot |\nabla u|^2 \quad (1.19)$$

Beweis. Für (1.18) berechnen wir mit Hilfe von (1.14):

$$\begin{aligned} \Delta(u \cdot v) &= \delta(\nabla(u \cdot v)) \\ &= \delta((\nabla u) \cdot v + u \cdot \nabla v) \\ &= \delta(\nabla u) \cdot v - \langle \nabla u, \nabla v \rangle + u \cdot \delta(\nabla v) - \langle \nabla u, \nabla v \rangle. \end{aligned}$$

Für (1.19) erhalten wir ganz analog, ebenfalls mit (1.14):

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ u) &= \delta(\nabla(f \circ u)) \\ &= \delta((f' \circ u) \cdot \nabla u) \\ &= (f' \circ u) \cdot \delta(\nabla u) - \langle \nabla(f' \circ u), \nabla u \rangle \\ &= (f' \circ u) \cdot \delta(\nabla u) - \langle (f'' \circ u) \cdot \nabla u, \nabla u \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

1.4 Hölder-Räume

Definition 1.4.1. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $\varrho : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive glatte Funktion (*Gewichtsfunktion*) und $\beta \in \mathbb{R}$ (*Gewicht*). Für $u \in \mathcal{C}^k(M)$ setze

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{C}_\beta^k} &:= \sum_{j=0}^k \sup_{x \in M} \varrho^{-\beta+j} |\nabla^j u|(x) \\ \mathcal{C}_\beta^k(M, \varrho) &:= \left\{ u \in \mathcal{C}^k(M) \mid \|u\|_{\mathcal{C}_\beta^k} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.4.2. Ist $u \in \mathcal{C}_\beta^0(M, \varrho)$, so ist $u = O(\varrho^\beta)$ für $\varrho \rightarrow \infty$.

Bemerkung 1.4.3. $(\mathcal{C}_\beta^k(M, \varrho), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_\beta^k})$ ist ein Banachraum.

Übung 1.4.4

Beweisen Sie die Aussage 1.4.3 für $k = 0$.

Definition 1.4.5. Seien ϱ, β wie in 1.4.1; ist zusätzlich $0 < \alpha < 1$, so setze für $u \in \mathcal{C}^k(M)$:

$$\|u\|_{\mathcal{C}_\beta^{k,\alpha}} := \|u\|_{\mathcal{C}_\beta^k} + \sup_{\substack{x \in M \\ y \in B_{\text{inj}(x)}^*}} \left\{ \min\{\varrho(x), \varrho(y)\}^{-\beta+k+\alpha} \cdot \frac{|\tau_x^y \nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}$$

$$\mathcal{C}_\beta^{k,\alpha}(M, \varrho) := \left\{ u \in \mathcal{C}_\beta^k(M, \varrho) \mid \|u\|_{\mathcal{C}_\beta^{k,\alpha}} < \infty \right\}.$$

Hierbei ist $B_{\text{inj}(x)}^* := B_{\text{inj}(x)}(x) - \{x\}$ der größte punktierte Ball um x , auf dem riemannsche Normalkoordinaten existieren, und τ_x^y bezeichnet die Parallelverschiebung von x nach y längs der eindeutigen kürzesten Geodätischen. Funktionen in $\mathcal{C}^{0,\alpha}(M)$ heißen α -Hölder-stetig.

Bemerkung 1.4.6. $(\mathcal{C}_\beta^{k,\alpha}(M, \varrho), \|u\|_{\mathcal{C}_\beta^{k,\alpha}})$ ist ein Banachraum.

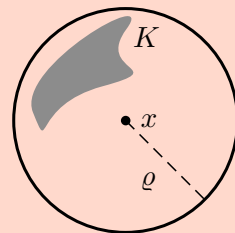
Proposition 1.4.7 (Poincaré-Ungleichung)

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n , sei $0 < \varrho_0 < \text{inj}(M)$ und sei $q > n$.

Dann gibt es ein $C > 0$, so dass für alle $0 < \varrho \leq \varrho_0$, für jedes $x \in M$ und für jede kompakte Teilmenge $K \subset B_\varrho(x)$ mit positivem Volumen gilt:

$$\left| u(x) - \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K u(z) \, d\text{vol}(z) \right| \leq \frac{C \cdot \varrho}{\text{vol}(K)^{1/q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \tag{1.20}$$

für alle $u \in \mathcal{C}^1(M)$.



1 Analytische Grundlagen

Beweis. Sei $c_{x,z} : [0, 1] \rightarrow M$ die eindeutige kürzeste Geodätische von x nach z , parametrisiert auf dem Einheitsintervall. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 & \left| u(x) - \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K u(z) \, d\text{vol}(z) \right| \\
 &= \frac{1}{\text{vol}(K)} \left| \int_K (u(x) - u(z)) \, d\text{vol}(z) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K |u(x) - u(z)| \, d\text{vol}(z) \\
 &= \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(c_{x,z}(t)) \, dt \right| \, d\text{vol}(z) \\
 &\leq \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K \int_0^1 |\langle \nabla u \circ c_{x,z}, \dot{c}_{x,z} \rangle| \, dt \, d\text{vol}(z) \\
 &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K \int_0^1 |\nabla u \circ c_{x,z}| \cdot \underbrace{|\dot{c}_{x,z}|}_{=d(x,z) \leq \varrho} \, dt \, d\text{vol}(z) \\
 &\leq \frac{\varrho}{\text{vol}(K)} \int_K \int_0^1 |\nabla u \circ c_{x,z}| \, dt \, d\text{vol}(z) \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{\varrho}{\text{vol}(K)} \int_0^1 \int_K |\nabla u \circ c_{x,z}| \, d\text{vol}(z) \, dt.
 \end{aligned}$$

Setze nun $K_t := \{c_{x,z}(t) \mid z \in K\}$. In riemannschen Normalkoordinaten um x ist $\Phi : z \mapsto c_{x,z}(t)$ gegeben durch $\zeta \mapsto t \cdot \zeta$. Setze nun $\zeta' := t \cdot \zeta$. Für die euklidischen Volumenelemente gilt dann $d\zeta = \left| \det\left(\frac{d\zeta}{d\zeta'}\right) \right| \cdot d\zeta' = t^{-n} \cdot d\zeta'$, also für die riemannschen Volumenelemente $\Phi_* d\text{vol} \leq C_1 \cdot t^{-n} d\text{vol}$. Mit dem Transformationssatz erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
 \int_K |\nabla u(c_{x,z}(t))| \, d\text{vol}(z) &\leq C_1 \cdot t^{-n} \int_{K_t} |\nabla u(z')| \, d\text{vol}(z') \\
 &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} C_1 \cdot t^{-n} \|\nabla u\|_{L^q(K_t)} \cdot \underbrace{(\text{vol}(K_t))^{1/q^*}}_{\leq C_2 \cdot t^n \cdot \text{vol}(K)} \\
 &\leq C_3 \cdot t^{-n+n/q^*} \cdot \text{vol}(K)^{1/q^*} \cdot \|\nabla u\|_{L^q(M)}
 \end{aligned}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned}
 \left| u(x) - \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K u(z) \, d\text{vol}(z) \right| &\leq \varrho \cdot C_3 \cdot (\text{vol}(K))^{-1+1/q^*} \int_0^1 t^{-n+n/q^*} \, dt \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \\
 &= \varrho \cdot C_3 \cdot (\text{vol}(K))^{-1/q} \underbrace{\int_0^1 t^{-n/q} \, dt}_{< \infty, \text{ da } q > n} \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \\
 &= C_4 \cdot \frac{\varrho}{\text{vol}(K)^{1/q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Bemerkungen 1.4.8

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit.

1. Für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ definiert

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k} + \sup_{\substack{x \neq y \\ d(x,y) \leq \varepsilon}} \frac{|\tau_x^y \nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{d(x,y)^\alpha}$$

eine zu $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}}$ äquivalente Norm. Denn für $x, y \in M$ mit $d(x, y) > \varepsilon$ gilt:

$$\frac{|\tau_x^y \nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{d(x,y)^\alpha} < \varepsilon^{-\alpha} \cdot 2 \|\nabla^k u\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon^{-\alpha} \cdot 2 \|u\|_{\mathcal{C}^k}.$$

2. Für $0 < \alpha' < \alpha < 1$ haben wir stetige Einbettungen $\mathcal{C}^{k,\alpha}(M) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha'}(M)$, denn

$$\begin{aligned}
 \frac{|\tau_x^y \nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{d(x,y)^{\alpha'}} &= \frac{|\tau_x^y \nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{d(x,y)^\alpha} \cdot d(x,y)^{\alpha-\alpha'} \\
 &\leq \text{diam}(M)^{\alpha-\alpha'} \cdot \frac{|\tau_x^y \nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{d(x,y)^\alpha}.
 \end{aligned}$$

Satz 1.4.9 (Sobolev'scher Einbettungssatz, 2. Teil)

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n . Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$, sei $0 < \alpha < 1$ und $1 \leq q < \infty$ mit $\frac{1}{q} \leq \frac{l-\alpha}{n}$. Dann haben wir stetige Einbettungen

$$H^{k+l,q}(M) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}(M).$$

1 Analytische Grundlagen

Beweis. Wir beweisen den Satz für den Fall $n \neq 2$. Für $n = 2$ siehe Übung 1.4.10.

- a) Es genügt, den Fall $k = 0$ zu betrachten, denn Aussage für $k > 0$ folgt durch Anwendung des Falles $k = 0$ auf u und $\nabla u, \dots, \nabla^k u$.
- b) Es genügt ferner, die Aussage für $l = 1$ zu beweisen, dann nach Satz 1.1.21 haben wir dann eine Verkettung stetiger Einbettungen

$$\begin{aligned} H^{l,q}(M) &\subset H^{l-1,q_1}(M) && \text{für } \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \\ &\vdots \\ &\subset H^{1,q_{l-1}}(M) && \text{für } \frac{1}{q_{l-1}} = \frac{1}{q} - \frac{l-1}{n} \\ &\subset \mathcal{C}^{k,\alpha} && \text{für } \frac{1}{q_{l-1}} \leq \frac{1-\alpha}{n} \text{ d.h. für } \frac{1}{q} \leq \frac{l-\alpha}{n}. \end{aligned}$$

- c) In riemannschen Normalkoordinaten um x_0 gilt für $r = d(x, x_0) = |x|$:

$$\begin{aligned} \Delta(r^2)|_{x_0} &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(x_j)^2}{\partial(x_i)^2} \\ &= -2n. \end{aligned}$$

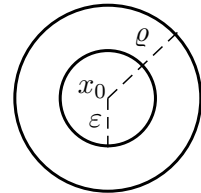
Damit ist also $\Delta(r^2) = -2n + O(r)$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist also

$$\begin{aligned} \Delta(r^\alpha) &= \Delta((r^2)^{\alpha/2}) \\ &= \frac{\alpha}{2} \cdot (r^2)^{\alpha/2-1} \cdot \Delta(r^2) - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \cdot (r^2)^{\alpha/2-2} |\nabla(r^2)|^2 \\ &= \frac{\alpha}{2} r^{\alpha-2} \cdot (-2n + O(r)) - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \cdot r^{\alpha-4} \cdot 4r^2 \\ &= -\alpha n \cdot r^{\alpha-2} + O(r^{\alpha-1}) - \alpha(\alpha-2) \cdot r^{\alpha-2} \\ &= -\alpha(n + \alpha - 2)r^{\alpha-2} + O(r^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

Speziell für $\alpha = 2 - n$ ist also:

$$\Delta(r^{2-n}) = O(r^{1-n}) \quad (r \searrow 0) \quad (1.21)$$

- d) Fixiere nun $0 < \varrho < \text{inj}(M)$ und einen Punkt $x_0 \in M$. Für $0 < \varepsilon < \varrho$ setze $A_\varepsilon := \overline{B}_\varrho(x_0) - B_\varepsilon(x_0)$. Für $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\text{supp}(u) \subset B_\varrho(x_0)$ liefert (1.16):



$$\int_{\partial A_\varepsilon} u \cdot \nabla_\nu r^{2-n} \, d\text{vol}_{\partial A_\varepsilon} = \int_{A_\varepsilon} \langle \nabla u, \nabla r^{2-n} \rangle \, d\text{vol} - \int_{A_\varepsilon} u \Delta r^{2-n} \, d\text{vol} \quad (1.22)$$

d₁) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial A_\varepsilon} u \nabla_\nu r^{2-n} \, d\text{vol}_{\partial A_\varepsilon} &= \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \cdot \nabla_{-\text{grad } r} r^{2-n} \, d\text{vol}_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \\
 &= \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \cdot (2-n) r^{1-n} \cdot (-1) \, d\text{vol}_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \\
 &= (n-2) \cdot \varepsilon^{1-n} \cdot \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \, d\text{vol}_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \\
 &\longrightarrow c_n \cdot u(x_0)
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

An dieser Stelle ist es wichtig zu bemerken, dass $c_n \neq 0$, da $n \neq 2$.

d₂) Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{A_\varepsilon} \langle \nabla u, \nabla r^{2-n} \rangle \, d\text{vol} \right| &\leq \int_{A_\varepsilon} |\nabla u| \cdot |(2-n)r^{1-n}| \, d\text{vol} \\
 &\leq |n-2| \cdot \|\nabla u\|_{L^q(A_\varepsilon)} \cdot \|r^{1-n}\|_{L^{q^*}(A_\varepsilon)}.
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 \|r^{1-n}\|_{L^{q^*}(A_\varepsilon)}^{q^*} &= \int_{A_\varepsilon} (r^{1-n})^{q^*} \, d\text{vol} \\
 &\leq C_1 \cdot \int_\varepsilon^\varrho (r^{1-n})^{q^*} \cdot r^{n-1} \, dr \\
 &= C_1 \cdot \int_\varepsilon^\varrho r^{(n-1)(1-q^*)} \, dr
 \end{aligned}$$

beschränkt für $\varepsilon \searrow 0$, da $(n-1)(1-q^*) > -1$ wegen $\frac{1}{q} < \frac{1}{n}$. Es folgt

$$\left| \int_{A_\varepsilon} \langle \nabla u, \nabla r^{2-n} \rangle \, d\text{vol} \right| \leq C_2 \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \tag{1.24}$$

mit einer Konstanten C_2 , die nicht von ε abhängt.

d₃) Analog ist

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{A_\varepsilon} u \cdot \underbrace{\Delta(r^{2-n})}_{O(r^{1-n})} \, d\text{vol} \right| &\leq C_3 \cdot \left| \int_{A_\varepsilon} u \cdot r^{1-n} \, d\text{vol} \right| \\
 &\leq C_4 \cdot \|u\|_{L^q} \cdot \|r^{1-n}\|_{L^{q^*}(A_\varepsilon)} \\
 &\leq C_5 \cdot \|u\|_{L^q}
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

1 Analytische Grundlagen

Einsetzen von (1.23), (1.24) und (1.25) in (1.22) und der Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ liefern:

$$|u(x_0)| \leq C_6 \cdot \|u\|_{H^{1,q}}.$$

Man beachte, dass es hier wichtig war, dass wegen $n \neq 2$ die Konstante c_n in (1.23) nicht verschwindet.

- e) Sei nun $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ohne Bedingung an $\text{supp}(u)$. Wähle eine glatte Abschneidefunktion $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\chi(t) \equiv 1$ für $t \leq \frac{1}{2}$, $1 \geq \chi(t) \geq 0$ für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ und $\chi(t) \equiv 0$ für $t \geq 1$ und setze $\tilde{u}(x) := \chi\left(\frac{d(x,x_0)}{\varrho}\right) \cdot u(x)$. Damit erhalten wir:

$$|u(x_0)| = |\tilde{u}(x_0)| \leq C_6 \cdot \|\tilde{u}\|_{H^{1,q}} \leq C_7 \cdot \|u\|_{H^{1,q}}.$$

Maximieren über $x_0 \in M$ liefert also

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0} \leq C_7 \cdot \|u\|_{H^{1,q}}. \quad (1.26)$$

- f) Sei nun $u \in H^{1,q}(M)$. Wähle $u_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $u_i \rightarrow u$ in $H^{1,q}(M)$. Dann ist $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H^{1,q}(M)$, also mit (1.26) auch eine Cauchy-Folge in $\mathcal{C}^0(M)$. Da $\mathcal{C}^0(M)$ vollständig ist, gibt es also ein $v \in \mathcal{C}^0(M)$ mit $u_i \rightarrow v$ in $\mathcal{C}^0(M)$. Die Konvergenz $u_i \rightarrow v$ ist gleichmäßig, also insbesondere auch punktweise. Andererseits konvergiert u_i in $H^{1,q}(M)$, also auch in $L^q(M)$ gegen u , und dies impliziert punktweise Konvergenz fast überall. Damit ist $u = v$ fast überall, mithin besitzt u einen stetigen Repräsentanten. In diesem Sinne ist $H^{1,q}(M) \subset \mathcal{C}^0(M)$ als Untervektorraum. Die Ungleichung (1.26) gilt für alle Funktionen in dem dichten Teilraum $\mathcal{C}^\infty(M) \subset H^{1,q}(M)$, also wegen der Stetigkeit der Norm auch für alle $u \in H^{1,q}(M)$. Damit haben wir die stetige Einbettung

$$H^{1,q}(M) \subset \mathcal{C}^0(M)$$

erhalten.

- g) Wegen Bemerkung 1.4.8.2 genügt es nun, eine stetige Einbettung $H^{1,q}(M) \subset \mathcal{C}^{0,\alpha}(M)$ für das α mit $\frac{1}{q} = \frac{1-\alpha}{n}$ zu finden. Für dieses α suchen wir also eine Schranke C , so dass für alle $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und für alle $x \neq y$ mit $d(x,y) \leq \frac{\text{inj}(M)}{3}$ gilt:

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq C \cdot \|u\|_{H^{1,q}}.$$

Sei also $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und seien $x, y \in M$ mit $d(x,y) \leq \frac{\text{inj}(M)}{3}$. Verbinde x und y durch die (bis auf Reparametrisierung) eindeutige kürzeste Geodätische c . Sei x_0 der Mittelpunkt von c , also $d(x, x_0) = d(x_0, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$. Setze nun $\varrho := d(x, y)$ und benutze die Poincaré-Ungleichung für $K := \overline{B}_{\varrho/2}(x_0) \subset \overline{B}_\varrho(x_0)$. Es gilt also:

$$\left| u(x) - \underbrace{\frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K u(z) \, d\text{vol}(z)}_{=: u_K} \right| \leq \frac{C \cdot \varrho}{\text{vol}(K)^{1/q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_K| + |u_K - u(y)| \\
 &\leq \frac{2 \cdot C \cdot \varrho}{\text{vol}(K)^{1/q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \\
 &\leq \frac{C' \cdot \varrho}{\varrho^{n/q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \\
 &\leq C' \cdot \varrho^{1-n/q} \cdot \|u\|_{H^{1,q}} \\
 &= C' \cdot d(x, y)^\alpha \cdot \|u\|_{H^{1,q}}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Übung 1.4.10

Führe den Beweis des Satzes für $n = 2$: Ersetze dazu im Beweisschritt d) die Funktion r^{2-n} durch $\ln(r)$.

Lemma 1.4.11

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $k \in \mathbb{N}_0$, und seien $0 < \alpha < \alpha' < 1$. Dann ist die Einbettung

$$\mathcal{C}^{k, \alpha'}(M) \subset \mathcal{C}^{k, \alpha}(M)$$

kompakt.

Beweis. Wie zuvor genügt es, den Fall $k = 0$ zu betrachten. Sei also $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathcal{C}^{0, \alpha'}$. Für ein $C_1 > 0$ ist dann

$$|u_i(x) - u_i(y)| \leq C_1 \cdot d(x, y)^\alpha$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und für alle $x \neq y$ mit $d(x, y) \leq \frac{\text{inj}(M)}{2}$. Insbesondere ist also $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig (und nach Voraussetzung auch beschränkt in $\mathcal{C}^0(M)$). Der Satz von Arzela und Ascoli 1.2.4 liefert also eine konvergente Teilfolge in $\mathcal{C}^0(M)$, die wir wieder mit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bezeichnen.

Für die Differenzen $w := u_i - u_j$ berechnen wir nun:

$$\begin{aligned}
 \frac{|w(x) - w(y)|}{d(x, y)^\alpha} &= \left(\frac{|w(x) - w(y)|}{d(x, y)^{\alpha'}} \right)^{\alpha/\alpha'} \cdot |w(x) - w(y)|^{1-\alpha/\alpha'} \\
 &\leq \|w\|_{\mathcal{C}^{0, \alpha'}} \cdot (2\|w\|_{\mathcal{C}^0})^{1-\alpha/\alpha'} \\
 &\leq C_2 \cdot \|w\|_{\mathcal{C}^0}^{1-\alpha/\alpha'}.
 \end{aligned}$$

1 Analytische Grundlagen

Wegen $1 - \frac{\alpha}{\alpha'} > 0$ ist also $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{C}^{0,\alpha}(M)$. □

Bemerkung 1.4.12. Insbesondere ist dann auch die Einbettung $\mathcal{C}^{k,\alpha}(M) \subset \mathcal{C}^k(M)$ kompakt. Denn zu $0 < \alpha < 1$ wählen wir α' mit $0 < \alpha' < \alpha$ und erhalten:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{k,\alpha}(M) & \stackrel{1.4.11}{\subset} & \mathcal{C}^{k,\alpha'}(M) & \text{kompakt} \\ & & \subset & \mathcal{C}^k(M) & \text{stetig.} \end{array}$$

Satz 1.4.13 (Rellich-Kondrakhov, 2. Teil)

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n . Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$ und sei $1 \leq q < \infty$, so dass $\frac{1}{q} < \frac{l-\alpha}{n}$. Dann ist die Einbettung

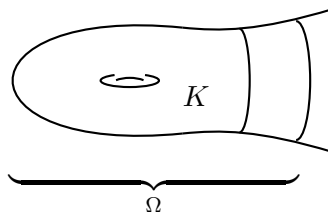
$$H^{k+l,q}(M) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}(M)$$

kompakt.

Beweis. Wähle $\alpha' \in (\alpha, 1)$ mit $\frac{1}{q} \leq \frac{l-\alpha'}{n}$. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} H^{k+l,q}(M) & \stackrel{1.4.9}{\subset} & \mathcal{C}^{k,\alpha'}(M) & \text{kompakt} \\ & & \stackrel{1.4.11}{\subset} & \mathcal{C}^{k,\alpha}(M) & \text{stetig.} \end{array} \quad \square$$

Bemerkung 1.4.14 (Lokaler Sobolev'scher Einbettungssatz). Sei (M, g) eine n -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ kompakt und $\Omega \subset M$ offen mit $K \subset \Omega$.



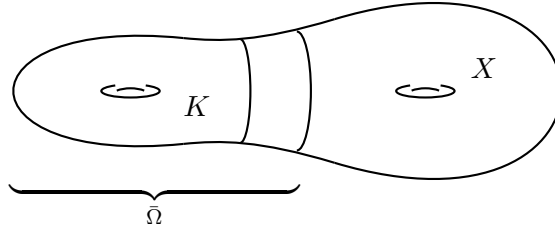
1. Für $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{H^{k,r}(K)} \leq C \cdot \|u\|_{H^{k+l,q}(\Omega)}. \quad (1.27)$$

2. Für $\frac{1}{q} \geq \frac{l-\alpha}{n}$ gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(K)} \leq C \cdot \|u\|_{H^{k+l,q}(\Omega)}. \quad (1.28)$$

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $\bar{\Omega}$ kompakt ist. Bette nun $\bar{\Omega}$ isometrisch in eine geschlossene Mannigfaltigkeit X ein (z.B. die Verdoppelung von $\bar{\Omega}$).



1. Wähle eine Abschneidefunktion $\chi \in C^\infty(X)$ mit $\chi|_K \equiv 1$ und $\text{supp}(\chi) \subset \Omega$ und $\chi \geq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{k,r}(K)} &\leq \|\chi \cdot u\|_{H^{k,r}(X)} \\ &\leq C \cdot \|\chi \cdot u\|_{H^{k+l,q}(X)} \\ &= C \cdot \|\chi \cdot u\|_{H^{k+l,q}(\Omega)} \\ &\leq C' \cdot \|u\|_{H^{k+l,q}(\Omega)}. \end{aligned}$$

2. Die Abschätzung der Hölder-Norm zeigt man ganz analog. □

1.5 Das Maximum-Prinzip

Proposition 1.5.1 (Schwach Maximum-Prinzip)

Sei (\bar{M}, g) eine zusammenhängende kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$. Sei $h \in C^\infty(\bar{M})$ mit $h \geq 0$. Dann gilt für jedes $u \in C^2(\bar{M})$ mit $(\Delta + h)u \leq 0$ und $u \not\equiv 0$:

$$\max_{x \in \bar{M}} u(x) = \max_{x \in \partial M} u(x).$$

Für jedes $v \in C^2(\bar{M})$ mit $(\Delta + h)v \geq 0$ und $v \not\equiv 0$ ist

$$\min_{x \in \bar{M}} v(x) = \min_{x \in \partial M} v(x).$$

Ist $h \equiv 0$, so sind die Voraussetzungen $u \not\equiv 0$ bzw. $v \not\equiv 0$ überflüssig.

1 Analytische Grundlagen

Beweis.

- a) Sei zunächst $(\Delta + h)u < 0$ auf \bar{M} . Falls $\max_{x \in \bar{M}} u(x) \neq \max_{x \in \partial M} u(x)$, so gibt es ein y im Innern von M mit $u(y) = \max_{x \in \bar{M}} u(x) > \max_{x \in \partial M} u(x)$. Dann ist $\nabla u(y) = 0$ und $\nabla^2 u(y)$ negativ semi-definit. Da nun $h \equiv 0$ oder $u \not\equiv 0$ und damit $u(y) = \max_{x \in \bar{M}} u(x) \geq 0$ gilt, haben wir in jedem Fall $h(y)u(y) \geq 0$. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\operatorname{tr}(\nabla^2 u)(y) \\ &= \Delta u(y) \\ &< -h(y)u(y) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

also $0 < 0$, Widerspruch.

- b) Sei nun $(\Delta + h)u \leq 0$. Wähle $f \in C^\infty(\bar{M})$ ohne kritische Punkte, d.h. $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in \bar{M}$. (Dass ein solches f existiert, zeigen wir unten in Lemma 1.5.2.) Dann gibt es $C_1, C_2 > 0$ so dass

$$\begin{aligned} |\nabla f| &\geq C_1 && \text{auf } \bar{M} \\ |\Delta f| &\leq C_2 && \text{auf } \bar{M}. \end{aligned}$$

Für ein hinreichend großes $\gamma > 0$ und ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ setze $u_\varepsilon := u + \varepsilon \cdot e^{\gamma f}$. Berechne nun:

$$\begin{aligned} \Delta(e^{\gamma f}) &= \gamma e^{\gamma f} \cdot \Delta f - \gamma^2 e^{\gamma f} \cdot |\nabla f|^2 \\ &\leq e^{\gamma f} (\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2) \\ &\leq -\gamma \cdot C_2 \cdot e^{\gamma f} \quad \text{für } \gamma \geq \frac{2C_2}{C_1^2}. \end{aligned}$$

Dann ist für hinreichend großes γ :

$$\begin{aligned} (\Delta + h)u_\varepsilon &= (\Delta + h)u + \varepsilon(\Delta + h)e^{\gamma f} \\ &\leq 0 + \varepsilon \cdot (-\gamma \cdot C_2 + \|h\|_{C^0}) \cdot e^{\gamma f} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Wegen $u_\varepsilon > u$ ist mit $u \not\equiv 0$ auch $u_\varepsilon \not\equiv 0$. Nach a) ist dann

$$\max_{x \in \bar{M}} u_\varepsilon(x) = \max_{x \in \partial M} u_\varepsilon(x),$$

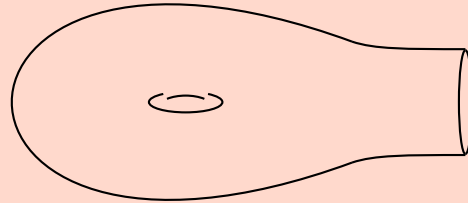
also im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ auch $\max_{x \in \bar{M}} u(x) = \max_{x \in \partial M} u(x)$.

- c) Die Behauptung für v folgt aus der für $u := -v$.

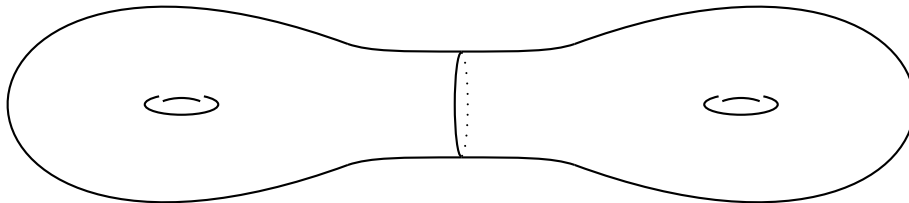
□

Lemma 1.5.2

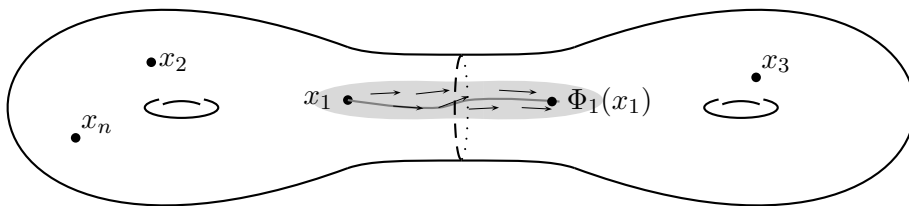
Sei \bar{M} eine kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Funktion $f \in C^\infty(\bar{M})$ ohne kritische Punkte.



Beweis. Verdoppele \bar{M} zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit X .



Wähle $h \in C^\infty(X)$ mit isolierten kritischen Punkten (z.B. eine Morsefunktion). Da X kompakt ist, ist $\text{Crit}(h) = \{x \in X \mid \nabla h(x) = 0\}$ endlich. Sei also $\text{Crit}(h) \cap \bar{M} = \{x_1, \dots, x_k\}$. Wähle einen Diffeomorphismus $\Phi_1 : X \rightarrow X$, so dass $\Phi_1(x_1) \in X - \bar{M}$ und $\Phi_1(y) = y$ für alle $y \in \text{Crit}(h) - \{x_1\}$.⁴



Induktiv erhalten wir einen Diffeomorphismus $\Phi = \Phi_k \circ \dots \circ \Phi_1 : X \rightarrow X$ mit

⁴ Solch einen Diffeomorphismus erhält man z.B. als Fluss eines Vektorfelds, dessen Träger in einer Tubenumgebung einer Kurve liegt, die den Punkt x_1 mit einem Punkt in $X - \bar{M}$ verbindet und alle anderen Punkte $y \in \text{Crit}(h)$ meidet. Ist das Vektorfeld tangential zu dieser Kurve, so verschiebt der zugehörige Fluss den Punkt x_i nach $X - \bar{M}$.

1 Analytische Grundlagen

$\Phi(\text{Crit}(h)) \subset X - \bar{M}$. Damit ist $h \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(X)$ und

$$\text{Crit}(h \circ \Phi^{-1}) = \Phi(\text{Crit}(h)) \subset X - \bar{M}.$$

Also hat $f := h \circ \Phi^{-1}|_{\bar{M}} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{M})$ keine kritischen Punkte. □

Folgerung 1.5.3

Sei (M, g) eine zusammenhängende geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $h \geq 0$ und $h \not\equiv 0$.

Dann gilt für jedes $u \in \mathcal{C}^2(M)$ mit $(\Delta + h)u \leq 0$:

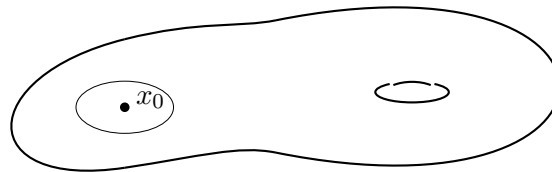
$$u \equiv 0 \quad \text{oder} \quad u < 0 \quad \text{auf } M.$$

Für jedes $v \in \mathcal{C}^2(M)$ mit $(\Delta + h)v \geq 0$ gilt:

$$v \equiv 0 \quad \text{oder} \quad v > 0 \quad \text{auf } M.$$

Beweis.

- a) Sei $u \in \mathcal{C}^2(M)$ mit $(\Delta + h)u \leq 0$ und $u \not\equiv c \in \mathbb{R}$. Wähle $x_0 \in M$ mit $u(x_0) = \min_{x \in M} u(x)$, also insbesondere $u(x_0) < \max_{x \in M} u(x)$.



Für ein hinreichend kleines $\rho > 0$ ist dann auch

$$\max_{x \in \bar{B}_\rho(x_0)} u(x) < \max_{x \in M} u(x). \quad (1.29)$$

Das Maximum-Prinzip 1.5.1, angewandt auf $M - B_\rho(x_0)$, liefert $u < 0$ auf $M - B_\rho(x_0)$ oder

$$\begin{aligned} \max_{x \in M - B_\rho(x_0)} u(x) &= \max_{x \in \partial B_\rho(x_0)} u(x) \\ &\leq \max_{x \in \bar{B}_\rho(x_0)} u(x) \\ &< \max_{x \in M} u(x). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Aus (1.29) und (1.30) folgt der Widerspruch $\max_{x \in M} u(x) < \max_{x \in M} u(x)$. Also ist $u < 0$ auf $M - B_\varrho(x_0)$. Da dies für jedes hinreichend kleine $\varrho > 0$ gilt, ist auch $u < 0$ auf $M - \{x_0\}$. Da die Funktion u in x_0 ihr Minimum annimmt, ist also auch $u < 0$ auf ganz M .

b) Sei nun $u \equiv c \in \mathbb{R}$ konstant. Dann ist zu zeigen: $c \leq 0$. Sei $x_1 \in M$ mit $h(x_1) > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\geq ((\Delta + h)u)(x_1) \\ &= \underbrace{h(x_1)}_{>0} \cdot c, \end{aligned}$$

also $c \leq 0$.

c) Die Behauptung für v folgt mit $u := -v$.

□

Bemerkung 1.5.4. Im Fall $h \equiv 0$ gilt: falls $\Delta u \leq 0$, so ist

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \Delta u \, dvol \\ &= \int_M 1 \cdot \Delta u \, dvol \\ &= \int_M \langle \nabla 1, \nabla u \rangle \, dvol \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist $\Delta u \equiv 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M u \Delta u \, dvol \\ &= \int_M \underbrace{\langle \nabla u, \nabla u \rangle}_{|\nabla u|^2} \, dvol, \end{aligned}$$

also $\nabla u \equiv 0$, somit $u \equiv c \in \mathbb{R}$.

In diesem Fall sind somit folgende drei Aussagen äquivalent:

1. $\Delta u \leq 0$.
2. $\Delta u \equiv 0$.
3. u konstant.

1.6 Differentialoperatoren und elliptische Regularität

Definition 1.6.1. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine lineare Abbildung $L : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ heißt *Differentialoperator der Ordnung $\leq k$* , falls es Homomorphismenfelder $A_j \in \mathcal{C}^\infty(M, \underbrace{\text{Hom}(T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M, \mathbb{R})}_j)$ für $j \geq 1$ und $A_0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gibt, so dass L von der Form

$$Lu = \sum_{j=0}^k A_j (\nabla^j u)$$

ist.

Bemerkung 1.6.2. In lokalen Koordinaten auf $U \subset M$ ist

$$Lu = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} D_1^{\alpha_1} \cdot D_n^{\alpha_n}$$

mit $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ und $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Beispiele 1.6.3

1. Ein Operator der Ordnung $k = 0$ ist offensichtlich von der Form $Lu = A_0 \cdot u$ für ein $A_0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
2. Jeder Operator der Ordnung $k \leq 1$ ist von der Form $Lu = \nabla_X u + A_0 \cdot u$ für ein glattes Vektorfeld X .
3. Wir diskutieren hier insbesondere zwei Operatoren der Ordnung $k = 2$, nämlich den Laplace-Operator

$$Lu = \Delta u = -\text{tr} \nabla^2 u$$

mit $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = -\text{tr}$ und den Yamabe-Operator

$$Lu = Yu = \Delta u + \frac{n-2}{4(n-1)} \text{scal}_g \cdot u$$

mit $A_0 = \frac{n-2}{4(n-1)} \text{scal}_g$, $A_1 = 0$, $A_2 = -\text{tr}$.

Lemma 1.6.4

Sei (M, g) eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit und L ein Differentialoperator der Ordnung $\leq k$. Dann setzt sich L eindeutig zu stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} H^{k+l,q}(M) &\rightarrow H^{l,q}(M) \\ \mathcal{C}^{k+l}(M) &\rightarrow \mathcal{C}^l(M) \\ \mathcal{C}^{k+l,\alpha}(M) &\rightarrow \mathcal{C}^{l,\alpha}(M) \end{aligned}$$

fort.

Beweis.

a) Wir suchen Konstanten $C > 0$ so dass für alle $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt:

$$\|Lu\|_{H^{l,q}} \leq C \cdot \|u\|_{H^{k+l,q}}. \quad (1.31)$$

Da M kompakt ist, gibt es Konstanten $C_{j,m} > 0$ so dass $|\nabla^m A_j| \leq C_{j,m}$ auf M . Für $0 \leq m \leq l$ berechne nun:

$$\begin{aligned} \|\nabla^m (A_j (\nabla^j u))\|_{L^q} &= \|\nabla^{m-1} ((\nabla A_j) \cdot \nabla^j u + A_j (\nabla^{j+1} u))\|_{L^q} \\ &= \left\| \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (\nabla^i A_j) (\nabla^{m-i+j} u) \right\|_{L^q} \\ &\leq \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} C_{j,i} \underbrace{\|\nabla^{m-i+j} u\|_{L^q}}_{\leq \|u\|_{H^{m+j,q}}} \\ &\leq C'_m \cdot \|u\|_{H^{m+j,q}}. \end{aligned}$$

Damit ist also

$$\begin{aligned} \|\nabla^m Lu\|_{L^q} &\leq C''_m \sum_{j=0}^m \|u\|_{H^{m+j,q}} \\ &\leq C_m \|u\|_{H^{m+k,q}}. \end{aligned}$$

Damit ist schließlich

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{H^{l,q}} &\leq \sum_{m=0}^l C_m \|u\|_{H^{m+k,q}} \\ &\leq C \cdot \|u\|_{H^{l+k,q}}. \end{aligned}$$

b) Analog beweist man die Fortsetzung auf die \mathcal{C} - bzw. der $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ -Räume, indem man anstelle von $\|\cdot\|_{L^q}$ die Normen $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$ bzw. $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}}$ einsetzt. \square

1 Analytische Grundlagen

Bemerkung 1.6.5. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und L ein Differentialoperator der Ordnung $\leq k$. Dann gibt es einen eindeutigen Differentialoperator L^* der Ordnung $\leq k$, so dass für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^k(M)$ gilt:

$$(L\varphi, \psi)_{L^2} = (\varphi, L^*\psi)_{L^2}.$$

Hierbei ist $(\varphi, \psi)_{L^2} := \int_M \varphi \cdot \psi \, d\text{vol}$ das L^2 -Skalarprodukt. Man erhält diesen Operator durch k -fache partielle Integration.

Definition 1.6.6. L^* heißt der zu L formal adjungierte Operator. Gilt $L^* = L$, so heißt L formal selbstadjungiert.

Beispiel 1.6.7. Für den Laplace-Operator $L = \Delta$ ist nach (1.16) $L^* = \Delta$, d.h. Δ ist formal selbstadjungiert.

Beispiel 1.6.8. Sei $M = \mathbb{R}$ und $L = x \cdot \frac{d}{dx}$. Um den formal adjungierten Operator L^* zu bestimmen, berechnen wir für $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} (\psi, L^*\varphi)_{L^2} &= (L\psi, \varphi)_{L^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot \psi'(x)) \cdot \varphi(x) \, dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot (x \cdot \varphi)'(x) \, dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot (x \cdot \varphi'(x) + \varphi(x)) \, dx \\ &= (\psi, x \varphi' + \varphi)_{L^2}. \end{aligned}$$

Somit ist $L^* = -x \frac{d}{dx} + 1$.

Bemerkung 1.6.9. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und L ein Differentialoperator der Ordnung $\leq k$. Für $u \in \mathcal{C}^k(M)$ ist die Gleichung

$$Lu = f \tag{1.32}$$

äquivalent zu

$$(Lu, \varphi)_{L^2} = (f, \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M). \quad (1.33)$$

und somit zu

$$(u, L^* \varphi)_{L^2} = (f, \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M).$$

Diese Gleichung kann evtl. auch erfüllt sein, obwohl u gar nicht differenzierbar ist.

Definition 1.6.10. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, und seien $u, f \in L^1_{loc}(M)$.⁵ Wir sagen: $Lu = f$ gilt *im schwachen Sinne*, falls

$$(u, L^* \varphi)_{L^2} = (f, \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M).$$

Beispiel 1.6.11. Sei $M = \mathbb{R}$ und $L = x \cdot \frac{d}{dx}$. Wir erinnern uns, dass $L^* = -x \frac{d}{dx} + 1$. Betrachte nun die Heaviside-Funktion

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Für $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt dann:

$$\begin{aligned} (u, L^* \varphi)_{L^2} &= \int_0^\infty L^* \varphi \, dx \\ &= - \int_0^\infty (x \varphi)' \, dx \\ &= - [x \varphi]_0^\infty \\ &= 0 \\ &= (0, \varphi)_{L^2}. \end{aligned}$$

Somit gilt die Gleichung $x \frac{du}{dx} = 0$ im schwachen Sinn. Dabei ist $u \notin \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $u \notin L^1(\mathbb{R})$, aber immerhin $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

⁵Die *lokal integrierbaren* Funktionen $L^1_{loc}(M)$ sind alle solchen, die über jedes Kompaktum $K \subset M$ integriert werden können.

Satz 1.6.12 (Globale elliptische Regularität)

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Funktion $u \in L^1(M)$ löse die Gleichung $\Delta u = f$ im schwachen Sinne. Dann gilt:

- (i) Ist $f \in H^{k,q}(M)$, so ist $u \in H^{k+2,q}(M)$, und die Gleichung $\Delta u = f$ gilt klassisch (im Sinne der Fortsetzung 1.6.4 von Δ auf Sobolev-Räume). Ferner gibt es ein $C > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{H^{k+2,q}} \leq C \cdot (\|f\|_{H^{k,q}} + \|u\|_{L^q}). \quad (1.34)$$

Ungleichungen dieses Typs bezeichnet man als elliptische Abschätzungen.

- (ii) Ist $f \in C^{k,\alpha}(M)$, so ist $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$, und die Gleichung $\Delta u = f$ gilt klassisch (im Sinne der Fortsetzung 1.6.4 von Δ auf Hölder-Räume). Ferner gibt es ein $C > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}} \leq C \cdot (\|f\|_{C^{k,\alpha}} + \|u\|_{C^{0,\alpha}}). \quad (1.35)$$

Ungleichungen dieses Typs bezeichnet man als Schauder-Abschätzungen.

Beweisskizze. Zur Illustration beweisen wir die Abschätzung in (i) mit $q = 2$ und $k = 0$. Gesucht ist also eine Abschätzung der Form $\|u\|_{H^{2,2}} \leq C \cdot (\|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})$. Für die erste Ableitung finden wir:

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^2}^2 &= \int_M \langle \nabla u, \nabla u \rangle \, d\text{vol} \\ &\stackrel{(1.16)}{=} \int_M u \Delta u \, d\text{vol} \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|u\|_{L^2} \cdot \|\Delta u\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} (\|u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

Für die zweiten Ableitungen berechnen wir:

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 &= \int_M \langle \nabla^2 u, \nabla^2 u \rangle \, d\text{vol} \\ &= \int_M \langle \nabla u, \nabla^* \nabla \nabla u \rangle \, d\text{vol} \\ &= \int_M \langle \nabla u, \Delta_1 \nabla u \rangle \, d\text{vol} \end{aligned}$$

1.6 Differentialoperatoren und elliptische Regularität

$$\begin{aligned}
 &= \int_M \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle d\text{vol} + \int_M \langle \nabla u, Pu \rangle d\text{vol} \\
 &= \int_M \Delta u \cdot \Delta u d\text{vol} + \int_M \langle \nabla u, Pu \rangle d\text{vol} .
 \end{aligned}$$

Hierbei beobachtet man, dass $P := \Delta_1 \circ \nabla - \nabla \circ \Delta$ ein Differentialoperator der Ordnung ≤ 2 ist. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
 \|\nabla^2 u\|_{L^2} &\leq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|Pu\|_{L^2} \\
 &\leq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + C_1 \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|u\|_{H^{2,2}} \\
 &= \|\Delta u\|_{L^2}^2 + 2 \cdot C_1 \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \|u\|_{H^{2,2}} \\
 &\leq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + C_1^2 \cdot \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \cdot \|u\|_{H^{2,2}}^2 .
 \end{aligned}$$

Aufsummieren liefert also:

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{H^{2,2}}^2 &= \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \\
 &\leq \frac{3}{2} \cdot \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{C_1^2}{2} (\|u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2) + \frac{3}{2} \cdot \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \cdot \|u\|_{H^{2,2}}^2 .
 \end{aligned}$$

Subtraktion von $\frac{1}{4} \cdot \|u\|_{H^{2,2}}^2$ und Multiplikation mit $\frac{4}{3}$ liefert die gewünschte Abschätzung. \square

Satz 1.6.13 (Lokale elliptische Regularität)

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Omega \Subset M$ offen. Die Funktion $u \in L^1_{loc}(M)$ löse die Gleichung $\Delta u = f$ im schwachen Sinne. Dann gilt:

- (i) Ist $f \in H^{k,q}(M)$ und $u \in L^q(M)$, so ist $u \in H^{k+2,q}(\Omega)$, und die Gleichung $\Delta u = f$ gilt klassisch auf Ω (im Sinne der Fortsetzung 1.6.4 von Δ auf Sobolev-Räume). Ferner gibt es ein $C > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{H^{k+2,q}(\Omega)} \leq C \cdot \left(\|f\|_{H^{k,q}(M)} + \|u\|_{L^q(M)} \right) . \quad (1.36)$$

- (ii) Ist $f \in C^{k,\alpha}(M)$ und $u \in C^{0,\alpha}(M)$, so ist $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$, und die Gleichung $\Delta u = f$ gilt klassisch auf Ω (im Sinne der Fortsetzung 1.6.4 von Δ auf Hölder-Räume). Ferner gibt es ein $C > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} \leq C \cdot \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^{0,\alpha}(M)} \right) . \quad (1.37)$$

Bemerkung 1.6.14. Dieser Satz kann mittels Abschneidefunktionen aus $\mathcal{C}_c^\infty(M)$, die auf Ω konstant $\equiv 1$ sind, auf den globalen Fall 1.6.12 zurückgeführt werden.

1.7 Green-Funktionen

Sei (M, g) eine geschlossene, riemannsche Mannigfaltigkeit. Betrachte den Differentialoperator $L = \Delta + h$ und wähle $c < \min_{x \in M} h(x)$.

Lemma 1.7.1

$L - c : H^{2,2}(M) \rightarrow L^2(M)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis.

- a) $L - c$ ist ein Differentialoperator 2. Ordnung, nach Lemma 1.6.4 ist also $L - c : H^{2,2}(M) \rightarrow L^2(M)$ beschränkt.
- b) $L - c$ ist injektiv: Sei nämlich $f \in H^{2,2}(M)$ mit $(L - c)f = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= ((L - c)f, f)_{L^2} \\ &= \int_M f \cdot (\Delta + h - c)f \, d\text{vol} \\ &= \int_M \underbrace{|\nabla f|^2}_{\geq 0} + \underbrace{(h - c)}_{> 0} \cdot f^2 \, d\text{vol} \\ \implies f &= 0. \end{aligned}$$

- c) Sei nun $\varphi \in L^2(M)$ mit $\varphi \perp \text{im}(L - c)$, d.h. für jedes $f \in H^{2,2}(M)$ – insbesondere für jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ – gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi, (L - c)f)_{L^2} \\ &= \int_M \varphi \cdot (L - c)f \, d\text{vol}, \end{aligned}$$

d.h. die Gleichung $(L - c)\varphi = 0$ gilt im schwachen Sinn. Nach dem Satz über elliptische Regularität (1.6.12) ist $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$, und die Gleichung $(L - c)\varphi = 0$ gilt im klassischen Sinn. Nach b) ist dann $\varphi = 0$. Folglich ist $\overline{\text{im}(L - c)} = L^2(M)$, d.h. $\text{im}(L - c)$ liegt in $L^2(M)$ dicht.

- d) Sei nun $\psi \in L^2(M)$ beliebig. Gemäß c) wähle $\psi_j := (L - c)f_j$ mit $\psi_j \xrightarrow{L^2(M)} \psi$. Insbesondere ist $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(M)$. Wegen der elliptischen

Abschätzungen 1.34 ist dann f_j eine Cauchy-Folge in $H^{2,2}(M)$. Für den Grenzwert $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j =: f \in H^{2,2}(M)$ finden wir:

$$\begin{aligned} (L - c)f &= (L - c) \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \\ &\stackrel{\text{a)}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} (L - c)f_j \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j \\ &= \psi. \end{aligned}$$

Somit ist $L - c$ surjektiv.

- e) Die Inverse $(L - c)^{-1} : L^2(M) \rightarrow H^{2,2}(M)$ ist beschränkt nach dem Satz von der offenen Abbildung bzw. aufgrund der elliptischen Abschätzungen (1.34).

□

Wir haben also mit dem Satz von Rellich-Kondrakhov 1.2.12:

$$L^2(M) \xrightarrow{(L-c)^{-1}} H^{2,2}(M) \overset{\text{kompakt}}{\hookrightarrow} L^2(M).$$

Nach Bemerkung 1.2.9 ist daher $(L - c)^{-1} : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$ ein kompakter Operator. Der Spektralsatz über kompakte Operatoren auf einem separablen Hilbertraum liefert: $\text{spec}(L - c)^{-1}$ besteht nur aus Eigenwerten endlicher Multiplizität, die sich genau bei 0 häufen. Ferner gibt es eine vollständige Hilbertraum-Basis von $L^2(M)$, bestehend aus Eigenfunktionen von $(L - c)^{-1}$. Ist f eine Eigenfunktion von $(L - c)^{-1}$ zum Eigenwert ν , so ist f ebenfalls eine Eigenfunktion von L zum Eigenwert $\lambda := c + \frac{1}{\nu}$, denn

$$\begin{aligned} (L - c)^{-1}f = \nu &\Leftrightarrow \frac{1}{\nu}f = (L - c)f \\ &\Leftrightarrow Lf = \left(c + \frac{1}{\nu}\right)f. \end{aligned}$$

* Da L formal selbstadjungiert ist, sind die Eigenwerte von L reell, denn

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (f, f)_{L^2} &= (\lambda f, f)_{L^2} \\ &= (Lf, f)_{L^2} \\ &= (f, Lf)_{L^2} \\ &= (f, \lambda f)_{L^2} \\ &= \bar{\lambda} \cdot (f, f)_{L^2}. \end{aligned}$$

1 Analytische Grundlagen

* Das Spektrum von L ist nach unten beschränkt, denn

$$\begin{aligned}
 \lambda \cdot \|f\|_{L^2}^2 &= (Lf, f)_{L^2} \\
 &= \int_M f \cdot Lf \, d\text{vol} \\
 &= \int_M f \cdot (\Delta f + h) \, d\text{vol} \\
 &= \int_M |\nabla f|^2 + h \cdot f^2 \\
 &\geq -c \cdot \|f\|_{L^2}^2 \\
 \implies \lambda &\geq -c.
 \end{aligned}$$

* Somit konvergieren die Eigenwerte von L gegen $+\infty$.

* Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal, denn

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \cdot (f_1, f_2)_{L^2} &= (Lf_1, f_2)_{L^2} \\
 &= (f_1, Lf_2)_{L^2} \\
 &= \lambda_2 \cdot (f_1, f_2)_{L^2} \\
 \implies 0 &= \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \cdot (f_1, f_2)_{L^2}.
 \end{aligned}$$

* Somit gibt es eine vollständige Orthonormalbasis von $L^2(M)$, bestehend aus Eigenfunktionen von L .

* Nach dem Satz über elliptische Regularität sind alle Eigenfunktionen von L glatt.

Beispiel 1.7.2. Sei $(M, g) = (T^n, g) = (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, g)$ ein flacher Torus, und sei

$$L = \Delta = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^j)^2}.$$

Für $k \in \mathbb{Z}^n$ setze $f_k(x) = e^{2\pi i \langle x, k \rangle}$. Für jedes $z \in \mathbb{Z}^n$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $f_k(x+z) = f_k(x)$, daher steigt f_k zu einer glatten Funktion auf dem Quotienten $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ab, die wir ebenfalls mit f_k bezeichnen. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x^j} f_k &= 2\pi i k_j \cdot f_k \\
 \implies \Delta f_k &= -(2\pi i)^2 \sum_{j=1}^n k_j^2 \cdot f_k = (2\pi)^2 |k|^2 \cdot f_k.
 \end{aligned}$$

Daher ist

$$\text{spec}(\Delta) = \{(2\pi)^2 |k|^2 \mid k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Die Entwicklung einer Funktion $g \in C^\infty(T^n)$ in der Basis $\{f_k \mid k \in \mathbb{Z}^n\}$ entspricht genau der Fourier-Reihenentwicklung periodischer Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Im Folgenden schreiben wir zur Abkürzung $H^k(M) := H^{k,2}(M)$, also insbesondere $H^0(M) := L^2(M)$.

Definition 1.7.3. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$H^{-k}(M) := (H^k(M))^* \quad (1.38)$$

$$= \left\{ l : H^k(M) \rightarrow \mathbb{C} \mid l \text{ beschränkt, linear} \right\}. \quad (1.39)$$

Die kanonische Paarung schreiben wir als:

$$\begin{aligned} H^{-k}(M) \times H^k(M) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (l, f) &\mapsto l(f) =: (l, f). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Dies verallgemeinert die Schreibweise des L^2 -Skalarproduktes, denn nach dem Riesz'schen Darstellungssatz ist das Hilbertraum-Skalarprodukt die kanonische Paarung und identifiziert $(L^2(M))^*$ mit $L^2(M)$.

Für $k > l$ ist $H^k(M) \subset H^l(M)$, also $H^{-k}(M) \supset H^{-l}(M)$. Wir haben daher eine unendliche Kette von Inklusionen:

$$\dots \supset H^{-2}(M) \supset H^{-1}(M) \supset H^0(M) \supset H^1(M) \supset H^2(M) \supset \dots$$

Nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz 1.1.21 gilt:

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M) = C^\infty(M).$$

Als Dualräume der Hilberträume $H^k(M)$ tragen die Räume $H^{-k}(M)$ in natürlicher Weise eine Hilbertraum-Struktur.

Definition 1.7.4. Die Vereinigung

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M) =: \mathcal{D}'(M). \quad (1.41)$$

Die Elemente aus $\mathcal{D}'(M)$ heißen *Distributionen* auf M .

1 Analytische Grundlagen

Beispiel 1.7.5. Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und $p \in M$ beliebig. Für $f \in \mathcal{C}^0(M)$ setze $(\delta_p, f) := f(p)$. Die Auswertung in p ist beschränkt, denn $|(\delta_p, f)| = |f(p)| \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0(M)}$. Für $k > \frac{n}{2}$ ist nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz die Verkettung

$$H^k(M) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(M) \xrightarrow{\delta_p} \mathbb{C}$$

eine stetige lineare Abbildung, d.h. $\delta_p \in H^{-k}(M)$.

Bemerkung 1.7.6. Mit einem analogen Beweis zeigt man: Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist

$$(L + c)^j : H^{2j}(M) \rightarrow H^0(M)$$

ein Isomorphismus. Indukativ erhält man für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Isomorphismen

$$\begin{aligned} (L + c) : H^{2j}(M) &\rightarrow H^{2j-2}(M) \\ \text{und } (L + c)^* : H^{-2j+2}(M) &\rightarrow H^{-2j}(M). \end{aligned}$$

Setze nun

$$X_L := \{\text{endliche Linearkombinationen von Eigenfunktionen von } L\} \subset \mathcal{C}^\infty(M).$$

Da $(L + c)(X_L) = X_L$, liegt $X_L \subset H^{2j}(M)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ dicht. Sei $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine vollständige Orthonormalbasis von $L^2(M)$, bestehend aus Eigenfunktionen von L . Für ein $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ sei $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot f_i$ die Entwicklung in dieser Basis. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} ((L + c)^* f_j, \varphi)_{L^2} &= (f_j, (L + c) \varphi)_{L^2} \\ &= \left(f_j, \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot f_i \right)_{L^2} \\ &= (f_j, a_j \cdot (\lambda_j + c) \cdot f_j)_{L^2} \\ &= (\lambda_j + c) \cdot (f_j, a_j \cdot f_j)_{L^2} \\ &= \left((\lambda_j + c) \cdot f_j, \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot f_i \right)_{L^2} \\ &= ((\lambda_j + c) \cdot f_j, \varphi)_{L^2}. \end{aligned}$$

Somit ist $(L + c)^* f_j = (\lambda_j + a) \cdot f_j$, und insbesondere ist $(L + c)^*(X_L)X_L$. Damit liegt X_L auch in $H^{-2j}(M)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ dicht. Insbesondere ist also $\mathcal{C}^\infty(M) \subset H^{2j}(M)$ dicht für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Übung 1.7.7

Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n, g_{\text{flach}})$ der flache Standard-Torus. Für $k > \frac{n}{2}$ ist $\delta_0 \in H^{-k}(M)$. Berechnen Sie die Entwicklung von δ_0 in der Basis $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ aus Beispiel 1.7.2.

Definition 1.7.8. Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $L = \Delta + h$ mit $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, und sei $p \in M$ beliebig. Dann heißt $\Gamma \in \mathcal{D}'(M)$ eine *Green-Funktion von L an der Stelle p* , falls gilt:

$$L^*(\Gamma) = \delta_p. \quad (1.42)$$

Bemerkung 1.7.9. Ist $0 \notin \text{spec}(L)$, so sind

$$\begin{aligned} L : H^{2j}(M) &\rightarrow H^{2j-2}(M) \\ \text{und} \quad L^* : H^{-2j+2}(M) &\rightarrow H^{-2j}(M) \end{aligned}$$

Isomorphismen. Daher ist $\Gamma := (L^*)^{-1}\delta_p$ die eindeutige Green-Funktion von L an der Stelle p .

Bemerkung 1.7.10. Falls $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M - \{p\})$, so ist

$$\begin{aligned} (\Gamma, L\varphi) &= (L^*\Gamma, \varphi) \\ &= (\delta_p, \varphi) \\ &= \varphi(p) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d.h. Γ löst die Gleichung $L^*\Gamma = 0$ im schwachen Sinn auf $M - \{p\}$. Nach dem Satz über elliptische Regularität 1.6.12 ist dann bereits $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(M - \{p\})$ und erfüllt die Gleichung $L\Gamma = 0$ klassisch.

Beispiele 1.7.11

1. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ und $n \geq 3$. Setze $r := |x|$. Für eine beliebige Funktion $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} (\Delta^*(r^{2-n}), \varphi) &= (r^{2-n}, \Delta\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} r^{2-n} \Delta\varphi \, dx \\ &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \Delta\varphi(r\vartheta) \, d\text{vol}_{S^{n-1}(\vartheta)} r^{2-n} r^{n-1} \, dr \end{aligned}$$

1 Analytische Grundlagen

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \Delta \left(\underbrace{\int_{S^{n-1}} \varphi(r\vartheta) \, d\text{vol}_{S^{n-1}}(\vartheta)}_{=: \omega_{n-1}\psi(r)} \right) r \, dr \\
&= \omega_{n-1} \cdot \int_0^\infty \left(-\psi'' - \frac{n-1}{r} \psi' \right) r \, dr \\
&= \omega_{n-1} \cdot \int_0^\infty (\psi' - (n-1)\psi') \, dr - \underbrace{\left[\psi'(r) \cdot r \right]_0^\infty}_{=0} \\
&= -(n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot \left[\psi(r) \right]_0^\infty \\
&= (n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot \varphi(0) \\
&= (n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot (\delta_0, \varphi).
\end{aligned}$$

Somit ist $\Delta^*(r^{2-n}) = (n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot \delta_0$, d.h. $\frac{1}{(n-2) \cdot \omega_{n-1}} \cdot r^{2-n}$ ist eine Green-Funktion von Δ auf \mathbb{R}^n an der Stelle 0. Setzt man $r(x) := \text{dist}(x, x_0)$, so erhält man analog eine Green-Funktion an der Stelle x_0 .

2. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^2, g_{\text{eukl}})$. Setze $r := |x|$. Für eine beliebige Funktion $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
(\Delta^*(\log(r)), \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^2} \log(r) \cdot \Delta \varphi \, dr \\
&= \int_0^\infty \Delta \left(\underbrace{\int_{S^1} \varphi(r\vartheta) \, d\text{vol}_{S^1}(\vartheta)}_{=: 2\pi\psi(r)} \right) \log(r) r \, dr \\
&= 2\pi \cdot \int_0^\infty \left(-\psi'' + \frac{1}{r} \psi' \right) \cdot r \log(r) \, dr \\
&= 2\pi \cdot \int_0^\infty (\psi' \cdot (\log(r) + 1) - \psi' \cdot \log(r)) \, dr - 2\pi \cdot \underbrace{\left[\psi' \cdot r \log(r) \right]_0^\infty}_{=0} \\
&= 2\pi \cdot \left[\psi(r) \right]_0^\infty \\
&= -2\pi \cdot \varphi(0) \\
&= -2\pi \cdot (\delta_0, \varphi).
\end{aligned}$$

Somit ist $\Delta^*(\log(r)) = -2\pi \cdot \delta_0$, d.h. $-\frac{1}{2\pi} \cdot \log(r)$ ist eine Green-Funktion von Δ auf \mathbb{R}^2 an der Stelle 0. Setzt man $r(x) := \text{dist}(x, x_0)$, so erhält man analog eine Green-Funktion an der Stelle x_0 .

2 Das Yamabe-Problem

2.1 Konforme Geometrie

Erinnerung 2.1.1

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion f auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit ist das Vektorfeld $\text{grad} f$ mit $\langle \text{grad} f(p), X \rangle = \nabla f(X)$ für alle $X \in T_p M$ und alle $p \in M$. In lokalen Koordinaten ist $\text{grad} f = g^{ij}(\partial_i f) \cdot \partial_j$.

Lemma 2.1.2

Seien g und $\bar{g} = e^{2u} \cdot g$ konform äquivalente riemannsche Metriken auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $u \in C^\infty(M)$. Dann gilt:

(i) Der Levi-Civita-Zusammenhang auf TM zur Metrik \bar{g} ist gegeben durch:

$$\nabla_X^{\bar{g}} Y = \nabla_X^g Y + \nabla u(X) \cdot y + \nabla u(Y) \cdot X - \langle X, Y \rangle \cdot \text{grad}_g u. \quad (2.1)$$

(ii) Der $(4,0)$ -Krümmungstensor bzgl. \bar{g} ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} & \langle R^{\bar{g}}(X, Y)Z, W \rangle_{\bar{g}} \\ &= e^{2u} \cdot \left\{ \langle R^g(X, Y)Z, W \rangle_g \right. \\ & \quad + \nabla^2 u(X, Z) \cdot \langle Y, W \rangle - \nabla^2 u(X, W) \cdot \langle Y, Z \rangle \\ & \quad - \nabla^2 u(Y, Z) \cdot \langle X, W \rangle + \nabla^2 u(Y, W) \cdot \langle X, Z \rangle \\ & \quad - \nabla u(X) \nabla u(Z) \cdot \langle Y, W \rangle + \nabla u(Y) \nabla u(Z) \cdot \langle X, W \rangle \\ & \quad - \nabla u(Y) \nabla u(W) \cdot \langle X, Z \rangle + \nabla u(X) \nabla u(W) \cdot \langle Y, Z \rangle \\ & \quad \left. + \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle |\nabla u|^2 - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle |\nabla u|^2 \right\}. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Hierbei sind alle Terme auf der rechten Seite bzgl. der Metrik g .

(iii) Der Ricci-Tensor (als Bilinearform) bzgl. \bar{g} ergibt sich zu:

$$\text{ric}_{\bar{g}} = \text{ric}_g - (n-2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) + (\Delta u - (n-2)|\nabla u|^2) \cdot g. \quad (2.3)$$

(iv) Für die Skalarkrümmung bzgl. \bar{g} erhalten wir dann:

$$\text{scal}_{\bar{g}} = e^{-2u} \cdot \left\{ \text{scal}_g + 2(n-1)\Delta u - (n-2)(n-1)|\nabla u|^2 \right\}. \quad (2.4)$$

2 Das Yamabe-Problem

(v) Für den spurfreien Anteil $B_g = \text{ric}_g - \frac{\text{scal}_g}{n} \cdot g$ des Ricci-Tensors finden wir schließlich:

$$B_{\bar{g}} = B_g - (n-2) (\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) - \frac{n-2}{n} (\Delta u + |\nabla u|^2) \cdot g. \quad (2.5)$$

Beweis.

(i) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle_{\bar{g}} &= X(e^{2u}\langle Y, Z \rangle_g) \\ &= e^{2u} \cdot 2\nabla u(X) \cdot \langle Y, Z \rangle_g + e^{2u} \cdot X\langle Y, Z \rangle_g \\ &= 2\nabla u(X) \cdot \langle Y, Z \rangle_{\bar{g}} + e^{2u} \cdot X\langle Y, Z \rangle_g. \end{aligned}$$

Die Koszul-Formel liefert daher:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X^{\bar{g}} Y, Z \rangle_{\bar{g}} &= X\langle Y, Z \rangle_{\bar{g}} + Y\langle Z, X \rangle_{\bar{g}} - Z\langle X, Y \rangle_{\bar{g}} \\ &\quad - \langle X, [Y, Z] \rangle_{\bar{g}} + \langle Y, [Z, X] \rangle_{\bar{g}} + \langle Z, [X, Y] \rangle_{\bar{g}} \\ &= e^{2u} \left\{ 2\nabla u(X) \cdot \langle Y, Z \rangle_g + 2\nabla u(Y) \cdot \langle Z, X \rangle_g - 2\nabla u(Z) \cdot \langle X, Y \rangle_g \right. \\ &\quad \left. + X\langle Y, Z \rangle_g + Y\langle Z, X \rangle_g - Z\langle X, Y \rangle_g \right. \\ &\quad \left. - \langle X, [Y, Z] \rangle_g + \langle Y, [Z, X] \rangle_g + \langle Z, [X, Y] \rangle_g \right\} \\ &= 2e^{2u} \left\{ \nabla u(X) \cdot \langle Y, Z \rangle_g + \nabla u(Y) \cdot \langle Z, X \rangle_g - \nabla u(Z) \cdot \langle X, Y \rangle_g \right. \\ &\quad \left. + \langle \nabla_X^g Y, Z \rangle_g \right\} \\ &= 2\langle \nabla_X^g Y + \nabla u(X) \cdot Y + \nabla u(Y) \cdot X - \langle X, Y \rangle \cdot \text{grad } u, Z \rangle_{\bar{g}}. \end{aligned}$$

(ii) Der Krümmungstensor $R^{\bar{g}}$ ist tensoriell in allen Einträgen, d.h. der Wert in p von $\langle R^{\bar{g}}(X, Y)Z, W \rangle_{\bar{g}}$ hängt nur von $X, Y, Z, W \in T_p M$ ab. Wähle daher Fortsetzungen von X, Y, Z zu Vektorfeldern, für die paarweise alle kovarianten Ableitungen bzgl. g in p verschwinden, also $(\nabla_X Y)(p) = (\nabla_Y X)(p) = [X, Y](p) = 0$ und analog für X, Z bzw. Y, Z . In dem Krümmungstensor verschwinden daher im betrachteten Punkt bereits die Terme mit kovarianten Ableitungen nach $[X, Y]$ bzw. $[Y, Z]$. Wir haben also:

$$\begin{aligned} \langle R^{\bar{g}}(X, Y)Z, W \rangle_{\bar{g}}(p) &= \left\langle (\nabla^{\bar{g}})_{X, Y}^2 Z, W - (\nabla^{\bar{g}})_{X, Y}^2 Z, W \right\rangle_{\bar{g}}(p) \\ &= \langle \nabla_X^{\bar{g}} \nabla_Y^{\bar{g}} Z, W \rangle_{\bar{g}}(p) + \langle \nabla_Y^{\bar{g}} \nabla_X^{\bar{g}} Z, W \rangle_{\bar{g}}(p). \end{aligned}$$

Bei der folgenden Berechnung von $\langle \nabla_X^{\bar{g}} \nabla_Y^{\bar{g}} Z, W \rangle_{\bar{g}}(p)$ können wir ferner alle Terme ignorieren, die symmetrisch in X, Y sind, denn diese fallen bei der anschließenden

Antisymmetrisierung zu $\langle R^{\bar{g}}(X, Y)Z, W \rangle_{\bar{g}}(p)$ ohnehin weg. Wir erhalten also durch zweimaliges Anwenden von (2.1) (hier und im Folgenden sind Terme ohne Index stets bzgl. g):

$$\begin{aligned}
 & e^{-2u} \cdot \langle \nabla_X^{\bar{g}} \nabla_Y^{\bar{g}} Z, W \rangle_{\bar{g}}(p) \\
 &= \left(\left\langle \nabla_X^{\bar{g}} (\nabla_Y Z + \nabla u(Y) \cdot Z + \nabla u(Z) \cdot Y - \langle Y, Z \rangle \cdot \text{grad } u), W \right\rangle \right)(p) \\
 &= \left(\left\langle \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_X (\nabla u(Y) \cdot Z + \nabla u(Z) \cdot Y - \langle Y, Z \rangle \cdot \text{grad } u), W \right\rangle \right. \\
 &\quad + \nabla u(X) \cdot \left\langle (\nabla_Y Z + \nabla u(Y) \cdot Z + \nabla u(Z) \cdot Y - \langle Y, Z \rangle \cdot \text{grad } u), W \right\rangle \\
 &\quad + \left(\nabla u(Y) \nabla u(Z) + \nabla u(Z) \nabla u(Y) - \langle Y, Z \rangle \cdot \langle \nabla u, \nabla u \rangle \right) \cdot \langle X, W \rangle \\
 &\quad \left. - \langle X, \nabla_Y Z + \nabla u(Y) \cdot Z + \nabla u(Z) \cdot Y - \langle Y, Z \rangle \cdot \text{grad } u \rangle \cdot \langle \text{grad } u, W \rangle \right)(p) \\
 &= \left(\left\langle \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_X (\nabla u(Y)) \cdot Z + \nabla_X (\nabla u(Z)) \cdot Y - \langle Y, Z \rangle \cdot \nabla_X \text{grad } u, W \right\rangle \right. \\
 &\quad + \nabla u(X) \nabla u(Y) \langle Z, W \rangle + \nabla u(X) \nabla u(Z) \langle Y, W \rangle - \nabla u(X) \nabla u(W) \langle Y, Z \rangle \\
 &\quad + \nabla u(Y) \nabla u(Z) \langle X, W \rangle + \nabla u(Z) \nabla u(Y) \langle X, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle |\nabla u|^2 \\
 &\quad \left. - \nabla u(Y) \nabla u(W) \langle X, Z \rangle + \nabla u(Z) \nabla u(W) \langle X, Y \rangle + \nabla u(X) \nabla u(W) \langle Y, Z \rangle \right)(p) \\
 &= \left(\left\langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \right\rangle + \nabla^2 u(X, Z) \langle Y, W \rangle - \nabla^2 u(X, W) \langle Y, Z \rangle \right. \\
 &\quad + \nabla u(X) \nabla u(Z) \langle Y, W \rangle + 2 \nabla u(Y) \nabla u(Z) \langle X, W \rangle \\
 &\quad - \nabla u(Y) \nabla u(W) \langle X, Z \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle |\nabla u|^2 \\
 &\quad \left. + \text{Terme symmetrisch in } X, Y \right)(p)
 \end{aligned}$$

Zusammen mit den entsprechenden Termen für $\langle \nabla_Y^{\bar{g}} \nabla_X^{\bar{g}} Z, W \rangle_{\bar{g}}(p)$ ergibt sich die Behauptung.

- (iii) Bilden $e_j, j = 1 \dots n$ eine lokale Orthonormalbasis für g , so bilden $e^{-u} e_j, j = 1 \dots n$ eine lokale Orthonormalbasis für \bar{g} . Wir erhalten daher für den Ricci-Tensor, ausgewertet in X, W :

$$\begin{aligned}
 \text{ric}_{\bar{g}}(X, W) &= \sum_{j=1}^n \langle R^{\bar{g}}(X, e^{-u} e_j) e^{-u} e_j, W \rangle_{\bar{g}} \\
 &= \sum_{j=1}^n e^{-2u} \cdot \langle R^{\bar{g}}(X, e_j) e_j, W \rangle_{\bar{g}}
 \end{aligned}$$

2 Das Yamabe-Problem

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left(\langle R^g(X, e_j)e_j, W \rangle \right. \\
&\quad + \nabla^2 u(X, e_j) \cdot \langle e_j, W \rangle - \nabla^2 u(X, W) \cdot \langle e_j, e_j \rangle \\
&\quad - \nabla^2 u(e_j, e_j) \cdot \langle X, W \rangle + \nabla^2 u(e_j, W) \cdot \langle X, e_j \rangle \\
&\quad - \nabla u(X) \nabla u(e_j) \cdot \langle e_j, W \rangle + \nabla u(e_j) \nabla u(e_j) \cdot \langle X, W \rangle \\
&\quad - \nabla u(e_j) \nabla u(W) \cdot \langle X, e_j \rangle + \nabla u(X) \nabla u(W) \cdot \langle e_j, e_j \rangle \\
&\quad \left. + \langle X, e_j \rangle \langle e_j, W \rangle |\nabla u|^2 - \langle e_j, e_j \rangle \cdot \langle X, W \rangle \cdot |\nabla u|^2 \right) \\
&= \text{ric}_g(X, W) + \nabla^2 u(X, W) - n \cdot \nabla^2 u(X, W) \\
&\quad + \Delta u \cdot \langle X, W \rangle + \nabla^2 u(X, W) \\
&\quad - \nabla u(X) \nabla u(W) + |\nabla u|^2 \langle X, W \rangle \\
&\quad - \nabla u(X) \nabla u(W) + n \cdot \nabla u(X) \nabla u(W) \\
&\quad + |\nabla u|^2 \langle X, W \rangle - n \cdot |\nabla u|^2 \langle X, W \rangle \\
&= \text{ric}_g(X, W) - (n-2) \nabla^2 u(X, W) + (n-2) \nabla u(X) \nabla u(W) \\
&\quad + \Delta u \cdot \langle X, W \rangle - (n-2) |\nabla u|^2 \cdot \langle X, W \rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $\text{tr}(-\nabla^2 u) = \Delta u$.

(iv) Die Skalarkrümmung erhalten wir als Spur des Ricci-Tensors:

$$\begin{aligned}
\text{scal}_{\bar{g}} &= \sum_{i=1}^n \text{ric}_{\bar{g}}(e^{-u}e_i, e^{-u}e_i) \\
&= e^{-2u} \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ \text{ric}_g(e_i, e_i) - (n-2) (\nabla^2 u)(e_i, e_i) + (n-2) \nabla u(e_i) \nabla u(e_i) \right. \\
&\quad \left. + \Delta u \cdot \langle e_i, e_i \rangle - (n-2) |\nabla u|^2 \cdot \langle e_i, e_i \rangle \right\} \\
&= e^{-2u} \cdot \left\{ \text{scal}_g + (n-2) \Delta u + (n-2) |\nabla u|^2 + n \cdot \Delta u \right. \\
&\quad \left. - n \cdot (n-2) \cdot |\nabla u|^2 \right\}
\end{aligned}$$

(v) Aus (2.3) und (2.4) berechnen wir:

$$\begin{aligned}
B_{\bar{g}} &= \text{ric}_{\bar{g}} - \frac{\text{scal}_{\bar{g}}}{n} \cdot \bar{g} \\
&= \text{ric}_g - (n-2) (\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) + (\Delta u - (n-2) |\nabla u|^2) \cdot g \\
&\quad - \frac{1}{n} (\text{scal}_g + 2(n-1) \Delta u - (n-2)(n-1) |\nabla u|^2) \cdot g \\
&= B_g - (n-2) (\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) \\
&\quad + \left(\left(1 - 2 \frac{n-1}{n}\right) \cdot \Delta u + \left(\frac{(n-2)(n-1)}{n} - (n-2) \right) \cdot |\nabla u|^2 \right) \cdot g.
\end{aligned}$$

□

Im Folgenden sei $\dim(M) = n \geq 2$.

Definition 2.1.3. Der Differentialoperator Y , definiert durch

$$Y(\varphi) := \Delta\varphi + \frac{n-2}{4(n-1)} \text{scal} \cdot \varphi,$$

heißt *Yamabe-Operator* oder *konformer Laplace-Operator*.

Lemma 2.1.4

Ist $\bar{g} = e^{2u} \cdot g$, so gilt für alle $\varphi \in C^2(M)$:

$$Y_{\bar{g}}(\varphi) = e^{-\frac{n+2}{2} \cdot u} Y_g \left(e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \cdot \varphi \right).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} Y_{\bar{g}}(\varphi) &= e^{-2u} \left(\Delta_g \varphi - (n-2) \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \right) \\ &\quad + \frac{n-2}{4(n-1)} \cdot e^{-2u} \left(\text{scal}_g + 2(n-1)\Delta u - (n-2)(n-1)|\nabla u|^2 \right) \cdot \varphi \\ &= e^{-2u} \left(\Delta_g \varphi - (n-2) \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \right) \\ &\quad + \underbrace{\frac{n-2}{4} \Delta_g u \cdot \varphi - \frac{(n-2)^2}{4} |\nabla u|^2 \varphi}_{= e^{-\frac{n-2}{2} \cdot u} \Delta \left(e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \right) \cdot \varphi} + \frac{n-2}{4(n-1)} \text{scal}_g \cdot \varphi \\ &= e^{-\frac{n+2}{2} \cdot u} \left(e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \Delta_g \varphi - \frac{2(n-2)}{2} e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \right) \\ &\quad + \Delta \left(e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \right) \cdot \varphi + \frac{n-2}{4(n-1)} e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \text{scal}_g \cdot \varphi \\ &\stackrel{(1.16)}{=} e^{-\frac{n+2}{2} \cdot u} \left(\Delta_g \left(e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \varphi \right) + \frac{n-2}{4(n-1)} e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \text{scal}_g \cdot \varphi \right) \\ &= e^{-\frac{n+2}{2} \cdot u} \left(e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \cdot \varphi \right). \quad \square \end{aligned}$$

2 Das Yamabe-Problem

Mit der Substitution $e^{2u} = f^{p-2}$ mit $p = \frac{2n}{n-2}$ erhalten wir:

Folgerung 2.1.5

Es gilt

$$Y_{\bar{g}}(f^{-1}\varphi) = f^{1-p}Y_g(\varphi). \quad (2.6)$$

$\varphi = f$ liefert insbesondere für das konforme Transformationsverhalten der Skalar­krümmung:

$$\text{scal}_{\bar{g}} = f^{1-p} \left(4 \frac{n-1}{n-2} \Delta_g f + \text{scal}_g \cdot f \right). \quad (2.7)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} Y_g(\varphi) &= e^{\frac{n+2}{2} \cdot u} Y_{\bar{g}} \left(e^{-\frac{n-2}{2} \cdot u} \varphi \right) \\ &= e^{\frac{n+2}{4} \cdot 2u} Y_{\bar{g}} \left(e^{-\frac{n-2}{4} \cdot 2u} \varphi \right) \\ &= f^{(p-2) \cdot \frac{n+2}{4}} Y_{\bar{g}} \left(f^{-(p-2) \cdot \frac{n-2}{4}} \varphi \right) \\ &= f^{p-1} Y_{\bar{g}}(f^{-1} \cdot \varphi), \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\frac{n+2}{4} = \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n+2}{n-2}$ und $p-2 = \frac{2n}{n-2} - 2 = \frac{2n-2(n-2)}{n-2} = \frac{4}{n-2}$ sowie $p-1 = \frac{2n}{n-2} - 1 = \frac{2n-(n-2)}{n-2} = \frac{n+2}{n-2}$.

Setzen wir $\varphi = f$ in (2.6) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} Y_{\bar{g}}(1) &= \frac{n-2}{4(n-1)} \text{scal}_{\bar{g}} \\ &= f^{1-p} Y_g(f) \\ &= f^{1-p} \left(\Delta(f) + \frac{n-2}{4(n-1)} \text{scal}_g \cdot f \right). \quad \square \end{aligned}$$

Im Folgenden sei $n \geq 3$, $p = \frac{2n}{n-2}$ und $a = \frac{n-2}{4(n-1)}$, also $Y = \Delta + a \cdot \text{scal}$. Damit finden wir: Die Metrik $\bar{g} = e^{2u} \cdot g = f^{p-2} \cdot g$ hat konstante Skalar­krümmung s .

$$\begin{aligned} \text{scal}_{\bar{g}} = s &\Leftrightarrow f^{1-p} \left(\frac{1}{a} \cdot \Delta_g f + \text{scal}_g \cdot f \right) = s \\ &\Leftrightarrow \Delta_g f + a \cdot \text{scal}_g \cdot f = \underbrace{a \cdot s}_{=: \lambda} \cdot f^{p-1} \\ &\Leftrightarrow Y_g(f) = \lambda \cdot f^{p-1}. \end{aligned}$$

Wie wir noch sehen werden, hängt das Lösungsverhalten der nichtlinearen Eigenwertgleichung $Y(\varphi) = \lambda \cdot \varphi^q$ stark von dem Wert q ab. Der kritische Wert ist genau der geometrisch relevante, also $q = p - 1 = \frac{n+2}{n-2}$. Für $q < \frac{n+2}{n-2}$ ist die Lösungstheorie der Eigenwertgleichung dem linearen Fall sehr ähnlich. Für $q > \frac{n+2}{n-2}$ existieren i. Allg. keine Lösungen.

Wie viele geometrisch relevante Differentialgleichungen, so ist auch die Gleichung $Y(f) = \lambda \cdot f^{p-1}$ die Euler-Lagrange-Gleichung eines geometrisch natürlichen Funktionals:

Lemma 2.1.6 (Yamabe)

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die nichtlineare Eigenwertgleichung $Y(f) = \lambda \cdot f^{p-1}$ die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$Q(\bar{g}) := \frac{\int_M \text{scal}_{\bar{g}} \, d\text{vol}_{\bar{g}}}{\left(\int_M d\text{vol}_{\bar{g}}\right)^{2/p}}$$

bzgl. der Variation in der konformen Äquivalenzklasse von g , also $\bar{g} = e^{2u} \cdot g = f^{p-2} \cdot g$, $u, f \in C^\infty(M)$.

Beweis. Für das Volumenelement von \bar{g} finden wir:

$$d\text{vol}_{\bar{g}} = e^{nu} d\text{vol}_g = e^{(p-2) \cdot (n/2)} d\text{vol}_g = f^p d\text{vol}_g,$$

denn $\frac{p}{p-2} = \frac{2n}{n-2} \cdot \frac{n-2}{4} = \frac{n}{2}$. Daher ist

$$\int_M d\text{vol}_{\bar{g}} = \int_M f^p d\text{vol}_g = \|f\|_{L^p(M,g)}^p.$$

(Im Folgenden sind alle nicht explizit indizierten Terme bzgl. g). Für den Zähler von $Q(\bar{g})$ finden wir daher:

$$\begin{aligned} \int_M \text{scal}_{\bar{g}} \, d\text{vol}_{\bar{g}} &= \int_M f^{1-p} \left(\frac{1}{a} \cdot \Delta f + \text{scal}_g \cdot f \right) \cdot f^p \, d\text{vol}_g \\ &= \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot f \Delta f + f^2 \text{scal}_g \right) d\text{vol}_g \\ &\stackrel{(1.16)}{=} \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot |\nabla f|^2 + f^2 \text{scal}_g \right) d\text{vol}_g \\ &=: E_g(f). \end{aligned}$$

2 Das Yamabe-Problem

Für die Variation von $Q(\bar{g}) = Q_g(f) := \frac{E_g(f)}{\|f\|_{L^p}^2}$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_0 E_g(f+th) &= \int_M \frac{d}{dt}\Big|_0 \left(\frac{1}{a} \cdot |\nabla(f+th)|^2 + (f+th)^2 \text{scal}_g \right) d\text{vol}_g \\ &= 2 \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot \langle \nabla f, \nabla h \rangle + f \cdot h \cdot \text{scal}_g \right) d\text{vol}_g \\ &\stackrel{(1.16)}{=} 2 \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot \Delta f + f \cdot \text{scal}_g \right) \cdot h d\text{vol}_g \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_0 (\|f\|_{L^p})^{2/p} &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \left(\int_M |f+th|^p d\text{vol}_g \right)^{2/p} \\ &= \frac{2}{p} \left(\int_M |f+th|^p d\text{vol}_g \right)^{2/p-1} \cdot \int_M \frac{d}{dt}\Big|_0 |f+th|^p d\text{vol}_g \\ &= \frac{2}{p} \cdot \|f\|_{L^p}^2 \cdot \|f\|_{L^p}^{-p} \cdot p \cdot \int_M f^{p-1} \cdot h d\text{vol}_g, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $f > 0$, also $|f+th| = f+th$ für hinreichend kleine t . Zusammen erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_0 Q_g(f+th) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \left(\frac{E_g(f+th)}{\|f\|_{L^p}^2} \right) \\ &= \frac{1}{\|f\|_{L^p}^4} \left(\frac{d}{dt}\Big|_0 E_g(f+th) \cdot \|f\|_{L^p}^2 - E_g(f) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_0 \|f\|_{L^p}^2 \right) \\ &= \frac{2}{\|f\|_{L^p}^2} \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot \Delta f + \text{scal}_g \cdot f - \|f\|_{L^p}^{-p} \cdot E_g(f) \cdot f^{p-1} \right) \cdot h d\text{vol}_g. \end{aligned}$$

Somit ist f ein kritischer Punkt von Q_g genau dann, wenn

$$\left(\frac{1}{a} \cdot \Delta f + \text{scal}_g \cdot f - \|f\|_{L^p}^{-p} \cdot E_g(f) \cdot f^{p-1} \right) = 0,$$

also genau dann, wenn $Y(f) = a \cdot \frac{E_g(f)}{\|f\|_{L^p}^p} \cdot f^{p-1}$. □

Bemerkung 2.1.7. Das Yamabe-Funktional Q_g bzw. Q ist nach unten beschränkt, denn für den einzigen evtl. negativen Term finden wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_M \text{scal}_g \cdot f^2 d\text{vol}_g \right| &= \|\text{scal}_g \cdot f^2\|_{L^1} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\text{scal}_g\|_{L^{(p/2)^*}} \cdot \|f^2\|_{L^{p/2}} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \|\text{scal}_g\|_{L^{(p/2)^*}} \cdot \|f\|_{L^p}^2, \end{aligned}$$

so dass $Q_g(f) \geq -\|\text{scal}_g\|_{L^{(p/2)^*}}$ für alle f .

Definition 2.1.8. Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Die *Yamabe-Invariante*

$$\begin{aligned} \lambda(M, [g]) &:= \inf \{ Q(\bar{g}) \mid \bar{g} \text{ konform äquivalent zu } g \} \\ &= \inf \{ Q_g(f) \mid f \in C^\infty(M), f > 0 \} \end{aligned}$$

ist eine Invariante der konformen Äquivalenzklasse (kurz: der konformen Klasse) $[g] := \{ \bar{g} \mid \bar{g} \text{ konform äquivalent zu } g \} = \{ e^{2u} \cdot g \mid u \in C^\infty(M) \}$ von g .

Bemerkung 2.1.9. Ist die Skalarkrümmung von (M, g) positiv, $\text{scal} > 0$, so gibt es wegen der Kompaktheit von M eine positive untere Schranke $\text{scal} \geq C_1 > 0$. Somit gilt für den Zähler des Yamabe-Funktional

$$E_g(f) \geq \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot |\nabla f|^2 + C_1 \cdot f^2 \right) d\text{vol}_g \geq C_2 \cdot \|f\|_{H^{1,2}}^2.$$

Andererseits gilt wegen des Sobolev'schen Einbettungssatzes 1.1.21

$$\|f\|_{L^p}^2 \leq C_3 \cdot \|f\|_{H^{1,2}}^2.$$

Damit gilt für das Yamabe-Funktional und alle f

$$Q_g(f) \geq \frac{C_2}{C_3}$$

und somit

$$\lambda(M, [g]) \geq \frac{C_2}{C_3} > 0.$$

2 Das Yamabe-Problem

Bemerkung 2.1.10. Für M zusammenhängend und $n = \dim(M) \geq 3$ gilt:

$$B = \text{ric} - \frac{\text{scal}}{n} \cdot g = 0 \Leftrightarrow M \text{ ist eine Einstein-Mannigfaltigkeit.}$$

Beweis.

\Leftarrow : $\text{ric} = \lambda \cdot g$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ impliziert $\text{scal} = \lambda \cdot n$, also $B = \lambda \cdot g - \frac{\lambda n}{n} \cdot g = 0$.

\Rightarrow : Durch kovariante Ableitung der Gleichung $n \text{ric} = \text{scal} \cdot g$ erhalten wir $n \nabla \text{ric} = \nabla \text{scal} \otimes g$, also

$$n \cdot \text{div}(\text{ric}) := n \cdot \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \text{ric})(e_i, \cdot) = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} \text{scal} \cdot g(e_i, \cdot) = \nabla \text{scal}. \quad (2.8)$$

Die 2. Bianchi-Identität liefert andererseits

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X R(e_i, Z)Y + \nabla_{e_i} R(Z, X)Y + \nabla_Z R(X, e_i)Y, e_i \rangle \\ &= (\nabla_X \text{ric})(Y, Z) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} R(Z, X)Y, e_i \rangle - (\nabla_Z \text{ric})(X, Y). \end{aligned}$$

Mit $X = Y = e_j$ erhalten wir durch Summation über j

$$0 = 2 \text{div} \text{ric}(Z) - \nabla_Z \text{scal},$$

d. h.

$$2 \text{div} \text{ric} = \nabla \text{scal}. \quad (2.9)$$

Da $n \neq 2$, folgt $\nabla \text{scal} = 0$. Da M zusammenhängend ist, muss $\text{scal} \equiv s \in \mathbb{R}$ konstant sein und daher $\text{ric} = \lambda \cdot g$ mit $\lambda = \frac{s}{n}$.

□

Erinnerung 2.1.11

Die Modellräume konstanter Schnittkrümmung κ sind:

$$\mathbb{M}_\kappa^n := \begin{cases} (S^n, \frac{1}{\kappa} \cdot g_{\text{sph}}), & \kappa > 0 \\ (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}), & \kappa = 0 \\ (\mathbb{H}^n, \frac{1}{|\kappa|} \cdot g_{\text{hyp}}), & \kappa < 0 \end{cases}. \quad (2.10)$$

Bemerkung 2.1.12. Ist (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n , so gilt:

(M, g) ist lokal isometrisch zu $\mathbb{M}_\kappa^n \Leftrightarrow (M, g)$ hat konstante Schnittkrümmung $K \equiv \kappa$.

Beweisskizze.

⇒ klar.

⇐ Wähle hinreichend kleine Bälle um Punkte $p \in M$ und $q \in \mathbb{M}_\kappa^n$ so dass die riemannschen Exponentialabbildungen Diffeomorphismen sind. Wähle eine lineare Isometrie T der euklidischen Vektorräume $T : T_p M \rightarrow T_q \mathbb{M}_\kappa^n$. Dann ist die Verkettung

$$\begin{array}{ccc} B_r(0) \subset T_p M & \xrightarrow[\cong]{T} & T_q \mathbb{M}_\kappa^n \supset B_r(0) \\ \downarrow \exp_p & & \downarrow \exp_q \\ B_r(p) \subset M & & \mathbb{M}_\kappa^n \supset B_r(q) \end{array}$$

$\exp_q \circ T \circ \exp_p^{-1} : B_r(p) \rightarrow B_r(q)$ ein Diffeomorphismus. Der Nachweis, dass dieser Diffeomorphismus eine Isometrie ist, beruht auf der Beschreibung des Differentials der riemannschen Exponentialabbildung mittels Jacobifeldern. Letztere können im Fall konstanter Schnittkrümmung explizit hingeschrieben werden. □

Beispiel 2.1.13. Flache Tori sind lokal isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$, aber global nicht einmal homöomorph.

Die relativ starke Bedingung lokaler Isometrie zu \mathbb{M}_κ^n ist also durch die ebenfalls starke Bedingung konstanter Krümmung festgelegt. Eine schwächere Bedingung ist die lokal konformer Äquivalenz. Eine naheliegende Frage ist also: sieht man der Krümmung an, ob eine Mannigfaltigkeit (M, g) lokal konform äquivalent zu $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ ist ?

Definition 2.1.14. Eine riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *konform flach*, falls es zu jedem $p \in M$ eine Karte (U, Φ, V) und eine Funktion $u \in C^\infty(U)$ gibt, so dass gilt:

$$g|_U = e^{2u} \cdot (\Phi^{-1})^* g_{\text{eukl}},$$

In anderen Worten: (M, g) heißt konform flach, falls um jedes $p \in M$ Koordinaten existieren, in denen gilt: $g_{ij} = e^{2u} \delta_{ij}$.

Bemerkung 2.1.15. Für $n = 2$ kennt man solche Koordinaten klassisch als *isotherme Koordinaten*.

2 Das Yamabe-Problem

Beispiel 2.1.16. \mathbb{M}_κ^n mit $\kappa > 0$ ist konform flach:

Es genügt den Fall $\kappa = 1$ zu betrachten, denn die Eigenschaft konform flach zu sein, ist offensichtlich invariant unter Reskalierungen der Metrik.

Sei also (S^n, g_{sph}) die Standardsphäre und $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ der Nordpol. Schreibe $y = (y^0, y^1, \dots, y^n) = (y^0, \hat{y})$. Die *stereografische Projektion* im Nordpol $\sigma : S^n - \{e_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist beschrieben durch $(0, \sigma(y)) = (0, x) = (1-t)e_0 + ty$. Damit ist $0 = (1-t) \cdot 1 + t \cdot y^0$, also $t = \frac{1}{1-y^0}$. Wir erhalten: $x = t\hat{y} = \frac{\hat{y}}{1-y^0} = \sigma(y)$.

Um $(\sigma^{-1})^* g_{\text{sph}}$ zu bestimmen, berechnen wir die Änderung der Länge eines Tangentialvektors $v \in T_y S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, y \rangle = 0\}$ unter σ . O. B. d. A. sei dazu $|v| = 1$. Wir setzen dann $c(t) = \cos(t) \cdot y + \sin(t) \cdot v$. Dann ist $c(t) \in S^n$ für alle t und $c(0) = y$, $\dot{c}(0) = v$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} d\sigma(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \sigma(c(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \frac{\cos(t) \cdot \hat{y} + \sin(t) \hat{v}}{1 - \cos(t) \cdot y^0 - \sin(t) \cdot v^0} \\ &= \frac{\hat{v} \cdot (1 - y^0) - \hat{y} \cdot (-v^0)}{(1 - y^0)^2}. \end{aligned}$$

Für die Länge erhalten wir also, unter Beachtung von $|\hat{v}|^2 = 1 - (v^0)^2$, $|\hat{y}|^2 = 1 - (y^0)^2$ und $\langle \hat{v}, \hat{y} \rangle = -v^0 y^0$:

$$\begin{aligned} |d\sigma(v)|^2 &= \frac{|\hat{v}|^2 (1 - y^0)^2 + 2 \langle (1 - y^0) \hat{v}, v^0 \hat{y} \rangle + (v^0)^2 |\hat{y}|^2}{(1 - y^0)^4} \\ &= \frac{(1 - (v^0)^2) (1 - y^0)^2 - 2 (1 - y^0) (v^0)^2 y^0 + (v^0)^2 (1 - (y^0)^2)}{(1 - y^0)^4} \\ &= \frac{(1 - (v^0)^2) (1 - y^0) - 2 (v^0)^2 y^0 + (v^0)^2 (1 + y^0)}{(1 - y^0)^3} \\ &= \frac{1}{(1 - y^0)^2}. \end{aligned}$$

Als Funktion von x erhalten wir also: $x = \frac{\hat{y}}{1-y^0}$, und damit $|x|^2 = \frac{1-(y^0)^2}{(1-y^0)^2} = \frac{1+y^0}{1-y^0}$. Es folgt $|x|^2 + 1 = \frac{1+y^0+1-y^0}{1-y^0} = \frac{2}{1-y^0}$, und schließlich

$$(\sigma^{-1})^* g_{\text{sph}} = (1 - y^0)^2 \cdot g_{\text{eukl}} = \underbrace{\frac{4}{(|x|^2 + 1)^2}}_{e^{2u(x)}} \cdot g_{\text{eukl}}.$$

Übung 2.1.17

Zeigen Sie: \mathbb{M}_κ^n ist konform flach für $\kappa < 0$.

Definition 2.1.18. Seien h und k zwei symmetrische Bilinearformen auf einem Vektorraum V . Das *Kulkarni-Nomizu-Produkt* $h \otimes k$ ist definiert durch

$$(h \otimes k)(X, Y, Z, U) := h(X, U)k(Y, Z) + h(Y, Z)k(X, U) - h(X, Z)k(Y, U) - h(Y, U)k(X, Z) \quad (2.11)$$

für $X, Y, Z, U \in V$.

Bemerkungen 2.1.19

1. $h \otimes k$ hat dieselben Symmetrien wie der Krümmungstensor R : Wir finden nämlich

$$\begin{aligned} (h \otimes k)(X, Y, Z, U) &= h(X, U)k(Y, Z) + h(Y, Z)k(X, U) \\ &\quad - h(X, Z)k(Y, U) - h(Y, U)k(X, Z) \\ &= - (h(Y, U)k(X, Z) + h(X, Z)k(Y, U) \\ &\quad - h(Y, Z)k(X, U) - h(X, U)k(Y, Z)) \\ &= - (h \otimes k)(Y, X, Z, U) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (h \otimes k)(X, Y, Z, U) &= h(X, U)k(Y, Z) + h(Y, Z)k(X, U) \\ &\quad - h(X, Z)k(Y, U) - h(Y, U)k(X, Z) \\ &= h(Y, Z)k(X, U) + h(X, U)k(Y, Z) \\ &\quad - h(X, Z)k(Y, U) - h(Y, U)k(X, Z) \\ &= h(Z, Y)k(X, U) + h(Z, U)k(Z, Y) \\ &\quad - h(Z, X)k(U, Y) - h(U, Y)k(Z, X) \\ &= (h \otimes k)(Z, U, X, Y) \end{aligned}$$

sowie die 1. Bianchi-Identität:

$$\begin{aligned} &(h \otimes k)(X, Y, Z, W) + (h \otimes k)(Y, Z, X, W) + (h \otimes k)(Z, X, Y, W) \\ &= h(X, U)k(Y, Z) + h(Y, Z)k(X, U) - h(X, Z)k(Y, U) - h(Y, U)k(X, Z) \\ &\quad + h(Y, U)k(Z, X) + h(Z, X)k(Y, U) - h(Y, X)k(Z, U) - h(Z, U)k(Y, X) \\ &\quad + h(Z, U)k(X, Y) + h(X, Y)k(Z, U) - h(Z, Y)k(X, U) - h(X, U)k(Z, Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Für $n \geq 3$ gilt:

$$K \equiv \kappa \Leftrightarrow \langle R(X, Y)Z, U \rangle = \frac{\kappa}{2} \cdot (g \otimes g)(X, Y, Z, U),$$

2 Das Yamabe-Problem

(d.h. $R_4 = \frac{\kappa}{2} \cdot g \otimes g$), denn die Schnittkrümmung schreibt sich mit \otimes als $K(E(X, Y)) = \frac{R_4(X, Y, Y, X)}{\frac{1}{2}g \otimes g(X, Y, Y, X)}$, wobei $E(X, Y) \subset T_p M$ die von X und Y aufgespannte Ebene ist.

Definition 2.1.20. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Der *Weyl'sche Krümmungstensor* W (kurz: die *Weyl-Krümmung*) ist definiert durch:

$$\langle W(X, Y, Z), U \rangle = W_4(X, Y, Z, U), \quad (2.12)$$

wobei $W_4(X, Y, Z, U) := R_4 - \frac{\text{scal}}{2n(n-1)} \cdot (g \otimes g) - \frac{1}{n-2} (B \otimes g)$.

Lemma 2.1.21

Sei $\dim(M) = n \geq 3$, und seien g und $\bar{g} = e^{2u} \cdot g$ konform äquivalente riemannsche Metriken auf M . Dann ist $\bar{W} := W_{\bar{g}} = W_g =: W$.

Beweis. Wir zeigen: $\bar{W}_4 = e^{2u} W_4$:

$$\begin{aligned} \bar{W}_4 &= \bar{R}_4 - \frac{\bar{\text{scal}}}{2n(n-1)} \bar{g} \otimes \bar{g} - \frac{1}{n-2} \bar{B} \otimes \bar{g} \\ &= e^{2u} \cdot \left\{ R_4 - \nabla^2 u \otimes g + (\nabla u \otimes \nabla u) \otimes g - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 g \otimes g \right\} \\ &\quad - \frac{e^{-2u}}{2n(n-1)} \cdot \left\{ \text{scal} + 2(n-1)\Delta u - (n-2)(n-1)|\nabla u|^2 \right\} e^{4u} g \otimes g \\ &\quad - \frac{1}{n-2} \cdot \left\{ B - (n-2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) - \frac{n-2}{n} (\Delta u + |\nabla u|^2) \cdot g \right\} \otimes e^{2u} \cdot g \\ &= e^{2u} \left\{ R_4 - \frac{\text{scal}}{2n(n-1)} g \otimes g - \frac{1}{n-2} B \otimes g \right\} \\ &= e^{2u} W_4. \quad \square \end{aligned}$$

Folgerung 2.1.22

Ist (M, g) konform flach, so ist $W \equiv 0$, denn die Krümmung ist eine lokale Größe, und die Weyl-Krümmung W ist konform invariant.

Ist diese notwendige Bedingung für konforme Flachheit auch hinreichend?

Satz 2.1.23

Es gilt:

$n = 2$: Jede Fläche ist konform flach.

$n = 3$: Hier gilt stets $W \equiv 0$.

Eine 3-Mannigfaltigkeit M ist konform flach $\Leftrightarrow \nabla (B + \frac{1}{12} \text{scal} \cdot g)$ ist ein symmetrischer $(3, 0)$ -Tensor.

$n \geq 4$: (M, g) konform flach $\Leftrightarrow W \equiv 0$.

Der Beweis des Satzes ist nicht ganz einfach und wir lassen ihn aus Zeitgründen weg.

Bemerkung 2.1.24. Für $n \geq 3$ gilt: $K \equiv \kappa \in \mathbb{R} \Leftrightarrow B \equiv 0$ und $W \equiv 0$.

Beweis. Aus Bemerkung 2.1.10 wissen wir bereits $\text{ric} = \lambda \cdot g \Leftrightarrow B = 0$.

\Rightarrow : Sei $K \equiv \kappa \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} R_4 = \frac{\kappa}{2} g \otimes g &\implies \text{ric} = (n-1)\kappa \cdot g \implies B \equiv 0 \\ &\implies \text{scal} = n(n-1)\kappa \\ &\implies W = \frac{\kappa}{2} g \otimes g - \frac{n(n-1)\kappa}{2n(n-1)} g \otimes g = 0. \end{aligned}$$

\Leftarrow : Sei $B \equiv 0$, also $\text{ric} = \lambda \cdot g$ und $\text{scal} = n \cdot \lambda$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 = W = R_4 - \frac{n \cdot \lambda}{2n(n-1)} g \otimes g &\implies R_4 = \frac{\lambda}{2(n-1)} g \otimes g \\ &\implies K \equiv \frac{\lambda}{n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

2.2 Der Modellfall: Die Sphäre

Wie zuvor sei im Folgenden immer (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, es sei $p = \frac{2n}{n-2}$ ¹ und $a = \frac{n-2}{4(n-1)}$. Der Yamabe-Operator ist $Y = \Delta + a \cdot \text{scal}$. Für die Funktionale $Q : [g] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$Q(\bar{g}) := \frac{\int_M \text{scal}_{\bar{g}} \, d\text{vol}_{\bar{g}}}{\left(\int_M d\text{vol}_{\bar{g}}\right)^{2/p}}$$

bzw. $Q_g : \{f \in C^\infty(M) \mid f > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$Q_g(f) := \frac{\int_M \left(\frac{1}{a} |\nabla f|^2 + \text{scal}_g \cdot f^2\right) \, d\text{vol}_g}{\|f\|_{L^p(M,g)}^2},$$

hatten wir gesehen:

$$\begin{aligned} \bar{g} = f^{p-2}g &\text{ ist ein kritischer Punkt für } Q \\ \Leftrightarrow f &\text{ ist ein kritischer Punkt für } Q_g \\ \Leftrightarrow Y(f) &= \frac{a \cdot Q_g(f)}{\|f\|_{L^p}^{p-2}} \cdot f^{p-1} \\ \Leftrightarrow \bar{g} &\text{ hat konstante Skalarkrümmung } \frac{\lambda}{a} = \frac{Q_g(f)}{\|f\|_{L^p}^{p-2}}. \end{aligned}$$

Ferner wissen wir: Q_g ist nach unten beschränkt durch $-\|\text{scal}_g\|_{L^{(p/2)^*}}$. Eine naheliegende Strategie zur Lösung des Yamabe-Problems ist also, Minima von Q bzw. Q_g zu suchen. Die Yamabe-Invariante

$$\begin{aligned} \lambda(M, [g]) &= \inf \{Q(\bar{g}) \mid \bar{g} \text{ konform äquivalent zu } g\} \\ &= \inf \{Q_g(f) \mid f \in C^\infty(M), f > 0\} \end{aligned}$$

ist daher eine natürliche Größe: falls das Infimum angenommen wird, so liefert die entsprechende Metrik \bar{g} bzw. Funktion f eine Lösung des Yamabe-Problems.

Bemerkung 2.2.1. Für $c > 0$ ist $Q_g(c \cdot f) = Q_g(f)$. Mit f ist also auch $c \cdot f$ ein kritischer Punkt für Q_g .

Erinnerung 2.2.2

Die *Isometriegruppe* einer riemannschen Mannigfaltigkeit ist

$$\text{Isom}(M, g) := \{\Phi : M \rightarrow M \text{ Diffeomorphismus} \mid \Phi^*g = g\}.$$

¹Beachte: Dies ist der kritische (nämlich maximale) Wert von p , für den wir noch eine stetige Sobolev-Einbettung $H^{1,2}(M) \subset L^p(M)$ haben.

Ersetzen wir die Gleichheit der Metriken Φ^*g und g durch die schwächere Bedingung konformer Äquivalenz, so erhalten wir eine i. Allg. größere Gruppe:

Definition 2.2.3. Die *konforme Gruppe* von (M, g) ist

$$\text{Conf}(M, g) := \{ \Phi : M \rightarrow M \text{ Diffeomorphismus} \mid \Phi^*g \in [g] \} .$$

Bemerkungen 2.2.4

1. $\text{Isom}(M, g) \subset \text{Conf}(M, g)$.
2. Für jeden Diffeomorphismus $\Phi : M \rightarrow M$ ist $\int_M \text{scal}_{\Phi^*g} \, d\text{vol}_{\Phi^*g} = \int_M \text{scal}_g \, d\text{vol}_g$ und $\text{vol}(M, \Phi^*g) = \text{vol}(M, g)$, denn $\Phi : (M, \Phi^*g) \rightarrow (M, g)$ ist eine Isometrie. Insbesondere ist also Q invariant unter $\text{Conf}(M, g)$: $Q \circ \Phi^* = Q$ für alle $\Phi \in \text{Conf}(M, g)$.²
3. Mit \bar{g} ist für alle $\Phi \in \text{Conf}(M, g)$ auch $\Phi^*\bar{g}$ ein kritischer Punkt von Q .

Beispiel 2.2.5. Für $(M, g) = (S^n, g_{\text{sph}})$ ist $\text{Isom}(S^n, g_{\text{sph}}) = O(n+1)$. Zu $F \in E(n) = \text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : S^n &\rightarrow S^n \\ \Phi(e_0) &:= e_0 \\ \Phi(y) &:= (\sigma^{-1} \circ F \circ \sigma)(y) \quad \text{für } y \neq e_0 . \end{aligned}$$

Durch explizites Ausrechnen (vgl. (2.74)) kann man unschwer sehen, dass Φ und Φ^{-1} auch in e_0 glatt sind und daher $\Phi \in \text{Diffeo}(S^n)$. Wir berechnen nun:

$$\begin{aligned} \Phi^*g_{\text{sph}} &= \sigma^* \circ F^* \circ (\sigma^{-1})^* g_{\text{sph}} \\ &= \sigma^* \circ F^* \left(\frac{4}{(|x|^2 + 1)^2} g_{\text{eukl}} \right) \\ &= \sigma^* \left(\frac{4}{(|F(x)|^2 + 1)^2} \underbrace{F^*g_{\text{eukl}}}_{g_{\text{eukl}}} \right) \\ &= \sigma^* \left(\frac{(|x|^2 + 1)^2}{(|F(x)|^2 + 1)^2} \cdot \frac{4}{(|x|^2 + 1)^2} g_{\text{eukl}} \right) \\ &= \left(\frac{|\sigma(x)|^2 + 1}{|F(\sigma(x))|^2 + 1} \right)^2 g_{\text{eukl}} . \end{aligned}$$

²Beachte: Für $\Phi \notin \text{Conf}(M, g)$ ist $Q \circ \Phi^*$ kein Funktional auf $[g]$.

2 Das Yamabe-Problem

Somit sind $\Phi^* g_{\text{sph}}$ und g_{sph} konform äquivalent und daher $\Phi \in \text{Conf}(S^n, g_{\text{eukl}})$.
Zu $\alpha > 0$ betrachte die Dilatation $\delta_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\delta_\alpha(x) := \alpha^{-1} \cdot x$ und setze

$$\begin{aligned}\Psi : S^n &\rightarrow S^n \\ \Psi(e_0) &:= e_0 \\ \Psi(y) &:= (\sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma)(y) \quad \text{für } y \neq e_0.\end{aligned}$$

Wiederum kann man unschwer zeigen, dass $\Psi \in \text{Diffeo}(S^n)$. Wir finden

$$(\delta_\alpha^* g)(v, v) = g_{\text{eukl}}(d\delta_\alpha(v), d\delta_\alpha(v)) = \alpha^{-2} g_{\text{eukl}}(v, v)$$

und berechnen damit:

$$\begin{aligned}\delta_\alpha^* \circ (\sigma^{-1})^* g_{\text{sph}} &= \delta_\alpha^* \left(\frac{4}{(|x|^2 + 1)^2} g_{\text{eukl}} \right) \\ &= \frac{4}{(\alpha^{-2}|x|^2 + 1)^2} \alpha^{-2} \cdot g_{\text{eukl}} \\ &= \frac{4\alpha^2}{(|x|^2 + \alpha^2)^2} \cdot g_{\text{eukl}} \\ &= 4 u_\alpha^{p-2} \cdot g_{\text{eukl}}\end{aligned}$$

mit $u_\alpha(x) = \left(\frac{|x|^2 + \alpha^2}{\alpha} \right)^{(2-n)/2}$. Daraus erhalten wir also:

$$\begin{aligned}\Psi^* g_{\text{sph}} &= \sigma^* (4u_\alpha^{p-2} \cdot g_{\text{eukl}}) \\ &= \sigma^* \left(\left(\frac{u_\alpha}{u_1} \right)^{p-2} \cdot 4u_1^{p-2} \cdot g_{\text{eukl}} \right) \\ &= \left(\frac{u_\alpha}{u_1} \circ \sigma \right)^{p-2} \cdot g_{\text{sph}}.\end{aligned}$$

Damit ist also $\Psi \in \text{Conf}(S^n, g_{\text{sph}})$.

Übung 2.2.6

Berechnen Sie das Differential von $\Phi = \sigma^{-1} \circ F \circ \sigma$ für Translationen F sowie von $\Psi = \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$, jeweils in e_0 .

Lemma 2.2.7

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$.
Dann gilt:

$$\lambda(M, [g]) = a \cdot \inf \{ Q_g(f) \mid f \in H^{1,2}(M), f \not\equiv 0 \}.$$

Beweis. Setze $\lambda'(M, [g]) := a \cdot \inf\{Q_g(f) \mid f \in H^{1,2}(M), f \neq 0\}$. Offensichtlich ist $\lambda'(M, [g]) \leq \lambda(M, [g])$, denn $\{f \in C^\infty(M) \mid f > 0\} \subset H^{1,2}(M) - \{0\}$.

Zeige also: $\lambda(M, [g]) \leq \lambda'(M, [g])$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $f \in H^{1,2}(M) - \{0\}$ so dass $Q_g(f) \leq \lambda'(M, [g]) + \varepsilon$. Das Funktional

$$Q_g : H^{1,2}(M) - \{0\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f \mapsto \frac{\int_M \left(\frac{1}{a} |\nabla f|^2 + \text{scal} \cdot f^2\right) d\text{vol}}{\|f\|_{L^p}^2},$$

ist stetig, denn der Zähler ist offensichtlich stetig bzgl. der $H^{1,2}(M)$ -Topologie. Der Nenner ist stetig, denn p ist der kritische Exponent, für den der Sobolev'sche Einbettungssatz 1.1.21 gerade noch eine stetige Einbettung $H^{1,2}(M) \subset L^p(M)$ liefert.

Da $C^\infty(M) \subset H^{1,2}(M)$ dicht ist, $\exists h \in C^\infty(M) - \{0\}$ mit $|Q_g(h) - Q_g(f)| \leq \varepsilon$. Zu $\delta > 0$ setze nun $h_\delta := \sqrt{h^2 + \delta^2} \in C^\infty(M)$, $h_\delta > 0$. Aus dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt nun für $\delta \searrow 0$:

$$\|h_\delta\|_{L^p}^2 \rightarrow \|h\|_{L^p}^2,$$

$$\int_M \text{scal} \cdot (h_\delta)^2 d\text{vol} \rightarrow \int_M \text{scal} \cdot h^2 d\text{vol},$$

$$\int_M |\nabla h_\delta|^2 d\text{vol} = \int_M \left| \frac{2h\nabla h}{2h_\delta} \right|^2 d\text{vol} \rightarrow \int_M |\nabla h|^2 d\text{vol}.$$

Für hinreichend kleines $\delta > 0$ ist daher $|Q_g(h_\delta) - Q_g(h)| \leq \varepsilon$. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} \lambda(M, [g]) &\leq Q_g(h_\delta) \\ &= (Q_g(h_\delta) - Q_g(h)) + (Q_g(h) - Q_g(f)) + (Q_g(f) - \lambda'(M, [g])) + \lambda'(M, [g]) \\ &\leq 3\varepsilon + \lambda'(M, [g]). \end{aligned}$$

Der Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert dann $\lambda(M, [g]) \leq \lambda'(M, [g])$. □

Proposition 2.2.8 (Obata)

Sei $M = S^n$, $n \geq 3$. Ist $g \in [g_{\text{sph}}]$ eine Metrik konstanter Skalarkrümmung, so gibt es $C > 0$ und $\Phi \in \text{Conf}(S^n, g_{\text{sph}})$ mit $g = C \cdot \Phi^* g_{\text{sph}}$.

2 Das Yamabe-Problem

Beweis.

a) Zeige zunächst: g ist eine Einstein-Metrik.

Schreibe dazu $g_{\text{sph}} = e^{2u} \cdot g = \varphi^{-2} \cdot g$ mit $u \in \mathcal{C}^\infty(S^n)$, $\varphi = e^{-u} \in \mathcal{C}^\infty(S^n)$, $\varphi > 0$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= -\varphi \cdot \nabla u \\ \nabla^2\varphi &= -\nabla\varphi \otimes \nabla u - \varphi \cdot \nabla^2 u = \varphi \cdot (\nabla u \otimes \nabla u - \nabla^2 u) \\ \Delta\varphi &= \varphi \cdot (-|\nabla u|^2 + \Delta u).\end{aligned}$$

Da g_{sph} eine Einstein-Metrik ist, haben wir:

$$\begin{aligned}0 &= B_{g_{\text{sph}}} \\ &\stackrel{(2.5)}{=} B_g - (n-2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) - \frac{n-2}{n}(\Delta u + |\nabla u|^2) \cdot g \\ &= B_g + (n-2)\varphi^{-1} \left(\nabla^2 \varphi + \frac{1}{n}(\Delta \varphi) \cdot g \right).\end{aligned}$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}\int_{S^n} \varphi |B_g|^2 d\text{vol}_g &= -(n-2) \int_{S^n} \left\langle B_g, \nabla^2 \varphi + \frac{1}{n}(\Delta \varphi) \cdot g \right\rangle d\text{vol}_g \\ &\stackrel{\langle B_g, g \rangle = \text{tr} B_g = 0}{=} -(n-2) \int_{S^n} \langle B_g, \nabla^2 \varphi \rangle d\text{vol}_g \\ &\stackrel{(2.13)}{=} (n-2) \int_{S^n} \langle \text{div} B_g, \nabla \varphi \rangle d\text{vol}_g \\ &= 0,\end{aligned}$$

denn nach (2.8) ist $\text{div} B_g = \text{div}(\text{ric}_g - \frac{\text{scal}_g}{n} \cdot g) = \frac{1}{2} \nabla \text{scal}_g - \frac{1}{n} \nabla \text{scal}_g = 0$, da g konstante Skalar­krümmung hat. Aus $\int_{S^n} \varphi |B_g|^2 d\text{vol}_g = 0$ folgt direkt $B_g = 0$, denn der Integrand ist nicht negativ, und $\varphi > 0$. Somit ist g eine Einstein-Metrik.

b) Da die Weyl-Krümmung konform invariant ist, gilt $W_g = W_{g_{\text{sph}}} = 0$, also hat nach Bemerkung 2.1.24 auch g konstante Schnittkrümmung $K_g \equiv c \in \mathbb{R}$. Wäre $c \leq 0$, so wäre (S^n, g) isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ oder $(\mathbb{H}, \sqrt{-c} \cdot g_{\text{hyp}})$. Folglich ist $c > 0$. Setze $C := \sqrt{c}$. Dann hat $g' = \frac{1}{C} \cdot g$ Schnittkrümmung $\equiv 1$. Es gibt also eine Isometrie $\Phi : (S^n, g') \rightarrow (S^n, g_{\text{sph}})$. Damit ist $g = C \cdot \Phi^* g_{\text{sph}}$. \square

Lemma 2.2.9

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit (evtl. leerem) Rand ∂M und ν das äußere Einheitsnormalenfeld. Sei ω eine stetig differenzierbare 1-Form und h ein stetig differenzierbares $(2, 0)$ -Tensorfeld mit $\text{supp}(\omega) \cap \text{supp}(h)$ kompakt. Dann gilt:

$$\int_M \langle \text{div } h, \omega \rangle d\text{vol} + \int_M \langle h, \nabla \omega \rangle d\text{vol} = \int_{\partial M} \langle h(\nu, \cdot), \omega \rangle d\text{vol}_{\partial M}. \quad (2.13)$$

Beweis. Definiere die stetig differenzierbare 1-Form η mit kompaktem Träger durch:

$$\begin{aligned} \eta(X) &= \langle h(X, \cdot), \omega \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n h(X, e_i) \omega(e_i), \end{aligned}$$

wobei $X \in T_p M$ und $e_1, \dots, e_n \in T_p M$ eine Orthonormalbasis ist. Die Green'sche Formel (1.15) (mit $u \equiv 1$) liefert:

$$\int_M (\delta \eta) d\text{vol} = - \int_{\partial M} \eta(\nu) d\text{vol}_{\partial M}.$$

Zur Berechnung von $\delta \eta$ setze die Orthonormalbasis in $T_p M$ so zu einer lokalen Orthonormalbasis fort, dass $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$. Dann gilt in p :

$$\begin{aligned} -\delta \eta &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \eta)(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} (\eta(e_i)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \partial_{e_i} (h(e_i, e_j) \omega(e_j)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{e_i} h)(e_i, e_j) \omega(e_j) + h(e_i, e_j) (\nabla_{e_i} \omega)(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n (\text{div } h)(e_j) \omega(e_j) + \langle h, \nabla \omega \rangle \\ &= \langle \text{div } h, \omega \rangle + \langle h, \nabla \omega \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Aus der Proposition 2.2.8 von Obata können wir nun eine erste wichtige Folgerung ziehen:

Folgerung 2.2.10

Falls für $(M, g) = (S^n, g_{\text{sph}})$ das Funktional Q das Infimum annimmt, so geschieht dies genau auf den Metriken der Form $g = c \cdot \Phi^* g_{\text{sph}}$ für ein $c > 0$ und ein $\Phi \in \text{Conf}(S^n, g_{\text{sph}})$.

Beweis. Hat Q das Minimum in g , so ist g ein kritischer Punkt von Q und hat daher konstante Skalarkrümmung. Die Proposition von Obata liefert die Behauptung. \square

Bemerkung 2.2.11. Tatsächlich nimmt Q das Minimum an; der Beweis kommt später. Damit können wir die Yamabe-Invariante von $(S^n, [g_{\text{sph}}])$ nun explizit angeben:

$$\begin{aligned} \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) &= Q(g_{\text{sph}}) \\ &= \frac{\int_{S^n} \text{scal}_{g_{\text{sph}}} \, d\text{vol}_{g_{\text{sph}}}}{(\text{vol}(S^n, g_{\text{sph}}))^{2/p}} \\ &= n(n-1) (\text{vol}(S^n, g_{\text{sph}}))^{1-2/p} \\ &= n(n-1) (\text{vol}(S^n, g_{\text{sph}}))^{2/n} \\ &= n(n-1) \frac{4^{1/n} \pi^{(n+1)/n}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2/n}}, \end{aligned}$$

denn $1 - \frac{2}{p} = 1 - 2\frac{n-2}{2n} = \frac{n-(n-2)}{n} = \frac{2}{n}$ und $\text{vol}(S^n, g_{\text{sph}}) = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

Solange wir nicht wissen, dass das Minimum angenommen wird, wissen wir nur, dass einerseits nach Bemerkung 2.1.9 $\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) > 0$ und andererseits

$$\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \leq Q(g_{\text{sph}}) = n(n-1) \frac{4^{1/n} \pi^{(n+1)/n}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2/n}}.$$

Lemma 2.2.12

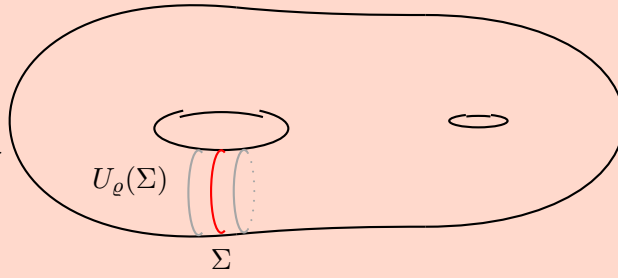
Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ und $\Sigma \subset M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension ≥ 3 . Dann gilt:

$$\lambda(M, [g]) = \inf \{ Q_g(f) \mid f \in C^\infty(M), \exists \varrho > 0 : f|_{U_\varrho(\Sigma)} \equiv 0 \}.$$

Hierbei ist

$$U_\varrho(\Sigma) := \{x \in M \mid \text{dist}(x, \Sigma) < \varrho\}$$

die Tubenumgebung von Σ vom Radius ϱ in (M, g) .



Beweis. Setze zunächst

$$\lambda'(M, [g]) := \inf \{Q_g(f) \mid f \in \mathcal{C}^\infty(M), \exists \varrho > 0 : f|_{U_\varrho(\Sigma)} \equiv 0\}.$$

Aus

$$\{f \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid \exists \varrho > 0 : f|_{U_\varrho(\Sigma)} \equiv 0\} \subset \mathcal{C}^\infty(M) \subset H^{1,2}(M)$$

folgt dann $\lambda(M, [g]) \leq \lambda'(M, [g])$.

Zeige also $\lambda'(M, [g]) \leq \lambda(M, [g])$. Wähle eine glatte Abschneidefunktion $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\chi \geq 0$ und

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 1 \\ \leq 1 & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & \text{für } t \geq 2 \end{cases}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $Q_g(f) \leq \lambda(M, [g]) + \varepsilon$. Zu $\delta > 0$ setze

$$f_\delta(x) := f(x) \cdot \chi\left(\frac{\text{dist}(x, \Sigma)}{\delta}\right).$$

Da $\Sigma \subset M$ kompakt ist, ist für hinreichend kleines δ die Funktion $x \mapsto \text{dist}(x, \Sigma)$ auf der offenen Teilmenge $\{x \mid 0 < \text{dist}(x, \Sigma) < 2\delta\}$ glatt. Somit ist dann $f_\delta \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $f_\delta|_{U_\delta(\Sigma)} \equiv 0$.

Aus majorisierter oder auch aus monotoner Konvergenz folgt $\|f_\delta\|_{L^p} \xrightarrow{\delta \searrow 0} \|f\|_{L^p}$. Ebenso folgt aus majorisierter Konvergenz

$$\int_M \text{scal} \cdot f_\delta^2 \, d\text{vol} \xrightarrow{\delta \searrow 0} \int_M \text{scal} \cdot f^2 \, d\text{vol}.$$

2 Das Yamabe-Problem

Für den $|\nabla f|$ -Term in Q_g finden wir:

$$\begin{aligned}
 & \int_M |\nabla f_\delta|^2 dvol \\
 &= \int_M \left| \nabla f \cdot \chi \circ \frac{\text{dist}(\cdot, \Sigma)}{\delta} + f \cdot \left(\chi' \circ \frac{\text{dist}(\cdot, \Sigma)}{\delta} \right) \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \text{grad dist}(\cdot, \Sigma) \right|^2 dvol \\
 &= \int_{M-U_{2\delta}(\Sigma)} |\nabla f|^2 dvol \\
 &+ \int_{U_{2\delta}(\Sigma)-U_\delta(\Sigma)} \left| \nabla f \cdot \left(\chi \circ \frac{\text{dist}(\cdot, \Sigma)}{\delta} \right) + f \cdot \left(\chi' \circ \frac{\text{dist}(\cdot, \Sigma)}{\delta} \right) \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \text{grad dist}(\cdot, \Sigma) \right|^2 dvol.
 \end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert mit majorisierter oder monotoner Konvergenz gegen $\int_M |\nabla f|^2 dvol$. Für den zweiten Term finden wir:

$$\begin{aligned}
 & \int_{U_{2\delta}(\Sigma)-U_\delta(\Sigma)} \left| \nabla f \cdot \left(\chi \circ \frac{\text{dist}(\cdot, \Sigma)}{\delta} \right) + f \cdot \left(\chi' \circ \frac{\text{dist}(\cdot, \Sigma)}{\delta} \right) \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \text{grad dist}(\cdot, \Sigma) \right|^2 dvol \\
 & \leq 2 \int_{U_{2\delta}(\Sigma)-U_\delta(\Sigma)} \left(|\nabla f|^2 + f^2 \cdot \left(\chi' \circ \frac{\text{dist}(\cdot, \Sigma)}{\delta} \right)^2 \cdot \frac{1}{\delta^2} \right) dvol \\
 & \leq C \cdot \int_{U_{2\delta}(\Sigma)-U_\delta(\Sigma)} \left(1 + \frac{1}{\delta^2} \right) dvol \\
 & \leq C \cdot \left(1 + \frac{1}{\delta^2} \right) \cdot \underbrace{\text{vol}(U_{2\delta}(\Sigma))}_{\leq C' \cdot \delta^{\text{codim}(\Sigma)}} \\
 & \xrightarrow{\delta \searrow 0} 0,
 \end{aligned}$$

da $\text{codim}(\Sigma) \geq 3$. Damit gilt $Q_g(f_\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} Q_g(f)$.

Für hinreichend kleines $\delta > 0$ ist also $|Q_g(f_\delta) - Q_g(f)| \leq \varepsilon$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
 \lambda'(M, [g]) & \leq Q_g(f_\delta) \\
 &= \underbrace{Q_g(f_\delta) - Q_g(f)}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{Q_g(f) - \lambda(M, [g])}_{\leq \varepsilon} + \lambda(M, [g]) \\
 & \leq 2\varepsilon + \lambda(M, [g]).
 \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ liefert wie gewünscht $\lambda'(M, [g]) \leq \lambda(M, [g])$. □

Betrachte nun $M = S^n$ mit $n \geq 3$ und $\Sigma = \{e_0\}$, so dass $\text{codim}(\Sigma) = n \geq 3$. Dann ist also

$$\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) = \inf \{Q_{g_{\text{sph}}}(f) \mid f \in C^\infty(M) : \exists \varrho > 0 : f|_{B_\varrho(e_0)} \equiv 0\}.$$

Für ein solches f finden wir:

$$\begin{aligned} Q_{g_{\text{sph}}}(f) &= Q_{\sigma^*(4u_1^{p-2}g_{\text{eukl}})}(f) \\ &= Q_{4u_1^{p-2}g_{\text{eukl}}}(f \circ \sigma^{-1}) \\ &= Q_{g_{\text{eukl}}}(4^{2-p} \cdot u_1 \cdot (f \circ \sigma^{-1})) \\ &= Q_{g_{\text{eukl}}}\left(\underbrace{u_1 \cdot (f \circ \sigma^{-1})}_{\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}\right). \end{aligned}$$

Umgekehrt setzt sich auch für jedes $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Verkettung $\varphi \circ \sigma$ zu einer glatten Funktion auf S^n fort, die in einer Umgebung von e_0 verschwindet. Damit ist

$$\begin{aligned} \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) &= \inf \{Q_{g_{\text{eukl}}}(\varphi) \mid \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\} \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{a} \cdot \frac{\int_M |\nabla \varphi|^2 dx}{\|\varphi\|_{L^p}^2} \mid \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \right\} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \inf \left\{ \frac{\|\nabla \varphi\|_{L^2}^2}{\|\varphi\|_{L^p}^2} \mid \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \right\} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sigma_n} \\ &= \frac{4(n-1)}{n-2} \cdot \frac{1}{\sigma_n}. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit:

$$\sigma_n = \frac{4(n-1)}{n-2} \cdot \frac{1}{\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])}. \quad (2.14)$$

Bemerkung 2.2.13. In der Ungleichung $\|\varphi\|_{L^p}^2 \leq \sigma_n \cdot \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2$ gilt für die Funktionen $\varphi = u_\alpha$ Gleichheit.

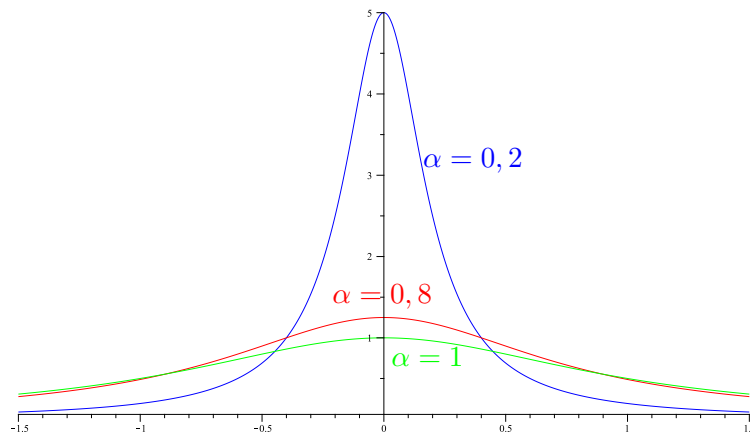
2 Das Yamabe-Problem

Beweis. Für $\Psi = \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$ ist

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a\sigma_n} &= \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \\
 &= Q(g_{\text{sph}}) \\
 &= Q(\Psi^* g_{\text{sph}}) \\
 &= Q_{g_{\text{sph}}} \left(\frac{u_\alpha}{u_1} \circ \sigma \right) \\
 &= Q_{g_{\text{eukl}}} \left(u_1 \cdot \frac{u_\alpha}{u_1} \right) \\
 &= Q_{g_{\text{eukl}}}(u_\alpha) \\
 &= \frac{1}{a} \cdot \frac{\|\nabla u_\alpha\|_{L^2}^2}{\|u_\alpha\|_{L^p}^2}.
 \end{aligned}$$

□

Die Funktionen u_α konzentrieren sich für kleine α nahe 0. Hier sind die Funktionen $x \mapsto \frac{\alpha}{|x|^2 + \alpha^2}$ für drei Werte von α geplottet:



Dieses Konzentrationsphänomen werden wir uns im Beweis der folgenden Proposition zunutze machen.

Proposition 2.2.14 (Aubin)

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Dann gilt:

$$\lambda(M, [g]) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) .$$

Beweis.

- a) Wähle eine glatte Abschneidefunktion $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\chi(t) \equiv 1$ für $t \leq 1$, $0 \leq \chi(t) \leq 1$ für $1 \leq t \leq 2$ und $\chi(t) \equiv 0$ für $t \geq 2$. Für $\varepsilon > 0$ setze $u_{\alpha,\varepsilon}(x) := \chi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \cdot u_\alpha(x)$. Dann ist $u_{\alpha,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\text{supp}(u_{\alpha,\varepsilon}) \subset B_{2\varepsilon}(0)$. Wir setzen $A_\varepsilon := B_{2\varepsilon}(0) - B_\varepsilon(0)$ und berechnen damit:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{a} \cdot |\nabla u_{\alpha,\varepsilon}|^2 dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{B_\varepsilon(0)} |\nabla u_\alpha|^2 dx + \frac{1}{a} \int_{A_\varepsilon} \left| \chi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla u_\alpha + \chi'\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot dr \cdot u_\alpha \right|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\alpha|^2 dx + C_1 \cdot \int_{A_\varepsilon} \left(|\nabla u_\alpha|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot u_\alpha^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Mit $u_\alpha^2 = \left(\frac{r^2 + \alpha^2}{\alpha}\right)^{2-n} = \left(\frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2}\right)^{n-2} \leq \alpha^{n-2} r^{2(2-n)}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{A_\varepsilon} |u_\alpha|^2 dx &\leq \alpha^{n-2} \cdot c_n \cdot \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} r^{4-2n} r^{n-1} dr \\ &= C_2(\varepsilon) \cdot \alpha^{n-2}. \end{aligned}$$

Mit $|\nabla u_\alpha| = \left| \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} \right| = \left| \frac{2-n}{2} \cdot \left(\frac{r^2 + \alpha^2}{\alpha}\right)^{-n/2} \cdot \frac{2r}{\alpha} \right| \leq (2-n) \cdot \alpha^{(n/2)-1} \cdot r^{-n+1}$ finden wir

$$\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_\alpha|^2 dx \leq C_3(\varepsilon) \cdot \alpha^{n-2};$$

zusammen also:

$$C_1 \cdot \int_{A_\varepsilon} \left(|\nabla u_\alpha|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot u_\alpha^2 \right) dx \leq \alpha^{n-2} \cdot C_4(\varepsilon).$$

Wir berechnen weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\alpha|^2 dx &= \frac{1}{a \sigma_n} \cdot \|u_\alpha\|_{L^p}^2 \\ &= \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_\alpha|^p dx \right)^{2/p} \\ &= \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot \left(\int_{B_\varepsilon(0)} |u_\alpha|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n - B_\varepsilon(0)} |u_\alpha|^p dx \right)^{2/p} \end{aligned}$$

2 Das Yamabe-Problem

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{(2.16)}{\leq} \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_{\alpha, \varepsilon}|^p dx + \frac{c_n}{n \varepsilon^n} \cdot \alpha^n \right)^{2/p} \\
 & = \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot \left(\|u_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p}^2 + O_\varepsilon(\alpha^n) \right). \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $(1+x)^{2/p} = 1 + O(x)$ und

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n - B_\varepsilon(0)} |u_\alpha|^p dx & = \int_{\mathbb{R}^n - B_\varepsilon(0)} \left(\frac{|x|^2 + \alpha^2}{\alpha} \right)^{-n} dx \\
 & = c_n \cdot \int_\varepsilon^\infty \left(\frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^n \cdot r^{n-1} dr \\
 & \leq C_5 \cdot \alpha^n \cdot \int_\varepsilon^\infty r^{-n-1} dr \\
 & = C_5 \cdot \alpha^n \cdot \frac{1}{n \varepsilon^n}. \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Aus (2.15) bekommen wir also

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{a} |\nabla u_{\alpha, \varepsilon}|^2 dx = \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot \|u_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p}^2 + O_\varepsilon(\alpha^{n-2}), \quad (\alpha \searrow 0)$$

und

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{a} |\nabla u_{\alpha, \varepsilon}|^2 dx}{\|u_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p}^2} = \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) + O_\varepsilon(\alpha^{n-2}), \quad (\alpha \searrow 0),$$

denn

$$\begin{aligned}
 \|u_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p}^2 & \geq \int_{B_\varepsilon(0)} |u_\alpha|^p dx \\
 & \stackrel{\alpha \leq \varepsilon}{\geq} \int_{B_\alpha(0)} \left(\frac{|x|^2 + \alpha^2}{\alpha} \right)^{-n} dx \\
 & \geq \int_{B_\alpha(0)} \left(\frac{2\alpha^2}{\alpha} \right)^{-n} dx \\
 & = 2^{-n} \cdot \frac{1}{\alpha^n} \cdot \text{vol}(B_\alpha(0)) \\
 & = C' > 0. \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

- b) Zu $q \in M$ wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass auf $B_{2\varepsilon}(q)$ riemannsche Normalkoordinaten existieren. Setze $u_{\alpha, \varepsilon} \circ \exp_q^{-1}$ durch 0 zu einer Funktion $f_{\alpha, \varepsilon} \in C^\infty(M)$ fort. In

2.2 Der Modellfall: Die Sphäre

riemannschen Normalkoordinaten um q ist dann (mit $r := \text{dist}(x, q)$):

$$\begin{aligned}
 |f_{\alpha, \varepsilon}| &= |u_{\alpha, \varepsilon}| = \left(\frac{r^2 + \alpha^2}{\alpha} \right)^{(2-n)/2} \\
 |\nabla f_{\alpha, \varepsilon}| &= \left| \frac{\partial u_{\alpha, \varepsilon}}{\partial r} \right| \\
 &= \left| \frac{2-n}{2} \cdot \left(\frac{r^2 + \alpha^2}{\alpha} \right)^{-n/2} \cdot \frac{2r}{\alpha} \right| \\
 &\leq (2-n) \cdot \alpha^{(n/2)-1} \cdot r^{-n+1} \\
 d\text{vol} &= (1 + O(r)) dx.
 \end{aligned}$$

Nun testen wir das Yamabe-Funktional Q_g auf den Funktionen $f_{\alpha, \varepsilon}$. Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned}
 \|f_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p}^2 &= \left(\int_{B_{2\varepsilon}(q)} |f_{\alpha, \varepsilon}|^2 d\text{vol} \right)^{2/p} \\
 &= \left(\int_{B_{2\varepsilon}(q)} |u_{\alpha, \varepsilon}|^p \cdot (1 + O(r)) dx \right)^{2/p} \\
 &= \left((1 + O(\varepsilon)) \int_{T_q M} |u_{\alpha, \varepsilon}|^2 dx \right)^{2/p} \\
 &= (1 + O(\varepsilon)) \cdot \|u_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p}^2,
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{2\varepsilon}(q)} \frac{1}{a} \cdot |\nabla f_{\alpha, \varepsilon}|^2 d\text{vol} &= \int_{B_{2\varepsilon}(q)} \frac{1}{a} |\nabla u_{\alpha, \varepsilon}|^2 \cdot (1 + O(r)) dx \\
 &= (1 + O(\varepsilon)) \cdot \int_{T_q M} \frac{1}{a} |\nabla u_{\alpha, \varepsilon}|^2 dx
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{2\varepsilon}(q)} \text{scal} \cdot f_{\alpha, \varepsilon}^2 d\text{vol} &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\text{scal}\|_{L^{(p/2)^*}(B_{2\varepsilon}(q))} \cdot \|f_{\alpha, \varepsilon}^2\|_{L^{p/2}(B_{2\varepsilon}(q))} \\
 &\leq \|\text{scal}\|_{L^{(p/2)^*}(B_{2\varepsilon}(q))} \cdot \|f_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p}^2.
 \end{aligned}$$

2 Das Yamabe-Problem

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \lambda(M, [g]) &\leq Q_g(f_{\alpha, \varepsilon}) \\
 &\leq \frac{(1 + O(\varepsilon)) \int_{T_q M} \frac{1}{a} |\nabla u_{\alpha, \varepsilon}|^2 dx}{(1 + O(\varepsilon)) \|u_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p}^2} + \|\text{scal}\|_{L^{(p/2)^*}(B_{2\varepsilon}(q))} \\
 &= (1 + O(\varepsilon)) \cdot \left(\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) + O_\varepsilon(\alpha^{n-2}) \right) + o(1), \quad (\varepsilon \searrow 0). \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Im Grenzwert $\alpha \searrow 0$ ergibt sich

$$\lambda(M, [g]) \leq (1 + O(\varepsilon)) \cdot \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) + o(1)$$

und im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ schließlich $\lambda(M, [g]) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$.

□

2.3 Die subkritische Gleichung

Wie zuvor ist in diesem Abschnitt (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ und $p = \frac{2n}{n-2}$, $a = \frac{n-2}{4(n-1)}$. Das Yamabe-Funktional $Q_g(f) = \frac{E_g(f)}{\|f\|_{L^p}^2}$ war definiert durch $E_g(f) = \int_M (\frac{1}{a} |\nabla f|^2 + \text{scal}_g \cdot f^2) d\text{vol}$. Wir hatten für positive Funktionen f bereits folgende Äquivalenzen diskutiert:

$$f \text{ ist kritischer Punkt von } Q_g \quad (2.19)$$

$$\Leftrightarrow Y(f) = \frac{a \cdot Q_g(f)}{\|f\|_{L^p}^{p-2}} \cdot f^{p-1} \quad (2.20)$$

$$\Leftrightarrow \bar{g} = f^{p-2} \cdot g \text{ hat konstante Skalarkrümmung } \frac{Q_g(f)}{\|f\|_{L^p}^{p-2}}. \quad (2.21)$$

Bemerkung 2.3.1. In der Äquivalenz von (2.20) und (2.21) ist entscheidend, dass $p = \frac{2n}{n-2}$. In der Äquivalenz von (2.19) und (2.20) dagegen spielt der konkrete Wert von p keine wesentliche Rolle.

Definition 2.3.2. Für $s \in [2, p]$ setze

$$\begin{aligned}
 Q_g^s(f) &:= \frac{E_g(f)}{\|f\|_{L^s}^2} \quad \text{für } f \in H^{1,2}(M) - \{0\}, \\
 \lambda_s(M, g) &:= \inf \{ Q_g^s(f) \mid f \in C^\infty(M) - \{0\} \} \\
 &= \inf \{ Q_g^s(f) \mid f \in C^\infty(M), f > 0 \} \\
 &= \inf \{ Q_g^s(f) \mid f \in H^{1,2}(M) - \{0\} \}.
 \end{aligned}$$

2.3 Die subkritische Gleichung

Die gleichen Argumente wie bei der Diskussion des Funktionals Q_g liefern die Gleichungen in der vorangegangenen Definition. Man beachte hierbei, dass die $s \in [2, p]$ genau die Potenzen sind, für die die Anwendung des Sobolev'schen Einbettungssatzes im Beweis von Lemma 2.2.7 funktioniert. Ebenso zeigt man:

$$f > 0 \text{ ist kritischer Punkt von } Q_g^s \Leftrightarrow Y(f) = \frac{a \cdot Q_g^s(f)}{\|f\|_{L^s}^{s-2}} \cdot f^{s-1}. \quad (2.22)$$

Insbesondere, falls $f > 0$ das Funktional Q_g^s minimiert und ohne Einschränkung $\|f\|_{L^s} = 1$ ist, so gilt

$$Y(f) = a \cdot \lambda_s(M, g) \cdot f^{s-1}. \quad (2.23)$$

Wie für das Funktional Q_g zeigt man, dass $Q_g^s(f) \geq -\|\text{scal}_g\|_{L^{(s/2)^*}}$ für alle $f \in H^{1,2}(M) - \{0\}$.

Satz 2.3.3

Sei (M, g) eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Seien $K_1, K_2 > 0$ sowie $0 < \alpha < 1$ und $p = \frac{2n}{n-2}$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(M, g, K_1, K_2, \alpha)$, so dass für jedes $s \in [2, p]$, jedes $r > \frac{n}{2}(s-2)$ und jede schwache Lösung $f \in L^r(M)$ mit $f \geq 0$ von $Y(f) = \lambda \cdot f^{s-1}$ mit $|\lambda| \leq K_1$ und $\|f\|_{L^r} \leq K_2$ folgendes gilt:

(i) $f \in C^\infty(M)$.

(ii) $f \equiv 0$ oder $f > 0$.

(iii) $\|f\|_{C^{2,\alpha}} \leq C$.

Insbesondere gilt dann die nichtlineare Eigenwertgleichung $Y(f) = \lambda \cdot f^{s-1}$ sogar klassisch.

Beweis.

a) Sei $f \in L^r(M)$, $f \geq 0$, eine schwache Lösung wie oben mit $r > \frac{n}{2}(s-1)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Delta f &= Y(f) - a \cdot \text{scal}_g \cdot f \\ &= \underbrace{\lambda \cdot f^{s-1}}_{\in L^q} - \underbrace{a \cdot \text{scal} \cdot f}_{\in L^r(M)} \\ &\in L^q(M) \quad \text{für } q = \frac{r}{s-1} \leq r. \end{aligned}$$

Der Satz über globale elliptische Regularität 1.6.12 liefert dann $f \in H^{2,q}(M)$, und der Sobolev'sche Einbettungssatz 1.1.21 liefert $f \in L^{r'}(M)$ für r' mit $\frac{1}{r'} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n}$, also $r' = r \cdot \frac{n}{n(s-1)-2r} > r \cdot \frac{n}{n(s-1)-n(s-2)} = r$.

2 Das Yamabe-Problem

Iteration dieses Arguments liefert dann $f \in L^q(M)$ für alle $q \in [r, \infty)$.³ Der Satz über globale elliptische Regularität 1.6.12 liefert schließlich $f \in H^{2,q}(M)$ für alle $q \in [r, \infty)$.

- b) Der Sobolev'sche Einbettungssatz 1.4.9 liefert $f \in H^{2,q}(M) \subset C^{0,\alpha}(M)$, wobei wir q so groß wählen, dass $\frac{1}{q} \leq \frac{2-\alpha}{n}$. Damit erhalten wir:⁴

$$\Delta f = \underbrace{\lambda \cdot f^{p-1}}_{\in C^{0,\alpha}} - \underbrace{a \cdot \text{scal}_g \cdot f}_{\in C^{0,\alpha}}.$$

Nach dem Satz über globale elliptische Regularität 1.6.12 ist also $f \in C^{2,\alpha}(M)$.

- c) Die Abschätzung in (iii) ergibt sich aus den elliptischen und Schauder-Abschätzungen, die die Anwendungen des Satzes über elliptische Regularität 1.6.12 in a) und b) liefern.
- d) Wähle nun $C_1 > 0$ mit $C_1 \geq \max_{x \in M} (-\lambda \cdot f^{s-2}(x) + a \cdot \text{scal}_g(x))$. Damit ist

$$(\Delta + C_1)f \geq \Delta f - \lambda \cdot f^{s-1} + a \cdot \text{scal}_g \cdot f = 0.$$

Korollar 1.5.3 liefert also $f \equiv 0$ oder $f > 0$. Somit ist die Alternative (ii) bereits gezeigt, und im Falle $f \equiv 0$ gilt offensichtlich auch (i).

- e) Sei also nun $f > 0$. Die Funktion $x \mapsto x^{s-1}$ ist glatt auf $(0, \infty)$. Mit $f \in C^{2,\alpha}(M)$ ist daher auch $f^{s-1} \in C^{2,\alpha}(M)$. Wir erhalten:

$$\Delta f = \lambda \cdot f^{s-1} - a \cdot \text{scal}_g \cdot f \in C^{2,\alpha}(M).$$

Der Satz über elliptische Regularität 1.6.12 liefert also $f \in C^{4,\alpha}(M)$, und Iteration dieses Arguments liefert schließlich $f \in C^\infty(M)$. □

Proposition 2.3.4 (Yamabe)

Sei (M, g) eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Sei $2 \leq s < p = \frac{2n}{n-2}$. Dann gibt es eine Lösung $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$ des subkritischen Extremalproblems, d.h. $Q_g^s(f) = \lambda_s(M, g)$ (und ohne Einschränkung ist $\|f\|_{L^s} = 1$).

³Beachte, dass in jedem Iterationsschritt mit r auch die Verbesserung der Regularität wächst, da der Faktor $\frac{n}{n(s-1)-2r}$ mit r wächst.

⁴Die Funktion $x \mapsto x^{s-1}$ ist für $s \geq 2$ auf $[0, \infty)$ lokal Lipschitz und auf $\text{im}(f) \Subset \mathbb{R}$ sogar Lipschitz mit einer Lipschitz-Konstanten L . Die Abschätzung $\frac{|f^{s-1}(x) - f^{s-1}(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq L \cdot \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha}$ zeigt direkt, dass die Verkettung einer Lipschitz-Funktion mit einer α -Hölder-stetigen Funktion stets wieder α -Hölder-stetig ist.

Beweis.

- a) Wähle eine minimierende Folge $f_i \in C^\infty(M)$, $f_i > 0$ mit $Q_g^s(f_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \lambda_s(M, g)$; ohne Einschränkung sei $\|f_i\|_{L^s} = 1$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \|f_i\|_{H^{1,2}}^2 &= \int_M (|\nabla f_i|^2 + f_i^2) \, dvol \\ &= a \cdot E_g(f_i) + \int_M (f_i^2 - a \cdot \text{scal}_g \cdot f_i^2) \, dvol \\ &= a \cdot Q_g^s(f_i) + \int_M (1 - a \cdot \text{scal}_g) \cdot f_i^2 \, dvol \\ &\leq C_1 + C_2 \cdot \|f_i\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_1 + C_2 \cdot C_3 \cdot \|f_i\|_{L^s}^2 \\ &= C_4. \end{aligned}$$

Damit ist f beschränkt in $H^{1,2}(M)$, und nach Übergang zu einer Teilfolge gilt $f_i \xrightarrow{H^{1,2}} f$.⁵ Nach dem Kompaktheitssatz 1.2.11 ist die Einbettung $H^{1,2}(M) \subset L^s(M)$ kompakt für alle s mit $\frac{1}{s} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{p}$. Somit ist $f_i \xrightarrow{L^s} f$ und insbesondere $\|f\|_{L^s} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i\|_{L^s} = 1$, also $f \not\equiv 0$.

- b) Mit $f_i \xrightarrow{L^s} f$ gilt auch $f_i \xrightarrow{L^2} f$ und wir berechnen:

$$\begin{aligned} \|f_i^2 - f^2\|_{L^1} &= (\underbrace{f_i - f}_{\rightarrow 0}, \underbrace{f_i + f}_{\rightarrow 2f})_{L^2} \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

also gilt sogar $f_i^2 \xrightarrow{L^1} f^2$. Daraus folgt⁶

$$\int_M \text{scal}_g \cdot f_i^2 \, dvol \longrightarrow \int_M \text{scal}_g \cdot f^2 \, dvol.$$

Außerdem gilt mit $f_i \xrightarrow{H^{1,2}} f$ insbesondere $\nabla f_i \xrightarrow{L^2} \nabla f$ und daher:

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_{L^2}^2 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_M \langle \nabla f_i, \nabla f \rangle \, dvol \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \limsup_{i \rightarrow \infty} \|\nabla f_i\|_{L^2} \cdot \|f_i\|_{L^2}, \end{aligned}$$

⁵ Eine Folge f_i in einem Hilbertraum $(H, (\cdot, \cdot))$ heißt *schwach konvergent* bzw. konvergiert *schwach* gegen f , geschrieben: $f_i \rightharpoonup f$, falls für jedes $\varphi \in H$ gilt: $(f_i, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} (f, \varphi)$.

⁶ Das lineare Funktional $h \mapsto \int_M \text{scal}_g \cdot h \, dvol$ ist stetig auf $L^1(M)$.

2 Das Yamabe-Problem

also $\|\nabla f\|_{L^2}^2 \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \|\nabla f_i\|_{L^2}^2$. Schließlich ist:

$$\begin{aligned} \lambda_s(M, g) &\leq Q_g^s(f) \\ &= E_g(f) \\ &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} E_g(f_i) \\ &= \limsup_{i \rightarrow \infty} Q_g^s(f_i) \\ &= \lambda_s(M, g), \end{aligned}$$

also $Q_g^s(f) = \lambda_s(M, g)$. Damit erfüllt f auch die nichtlineare Eigenwertgleichung $Y(f) = a \cdot \lambda_s(M, g) \cdot f^{s-1}$. Wir wenden nun Satz 2.3.3 mit $r = s$ an, wobei wir beachten, dass nach Voraussetzung $s > \frac{n}{2}(s-1)$, und erhalten $f \in C^\infty(M)$ und $f > 0$.

□

Lemma 2.3.5 (Aubin)

Sei (M, g) eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, und sei $\text{vol}(M, g) = 1$.

Dann ist die Funktion $[2, p] \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto |\lambda_s(M, g)|$ monoton fallend.

Entweder ist $\lambda_s(M, g)$ für alle $s \in [2, p]$ negativ oder $\lambda_s(M, g) \geq 0$ für alle $s \in [2, p]$. Falls $\lambda(M, g) \geq 0$, so ist die Funktion $s \mapsto \lambda_s(M, g)$ linksstetig.

Beweis.

- a) Seien $s_1, s_2 \in [2, p]$ mit $s_1 \leq s_2$. Für $f \in C^\infty(M) - \{0\}$ ist aufgrund der Normierung des Volumens $\|f\|_{L^{s_1}} \leq \|f\|_{L^{s_2}}$ und damit:

$$|Q_g^{s_1}(f)| = \frac{|E_g(f)|}{\|f\|_{L^{s_1}}^2} \geq \frac{|E_g(f)|}{\|f\|_{L^{s_2}}^2} = |Q_g^{s_2}(f)|.$$

Also ist auch $|\lambda_{s_1}(M, g)| \geq |\lambda_{s_2}(M, g)|$.

- b) Ist für ein $s_1 \in [2, p]$ die Invariante $\lambda_{s_1}(M, g) < 0$, so gibt es ein $f \in C^\infty(M) - \{0\}$ mit $Q_g^{s_1}(f) < 0$. Damit ist aber auch $E_g(f) < 0$, und folglich $Q_g^s(f) < 0$ für alle $s \in [2, p]$. Also ist auch $\lambda_s(M, g) < 0$ für alle $s \in [2, p]$.
- c) Sei nun $\lambda(M, g) \geq 0$. Wegen b) ist $\lambda_s(M, g) \geq 0$ für alle $s \in [2, p]$. Sei $s_0 \in [2, p]$ und $\varepsilon > 0$. Wähle eine Funktion $f \in C^\infty(M) - \{0\}$ so dass $Q_g^{s_0}(f) < \lambda_{s_0}(M, g) + \varepsilon$. Die Funktion $s \mapsto \|f\|_{L^s}$ ist stetig, daher ist für jedes s nahe s_0 auch $Q_g^s(f) < \lambda_{s_0}(M, g) + \varepsilon$. Per definitionem ist $\lambda_s(M, g) \leq Q_g^s(f)$. Ist zusätzlich $s \leq s_0$, so folgt mit a) dass $\lambda_{s_0}(M, g) \leq \lambda_s(M, g) < \lambda_{s_0}(M, g) + \varepsilon$. □

Lemma 2.3.6 (Trudinger, Aubin)

Sei (M, g) eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, und sei $\text{vol}(M, g) = 1$. Sei $\lambda(M, [g]) < \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$. Für jedes $s \in [2, p)$ seien $f_s \in C^\infty(M)$, $f_s > 0$, $\|f_s\|_{L^s} = 1$ Lösungen des subkritischen Problems $Q_g^s(f) = \lambda_s(M, g)$ wie in Proposition 2.3.4.

Dann gibt es ein $s_0 \in [2, p)$, ein $r > p$ und eine Konstante $C > 0$, so dass $\|f_s\|_{L^r} \leq C$ für alle $s \in [s_0, p)$, d.h. die Lösungen sind gleichmäßig beschränkt in $L^r(M)$.

Beweis.

a) Die Lösung f_s erfüllt die subkritische Gleichung

$$Y(f_s) = a \cdot \lambda_s(M, g) \cdot f_s^{s-1}. \quad (2.24)$$

Sei $\delta > 0$. Wir multiplizieren (2.24) mit $f_s^{1+2\delta}$ und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} \int_M a \cdot \lambda_s(M, g) \cdot f_s^{1+2\delta} \, d\text{vol} &= \int_M \left(f_s^{1+2\delta} \Delta f_s + a \cdot \text{scal}_g \cdot f_s^{1+2\delta} \right) \, d\text{vol} \\ &\stackrel{(1.16)}{=} \int_M \left((1+2\delta) f_s^{2\delta} |\nabla f_s|^2 + a \cdot \text{scal}_g \cdot f_s^{1+2\delta} \right) \, d\text{vol}. \end{aligned}$$

Wir substituieren nun $u := f_s^{1+\delta}$ und erhalten dann mit $\nabla u = (1+\delta) f_s^\delta \nabla f_s$:

$$\frac{1+2\delta}{(1+\delta)^2} \int_M |\nabla u|^2 \, d\text{vol} = \int_M \left(a \cdot \lambda_s(M, g) \cdot u^2 \cdot f_s^{s-2} - a \cdot \text{scal}_g \cdot u^2 \right) \, d\text{vol}.$$

b) Für $\varepsilon > 0$ gibt es nach (1.5) eine Konstante $C_1(\varepsilon) > 0$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p}^2 &\leq (1+\varepsilon) \cdot \sigma_n \cdot \|\nabla u\|_{L^2}^2 + C_1(\varepsilon) \cdot \|u\|_{L^2} \\ &\leq (1+\varepsilon) \cdot \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta} \cdot \frac{1}{a \cdot \lambda(S^n, g_{\text{sph}})} \cdot \int_M a \cdot \lambda_s(M, g) \cdot u^2 \cdot f_s^{s-2} \, d\text{vol} \\ &\quad + C_2(\varepsilon) \cdot \|u\|_{L^2}^2 \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (1+\varepsilon) \cdot \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta} \cdot \frac{\lambda_s(M, g)}{\lambda(S^n, g_{\text{sph}})} \cdot \|u^2\|_{L^{(p/2)}} \cdot \|f_s^{s-2}\|_{L^{(p/2)^*}} \\ &\quad + C_2(\varepsilon) \cdot \|u\|_{L^2}^2 \\ &\stackrel{(\frac{p}{2})^* = \frac{n}{2}}{=} (1+\varepsilon) \cdot \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta} \cdot \frac{\lambda_s(M, g)}{\lambda(S^n, g_{\text{sph}})} \cdot \|u\|_{L^p}^2 \cdot \|f_s\|_{L^{n(s-2)/2}}^{s-2} \\ &\quad + C_2(\varepsilon) \cdot \|u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

2 Das Yamabe-Problem

Mit $s < p$ ist $s(n-2) < 2n$, also $\frac{n(s-2)}{2} < s$ und folglich $\|f_s\|_{L^{n(s-2)/2}} \leq \|f_s\|_{L^s} = 1$.
Wir erhalten also:

$$\|u\|_{L^p}^2 \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{(1 + \delta)^2}{1 + 2\delta} \cdot \frac{\lambda_s(M, g)}{\lambda(S^n, g_{\text{sph}})} \cdot \|u\|_{L^p}^2 + C_2(\varepsilon) \cdot \|u\|_{L^2}^2$$

und schließlich

$$\left(1 - (1 + \varepsilon) \cdot \frac{(1 + \delta)^2}{1 + 2\delta} \cdot \frac{\lambda_s(M, g)}{\lambda(S^n, g_{\text{sph}})}\right) \cdot \|u\|_{L^p}^2 \leq C_2(\varepsilon) \cdot \|u\|_{L^2}^2.$$

c) Ist $\lambda(M, g) < 0$, so ist $\lambda_s(M, g) < 0$ für alle s und somit

$$\left(1 - (1 + \varepsilon) \cdot \frac{(1 + \delta)^2}{1 + 2\delta} \cdot \frac{\lambda_s(M, g)}{\lambda(S^n, g_{\text{sph}})}\right) > 0.$$

Ist $\lambda(M, g) \geq 0$, so ist $\lambda_s(M, g)$ linksstetig in s , daher gibt es ein $s_0 \in [2, p)$, so dass $\frac{\lambda_{s_0}(M, g)}{\lambda(S^n, g_{\text{sph}})} < 1$. Wegen der Monotonie in s ist dann auch

$$\frac{\lambda_s(M, g)}{\lambda(S^n, g_{\text{sph}})} \leq \frac{\lambda_{s_0}(M, g)}{\lambda(S^n, g_{\text{sph}})} < 1$$

für alle $s \in [s_0, p)$. Für hinreichend kleine $\varepsilon, \delta > 0$ ist somit $\|u\|_{L^p}^2 \leq C_3(\varepsilon, \delta) \cdot \|u\|_{L^2}^2$.

d) Für hinreichend kleines $\delta > 0$ und $s \geq s_0$ ist $2(1 + \delta) \leq s$, also gemäß unserer Substitution:

$$\|u\|_{L^2} = \|f_s^{1+\delta}\|_{L^2} = \|f_s\|_{L^{2(1+\delta)}}^{1+\delta} \leq \|f_s\|_{L^s}^{1+\delta} = 1.$$

Analog ist $\|u\|_{L^p} = \|f_s^{1+\delta}\|_{L^p} = \|f_s\|_{L^{p(1+\delta)}}^{1+\delta}$. Mit $r = p(1 + \delta)$ erhalten wir also $\|f_s\|_{L^r} \leq C_3(\varepsilon, \delta)^{1/1+\delta} =: C$.

□

Satz 2.3.7

Sei (M, g) eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, und sei $\text{vol}(M, g) = 1$. Sei $\lambda(M, g) < \lambda(S^n, g_{\text{sph}})$.

Dann konvergiert für $s \nearrow p$ eine Teilfolge der Lösungen f_s des subkritischen Problems gegen eine glatte positive Funktion f mit $Q_g(f) = \lambda(M, g)$ und $Y(f) = a \cdot \lambda(M, g) \cdot f^{p-1}$.

Beweis. Die Lösungen f_s sind gleichmäßig beschränkt in L^r für ein $r > p$ und für alle $s \in [s_0, p)$. Nach Satz 2.3.3 gibt es eine Konstante $C > 0$ so dass $\|f_s\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} \leq C$ für alle $s \in [s_0, p)$. Nach Bemerkung 1.4.12 ist die Einbettung $\mathcal{C}^{2,\alpha}(M) \subset \mathcal{C}^2(M)$ kompakt, so dass es eine Folge $s_i \nearrow p$ gibt, für die $f_{s_i} \xrightarrow{\mathcal{C}^2(M)} f$.

Damit gilt auch

$$Y(f_{s_i}) = a \cdot \lambda_{s_i}(M, g) \cdot f_{s_i}^{s_i-1} \longrightarrow a \cdot \lambda \cdot f^{p-1}.$$

Andererseits ist auch $Y(f_{s_i}) \xrightarrow{\mathcal{C}^0(M)} Y(f)$. Wir erhalten also:

$$Y(f) = a \cdot \lambda \cdot f^{p-1} \quad \text{mit } \lambda := \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{s_i}(M, g).$$

Insbesondere ist $\|f\|_{L^p} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{s_i}\|_{L^{s_i}} = 1$, also auch $f \not\equiv 0$.

Nach Satz 2.3.3 ist dann $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $f > 0$, denn $\|f\|_{L^r} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{s_i}\|_{L^r} < \infty$.

Außerdem haben wir:

$$Q_g(f) = \frac{E_g(f)}{\|f\|_{L^p}^2} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{E_g(f_{s_i})}{\|f_{s_i}\|_{L^{s_i}}^2} = \lim_{i \rightarrow \infty} Q_g^{s_i}(f_{s_i}) = \lambda_{s_i}(M, g) = \lambda.$$

Falls $\lambda(M, g) \geq 0$, so ist $s \mapsto \lambda_s(M, g)$ linksstetig und damit $\lambda = \lambda(M, g)$. Falls $\lambda < 0$, so ist $s \mapsto \lambda_s(M, g)$ monoton wachsend, also $\lambda \leq \lambda(M, g)$. Andererseits ist $\lambda(M, g) \leq Q_g(f) = \lambda$, also auch in diesem Fall $\lambda = \lambda(M, g)$. \square

Folgerung 2.3.8

Sei (M, g) eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, und sei $\lambda(M, g) < \lambda(S^n, g_{\text{sph}})$. Dann gibt es eine konform äquivalente Metrik \bar{g} mit $\text{scal}_{\bar{g}} \equiv \lambda(M, g)$.

Beweis. Wähle $C > 0$ so, dass für $\tilde{g} = C \cdot g$ gilt $\text{vol}(M, \tilde{g}) = 1$. Nach Satz 2.3.7 gibt es eine zu \tilde{g} , also auch zu g selbst, konform äquivalente Metrik \bar{g} mit $\text{scal}_{\bar{g}} \equiv \lambda(M, \tilde{g}) = \lambda(M, g)$. \square

2.4 Nochmal zurück zur Sphäre

Wir müssen noch den Beweis erbringen, dass für das Yamabefunktional der Standard-sphäre das Infimum angenommen wird. Dazu zeigen wir zunächst:

Satz 2.4.1 (Singularitätenhebungssatz)

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\dim(M) = n \geq 3$. Sei $x \in M$ und $h \in L^{n/2}(M)$. Sei $u \in L^q(M)$ eine schwache Lösung der Gleichung $(\Delta + h)u = 0$ auf $M - \{x\}$ für ein $q > \frac{n}{2} = \frac{n}{n-2}$. Dann ist u eine schwache Lösung der Gleichung $(\Delta + h)u = 0$ auf ganz M .

Beispiel 2.4.2. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$, $x = 0$, $h \equiv 0$ und $u(x) = r^{2-n} = |x|^{2-n}$. Dann löst u die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ klassisch auf $\mathbb{R}^n - \{0\}$, aber nicht auf ganz M (auch nicht im schwachen Sinn). Dies ist kein Widerspruch zu Satz 2.4.1, denn

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q}^q &= \int_{\mathbb{R}^n} (|x|^{2-n})^q dx \\ &= c_n \cdot \int_0^\infty r^{(2-n)q} \cdot r^{n-1} dr \\ &= \infty, \end{aligned}$$

da $(2-n)q + (n-1) < (2-n)\frac{n}{n-2} + n-1 = -1$. Es ist also $u \notin L^q(M)$ mit q wie in der Voraussetzung des Satzes.

Beweis.

- a) Sei $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$. Zu zeigen ist dann: $\int_M u \cdot (\Delta + h)\varphi dx = 0$. Nach Voraussetzung ist das richtig, falls $x \notin \text{supp}(\varphi)$. Wähle also eine glatte Funktion $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\chi(t) \equiv 1$ für $t \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq \chi(t) \leq 1$ für $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ und $\chi(t) \equiv 0$ für $t \geq 1$. Für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ betrachte die Abschneidefunktion $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$, definiert durch $\chi_\varepsilon(y) := \chi(\frac{\text{dist}(y,x)}{\varepsilon})$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\int_M u(\Delta + h)\varphi d\text{vol} \\ &= \underbrace{\int_M u(\Delta + h)(1 - \chi_\varepsilon)\varphi d\text{vol}}_{=0} + \int_M u(\Delta + h)\chi_\varepsilon \varphi d\text{vol} \end{aligned}$$

$$= \int_M u(\Delta + h)\chi_\varepsilon \varphi \, d\text{vol}.$$

Zeige nun: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u(\Delta + h)\chi_\varepsilon \varphi \, d\text{vol} = 0$.

b) Setze $K := \text{supp}(\varphi)$. Für den Term mit dem Potential h finden wir:⁷

$$\begin{aligned} \|u \cdot h \cdot \varphi\|_{L^1(M)} &\leq C_1 \cdot \|u \cdot h\|_{L^1(K)} \\ &\leq C_1 \cdot \|h\|_{L^{n/2}(K)} \cdot \|u\|_{L^{(n/2)^*}(K)} \\ &\leq C_1 \cdot \|h\|_{L^{n/2}(K)} \cdot \|u\|_{L^q(K)} \cdot \text{vol}(K)^{\frac{q-(p/2)}{q \cdot (p/2)}} \\ &\leq C_2 \cdot \|h\|_{L^{n/2}(M)} \cdot \|u\|_{L^q(M)} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion $u \cdot h \cdot \varphi$ integrierbar, und folglich $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u h \chi_\varepsilon \varphi \, d\text{vol} = 0$ nach dem Satz über majorisierte Konvergenz.

c) Für den Term mit Δ berechnen wir (mit $r = \text{dist}(\cdot, x)$):

$$\begin{aligned} \Delta(\chi_\varepsilon \varphi) &= \varphi \cdot \Delta \chi_\varepsilon - 2\langle \nabla \chi_\varepsilon, \nabla \varphi \rangle + \chi_\varepsilon \cdot \Delta \varphi \\ |\nabla \chi_\varepsilon| &= \left| \chi' \cdot \frac{\nabla r}{\varepsilon} \right| \leq \frac{C_3}{\varepsilon} \\ |\Delta \chi_\varepsilon| &= \left| \chi' \cdot \underbrace{\Delta \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)}_{=\frac{1}{\varepsilon} O(r^{-1})} + \chi'' \cdot \left| \nabla \frac{r}{\varepsilon} \right|^2 \right| \\ &\leq C_4 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} + C_5 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{C_6}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist damit $|\Delta(\chi_\varepsilon \varphi)| \leq \frac{C_7}{\varepsilon^2}$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \left| \int_M u \cdot \Delta \chi_\varepsilon \varphi \, d\text{vol} \right| &\leq \frac{C_7}{\varepsilon^2} \int_{B_\varepsilon(x)} |u| \, d\text{vol} \\ &\leq \frac{C_7}{\varepsilon^2} \|u\|_{L^q(B_\varepsilon(x))} \cdot \text{vol}(B_\varepsilon(x))^{1-(1/q)} \\ &\leq C_8 \cdot \varepsilon^{-2+n(1-1/q)} \cdot \|u\|_{L^q(M)} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0, \end{aligned}$$

⁷In der Hölder-Ungleichung verwenden wir $\frac{1}{(n/2)^*} = 1 - \frac{1}{n/2} = 1 - \frac{2}{n} = \frac{n-2}{n} = \frac{2}{p}$.

2 Das Yamabe-Problem

denn

$$\begin{aligned} -2 + n \left(1 - \frac{1}{q}\right) > 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{q} > \frac{2}{n} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{q} < 1 - \frac{2}{n} \\ &\Leftrightarrow q > \frac{n}{n-2}. \end{aligned}$$

□

Übung 2.4.3

Beweisen Sie folgende Verallgemeinerung des Singularitätenhebungssatzes 2.4.1:

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\Sigma \subset M$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit der Kodimension $k \geq 3$ und $h \in L^{k/2}(M)$. Für ein $q > \frac{k}{k-2}$ sei $u \in L^q(M)$ eine schwache Lösung der Gleichung $(\Delta + h)u = 0$ auf $M - \Sigma$. Dann ist u eine schwache Lösung der Gleichung $(\Delta + h)u = 0$ auf ganz M .

Proposition 2.4.4

Für $n \geq 3$ gibt es eine positive Funktion $f \in C^\infty(S^n)$ mit $Q_{g_{\text{sph}}}(f) = \lambda(S^n, g_{\text{sph}})$.

Beweis.

- a) Seien $f_s \in C^\infty(S^n)$, $f > 0$ Lösungen des subkritischen Problems

$$Q_{g_{\text{sph}}}^s(f_s) = \lambda_s(S^n, g_{\text{sph}}) \quad \text{für } s \in [2, p]$$

mit der Normierung $\|f_s\|_{L^s} = 1$. Dann ist $Y(f_s) = a \cdot \lambda_s(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot f_s^{s-1}$.

Ersetze nun f_s durch $f_s \circ \Phi_s$ mit $\Phi_s \in \text{Isom}(S^n, g_{\text{sph}}) = \text{O}(n+1)$ so, dass die neue Funktion, wieder f_s genannt, in $-e_0$ ihr Maximum annimmt. Ist die Familie $(f_s)_{s \in [2, p]}$ beschränkt in $C^0(S^n)$, so ist sie auch beschränkt in $L^r(S^n)$ für jedes r . Wie im Beweis von Satz 2.3.7 zeigt man in diesem Fall, dass eine Teilfolge f_{s_i} gegen eine Funktion f mit den gewünschten Eigenschaften konvergiert.

Im Folgenden sei also die Familie $(f_s)_{s \in [2, p]}$ nicht beschränkt in $C^0(S^n)$, mit anderen Worten, es sei $\lim_{s \rightarrow p} (\max_{x \in S^n} f_s(x)) = \lim_{s \rightarrow p} f_s(-e_0) = \infty$.

- b) Sei $\kappa_\alpha \in \text{Conf}(S^n, g_{\text{sph}})$ die konforme Abbildung, die auf $S^n - \{e_0\}$ durch

$\kappa_\alpha := \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$ definiert ist. Setze

$$g_\alpha := \kappa_\alpha^* g_{\text{sph}} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_1 \end{pmatrix}}_{=: v_\alpha} \circ \sigma \right)^{p-2} \cdot g_{\text{sph}},$$

wobei $u_\alpha(x) = \left(\frac{|x|^2 + \alpha^2}{\alpha} \right)^{-(n-2)/2}$. Dann ist $v_\alpha(-e_0) = \alpha^{-(n-2)/2}$. Wähle $\alpha_s > 0$ so, dass $v_{\alpha_s}(-e_0)^{-1} = f_s(-e_0)$ und setze $\Psi_s := v_{\alpha_s} \cdot (f_s \circ \kappa_{\alpha_s})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Psi_s(-e_0) &= v_{\alpha_s}(-e_0) \cdot f_s(\kappa_{\alpha_s}(-e_0)) \\ &= v_{\alpha_s}(-e_0) \cdot f_s(-e_0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_s(y) &= v_{\alpha_s}(y) \cdot f_s(\kappa_{\alpha_s}(y)) \\ &\leq v_{\alpha_s}(y) \cdot f_s(-e_0) \\ &= \alpha_s^{(n-2)/2} \cdot v_{\alpha_s}(y). \end{aligned}$$

Mit $\alpha_s^{(n-2)/2} = \max_{x \in S^n} f_s(x) \xrightarrow{s \nearrow p} \infty$ folgt $\alpha_s \xrightarrow{s \nearrow p} \infty$.

c) Sei Y_α der Yamabe-Operator zur Metrik g_α . Dann ist

$$Y_{\alpha_s}(f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) = Y(f_s) \circ \kappa_{\alpha_s}, \quad (2.25)$$

da $\kappa_\alpha : (S^n, g_\alpha) \rightarrow (S^n, g_{\text{sph}})$ eine Isometrie ist. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} Y(\Psi_s) &= Y(v_{\alpha_s} \cdot (f_s \circ \kappa_{\alpha_s})) \\ &\stackrel{(2.6)}{=} v_{\alpha_s}^{p-1} \cdot Y_{\alpha_s}(f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) \\ &\stackrel{(2.25)}{=} v_{\alpha_s}^{p-1} \cdot (Y f_s) \circ \kappa_{\alpha_s} \\ &= v_{\alpha_s}^{p-1} \cdot a \cdot \lambda_s(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot f_s^{s-1} \circ \kappa_{\alpha_s} \\ &= a \cdot \lambda_s(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot v_{\alpha_s}^{p-s} \cdot \Psi_s^{s-1}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

2 Das Yamabe-Problem

d) Damit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
\|\Psi_s\|_{H^{1,2}}^2 &= \int_{S^n} (|\nabla \Psi_s|^2 + |\Psi_s|^2) \, dvol \\
&\leq C_1 \cdot \int_{S^n} \Psi_s \cdot Y(\Psi_s) \, dvol \\
&= C_1 \cdot \int_{S^n} v_{\alpha_s} \cdot (f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) \cdot Y(v_{\alpha_s} \cdot (f_s \circ \kappa_{\alpha_s})) \, dvol \\
&= C_1 \cdot \int_{S^n} v_{\alpha_s} \cdot (f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) \cdot v_{\alpha_s}^{p-1} \cdot Y_{\alpha_s}(f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) \, dvol \\
&= C_1 \cdot \int_{S^n} (f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) \cdot Y_{\alpha_s}(f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) \cdot \underbrace{v_{\alpha_s}^p \, dvol}_{dvol_{\alpha_s}} \\
&= C_1 \cdot \int_{S^n} (f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) Y_{\alpha_s}(f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) \, dvol_{\alpha_s} \\
&= C_1 \cdot \int_{S^n} f_s \cdot Y(f_s) \, dvol \\
&\leq C_2 \cdot \|f_s\|_{H^{1,2}}^2 \\
&\stackrel{(1.8)}{\leq} C_3 \cdot \|f_s\|_{H^{2,2n/(n+2)}}^2 \\
&\stackrel{(1.34)}{\leq} C_4 \cdot \left(\|a \cdot \lambda_s(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot f_s^{s-1} - a \cdot \text{scal} \cdot f_s\|_{L^{2n/(n+2)}}^2 + \|f_s\|_{L^{2n/(n+2)}}^2 \right) \\
&\leq C_5 \cdot \left(\|f_s^{s-1}\|_{L^{2n/(n+2)}}^2 + \|f_s\|_{L^{2n/(n+2)}}^2 \right) \\
&= C_5 \cdot \left(\|f_s\|_{L^{(s-1)2n/(n+2)}}^{2(s-1)} + \|f_s\|_{L^{2n/(n+2)}}^2 \right) \\
&\leq C_6 \cdot \left(\|f_s\|_{L^s}^{2(s-1)} + \|f_s\|_{L^s}^2 \right) \\
&= 2C_6.
\end{aligned}$$

Für die elliptische Abschätzung haben wir die Gleichung

$$Y(f_s) = \Delta f_s + a \cdot \text{scal} \cdot f_s = a \cdot \lambda_s(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot f_s^{s-1},$$

also $\Delta f_s = a \cdot \lambda_s(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot f_s^{s-1} - a \cdot \text{scal} \cdot f_s$ benutzt. In der vorletzten Zeile haben wir für die Hölder-Ungleichung benutzt, dass $(s-1)2n/(n+2) \leq s$ und $2n/(n+2) < 2 \leq p$.

Damit ist die Folge $(\Psi_s)_s$ beschränkt in $H^{1,2}(S^n, g_{\text{sph}})$ unabhängig von s . Es gibt also eine Teilfolge $s_i \nearrow p$ und ein $\Psi \in H^{1,2}(S^n)$, so dass $\Psi_{s_i} \rightharpoonup \Psi$ in $H^{1,2}(S^n)$.

e) Sei nun $K \subset S^n - \{e_0\}$ kompakt und $\Omega \subset S^n - \{e_0\}$ offen mit $K \subset \Omega \subset \bar{\Omega} \subset S^n - \{e_0\}$. Dann ist $\sigma(\bar{\Omega}) \subset B_R(0)$ für ein hinreichend großes $R > 0$.

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{u_\alpha}{u_1} &= \alpha^{(n-2)/2} \cdot \left(\underbrace{\frac{|x|^2 + 1}{|x|^2 + \alpha^2}}_{\leq \frac{R^2+1}{\alpha^2}} \right)^{(n-2)/2} \\ &\leq C_7 \cdot \alpha^{-(n-2)/2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die rechte Seite der Gleichung $Y(\Psi_s) = a \cdot \lambda_s(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot v_{\alpha_s}^{p-s} \cdot \Psi_s^{s-1}$ ist daher beschränkt durch

$$\begin{aligned} a \cdot \lambda_s(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot v_{\alpha_s}^{p-1} \cdot f_s^{s-1} \circ \kappa_{\alpha_s} &\leq C_7 \cdot \alpha^{-(p-1)(n-2)/2} \cdot \alpha^{(s-1)(n-2)/2} \\ &= C_7 \cdot \alpha^{(s-p)(n-2)/2} \\ &\xrightarrow{s \nearrow p} 0. \end{aligned}$$

Mit den lokalen Versionen des Satzes über elliptische Regularität (1.6.13) und des Sobolev'schen Einbettungssatzes (1.4.14) ist die Folge Ψ_s beschränkt in $L^r(K)$ unabhängig von s .

Setze nun $K_j := \sigma^{-1}(\overline{B_j(0)})$. Dann ist $K_j \subset S^n - \{e_0\}$ kompakt und $\bigcup_{j=1}^n K_j = S^n - \{e_0\}$. Wie im Beweis von Satz 2.3.3 – mit lokaler statt globaler elliptischer Regularität – erhalten wir eine Teilfolge Ψ_{s_i} , so dass $\|\Psi_{s_i}\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(K_1)}$ beschränkt ist. Für eine Teilfolge hiervon ist dann wiederum $\|\Psi_{s_i}\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(K_2)}$ beschränkt. Ein Diagonalfolgenargument (wie im Beweis von Proposition 1.2.5) liefert schließlich eine Teilfolge, die in allen $\mathcal{C}^{2,\alpha}(K_j)$, $j \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Arzela und Ascoli 1.2.5 konvergiert diese Teilfolge in $\mathcal{C}^2(K_j)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Damit ist Ψ \mathcal{C}^2 auf $S^n - \{e_0\}$, und Ψ_{s_i} konvergiert auf $S^n - \{e_0\}$ samt Ableitungen bis zur Ordnung zwei lokal gleichmäßig gegen Ψ .

Wegen $\Psi_s(-e_0) = 1$ ist auch $\Psi(-e_0) = 1$ und insbesondere $\Psi \not\equiv 0$. Aus $\Psi_s > 0$ folgt ferner $\Psi \geq 0$.

- f) Nach Bemerkung 2.1.9 ist $\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) > 0$ und somit gilt nach Lemma 2.3.5, dass $\lim_{s \rightarrow p} \lambda_s(S^n, [g_{\text{sph}}]) = \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$. Die linke Seite in (2.26) konvergiert auf $S^n - \{e_0\}$ lokal gleichmäßig gegen $Y\Psi$. Die rechte Seite konvergiert gegen $a \cdot \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot H \cdot \Psi^{p-1}$, wobei $H = \frac{Y\Psi}{a \cdot \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot \Psi^{p-1}}$ wo Ψ nicht verschwindet. Dort ist H insbesondere stetig. In der Nullstellenmenge von Ψ und in e_0 können wir einfach $H = 1$ setzen.

Wegen (2.27) gilt auf jedem Kompaktum in $S^n - \{e_0\}$ für hinreichend großes α , dass $0 \leq v_\alpha \leq 1$ und damit auch $0 \leq v_{\alpha_s}^{p-s} \leq 1$ für s nahe p . Also gilt $0 \leq H \leq 1$ auf ganz S^n und damit $H \in L^\infty(S^n) \subset L^{n/2}(S^n)$.

Da die Gleichung $Y\Psi = a \cdot \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot H \cdot \Psi^{p-1}$ auf $S^n - \{e_0\}$ gilt, folgt aus dem Singularitätenhebungssatz 2.4.1, dass sie im schwachen Sinn auf ganz S^n erfüllt ist. In anderen Worten, für jedes $h \in \mathcal{C}^\infty(S^n)$ gilt

$$\int_{S^n} Y(h) \cdot \Psi \, d\text{vol} = a \cdot \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot \int_{S^n} h \cdot H \cdot \Psi^{p-1} \, d\text{vol}.$$

2 Das Yamabe-Problem

Wir wählen nun $h_j \in C^\infty(S^n)$ mit $h_j \xrightarrow{H^{1,2}} \Psi$ für $j \rightarrow \infty$. Wegen des Sobolev'schen Einbettungssatzes 1.1.21 gilt dann auch $h_j \xrightarrow{L^p} \Psi$. Anhand des konkreten Wertes von p erkennt man leicht $\Psi^{p-1} \in L^{p^*}(S^n)$ und damit auch $H \cdot \Psi^{p-1} \in L^{p^*}(S^n)$, so dass die Hölder-Ungleichung uns $\int_{S^n} h_j \cdot H \cdot \Psi^{p-1} dvol \rightarrow \int_{S^n} H \cdot \Psi^p dvol$ liefert. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 E(\Psi) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{S^n} \left(\frac{1}{a} \langle \nabla h_j, \nabla \Psi \rangle + \text{scal} h_j \Psi \right) dvol \\
 &= \frac{1}{a} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{S^n} Y(h_j) \Psi dvol \\
 &= \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{S^n} h_j \cdot H \cdot \Psi^{p-1} dvol \\
 &= \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \int_{S^n} H \cdot \Psi^p dvol \\
 &\leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \|\Psi\|_{L^p}^p. \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

Für das Yamabe-Funktional folgt:

$$Q_{g_{\text{sph}}}(\Psi) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \|\Psi\|_{L^p}^{p-2}. \tag{2.29}$$

f) Wir zeigen $\|\Psi\|_{L^p} \leq 1$.

Kommt noch.

g) Aus (2.29) und f) folgt $Q_{g_{\text{sph}}}(\Psi) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$. Da $\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$ per Definition das Infimum von $Q_{g_{\text{sph}}}$ ist, muss $Q_{g_{\text{sph}}}(\Psi) = \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$ gelten, d. h. Ψ ist ein Minimierer von $Q_{g_{\text{sph}}}$.

Ferner muss in (2.28) Gleichheit gelten, d. h. $H \equiv 1$. Somit ist Ψ eine schwache Lösung der Gleichung $Y\Psi = a \cdot \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot \Psi^{p-1}$.

h) Um schließlich noch zu zeigen, dass $\Psi \in C^\infty(S^n)$ und $\Psi > 0$, wollen wir Satz 2.3.3 anwenden. Dazu benötigen wir ein $r > p$ mit $\Psi \in L^r(S^n)$. Nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz 1.1.21 ist $\Psi \in H^{1,2}(S^n) \subset L^p(S^n)$. Das also genügt gerade nicht, so dass wir die Funktion Ψ genauer studieren müssen.

Für $q \geq 2$ ist der Yamabe-Operator $Y : H^{2,q}(S^n) \rightarrow L^q(S^n)$ ein beschränkter linearer Operator. Wir zeigen: Y ist injektiv. Sei also $0 = Y(u) = \Delta u + a \cdot \text{scal}_{g_{\text{sph}}} \cdot u$ für ein $u \in H^{2,q}(S^n) \subset L^q(S^n)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 0 &= (u, \Delta u + a \cdot \text{scal}_{g_{\text{sph}}} \cdot u)_{L^2} \\
 &= \underbrace{\|\nabla u\|_{L^2}^2}_{\geq 0} + \int_{S^n} \underbrace{a \cdot \text{scal}_{g_{\text{sph}}} \cdot |u|^2}_{\geq 0} dvol.
 \end{aligned}$$

Aus $\text{scal}_{g_{\text{sph}}} > 0$ folgt dann $u \equiv 0$. Die elliptischen Abschätzungen für den Laplace-Operator Δ zeigen ferner, dass $Y : H^{2,q}(S^n) \rightarrow L^q(S^n)$ ein Isomorphismus von Banachräumen ist.

Sei nun $\frac{2n}{n-2} < q < \frac{n}{2}$; setze dann $r := \frac{nq}{n-2q} > p$. Sei weiterhin $\chi \in C^\infty(S^n)$ mit $0 \leq \chi \leq 1$ und $\chi \equiv 1$ nahe e_0 . Setze $Y_\chi(u) := Y(u) - (\chi \cdot \lambda(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot \Psi^{p-2}) \cdot u$. Für ein $u \in H^{2,q}(S^n)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|\chi \cdot \lambda(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot \Psi^{p-2} \cdot u\|_{L^q} &\leq \lambda(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot \|\chi \cdot \Psi^{p-2}\|_{L^{n/2}} \cdot \|u\|_{L^r} \\ &= \lambda(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot \left\| \chi^{1/p-2} \cdot \Psi \right\|_{L^{(p-2)n/2}}^{p-2} \cdot \|u\|_{L^r} \\ &= \lambda(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot \left\| \chi^{1/p-2} \cdot \Psi \right\|_{L^p}^{p-2} \cdot \|u\|_{L^r} \\ &\stackrel{1.8}{\leq} C_8 \cdot \left\| \chi^{1/p-2} \cdot \Psi \right\|_{L^{(p-2)n/2}}^{p-2} \cdot \|u\|_{H^{2,q}}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\|\chi \cdot \lambda(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot \Psi^{p-2}\|_{L(H^{2,q}, L^q)} \leq C_8 \cdot \left\| \chi^{1/p-2} \cdot \Psi \right\|_{L^p}.$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_{L(H^{2,q}, L^q)}$ die Operatornorm auf dem Banachraum $L(H^{2,q}, L^q)$ der beschränkten linearen Abbildungen $T : H^{2,q} \rightarrow L^q$. Durch geeignete Wahl von χ können wir $\|\chi \cdot \lambda(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot \Psi^{p-2}\|_{L(H^{2,q}, L^q)}$ beliebig klein machen. Die Menge der invertierbaren Operatoren in $L(H^{2,q}, L^q)$ ist offen, daher ist für ein geeignetes χ auch Y_χ invertierbar. Nun ist

$$Y_\chi(\Psi) = (1 - \chi) \cdot \lambda(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot \Psi \in C^0(S^n) \subset L^q(S^n).$$

Wegen der Invertierbarkeit von Y_χ gibt es also ein $\varphi \in H^{2,q}(S^n)$ mit

$$Y_\chi(\varphi) = (1 - \chi) \cdot \lambda(S^n, g_{\text{sph}}) \cdot \Psi^{p-1} = Y_\chi(\Psi).$$

Also ist $\Psi = \varphi \in H^{2,q}(S^n) \subset L^r(S^n)$, so dass wir schließlich den Regularitätssatz 2.3.3 anwenden können.

□

Gemäß Bemerkung 2.2.11 kennen wir nun den Wert der Yamabe-Invariante der Standardsphäre explizit:

$$\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) = n(n-1) \frac{4^{1/n} \pi^{(n+1)/n}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2/n}}.$$

Folgerung 2.4.5

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ und sei $\text{scal}_g \leq 0$. Dann gibt es eine Metrik $\bar{g} \in [g]$ mit $\text{scal}_{\bar{g}}$ konstant ≤ 0 . Ist ferner $\text{scal}_g \leq 0$ und $\text{scal}_g \not\equiv 0$, so ist $\text{scal}_{\bar{g}} < 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \lambda(M, [g]) &\leq Q_g(1) \\ &= c \cdot \int_M \text{scal}_g \cdot 1 \, d\text{vol} \\ &\leq 0 \\ &< \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) . \end{aligned}$$

□

2.5 Konforme Normalkoordinaten

Satz 2.5.1 (Konforme Normalkoordinaten)

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. Dann gibt es eine Metrik $\bar{g} \in [g]$, so dass in geeigneten Koordinaten x um x_0 mit $x(x_0) = 0$ gilt:

$$\det \bar{g}_{ij}(x) \equiv 1 \tag{2.30}$$

$$\text{scal}_{\bar{g}}(x) = O(r^2) \tag{2.31}$$

$$\Delta_{\bar{g}} \text{scal}_{\bar{g}}(x_0) = \frac{1}{6} |W(x_0)|^2 . \tag{2.32}$$

Zu vorgegebenem $N \in \mathbb{N}$ kann \bar{g} so gewählt werden, dass \bar{g} in diesen Koordinaten dieselbe Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung N hat wie in riemannschen Normalkoordinaten (bzgl. \bar{g}).

Bemerkung 2.5.2. Die Gleichung (2.32) ist eine invariante Bedingung, die überhaupt nicht von den Koordinaten abhängt. Gleiches gilt für (2.31), denn diese Bedingung besagt gerade, dass $\text{scal}(x_0) = 0$ und $\nabla \text{scal}(x_0) = 0$. Die Bedingung (2.30) hingegen hängt von der Wahl der verwendeten Koordinaten ab.

Den Beweis von Satz 2.5.1 führen wir später in diesem Abschnitt.

Satz 2.5.3 (Aubin)

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 6$, und sei M nicht konform flach. Dann ist

$$\lambda(M, [g]) < \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]).$$

Beweis.

- a) Da M nicht konform flach ist, gibt es einen Punkt $x_0 \in M$ mit $|W(x_0)| \neq 0$. Gemäß dem Satz über konforme Normalkoordinaten 2.5.1 können wir ohne Einschränkung (nach eventueller konformer Änderung der Metrik) annehmen, dass in geeigneten Koordinaten x mit $x(x_0) = 0$ gilt: $g_{ij} \equiv 1$, also $dvol = dx$ und $\text{scal} = O(r^2)$ mit $r = |x|$, sowie $\Delta \text{scal}(x_0) = \frac{1}{6}|W(x_0)|^2 > 0$. In diesen Koordinaten setze wie im Beweis von Proposition 2.2.14 $f_{\alpha, \varepsilon}(x) := \chi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \cdot u_\alpha(x)$, wobei $u_\alpha(x) = \left(\frac{\alpha}{|x|^2 + \alpha^2}\right)^{(n-2)/2}$ und $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(t) \equiv 0$ für $t \leq 1$ und $\chi(t) \equiv 0$ für $t \geq 2$. Weiter wie im Beweis von Proposition 2.2.14 erhalten wir:

$$\lambda(M, [g]) \leq \lambda(S^n, g_{\text{sph}}) + O_\varepsilon(\alpha^{n-2}) + \frac{\int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} \text{scal} \cdot f_{\alpha, \varepsilon}^2 dvol}{\|f_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p}^2}.$$

Der Faktor $1 + O(\varepsilon)$ in (2.18) aus der Volumenkorrektur tritt hier nicht auf, da ja $dvol = dx$. Außerdem bezeichnet $B_\varepsilon(x_0)$ in diesem Beweis ausnahmsweise nicht den geodätischen Abstandsball um x_0 , sondern die Menge der Punkte $y \in M$ mit $|x(y)| < \varepsilon$. Dies ist im vorliegenden Fall nicht genau dasselbe, da x nicht genau die riemannschen Normalkoordinaten sind und somit r nicht genau der geodätische Abstand. Allerdings wird dieser Unterschied nicht weiter stören.

Ferner ist, wie schon in (2.17) beobachtet, $\|f_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p} \geq \sqrt{C'} > 0$ für $\alpha \searrow 0$. Damit ergibt sich aus (2.18):

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_{2\varepsilon}(x_0) - B_\varepsilon(x_0)} \text{scal} \cdot f_{\alpha, \varepsilon}^2 dvol \right| &\leq C_1 \cdot \int_{B_{2\varepsilon}(x_0) - B_\varepsilon(x_0)} u_\alpha^2(x) dvol \\ &= O_\varepsilon(\alpha^{n-2}). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\lambda(M, [g]) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) + O_\varepsilon(\alpha^{n-2}) + \frac{\int_{B_\varepsilon(x_0)} \text{scal} \cdot u_\alpha^2 dvol}{\|f_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^p}^2}. \quad (2.33)$$

2 Das Yamabe-Problem

b) Nun berechnen wir:

$$\begin{aligned}
 \|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^p}^p &\leq c_n \cdot \int_0^{2\varepsilon} \left(\frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{p \cdot (n-2)/2} \cdot r^{n-1} dr \\
 &= c_n \cdot \int_0^{2\varepsilon} \left(\frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^n \cdot r^{n-1} dr \\
 &\stackrel{r=\alpha \cdot s}{=} c_n \cdot \int_0^{2\varepsilon/\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 s^2 + \alpha^2} \right)^n \cdot (\alpha s)^{n-1} \alpha ds \\
 &= c_n \cdot \int_0^{2\varepsilon/\alpha} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right)^n s^{n-1} ds \\
 &\leq c_n \cdot \left(c'_n + \int_1^{2\varepsilon/\alpha} s^{-n-1} ds \right) \\
 &= c_n \cdot \left(c'_n + \left[\frac{s^{-n}}{-n} \right]_1^{2\varepsilon/\alpha} \right) \\
 &= c_n \cdot \left(c'_n + \frac{1}{n} - \frac{(2\varepsilon/\alpha)^{-n}}{n} \right) \\
 &\leq c_n \cdot \left(c'_n + \frac{1}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (2.33), haben wir nun die verbesserte Ungleichung

$$\lambda(M, [g]) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) + O_\varepsilon(\alpha^{n-2}) + C_2 \cdot \int_{B_\varepsilon(x_0)} \text{scal} \cdot u_\alpha^2 dvol, \quad (2.34)$$

wobei $C_2 = 1/C'$, falls $\int_{B_\varepsilon(x_0)} \text{scal} \cdot u_\alpha^2 dvol \geq 0$ und $C_2 = (c_n(c'_n + 1/n))^{2/p}$, falls $\int_{B_\varepsilon(x_0)} \text{scal} \cdot u_\alpha^2 dvol < 0$.

c) In konformen Normalkoordinaten ist die Taylor-Entwicklung der Funktion scal um x_0 :

$$\text{scal}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \text{scal}}{\partial x^i \partial x^j}(0) x^i x^j + O(r^3).$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial^2 \text{scal}}{\partial x^i \partial x^j}(0) x^i x^j \cdot u_\alpha^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \int_{|x|=r} \left(\frac{\partial^2 \text{scal}}{\partial x^i \partial x^j}(0) x^i x^j \, d\text{vol}_{S^{n-1}(r)} \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} dr \\
 &\stackrel{(2.35)}{=} \frac{\gamma_n}{2} \cdot \int_0^\varepsilon (-\Delta \text{scal}(x_0)) \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} dr \\
 &= -\frac{\gamma_n}{12} \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \int_0^\varepsilon r^2 \left(\frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} dr.
 \end{aligned}$$

d) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha, \varepsilon > 0$ setze

$$I(\alpha) := I_{n,k,\varepsilon}(\alpha) := \int_0^\varepsilon r^k \cdot \left(\frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} dr.$$

Dann ist

$$0 < C_3 \leq \frac{I(\alpha)}{F(\alpha)} \leq C_4 < \infty \quad (\alpha \searrow 0),$$

wobei

$$F(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{k+2} & \text{für } n > k + 4 \\ \alpha^{k+2} \log\left(\frac{1}{\alpha}\right) & \text{für } n = k + 4 \\ \alpha^{n-2} & \text{für } n < k + 4 \end{cases}.$$

Denn für $I(\alpha)$ finden wir:

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) &= \int_0^\varepsilon \left(\frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{k+n-1} dr \\
 &\stackrel{r=\alpha s}{=} \int_0^{\varepsilon/\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 s^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot (\alpha s)^{k+n-1} \alpha ds \\
 &= \alpha^{k+2} \cdot \int_0^{\varepsilon/\alpha} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right)^{n-2} \cdot s^{k+n-1} ds \\
 &= \alpha^{k+2} \cdot \left(c_{k,n} + \int_1^{\varepsilon/\alpha} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right)^{n-2} \cdot s^{k+n-1} ds \right).
 \end{aligned}$$

2 Das Yamabe-Problem

Für $s \geq 1$ ist $s^2 \leq s^2 + 1 \leq 2s^2$ und somit ist $I(\alpha)$ vergleichbar⁸ mit

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\alpha) &= \alpha^{k+2} \cdot \left(c_{k,n} + \int_1^{\varepsilon/\alpha} (s^{-2n})^{n-2} \cdot s^{k+n-1} ds \right) \\ &= \alpha^{k+2} \cdot \left(c_{k,n} + \int_1^{\varepsilon/\alpha} s^{k-n+3} ds \right) \\ &= \alpha^{k+2} \cdot \left(c_{k,n} + \begin{cases} [\log(s)]_1^{\varepsilon/\alpha} & \text{für } k = n - 4 \\ \left[\frac{s^{k-n+4}}{k-n+4} \right]_1^{\varepsilon/\alpha} & \text{sonst} \end{cases} \right).\end{aligned}$$

Wir stellen fest:

- * Für $n > k + 4$ ist $\tilde{F}(\alpha)$ vergleichbar mit α^{k+2} .
- * Für $n = k + 4$ ist $\tilde{F}(\alpha) = \alpha^{k+2} (c_{k,n} + \log(\frac{\varepsilon}{\alpha})) = \alpha^{k+2} (c_{k,n,\varepsilon} + \log(\frac{1}{\alpha}))$, also vergleichbar mit $\alpha^{k+2} \log(\frac{1}{\alpha})$.
- * Für $n < k + 4$ schließlich ist

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\alpha) &= \frac{\varepsilon^{k-n+4}}{k-n+4} \cdot \alpha^{k+2+n-k-4} + c'_{k,n} \cdot \alpha^{k+2} \\ &= \frac{\varepsilon^{k-n+4}}{k-n+4} \cdot \alpha^{n-2} + c'_{k,n} \cdot \alpha^{k+2},\end{aligned}$$

also vergleichbar mit α^{n-2} , da $n - 2 < k + 2$.

e) Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial^2 \text{scal}}{\partial x^i \partial x^j}(0) x^i x^j \cdot u_\alpha^2 dx &= -\frac{\gamma_n}{12} \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \int_0^\varepsilon r^2 \left(\frac{\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} dr \\ &\leq \begin{cases} -C_5 \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \alpha^4 & \text{für } n \geq 7 \\ -C_6 \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \alpha^4 \log(\frac{1}{\alpha}) & \text{für } n = 6 \end{cases}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon(x_0)} O(r^3) \cdot u_\alpha^2 dx &\leq C_7 \cdot I_{n,3,\varepsilon}(\alpha) \\ &\leq C_8 \cdot \begin{cases} \alpha^5 & \text{für } n \geq 8 \\ \alpha^5 \log(\frac{1}{\alpha}) & \text{für } n = 7 \\ \alpha^4 & \text{für } n = 6 \end{cases}.\end{aligned}$$

⁸Soll heißen, dass $I(\alpha)/\tilde{F}(\alpha)$ nach unten und nach oben durch positive Konstanten beschränkt wird für $\alpha \searrow 0$.

* Für $n \geq 8$ finden wir:

$$\lambda(M, [g]) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) - C_9 \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \alpha^4 + O_\varepsilon(\alpha^5).$$

* Für $n = 7$ finden wir:

$$\lambda(M, [g]) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) - C_{10} \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \alpha^4 + O_\varepsilon\left(\alpha^5 \log\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right).$$

* Für $n = 6$ finden wir:

$$\lambda(M, [g]) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) - C_{11} \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \alpha^4 \log\left(\frac{1}{\alpha}\right) + O_\varepsilon(\alpha^4).$$

In allen drei Fällen dominieren für hinreichend kleine α die negativen $W(x_0)$ -Terme alle anderen Korrektur-Terme. Wir haben also $\lambda(M, [g]) < \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$.

□

Übung 2.5.4

Sei B eine reelle, symmetrische $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_{S^{n-1}} \langle Bx, x \rangle d\text{vol}_{S^{n-1}} = c_n \cdot \text{tr}(B) \quad (2.35)$$

für eine Konstante c_n , die nur von n abhängt, und berechnen Sie den Wert von c_n .

Diese Formel haben wir im Beweis angewandt, wobei B die Hesse-Matrix der Skalar-krümmung war.

Bemerkungen 2.5.5

1. Die Bedingung „ (M, g) nicht konform flach“ kann man in Satz 2.5.3 nicht ersatzlos streichen, denn sonst wäre $(M, g) = (S^n, g_{\text{sph}})$ ein Gegenbeispiel.
2. Für viele konform flache Mannigfaltigkeiten (M, g) gilt trotzdem $\lambda(M, [g]) < \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$, z. B. wenn die Schnittkrümmung K_g konstant und ≤ 0 ist (etwa flache Tori).

Für einen n -dimensionalen Vektorraum V setze nun

$$\mathcal{P}_m(V) := \{\text{reelle Polynome auf } V, \text{ homogen vom Grad } m\}.$$

2 Das Yamabe-Problem

$\mathcal{P}_m(V)$ ist ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum.

Sei $\Delta_0 := -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$ der Laplace-Operator auf $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$. Dann ist $\Delta_0(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. Für $r^2 = |x|^2 = \sum_{i=1}^n |x^i|^2$ ist folglich

$$r^2 \cdot \Delta_0 : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$$

ein Endomorphismus.

Lemma 2.5.6

Jeder Eigenwert von $r^2 \cdot \Delta_0$ auf $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ hat die Form $\lambda_j = -2j(n-2+2m-2j)$ mit $j = 0, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

Beweis. Induktion nach m :

$m = 0, 1$: Die Behauptung ist erfüllt, denn $r^2 \cdot \Delta_0|_{\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n), \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^n)} \equiv 0$ und $j = 0$.

$m \geq 2$: Sei $r^2 \cdot \Delta_0 f = \lambda f$ für ein $f \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) - \{0\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \Delta_0 f &= \Delta_0(\lambda \cdot f) \\ &= \Delta_0(r^2 \cdot \Delta_0 f) \\ &= \Delta_0(r^2) \cdot \Delta_0 f - 2 \langle \nabla r^2, \nabla \Delta_0 f \rangle + r^2 \Delta_0^2 f \\ &= -2n \Delta_0 f - 4 \sum_{i=1}^n x^i \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i} \Delta_0 f}_{\in \mathcal{P}_{m-2}} + r^2 \Delta_0^2 f \\ &= -2n \Delta_0 f - 4(m-2) \Delta_0 f + r^2 \Delta_0^2 f \\ \implies r^2 \Delta_0^2 f &= (\lambda + 2n + 4(m-2)) \Delta_0 f. \end{aligned}$$

Ist $\Delta_0 f = 0$, so auch $r^2 \cdot \Delta_0 f = 0$, also $\lambda = 0$.

Ist $\Delta_0 f \neq 0$, so ist $\lambda + 2n + 4(m-2)$ Eigenwert von $r^2 \cdot \Delta_0$ auf $\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist dann

$$\lambda + 2n + 4(m-2) = -2j(n-2+2(m-2)-2j)$$

für ein $j \in \{0, \dots, \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor\}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \lambda &= -2j(n-2+2(m-2)-2j) - 2n + 4(m-2) \\ &= -2(j+1)(n-2+2m-2(j+1)), \end{aligned}$$

und es gilt $j+1 \in \{1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$. □

Proposition 2.5.7

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, sei $x_0 \in M$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Sei T eine symmetrische $(k+2)$ -Multilinearform auf $T_{x_0}M$.

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $f \in \mathcal{P}_{k+2}(T_{x_0}M)$, so dass für $\bar{g} = e^{2f \circ \exp_{x_0}^{-1}} \cdot g$ gilt:

$$\text{Sym}(\nabla^k \text{ric}_{\bar{g}})(x_0) = T.$$

Beweis.

a) Seien (x^1, \dots, x^n) riemannsche Normalkoordinaten um x_0 bzgl. g . Setze

$$F_g(x) := \sum_{i,j=1}^n \text{ric}_{ij}(x) x^i x^j.$$

Dann haben wir folgende Taylor-Entwicklungen um 0:

$$\begin{aligned} \text{ric}_{ij}(x) &= \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} (D_\alpha \text{ric})_{ij}(0) x^\alpha + O(r^{k+1}) \\ F_g(x) &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} (D_\alpha \text{ric})_{ij}(0) x^\alpha x^i x^j + O(r^{k+3}) \\ &= \underbrace{\sum_{m=2}^{k+2} \frac{1}{(m-2)!} \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=m-2} (D_\alpha \text{ric})_{ij}(0) x^\alpha x^i x^j}_{=: F_g^{(m)} \in \mathcal{P}_m(T_{x_0}M)} + O(r^{k+3}). \end{aligned}$$

b) Wir vergleichen nun die kovarianten Ableitungen mit den üblichen partiellen Ableitungen in den Koordinaten (x^1, \dots, x^n) an der Stelle 0. Es ist

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^i}(0) = \frac{\partial}{\partial x^i}(0) + \Gamma.$$

Die Terme Γ in den Christoffelsymbolen sind algebraische Ausdrücke in g_{ij} und 1. Ableitungen davon an der Stelle 0. Entsprechend ist

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha &:= \nabla^{|\alpha|} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1}(0) \dots \frac{\partial}{\partial x^1}(0)}_{\alpha_1\text{-mal}, \dots, \dots, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^n}(0) \dots \frac{\partial}{\partial x^n}(0)}_{\alpha_n\text{-mal}}} \\ &= D_\alpha + P_\alpha. \end{aligned}$$

2 Das Yamabe-Problem

Hierbei ist P_α ein Differentialoperator der Ordnung $\leq |\alpha| - 1$, dessen Koeffizienten algebraische Ausdrücke in g_{ij} und Ableitungen davon bis zur Ordnung $|\alpha|$ an der Stelle 0 sind. Schließlich ist

$$(\nabla^{|\alpha|} \text{ric})_{ij\alpha}(0) = D_\alpha \text{ric}_{ij}(0) + \underbrace{P_\alpha \text{ric}_{ij}(0)}_{=: S_{ij\alpha}}.$$

Hierbei ist $S_{ij\alpha}$ ein algebraischer Ausdruck in g_{ij} und Ableitungen davon bis zur Ordnung $|\alpha| + 1$ an der Stelle 0.

Für $f \in \mathcal{P}_{k+2}$ stimmen g_{ij} und \bar{g}_{ij} und ihre Ableitungen bis zur Ordnung $k + 1$ an der Stelle 0 überein. Es ist also

$$\bar{S}_{ij\alpha} = S_{ij\alpha}, \quad \text{für } |\alpha| \leq k. \quad (2.36)$$

c) Die Behauptung ist äquivalent dazu, ein $f \in \mathcal{P}_{k+2}$ zu finden mit

$$\sum_{ij=1}^n \sum_{|\alpha|=k} (\nabla^k \text{ric}_{\bar{g}})_{ij\alpha}(0) x^i x^j x^\alpha = \sum_{ij=1}^n \sum_{|\alpha|=k} T_{ij\alpha} x^i x^j x^\alpha$$

d.h. mit

$$\begin{aligned} F_{\bar{g}}^{(k+2)}(x) &= \frac{1}{k!} \sum_{ij=1}^n \sum_{|\alpha|=k} (T_{ij\alpha} - \bar{S}_{ij\alpha}) x^i x^j x^\alpha \\ &\stackrel{(2.36)}{=} \frac{1}{k!} \sum_{ij=1}^n \sum_{|\alpha|=k} (T_{ij\alpha} - S_{ij\alpha}) x^i x^j x^\alpha. \end{aligned}$$

Aus (2.3) erhalten wir

$$\text{ric}_{\bar{g}} = \text{ric}_g - (n-2) \cdot (\nabla^2 f - \nabla f \otimes \nabla f) + (\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2) \cdot g$$

und damit

$$\begin{aligned} F_{\bar{g}}(x) &= F_g(x) - (n-2) \sum_{i,j=1}^n \left(\partial_{ij}^2 f(x) - \underbrace{\partial_i f(x) \partial_j f(x)}_{\mathcal{O}(r^{2k+2})} \right) x^i x^j \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \left(\Delta f(x) - (n-2) \underbrace{|\nabla f(x)|^2}_{\mathcal{O}(r^{2k+2})} \right) g_{ij}(x) x^i x^j \\ &= F_g(x) - (n-2) \sum_{i,j=1}^n x^i x^j \partial_{ij}^2 f(x) + \sum_{i,j=1}^n \Delta f(x) g_{ij}(x) x^i x^j + \mathcal{O}(r^{k+3}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Wir berechnen weiter:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n x^i x^j \partial_{ij}^2 f(x) &= \sum_{i,j=1}^n x^i \partial_i (x^j \partial_j f)(x) - \sum_{i=1}^n (x^i \partial_i f)(x) \\ &= (k+2)^2 f(x) - (k+2)f(x) \\ &= (k+2)(k+1)f(x). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta_0 f + O(r^{k+1}) \\ r^2 \Delta f &= r^2 \Delta_0 f + O(r^{k+3}). \end{aligned}$$

Für den homogenen Teil vom Grad $(k+2)$ in (2.37) erhalten wir daher die Gleichung

$$F_{\bar{g}}^{(k+2)} = F_g^{(k+2)} + r^2 \Delta_0 f - (n-2)(k+2)(k+1)f.$$

Die Behauptung ist äquivalent zur Existenz eines $f \in \mathcal{P}_{k+2}$ mit

$$\begin{aligned} r^2 \Delta_0 f - (n-2)(k+2)(k+1)f \\ = -F_g^{(k+2)} + \frac{1}{k!} \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=m} (T_{ij\alpha} - S_{ij\alpha}) x^i x^j x^\alpha. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die Zahl $(n-2)(k+2)(k+1) > 0$ ist nach Lemma 2.5.6 kein Eigenwert von $r^2 \Delta_0$ auf $\mathcal{P}_{k+2}(T_{x_0}M)$. Somit ist $r^2 \Delta_0 - (n-2)(k+2)(k+1) \cdot \text{id}$ ein injektiver, also bijektiver Endomorphismus von $\mathcal{P}_{k+2}(T_{x_0}M)$. Daher gibt es genau ein $f \in \mathcal{P}_{k+2}(T_{x_0}M)$, das (2.38) erfüllt.

□

Übung 2.5.8

Beweisen Sie den Satz von Graham:

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $x_0 \in M$ und $N \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es eine Metrik $\bar{g} \in [g]$ mit

$$\text{Sym}(\nabla^k \text{ric})(x_0) = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, N.$$

Lemma 2.5.9

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. In riemannschen Normalkoordinaten um x_0 haben wir folgende Taylor-Entwicklungen:

$$\begin{aligned}
 g_{pq}(x) &= \\
 &\delta_{pq} - \frac{1}{3} \sum_{ij=1}^n R_{pijq}(0) x^i x^j - \frac{1}{6} \sum_{ijk=1}^n \partial_k R_{pijq}(0) x^i x^j x^k \\
 &- \sum_{ijkl=1}^n \left\{ \frac{1}{20} \partial_{kl}^2 R_{pijq}(0) - \frac{2}{45} \sum_{m=1}^n R_{pijm}(0) R_{qklm}(0) \right\} x^i x^j x^k x^l + O(r^5) \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \det(g_{pq}(x)) &= \\
 &1 - \frac{1}{3} \sum_{ij=1}^n \text{ric}_{ij}(0) x^i x^j - \frac{1}{6} \sum_{ijk=1}^n \partial_k \text{ric}_{ij}(0) x^i x^j x^k \\
 &- \sum_{ijkl=1}^n \left\{ \frac{1}{20} \partial_{kl}^2 \text{ric}_{ij}(0) + \frac{1}{90} \sum_{pm=1}^n R_{pijm}(0) R_{pklm}(0) - \frac{1}{18} \text{ric}_{ij}(0) \text{ric}_{kl}(0) \right\} x^i x^j x^k x^l \\
 &+ O(r^5). \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Beweis.

a) Seien $X, Y \in T_{x_0}M$ mit $|X| = 1$. Das Differential von \exp_{x_0} ist gegeben durch

$$d \exp_{x_0} |_{rX}(Y) = \frac{J(r)}{r},$$

wobei J das Jacobi-Feld längs der Geodätischen $r \mapsto \exp_{x_0}(rX) =: c(r)$ mit Anfangsbedingungen $J(0) = 0$ und $J'(0) := \frac{\nabla}{dr} J(0) = Y$ ist, d.h. J erfüllt die Jacobi-Gleichung

$$J'' = -R(J, \dot{c}) \dot{c}. \quad (2.41)$$

Für $x = \exp_{x_0}(rX)$ und $\eta = d \exp_{x_0} |_{rX}(Y)$ ist dann

$$g_{pq}(x) \eta^p \eta^q = g(\eta, \eta) = \frac{1}{r^2} g(J(r), J(r)).$$

Die Taylor-Entwicklung der Metrik lässt sich daher durch die Taylor-Entwicklung der Jacobi-Felder berechnen.

b) Wir differenzieren dazu die Jacobi-Gleichung (2.41) nach r und erhalten:

$$\begin{aligned}
 J'' &= -R(J, \dot{c}) \dot{c} \\
 J''' &= -\nabla_{\dot{c}} R(J, \dot{c}) \dot{c} - R(J', \dot{c}) \dot{c} \\
 J^{(4)} &= -\nabla_{\dot{c}, \dot{c}}^2 R(J, \dot{c}) \dot{c} - 2\nabla_{\dot{c}} R(J', \dot{c}) \dot{c} - R(J'', \dot{c}) \dot{c} \\
 J^{(5)} &= -(\nabla_{\dot{c}, \dot{c}, \dot{c}}^3 R)(J, \dot{c}) \dot{c} - 3(\nabla_{\dot{c}, \dot{c}}^2 R)(J', \dot{c}) \dot{c} - 3\nabla_{\dot{c}} R(J'', \dot{c}) \dot{c} - R(J''', \dot{c}) \dot{c}.
 \end{aligned}$$

An der Stelle $r = 0$ erhalten wir aus den Anfangsbedingungen von J :

$$\begin{aligned}
 J(0) &= 0 \\
 J'(0) &= Y \\
 J''(0) &= 0 \\
 J'''(0) &= -R(Y, X)X \\
 J^{(4)}(0) &= -2(\nabla_X R)(Y, X)X \\
 J^{(5)}(0) &= -3(\nabla_{X, X}^2 R)(Y, X)X + R(R(Y, X)X, X)X.
 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{r^2} |J(r)|^2 \\
 &= \frac{1}{r^2} \left| rY - \frac{r^3}{3!} R(Y, X)X - \frac{r^4}{4!} \cdot 2 \cdot \nabla_X R(Y, X)X \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r^5}{5!} (3\nabla_{X, X}^2 R(Y, X)X - R(R(Y, X)X, X)X) + O(r^6) \right|^2 \\
 &= |Y|^2 - \frac{r^3}{3} \langle R(Y, X)X, Y \rangle - \frac{r^3}{6} \langle \nabla_X R(Y, X)X, Y \rangle \\
 &\quad + r^4 \left\{ \frac{1}{36} |R(Y, X)X|^2 - \frac{1}{20} \langle \nabla_{X, X}^2 R(Y, X)X, Y \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{60} \langle R(R(Y, X)X, X)X, Y \rangle \right\} + O(r^5) \\
 &= |Y|^2 - \frac{r^3}{3} \langle R(Y, X)X, Y \rangle - \frac{r^3}{6} \langle \nabla_X R(Y, X)X, Y \rangle \\
 &\quad + r^4 \left\{ \frac{2}{45} |R(Y, X)X|^2 - \frac{1}{20} \langle \nabla_{X, X}^2 R(Y, X)X, Y \rangle \right\} + O(r^5) \\
 &= \delta_{pq} \eta^p \eta^q - \frac{1}{3} R_{pijq}(0) \eta^p x^i x^j \eta^q - \frac{1}{6} \partial_k R_{pijq}(0) x^k \eta^p x^i x^j \eta^q \\
 &\quad + \left\{ \frac{2}{45} \sum_{m=1}^n R_{pijm}(0) \eta^p x^i x^j R_{qklm}(0) \eta^q x^k x^l - \frac{1}{20} \partial_{kl}^2 R_{pijq}(0) x^k x^l \eta^p x^i x^j \eta^q \right\}.
 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert für die Taylor-Entwicklung der Metrik die Formel (2.39).

2 Das Yamabe-Problem

c) Die Matrix $(g_{pq})_{p,q=1,\dots,n}$ besitzt die Darstellung

$$(g_{pq})_{p,q=1,\dots,n} = \text{EXP}(A(x)) + \mathcal{O}(r^5), \quad (2.42)$$

wobei

$$\begin{aligned} A_{pq}(x) &= -\frac{1}{3}R_{pijq}(0)x^i x^j - \frac{1}{6}\partial_k R_{pijq}(0)x^i x^j x^k \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{20}\partial_{k,l}^2 R_{pijq}(0) + \frac{1}{90}R_{pijm}(0)R_{mklq}(0) \right\} x^i x^j x^k x^l \end{aligned} \quad (2.43)$$

und $\text{EXP}(A) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{k!} A^k$ die Matrix-Exponentialfunktion bezeichnet. Denn

$$\begin{aligned} \text{EXP}(A)_{pq} &= \delta_{pq} + A_{pq} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n A_{pm} A_{mq} + \mathcal{O}(r^6) \\ &= \delta_{pq} - \frac{1}{3}R_{pijq}(0)x^i x^j - \frac{1}{6}\partial_k R_{pijq}(0)x^i x^j x^k \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{20}\partial_{k,l}^2 R_{pijq}(0) + \frac{1}{90} \sum_{m=1}^n R_{pijm}(0)R_{mklq}(0) \right\} x^i x^j x^k x^l + \mathcal{O}(r^5) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \sum_{m=1}^n R_{pijm}(0)R_{mklq}(0)x^i x^j x^k x^l \\ &= g_{pq} + \mathcal{O}(r^5). \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.5.10 erhalten wir nun die Taylor-Entwicklung des Volumenelements:

$$\begin{aligned} \det(g_{pq}(x)) &= \det(\text{EXP}(A(x)) + \mathcal{O}(r^5)) \\ &= \det(\text{EXP}(A(x))) + \mathcal{O}(r^5) \\ &\stackrel{(2.44)}{=} e^{\text{tr}(A(x))} + \mathcal{O}(r^5) \\ &= 1 - \frac{1}{3}\text{ric}_{ij}(0)x^i x^j - \frac{1}{6}\partial_k \text{ric}_{ij}(0)x^i x^j x^k \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{20}\partial_{k,l}^2 \text{ric}_{ij}(0) + \frac{1}{90}R_{pijm}(0)R_{qklm}(0) \right\} x^i x^j x^k x^l \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \text{ric}_{ij}(0)\text{ric}_{kl}(0)x^i x^j x^k x^l + \mathcal{O}(r^5). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.5.10

Für jede Matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ gilt:

$$\det(\text{EXP}(A)) = e^{\text{tr}(A)}. \quad (2.44)$$

Beweis.

a) Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(\text{EXP}(A)) &= \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} \\ &= e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \\ &= e^{\text{tr}(A)}. \end{aligned}$$

b) Sei nun A diagonalisierbar, d.h. es gibt ein $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass $S \cdot A \cdot S^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist. Wegen $S \cdot A^k \cdot S^{-1} = (S \cdot A \cdot S^{-1})^k$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \det(\text{EXP}(A)) &= \det(S \cdot \text{EXP}(A) \cdot S^{-1}) \\ &= \det(\text{EXP}(S \cdot A \cdot S^{-1})) \\ &\stackrel{a)}{=} e^{\text{tr}(S \cdot A \cdot S^{-1})} \\ &= e^{\text{tr}(A)}. \end{aligned}$$

c) Da $\{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ diagonalisierbar}\}$ in $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ dicht liegt und beide Seiten der Gleichung (2.44) stetig in A sind, gilt die Gleichung für alle $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.

□

Übung 2.5.11

Zeigen Sie: $\{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ diagonalisierbar}\}$ liegt in $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ dicht.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass

$$\{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ hat paarweise verschiedene Eigenwerte}\}$$

in $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ dicht liegt. Hier ist die Jordan'sche Normalform hilfreich.

Beweis von Satz 2.5.1.

a) Durch vollständige Induktion nach N zeigen wir, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Metrik g konform so geändert werden kann, dass in riemannschen Normalkoordinaten gilt:

$$\det(g_{pq}(x)) = 1 + O(r^N). \quad (2.45)$$

2 Das Yamabe-Problem

Für $N = 2$ gilt dies in riemannschen Normalkoordinaten bereits ohne konforme Änderung.

Es gelte also nun die Gleichung (2.45) für ein festes $N \in \mathbb{N}$. Für die Jacobi-Felder J im Beweis von Lemma 2.5.9 finden wir durch sukzessive Differentiation:

$$\begin{aligned} J^{(k)}(0) &= -(k-2)\nabla_{X,\dots,X}^{k-3}R(Y,X)X \\ &\quad + \text{Terme niedriger Ableitungsordnung in } R \\ \implies \frac{1}{r^2}|J(r)|^2 &= \dots - 2(k-2)\left\langle \nabla_{X,\dots,X}^{k-3}R(Y,X)X, Y \right\rangle \cdot \frac{r^{k-1}}{(k+1)!} \\ &\quad + \text{Terme niedriger Ableitungsordnung in } R \end{aligned}$$

Mit $N = k - 1$ folgt

$$\det(g_{pq}(x)) = 1 + c_N r^N \underbrace{\sum_{|\alpha|=N-2} \left(D^\alpha \text{ric}_{ij}(0) + B_{ij\alpha} \right) x^i x^j x^\alpha}_{=: T_{ij\alpha}} + O(r^{N+1}).$$

Hierbei ist $B_{ij\alpha}$ ein algebraischer Ausdruck in R und Ableitungen bis zur Ordnung $N - 3$ von R .

Nach Proposition 2.5.7 gibt es genau ein Polynom $f \in \mathcal{P}_N(T_{x_0}M)$, so dass für $\bar{g} = e^{2f} \cdot g$ der Term $T_{ij\alpha}$ verschwindet. Da $f = O(r^N)$, gilt in riemannschen Normalkoordinaten:

$$\det(\bar{g}_{pq}(x)) = 1 + O(r^N).$$

- b) Sei nun $\det(g_{pq}(x)) = 1 + O(r^5)$. Aus den Termen zweiter Ordnung der Taylor-Entwicklung (2.40) erhalten wir $\text{ric}_{ij}(0)x^i x^j = 0$, also $\text{ric}(x_0) = 0$. Es folgt:

$$R(x_0) = W(x_0) \tag{2.46}$$

$$\text{und } \text{scal}(x_0) = 0. \tag{2.47}$$

Aus den Termen dritter und vierter Ordnung der Taylor-Entwicklung (2.40) erhalten wir:

$$\partial_k \text{ric}_{ij}(0)x^j x^j x^k = 0 \tag{2.48}$$

$$\left(\partial_{k,l}^2 \text{ric}_{ij}(0) + \frac{2}{9} R_{pijm}(0) R_{mlkq}(0) \right) x^i x^j x^k x^l = 0. \tag{2.49}$$

In (2.48) setze $x^\mu = t$, $x^\nu = s$, $x^i = 0$ für alle $i \neq \mu, \nu$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \text{ric}_{\mu\mu}(0) t^3 + \partial_\nu \text{ric}_{\nu\nu}(0) s^3 \\ &\quad + (\partial_\mu \text{ric}_{\nu\nu}(0) + 2\partial_\nu \text{ric}_{\mu\nu}) s^2 t \\ &\quad + (\partial_\nu \text{ric}_{\mu\mu}(0) + 2\partial_\mu \text{ric}_{\mu\nu}) s t^2. \end{aligned}$$

Aus einem Koeffizientenvergleich (von s^2t für $\mu \neq \nu$ bzw. von t^3 für $\mu = \nu$) erhalten wir:

$$\partial_\mu \text{ric}_{\nu\nu}(0) + 2 \partial_\nu \text{ric}_{\mu\nu}(0) = 0.$$

Summation über ν liefert nun:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \text{scal}(x_0) + 2 \text{div ric}(x_0) \\ &\stackrel{(2.9)}{=} 2 \nabla \text{scal}(x_0). \end{aligned}$$

Also verschwinden auch die ersten Ableitungen von scal an der Stelle x_0 und wir haben in Koordinaten $\text{scal} = O(r^2)$.

- c) In (2.49) setze $x^\mu = t$, $x^\nu = s$, $x^i = 0$ für alle $i \neq \mu, \nu$. Ein Koeffizientenvergleich (von s^2t^2 für $\mu \neq \nu$ bzw. von t^4 für $\mu = \nu$) liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ \partial_{\mu,\mu}^2 \text{ric}_{\nu\nu} + \partial_{\nu,\nu}^2 \text{ric}_{\mu\mu} + 4 \partial_{\mu\nu}^2 \text{ric}_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{9} \sum_{p,m=1}^n (2R_{p\nu\nu m} R_{p\mu\mu m} + W_{p\mu\nu m} W_{p\nu\mu m} + 2W_{p\mu\nu m} W_{p\nu\mu m} + W_{p\nu\mu m} W_{p\mu\nu m}) \right\}(0). \end{aligned}$$

Summation über ν und μ liefert daher an der Stelle x_0 :

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta \text{scal} - \Delta \text{scal} + 4 \text{div} \left(\underbrace{\text{div ric}}_{\frac{1}{2} \nabla \text{scal}} \right) \\ &\quad + \frac{2}{9} \left(2|\text{ric}|^2 + |W|^2 + 2 \sum_{\mu,\nu,m,p=1}^n W_{p\mu\nu m} W_{p\nu\mu m} + |W|^2 \right) \\ &\stackrel{(2.50)}{=} -4\Delta \text{scal} + \frac{2}{9} \cdot 3|W|^2. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die 1. Bianchi-Identität benutzt, um die W -Terme zu identifizieren:

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{\mu,\nu,m,p=1}^n W_{p\mu\nu m} W_{p\nu\mu m} \\ &= \sum_{\mu,\nu,m,p=1}^n (W_{\mu\nu p m} + W_{\nu p \mu m}) \cdot (W_{\nu \mu p m} + W_{\mu p \nu m}) \\ &= -|W|^2 + 3A. \\ \implies 2A &= |W|^2. \end{aligned} \tag{2.50}$$

- d) Sei nun $N \geq 5$ und g bereits konform so geändert, dass $\det(g_{pq}) = 1 + O(r^N)$ für ein $N \geq 5$. Setze $\bar{g} := h \cdot g$, wobei h in einer Umgebung von x_0 so gewählt wird, dass

2 Das Yamabe-Problem

in g -Normalkoordinaten gilt: $\det(\bar{g}_{pq}) \equiv 1$, d.h. $h := \det(g_{pq})^{-2/n} = 1 + O(r^N)$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{scal}_{\bar{g}}(x_0) &= 0 \\ \nabla \operatorname{scal}_{\bar{g}}(x_0) &= 0 \\ \Delta_{\bar{g}} \operatorname{scal}_{\bar{g}}(x_0) &= \frac{1}{6} |W(x_0)|^2.\end{aligned}$$

Hier gehen nur Ableitungen von \bar{g} bis zur Ordnung $4 < N$ an der Stelle x_0 ein, die mit denen von g übereinstimmen. \square

2.6 Green-Funktionen von Y und asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten

Für eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) der Dimension $n \geq 3$ mit $\lambda(M, [g]) > 0$ ist $0 < E(f) = \frac{1}{a}(Yf, f)_{L^2} / \|f\|_{L^p}^2$ für alle $f \in C^\infty(M) - \{0\}$. Insbesondere gilt für Eigenfunktionen von Y zum Eigenwert λ :

$$0 < \frac{1}{a} \cdot (Yf, f)_{L^2} = \frac{\lambda}{a} \cdot \|f\|_{L^2}^2,$$

d.h. $\lambda > 0$. Insbesondere ist 0 kein Eigenwert von λ . Damit gibt es zu jedem $x_0 \in M$ eine eindeutige Green-Funktion Γ_{x_0} von Y an der Stelle x_0 .

Bemerkung 2.6.1. Sei $\bar{g} = f^{p-2} \cdot g$ für eine positive Funktion $f \in C^\infty(M)$. Nach Korollar 2.1.5 ist $Y_{\bar{g}} = f^{1-p} \circ Y \circ f$. Seien nun Γ_{x_0} bzw. $\bar{\Gamma}_{x_0}$ die Green-Funktionen von Y_g bzw. $Y_{\bar{g}}$ an der Stelle x_0 . Dann gilt für jedes $\varphi \in C^\infty(M)$ einerseits

$$\begin{aligned}(\delta_{x_0}, \varphi) &= (\bar{\Gamma}_{x_0}, Y_{\bar{g}}\varphi) \\ &= \int_M \bar{\Gamma}_{x_0} \cdot Y_{\bar{g}}(\varphi) \, d\operatorname{vol}_{\bar{g}} \\ &= \int_M \bar{\Gamma}_{x_0} \cdot f^{1-p} \cdot Y_{\bar{g}}(f\varphi) f^{\frac{n}{2}(p-2)} \, d\operatorname{vol}_g \\ &= \int_M \bar{\Gamma}_{x_0} \cdot f^{1-p} \cdot Y_{\bar{g}}(f\varphi) f^p \, d\operatorname{vol}_g \\ &= \int_M \bar{\Gamma}_{x_0} \cdot Y_{\bar{g}}(f\varphi) f \, d\operatorname{vol}_g\end{aligned}$$

und andererseits $(\delta_{x_0}, \varphi) = f(x_0)^{-1}(\delta_{x_0}, f\varphi)$. Substituieren wir $\psi = f\varphi$, so erhalten wir

$$(\delta_{x_0}, \psi) = \int_M f(x_0) \bar{\Gamma}_{x_0} f \cdot Y_{\bar{g}}(\psi) \, d\operatorname{vol}_g,$$

2.6 Green-Funktionen von Y und asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten

also

$$\Gamma_{x_0}(y) = f(x_0) \cdot f(y) \cdot \bar{\Gamma}_{x_0}(y). \quad (2.51)$$

Definition 2.6.2. Für $\tau \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$O^{(k)}(r^\tau) \ni f \quad :\Leftrightarrow \quad \nabla^i f \in O(r^{\tau-i}) \quad \text{für } i = 0, \dots, k. \quad (2.52)$$

Statt $O^{(1)}(r^\tau)$ schreiben wir $O'(r^\tau)$ und statt $O^{(2)}(r^\tau)$ schreiben wir $O''(r^\tau)$.

Proposition 2.6.3

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ mit $\lambda(M, [g]) > 0$. Zu $x_0 \in M$ setze $G := (n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot \Gamma_{x_0}$. Sei ferner $n \in \{3, 4, 5\}$ oder (M, g) konform flach nahe x_0 .

Dann gibt es ein $A \in \mathbb{R}$, so dass nach geeigneter konformer Änderung der Metrik in Normalkoordinaten um x_0 gilt:

$$G = r^{2-n} + A + O''(r). \quad (2.53)$$

Beweisskizze.

- a) Im Fall $n \in \{3, 4, 5\}$ ändern wir die Metrik konform so, dass in Normalkoordinaten um x_0 gilt:

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= 1 + O(r^N) \text{ mit } N = n - 1 \\ \text{scal}_g &= O(r^2). \end{aligned}$$

Mit Δ_0 bezeichnen wir den euklidischen Laplace-Operator auf dieser Koordinatenumgebung. Für eine um x_0 radialsymmetrische Funktion $u \in O^{(k)}(r^\tau)$ gilt dann:

$$(\Delta_g - \Delta_0)u = O^{(k-1)}(r^{N+\tau-2}) \quad (2.54)$$

2 Das Yamabe-Problem

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned} Y(G - r^{2-n}) &= (n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot \delta_{x_0} - \Delta_0(r^{2-n}) \\ &\quad - \underbrace{(\Delta_g - \Delta_0)(r^{2-n})}_{\in \mathcal{O}(r^{N-n})} - \underbrace{a \cdot \text{scal}_g \cdot r^{2-n}}_{\in \mathcal{O}(r^{4-n})} \\ &\in \mathcal{O}(r^{-1}) \end{aligned}$$

Wähle $R > 0$ so, dass der Ball $\bar{B}_R(x_0)$ im Normalkoordinatengebiet enthalten ist. Für jedes $q < n$ ist $r^{-1} \in L^q(B_R(x_0))$, denn

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} r^{-q} d\text{vol}_g &< \infty \\ \Leftrightarrow \int_0^R r^{-q+n-1} dr &< \infty \\ \Leftrightarrow -q+n-1 &> -1 \\ \Leftrightarrow q &< n. \end{aligned}$$

Für jedes solche $q < n$ ist daher nach dem Satz über lokale elliptische Regularität 1.6.13

$$G - r^{2-n} \in H^{2,q}(B_{R/2}(x_0)).$$

Der lokale Sobolev'sche Einbettungssatz 1.4.14 liefert weiter

$$G - r^{2-n} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(B_{R/4}(x_0))$$

für jedes $\alpha \in (0, 1)$, denn

$$\frac{1}{q} \leq \frac{2-\alpha}{n} \Leftrightarrow \alpha \leq 2 - \frac{n}{q}.$$

Insbesondere ist $G - r^{2-n}$ stetig in 0; setze also $A := (G - r^{2-n})(0)$. Damit haben wir zumindest $G = r^{2-n} + A + o(1)$ gezeigt.

- b) Sei nun (M, g) konform flach nahe x_0 . Wir wählen eine konforme Änderung der Metrik, so dass in Normalkoordinaten um x_0 gilt:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} \\ \text{scal}_g &\equiv 0 \\ \Delta_g &= \Delta_0. \end{aligned}$$

Die Rechnung in a) zeigt, dass in diesen Koordinaten $Y(G - r^{2-n}) = 0$. Nach dem Satz über lokale elliptische Regularität 1.6.13 gilt dann $G - r^{2-n} \in \mathcal{C}^\infty(B_R(x_0))$ und insbesondere $G = r^{2-n} + A + \mathcal{O}''(r)$. \square

2.6 Green-Funktionen von Y und asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten

Bemerkung 2.6.4. Ohne die Bedingung $n \in \{3, 4, 5\}$ oder (M, g) konform flach haben wir stets eine Entwicklung der Form

$$G = r^{2-n} \cdot \left(1 + \sum_{k=4}^{n-2} \psi_k \right) + c \cdot \log(r) + O''(r^0)$$

mit $\psi_k \in \mathcal{P}_k(T_{x_0}M)$.

Bemerkung 2.6.5. Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ mit $\lambda(M, [g]) > 0$. Dann gibt es eine zu g konform äquivalente Metrik $\bar{g} \in [g]$ mit $\text{scal}_{\bar{g}} > 0$. Denn sei u_s die Lösung des subkritischen Problems $Y(u_s) = \lambda_s(M, g) \cdot u_s^{s-1}$, $s < p$, mit $u_s > 0$ und $\|u\|_{L^s} = 1$. Nach Lemma 2.3.5 ist mit $\lambda(M, [g]) > 0$ auch $\lambda_s(M, g) > 0$. Setze nun $\bar{g} := u_s^{p-2} \cdot g$ für ein $s \in [2, p)$. Dann ist

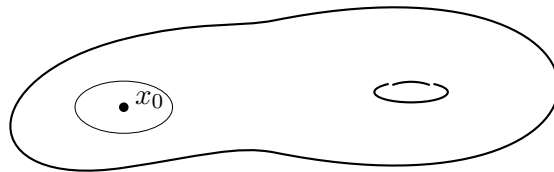
$$\begin{aligned} \text{scal}_{\bar{g}} &\stackrel{(2.7)}{=} \frac{1}{a} \cdot u_s^{1-p} \cdot Y_g(u_s) \\ &= \frac{1}{a} \cdot u_s^{1-p} \cdot \lambda_s(M, g) \cdot u_s^{s-1} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \lambda_s(M, g) \cdot u_s^{s-p} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Folgerung 2.6.6

Sei (M, g) wie in Proposition 2.6.3. Dann ist $\Gamma_{x_0} > 0$ auf $M - \{x_0\}$.

Beweis.

- a) Die Formel (2.51) zeigt, dass das Vorzeichen der Greenfunktion bei konformen Änderungen der Metrik erhalten bleibt. Nach Proposition 2.6.3 ist nach einer geeigneten konformen Änderung $G = r^{2-n} + O(1) > 0$ nahe x_0 . Somit ist $\Gamma_{x_0} > 0$ auf einem Ball $B_R(x_0)$.



2 Das Yamabe-Problem

- b) Nach einer geeigneten konformen Änderung können wir annehmen, dass $\text{scal}_g > 0$. In $M - \{x_0\}$ gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} Y(\Gamma_{x_0}) &= (\Delta_g + \underbrace{a \cdot \text{scal}_g}_{>0})(\Gamma_{x_0}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

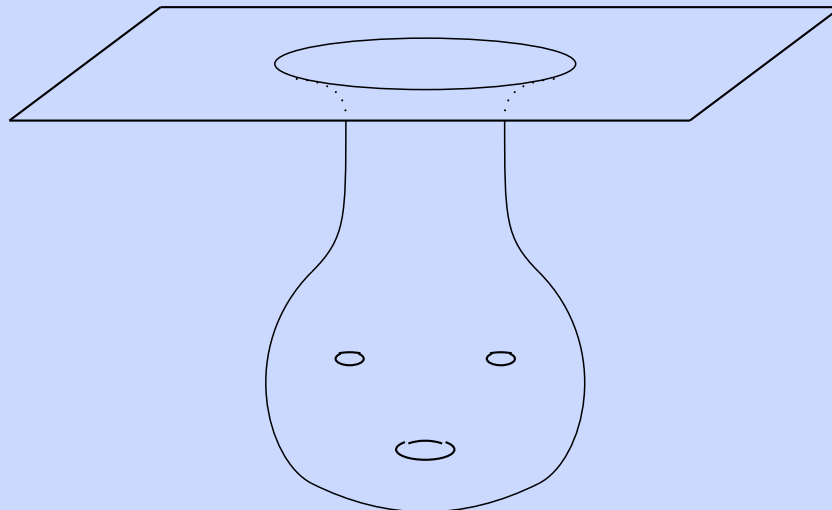
im klassischen Sinn. Aus dem Maximum-Prinzip 1.5.1 folgt dann

$$\min_{x \in M - B_R(x_0)} \Gamma_{x_0}(x) = \min_{x \in \partial B_R(x_0)} \Gamma_{x_0}(x) > 0.$$

□

Definition 2.6.7. Eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *asymptotisch flach von der Ordnung $\tau \in \mathbb{R}$* , falls es ein Kompaktum $K \subset M$, ein $R > 0$ und einen Diffeomorphismus $\psi : M - K \rightarrow \mathbb{R}^n - B_R(0)$ gibt, so dass für die Metrik $h := (\psi^{-1})^*g$ gilt:

$$h_{ij} - \delta_{ij} \in O''(r^{-\tau}) \quad \text{für } r \nearrow \infty. \quad (2.55)$$



2.6 Green-Funktionen von Y und asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten

Auf $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ betrachte nun die Umstülpabbildung

$$\begin{aligned} \text{USA} : \mathbb{R}^n - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \\ x &\mapsto \frac{x}{r^2}, \end{aligned}$$

wobei $r := |x|$. Wie sieht die euklidische Metrik g_{eukl} in den umgestülpten Koordinaten aus? Wir berechnen dazu das Differential von USA:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{USA}^\alpha}{\partial x^i} &= \frac{\delta_i^\alpha}{r^2} - \frac{x^\alpha \cdot 2x^i}{r^4} \\ &= r^{-2} \cdot (\delta_i^\alpha - 2r^{-2} x^i x^\alpha). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Koeffizienten der Metrik:

$$\begin{aligned} (\text{USA}^* g_{\text{eukl}})_{ij} &= (g_{\text{eukl}})_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \text{USA}^\alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \text{USA}^\beta}{\partial x^j} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \cdot r^{-4} \cdot (\delta_i^\alpha - 2r^{-2} x^i x^\alpha) \cdot (\delta_j^\beta - 2r^{-2} x^j x^\beta) \\ &= r^{-4} \cdot (\delta_{ij} - 4r^{-2} x^i x^j + 4r^{-4} \cdot x^i x^j r^2) \\ &= r^{-4} \cdot \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Somit ist $\text{USA}^* g_{\text{eukl}} = r^{-4} \cdot g_{\text{eukl}}$. Insbesondere ist $\text{USA} \in \text{Conf}(\mathbb{R}^n - \{0\})$.

Nach Beispiel 1.7.11 ist für $n \geq 3$ die Funktion $G := r^{2-n}$ eine Green-Funktion des euklidischen Laplace-Operators $\Delta_0 = \Delta_{g_{\text{eukl}}}$. Insbesondere ist $G^{p-2} = r^{(2-n)(p-2)} = r^{-4}$, also $\text{USA}^* g_{\text{eukl}} = G^{p-2} \cdot g_{\text{eukl}}$.

Definition 2.6.8. Sei (M, g) wie in Proposition 2.6.3, und sei $x_0 \in M$ beliebig. Setze $\widehat{M} - \{x_0\}$ und $\widehat{g} := G^{p-2} \cdot g$. Dann heißt $(\widehat{M}, \widehat{g})$ die *Umstülpung* von (M, g) an der Stelle x_0 .

Bemerkung 2.6.9. Nach (2.7) ist

$$\text{scal}_{\widehat{g}} = G^{1-p} \cdot \frac{1}{a} \cdot Y(G) = 0. \quad (2.56)$$

Proposition 2.6.10

Sei (M, g) wie in Proposition 2.6.3. Dann ist $(\widehat{M}, \widehat{g})$ asymptotisch flach der Ordnung

$$\begin{cases} 1, & \text{falls } n = 3 \\ 2, & \text{falls } n \geq 4 \\ n - 2, & \text{falls } M \text{ konform flach.} \end{cases}$$

Für $\gamma := r^{n-2} \cdot G$ gilt in geeigneten Koordinaten („umgestülpten konformen Normalkoordinaten“):

$$\widehat{g}_{ij} = \gamma^{p-2}(y) \cdot (\delta_{ij} + O''(\varrho^{-2})) \quad (2.57)$$

$$\gamma = 1 + A \cdot \varrho^{2-n} + O''(\varrho^{-2}). \quad (2.58)$$

Beweis.

- a) Seien x^1, \dots, x^n konforme Normalkoordinaten um x_0 wie in Proposition 2.6.3. Setze $y^j := r^{-2} \cdot x^j$, $r := |x|$, $\varrho := r^{-1} = |y|$. Wie oben ist dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} &= \varrho^{-2} \cdot (\delta_i^\alpha - 2\varrho^{-2} y^i y^\alpha) \\ \frac{\partial}{\partial y^i} &= \varrho^{-2} \cdot (\delta_i^\alpha - 2\varrho^{-2} y^i y^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{ij}(y) &= \widehat{g} \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \\ &= G^{p-2} \cdot g \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \\ &= \varrho^{-4} \cdot G^{p-2} \cdot g \left((\delta_i^\alpha - 2\varrho^{-2} y^i y^\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, (\delta_j^\beta - 2\varrho^{-2} y^j y^\beta) \cdot \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \varrho^{-4} \cdot G^{p-2} \cdot g_{\alpha\beta} \cdot (\delta_i^\alpha - 2\varrho^{-2} y^i y^\alpha) \cdot (\delta_j^\beta - 2\varrho^{-2} y^j y^\beta) \\ &= r^4 \cdot G^{p-2} \cdot \underbrace{g_{\alpha\beta}}_{=\delta_{\alpha\beta} + O''(r^2)} \cdot (\delta_i^\alpha - 2r^{-2} x^i x^\alpha) \cdot (\delta_j^\beta - 2r^{-2} x^j x^\beta) \\ &= r^4 \cdot G^{p-2} \cdot (\delta_{ij} + O''(r^2)) \\ &= r^4 \cdot (r^{2-n} \cdot \gamma)^{p-2} \cdot (\delta_{ij} + O''(r^2)) \\ &= \gamma^{p-2} \cdot (\delta_{ij} + O''(r^2)) \\ &= \delta_{ij} + O''(\varrho^{-2}). \end{aligned}$$

2.6 Green-Funktionen von Y und asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten

b) Nach Proposition 2.6.3 ist

$$\begin{aligned}\gamma &:= r^{n-2} \cdot G \\ &= r^{n-2} \cdot (r^{2-n} + A + O''(r)) \\ &= 1 + A \cdot r^{n-2} + O''(r^{n-1}) \\ &= 1 + A \cdot \varrho^{2-n} + O''(\varrho^{1-n}).\end{aligned}$$

c) Mit $\gamma^{p-2} = 1 + (p-2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} + O''(\varrho^{1-n})$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\widehat{g}_{ij} - \delta_{ij} &= (\gamma^{p-2} - 1) \cdot \delta_{ij} + \gamma^{p-2} \cdot O''(\varrho^{-2}) \\ &= (p-2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} \cdot \delta_{ij} + O''(\varrho^{1-n}) + O''(\varrho^{-2}) \\ &= O''(\varrho^{2-n}) + O''(\varrho^{1-n}) + O''(\varrho^{-2}) \\ &= O''(\varrho^{2-n}) + O''(\varrho^{1-n}) \\ &= \begin{cases} O''(\varrho^{-1}) & \text{für } n = 3 \\ O''(\varrho^{-2}) & \text{für } n \geq 4 \end{cases}\end{aligned}$$

d) Ist (M, g) konform flach, so gilt (nach geeigneter konformer Änderung) in riemannschen Normalkoordinaten $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, d. h. der $O''(r^2)$ -Term fällt weg, und somit

$$\widehat{g}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = O''(\varrho^{2-n}).$$

□

In Koordinaten y^1, \dots, y^n wie in der vorangegangenen Proposition betrachten wir

$$\begin{aligned}h(\varrho) &:= \varrho^{1-n} \cdot \omega_{n-1}^{-1} \cdot \int_{|y|=\varrho} \gamma^{p+2/2} d\Theta \\ &= \varrho^{1-n} \cdot \omega_{n-1}^{-1} \cdot \int_{|y|=\varrho} \left(1 + \frac{p+2}{2} \cdot A \cdot \varrho^{2-n} + O''(\varrho^{1-n})\right) d\Theta \\ &= 1 + \frac{p+2}{2} \cdot A \cdot \varrho^{2-n} \cdot O''(\varrho^{1-n}).\end{aligned}\tag{2.59}$$

Hierbei bezeichnet $d\Theta$ das Standardvolumenelement der Sphäre $\{y \mid |y| = \varrho\}$. Sei nun R hinreichend groß, so dass der Definitionsbereich der Koordinaten y^1, \dots, y^n die Sphäre vom Radius R enthält. Wir setzen:

$$\varphi_\alpha(y) := \begin{cases} u_\alpha(y) & \text{für } |y| \geq R \\ u_\alpha(R) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $\varphi_\alpha \in H^{1,2}(\widehat{M})$.

Lemma 2.6.11

Sei (M, g) wie in Proposition 2.6.3. Dann gibt es ein $C > 0$ und ein $k > 0$, so dass gilt:

$$E_{\widehat{g}}(\varphi_\alpha) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \cdot \|\varphi_\alpha\|_{L^p}^2 - C \cdot A \cdot \alpha^{-k} + O(\alpha^{-k-1}). \quad (2.60)$$

Inbesondere gilt: ist $A > 0$, so ist für ein hinreichend großes α :

$$\frac{E_{\widehat{g}}(\varphi_\alpha)}{\|\varphi_\alpha\|_{L^p(\widehat{M})}^2} < \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$$

Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} \lambda(M, [g]) &= \inf \left\{ \frac{E_g(\psi)}{\|\psi\|_{L^p(M)}^2} \mid \psi \in H^{1,2}(M) - \{0\} \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{E_{\widehat{g}}(\psi)}{\|\psi\|_{L^p(\widehat{M})}^2} \mid \psi \in H^{1,2}(\widehat{M}) - \{0\} \right\} \\ &\leq \frac{E_{\widehat{g}}(\varphi_\alpha)}{\|\varphi_\alpha\|_{L^p(\widehat{M})}^2} \\ &< \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]). \end{aligned}$$

Damit haben wir also bewiesen:

Satz 2.6.12

Sei (M, g) wie in Proposition 2.6.3. Existiert ein Punkt $x_0 \in M$ mit $A > 0$ in der Taylor-Entwicklung (2.53) der Green-Funktion des Yamabe-Operators Y um x_0 , so ist $\lambda(M, [g]) < \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$. Insbesondere ist das Yamabe-Problem dann lösbar.

2.7 Das Positive-Masse-Theorem

Definition 2.7.1. Sei (N, g) eine asymptotisch flache riemannsche Mannigfaltigkeit. In asymptotischen Koordinaten setze

$$m := \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\omega_{n-1}} \cdot \int_{S_R} \left\langle \sum_{i,j=1}^n (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \cdot \partial_j \nu \right\rangle d\text{vol}_{S_R} \right\}. \quad (2.61)$$

Hierbei bezeichnet S_R die Sphäre vom Radius R in den asymptotischen Koordinaten und ν das äußere Einheitsnormalenfeld von S_R . Falls dieser Limes existiert, so heißt m die *ADM-Masse* von (N, g) .⁹

Beispiel 2.7.2. Auf $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ sind bezüglich der kartesischen Koordinaten die Koeffizienten $g_{ij} = \delta_{ij}$ der Metrik konstant. Daher ist $m(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) = 0$.

Bemerkung 2.7.3. Im allgemeinen ist der Limes in (2.61) nicht unabhängig von der Wahl der asymptotisch flachen Koordinaten und folglich die ADM-Masse nicht invariant definiert. Es gilt aber folgender Satz:

Satz 2.7.4 (Bartnik, 1986)

Sei (N, g) eine asymptotisch flache riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n . In geeigneten Koordinaten außerhalb eines Kompaktums $K \subset N$ sei (bzgl. der Gewichtsfunktion ϱ):

$$(g - g_{\text{eukl}}) \in \mathcal{C}_{-\tau}^{1,\alpha}(N - K)$$

für ein $\alpha \in (0, 1)$ und ein $\tau > \frac{n-2}{2}$. Ferner sei $\text{scal}_g \in L^1(N)$. Dann existiert der Limes in (2.61), und die ADM-Masse m hängt nicht von der Wahl der asymptotischen Koordinaten ab.

Ohne Beweis.

Lemma 2.7.5

Sei (M, g) eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ und $\lambda(M, [g]) > 0$. Sei $n \leq 5$ oder (M, g) konform flach. Sei ferner $x_0 \in M$, und sei $(\widehat{M}, \widehat{g})$ die Umstülpung von (M, g) an der Stelle x_0 . Wir schreiben (nach eventueller konformer Änderung der Metrik) in umgestülpten Normalkoordinaten:

$$\begin{aligned} \widehat{g} &= \gamma^{p-2} \cdot (g_{\text{eukl}} + O''(\varrho^{-2})) && \text{falls } n \leq 5 \\ \text{bzw. } \widehat{g} &= \gamma^{p-2} \cdot g_{\text{eukl}}, && \text{falls } M \text{ konform flach} \\ \text{und } \gamma &= 1 + A \cdot \varrho^{2-n} + O''(\varrho^{1-n}) && (\varrho \nearrow \infty). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$m(\widehat{g}) = 4 \cdot (n - 1) \cdot A. \tag{2.62}$$

Beweisskizze.

a) Nach (2.56) ist $\text{scal}_{\widehat{g}} = 0$, also insbesondere $\text{scal}_{\widehat{g}} \in L^1(\widehat{M})$. Ferner ist

$$\begin{aligned} g - g_{\text{eukl}} &= (1 + (p - 2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} + O''(\varrho^{1-n})) \cdot (g_{\text{eukl}} + O''(\varrho^{-2})) \\ &= (p - 2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} \cdot g_{\text{eukl}} + O''(\varrho^{1-n}) + O''(\varrho^{-2}), \quad \text{falls } n \leq 5 \end{aligned}$$

bzw.

$$g - g_{\text{eukl}} = (p - 2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} \cdot g_{\text{eukl}} + O''(\varrho^{1-n}), \quad \text{falls } (M, g) \text{ konform flach,}$$

also

$$g - g_{\text{eukl}} = O''(\varrho^{-\tau}),$$

wobei

$$\tau = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 3 \\ 2, & \text{falls } n = 4, 5 \\ n - 2, & \text{falls } (M, g) \text{ konform flach.} \end{cases}$$

In jedem Fall ist $\tau > \frac{n-2}{2}$. Damit ist $(g - g_{\text{eukl}}) \in \mathcal{C}_{-\tau}^2(N - K)$, also insbesondere $(g - g_{\text{eukl}}) \in \mathcal{C}_{-\tau}^{1,\alpha}(N - K)$ für ein $\alpha \in (0, 1)$. Nach dem Satz von Bartnik 2.7.4 ist also die ADM-Masse $m(\widehat{g})$ der Umstülpung wohldefiniert.

b) Im konform flachen Fall berechnen wir weiter:

$$\begin{aligned}
 g_{ij} - \delta_{ij} &= (p-2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} \cdot \delta_{ij} + O''(\varrho^{1-n}) \\
 \implies \partial_j g_{kl} &= (p-2) \cdot A \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \varrho^{-n} \cdot 2 y_j \cdot \delta_{kl} + O(\varrho^{-n}) \\
 &= -4 \cdot \varrho^{-n} \cdot y_j \cdot \delta_{kl} + O(\varrho^{-n}) \\
 \implies \sum_{i=1}^n (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) &= -4 \cdot A \cdot \varrho^{-n} \cdot (y_j - n y_j) + O(\varrho^{-n}) \\
 &= 4 \cdot (n-1) \cdot A \cdot \varrho^{-n} \cdot y_j + O(\varrho^{-n})
 \end{aligned}$$

Mit dem äußeren Normalenfeld

$$\begin{aligned}
 \nu &= \partial_\varrho \\
 &= \frac{\varrho \cdot \partial_\varrho}{\varrho} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^n y^j \cdot \partial_j}{\varrho}
 \end{aligned}$$

erhalten wir für den Integranden in (2.61)

$$\begin{aligned}
 \left\langle \sum_{i=1}^n (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \cdot \partial_j, \nu \right\rangle &= \sum_{j=1}^n 4 \cdot (n-1) \cdot A \cdot \varrho^{-n} \cdot y_j \cdot y_j \cdot \varrho^{-1} + O(\varrho^{-n}) \\
 &= 4 \cdot (n-1) \cdot A \cdot \varrho^{-n+1} + O(\varrho^{-n}).
 \end{aligned}$$

Damit ist also

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\omega_{n-1}} \cdot \int_{S_R} \left\langle \sum_{i,j=1}^n (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \cdot \partial_j, \nu \right\rangle d\text{vol}_{S_R} \\
 &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \cdot 4 \cdot (n-1) \cdot A \cdot R^{-n+1} \cdot R^{n-1} \cdot \omega_{n-1} + O(R^{-1}) \\
 &= 4 \cdot (n-1) \cdot A + O(R^{-1}). \quad \square
 \end{aligned}$$

Spinoren

Auf \mathbb{R}^n sind *Spinoren* vektorwertige Funktionen $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$. Der *Dirac-Operator* auf \mathbb{R}^n ist definiert durch

$$D\psi := \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \partial_i \psi.$$

2 Das Yamabe-Problem

Hierbei sind $\gamma_i \in \text{Mat}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}; \mathbb{C})$ mit $\gamma_i \cdot \gamma_j + \gamma_j \cdot \gamma_i = -2\delta_{ij} \cdot 1$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 D^2\psi &= \sum_{i,j=1}^n \gamma_i \partial_i (\gamma_j \partial_j \psi) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \gamma_i \gamma_j \partial_{i,j}^2 \psi \\
 &= \sum_{i < j} \underbrace{(\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i)}_{=-2\delta_{ij}=0} \partial_{i,j}^2 \psi + \sum_{i=1}^n \underbrace{\gamma_i \gamma_i}_{=-1} \partial_{i,i}^2 \psi \\
 &= - \sum_{i=1}^n \partial_{i,i}^2 \psi \\
 &= \Delta \psi.
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Im Fall $n = 3$ ist z.B.

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Ist (M, g) eine riemannsche *Spin-Mannigfaltigkeit*, so kann man ein komplexes Vektorbündel vom Rang $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ mit hermiteschem Zusammenhang ∇ , das *Spinorbündel* ΣM , definieren sowie den *Dirac-Operator* D , der dann auf *Spinoren*, d.h. Schnitten in ΣM , wirkt. Als Verallgemeinerung von (2.63) gilt dann die *Lichnerowicz-Schrödinger-Formel*

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{\text{scal}}{4}. \tag{2.64}$$

Satz 2.7.6 (Positive-Masse-Theorem für Spin-Mannigf.; Witten 1981)

Sei (N, g) eine zusammenhängende, asymptotisch flache Spin-Mannigfaltigkeit. Außerhalb eines Kompaktums $K \subset N$ gelte (bzgl. der Gewichtsfunktion ϱ):

$$g - g_{\text{eukl}} \in \mathcal{C}_{-\tau}^{2,\alpha}(N - K)$$

für ein $\tau > \frac{n-2}{2}$ und ein $\alpha \in (0, 1)$. Ferner sei

$$\text{scal} \geq 0.$$

Dann ist $m(g) \geq 0$ und $m(g) = 0$ genau dann, wenn (N, g) isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ ist.

Beweisskizze.

a) Wir zeigen: D^2 ist injektiv als Operator

$$D^2 : \mathcal{C}_{-\tau}^{2,\alpha}(\Sigma N) \rightarrow C_{-\tau-2}^{0,\alpha}(\Sigma N).$$

Sei dazu $\psi \in C_{-\tau}^{2,\alpha}(N)$ mit $D^2\psi = 0$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_N \langle D^2\psi, \psi \rangle dvol \\ &\stackrel{(2.64)}{=} \int_N \left(\langle \nabla^* \nabla \psi \rangle + \frac{\text{scal}}{4} \cdot |\psi|^2 \right) dvol \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{B_R} \left(\langle \nabla^* \nabla \psi \rangle + \frac{\text{scal}}{4} \cdot |\psi|^2 \right) dvol_{B_R} \right\} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{B_R} \left(|\nabla \psi|^2 + \frac{\text{scal}}{4} \cdot |\psi|^2 \right) dvol_{B_R} \right. \\ &\quad \left. - \int_{S_R} \left\langle \underbrace{\nabla_\nu \psi}_{\in O(R^{-\tau-1})}, \underbrace{\psi}_{\in O(R^{-\tau})} \right\rangle dvol_{S_R} \right\} \\ &\stackrel{-2\tau-1 \leq -(n-1)}{=} \int_N \underbrace{\left(|\nabla \psi|^2 + \frac{\text{scal}}{4} \cdot |\psi|^2 \right)}_{\geq 0} dvol. \end{aligned}$$

Damit ist $\nabla \psi = 0$, also $|\psi|$ konstant, denn $\partial_X |\psi|^2 = \langle \nabla_X \psi, \psi \rangle + \langle \psi, \nabla_X \psi \rangle = 0$.
Nach Voraussetzung ist aber $\psi \in O(\varrho^{-\tau})$, daher ist $\psi \equiv 0$.

b) Mit einiger analytischer Feinarbeit kann man zeigen: ist D^2 als Operator

$$D^2 : \mathcal{C}_{-\tau}^{2,\alpha}(\Sigma N) \rightarrow C_{-\tau-2}^{0,\alpha}(\Sigma N).$$

injektiv, so auch surjektiv.

c) Wir wählen nun auf \mathbb{R}^n einen konstanten Spinor der Länge 1. Wir betrachten den entsprechenden „fast konstanten“ Spinor ψ_0 auf $N - K$ und setzen ψ_0 zu einem glatten Spinor auf ganz N fort. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_0 &\in \mathcal{C}_{-\tau-2}^{2,\alpha}(\Sigma N), \\ \nabla \psi_0 &\in \mathcal{C}_{-\tau-1}^{1,\alpha}(\Sigma N), \\ \text{aber } \psi_0 &\notin \mathcal{C}_{-\tau}^{2,\alpha}(\Sigma N), \end{aligned}$$

da $|\psi_0| \rightarrow 1$ für $\varrho \rightarrow \infty$. Gemäß a) und b) gibt es einen Spinor $\varphi \in \mathcal{C}_{-\tau}^{2,\alpha}(\Sigma N)$ mit $D^2\varphi = D^2\psi_0$. Setze nun $\psi := \psi_0 - \varphi$. Dann ist $D^2\psi = 0$ und $|\psi| \rightarrow 1$ für $\varrho \rightarrow \infty$.

2 Das Yamabe-Problem

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B_R} \langle D^2\psi, \psi \rangle dvol_{B_R} \\
&= \int_{B_R} \left(\langle \nabla^* \nabla \psi, \psi \rangle + \frac{\text{scal}}{4} \cdot |\psi|^2 \right) dvol_{B_R} \\
&= \int_{B_R} \left(|\nabla \psi|^2 + \frac{\text{scal}}{4} \cdot |\psi|^2 \right) dvol_{B_R} - \int_{S_R} \langle \nabla_\nu \psi, \psi \rangle dvol_{S_R}. \quad (2.65)
\end{aligned}$$

Für den Randterm berechnet man unter Benutzung der lokalen Formel für die kovariante Ableitung von Spinoren

$$\begin{aligned}
\int_{S_R} \langle \nabla_\nu \psi, \psi \rangle dvol_{S_R} &= \frac{1}{4} \int_{S_R} \left\langle \sum_{i,j=1}^n (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \cdot \partial_j, \nu \right\rangle \cdot |\psi|^2 dvol_{S_R} \\
&\quad + O(R^{-2\tau-1}) \quad (2.66)
\end{aligned}$$

Im Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ erhalten wir aus (2.65) und (2.66)

$$0 = \int_N \left(|\nabla \psi|^2 + \frac{\text{scal}}{4} \cdot |\psi|^2 \right) dvol - \frac{1}{4} m(g)$$

und somit wegen $\text{scal} \geq 0$

$$\frac{1}{4} m(g) = \int_N \left(|\nabla \psi|^2 + \frac{\text{scal}}{4} \cdot |\psi|^2 \right) dvol \geq 0. \quad (2.67)$$

- d) Ist $m(g) = 0$, so folgt aus (2.67) $\nabla \psi \equiv 0$. Da man den konstanten Spinor auf \mathbb{R}^n beliebig wählen konnte, erhalten wir mit dieser Konstruktion $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ linear unabhängige parallele Spinoren auf N . Das Spinorbündel wird also durch parallele Spinoren trivialisiert. Daraus folgt leicht, dass (N, g) flach ist, d.h. verschwindenden Krümmungstensor hat. Hieraus und aus der Tatsache, dass (N, g) asymptotisch zu $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ ist, folgt schließlich, dass (N, g) isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ ist. \square

Bemerkung 2.7.7. Bedauerlicherweise funktioniert dieser Beweis nur für Spin-Mannigfaltigkeiten, da Spinoren und der Dirac-Operator verwendet werden. In Dimension $n = 3$ ist dies keine wesentliche Einschränkung, da alle orientierbaren geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten die Spin-Bedingung erfüllen. Mit Hilfe von minimalen Hyperflächen kann man das Positive-Masse-Theorem auch ohne die Spin-Bedingung bekommen, falls $n \leq 7$ [6, 7]. Auch für die Umstülpung konform flacher Mannigfaltigkeiten gibt es einen Beweis, der die Spin-Bedingung nicht erfordert [8].

Wir fassen zusammen:

Satz 2.7.8 (Lösung des Yamabe-Problems)

Sei (M, g) eine geschlossene zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$.

Dann existiert eine zu g konform äquivalente riemannsche Metrik \bar{g} mit konstanter Skalarkrümmung. Das Vorzeichen dieser konstanten Skalarkrümmung stimmt mit dem Vorzeichen der Yamabe-Invariante $\lambda(M, [g])$ überein.

Beweis. Ist $(M, [g]) = (S^n, [g_{\text{sph}}])$, so tut's $\bar{g} = g_{\text{sph}}$. Sei also $(M, [g]) \neq (S^n, [g_{\text{sph}}])$. Ist $n \geq 6$ und $(M, [g])$ nicht konform flach, so ist nach Satz 2.5.3 $\lambda(M, [g]) < \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$ und daher nach Korollar 2.3.8 das Yamabe-Problem lösbar.

Sei also zusätzlich $n \in \{3, 4, 5\}$ oder $(M, [g])$ konform flach. Dann wählen wir $x_0 \in M$ und betrachten die Umstülpung (\hat{M}, \hat{g}) von (M, g) an der Stelle x_0 . Gemäß dem Positive-Masse-Theorem ist $m(\hat{g}) > 0$, es sei denn $(\hat{M}, \hat{g}) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$. Im letzteren Fall wäre jedoch $(M, [g]) = (S^n, [g_{\text{sph}}])$. Also ist $m(\hat{g}) > 0$ und daher ist nach Lemma 2.7.5 auch der Koeffizient A in der asymptotischen Entwicklung der Green-Funktion positiv. Nun folgt aus Satz 2.6.12 $\lambda(M, [g]) < \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$ und somit wiederum aus Korollar 2.3.8, dass das Yamabe-Problem lösbar ist. \square

Lösungen

Übung 1.1.6. Setze $p' = \frac{p}{r}$ und $q' = \frac{q}{r}$, so dass $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. Damit berechnet man:

$$\begin{aligned}
 \|uv\|_{L_\beta^r}^r &= \int_M |\varrho^{-\beta} uv|^r \varrho^{-n} d\text{vol} \\
 &= \int_M |\varrho^{-\beta_1} u|^r \cdot |\varrho^{-\beta_2} v|^r \varrho^{-n} d\text{vol} \\
 &= \left\| |\varrho^{-\beta_1} u|^r \cdot |\varrho^{-\beta_2} v|^r \right\|_{L_0^1} \\
 &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left\| |\varrho^{-\beta_1} u|^r \right\|_{L_0^{p'}} \cdot \left\| |\varrho^{-\beta_2} v|^r \right\|_{L_0^{q'}} \\
 &= \left(\int_M |\varrho^{-\beta_1} u|^{rp'} \varrho^{-n} \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_M |\varrho^{-\beta_2} v|^{rq'} \varrho^{-n} \right)^{\frac{1}{q'}} \\
 &= \|u\|_{L_{\beta_1}^p}^r \cdot \|v\|_{L_{\beta_2}^q}^r. \quad \square
 \end{aligned}$$

Übung 1.1.7. Wähle r so, dass $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, also $r = \frac{pq}{q-p}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{L_\beta^p} &\stackrel{1.2}{\leq} \|1\|_{L_{\beta_1}^r} \cdot \|u\|_{L_{\beta_2}^q} \\
 \text{und } \|1\|_{L_{\beta_1}^r} &= \left(\int_M (\varrho^{-\beta_1} \cdot 1)^r \varrho^{-n} \right)^{\frac{1}{r}} \\
 &= \left(\int_M \varrho^{-\beta_1 \frac{pq}{q-p} - n} \right)^{\frac{q-p}{pq}} \quad \square
 \end{aligned}$$

Übung 1.1.8. Wir folgern dies aus Übung 1.1.8. Wir haben zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho^{-n - (\beta - \beta') \frac{pq}{q-p}} dx < \infty.$$

Lösungen

Dazu wählen wir $R > 0$ so groß, dass $\varrho(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n - B_R(0)$. Das Integral $\int_{B_R(0)} \varrho^{-n-(\beta-\beta')\frac{pq}{q-p}} dx$ ist sowieso endlich. Für das verbleibende Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n - B_R(0)} \varrho^{\overbrace{-n-(\beta-\beta')\frac{pq}{q-p}}{=: \delta > 0}} dx &= \int_{\mathbb{R}^n - B_R(0)} |x|^{-n-\delta} dx \\ &= \omega_n \cdot \int_R^\infty r^{-n-\delta+(n-1)} dr \\ &= \omega_n \cdot \int_R^\infty r^{-\delta-1} dr \\ &= \left[\frac{r^{-\delta}}{-\delta} \right]_R^\infty < \infty. \end{aligned}$$

Dabei ist ω_n das Volumen der $(n-1)$ -dimensionalen Einheitskugel. □

Übung 1.1.17. Wir betrachten den Vektor $(\|u\|_{L_\beta^p}, \|\nabla u\|_{L_{\beta-1}^p}, \dots, \|\nabla^k u\|_{L_{\beta-k}^p}) \in \mathbb{R}^k$. In \mathbb{R}^k sind alle Normen äquivalent, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$ so dass gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \sum_{j=1}^k |x_j| &\leq \max_{j=1 \dots k} |x_j| \leq C \sum_{j=1}^k |x_j| \\ \frac{1}{C} \sum_{j=1}^k |x_j| &\leq \left(\sum_{j=1}^k |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sum_{j=1}^k |x_j| \end{aligned}$$

Setzen wir $(x_1, \dots, x_k) = (\|u\|_{L_\beta^p}, \|\nabla u\|_{L_{\beta-1}^p}, \dots, \|\nabla^k u\|_{L_{\beta-k}^p})$ ein, so erhalten wir die Behauptung. □

Übung 1.3.3. Zu zeigen ist: es gibt eine Funktion $\delta(\omega)$, die für jede Wahl von Koordinaten durch den Ausdruck (1.13) gegeben ist. Wir überprüfen zunächst die Wohldefiniertheit und leiten danach auch einen invarianten (d.h. koordinatenunabhängigen) Ausdruck für $\delta(\omega)$ her.

Seien also (x^1, \dots, x^n) und (y^1, \dots, y^n) lokale Koordinaten um $x_0 \in M$. Die 1-Form ω habe in diesen Koordinaten die Koeffizienten ξ_i bzw. η_i . Mit $x \mapsto y$ bezeichnen wir den Koordinatenwechsel und finden folgendes Transformationsverhalten für die Koeffizienten der 1-Form ω sowie der Metrik und der Volumenform (wir setzen hier $\sqrt{g} := \sqrt{\det g_{ij}}$ und verwenden die Indexe i, j, k für die x -Koordinaten und p, q, r für die y -Koordinaten):

$$\begin{aligned}
\omega &= \xi_j dx^j \\
&= \eta_q dy^q \\
&= \eta_q \frac{\partial y^q}{\partial x^j} dx^j \\
\implies \xi_j &= \eta_q \frac{\partial y^q}{\partial x^j}, \tag{2.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j \\
&= h_{pq} dy^p \otimes dy^q \\
&= h_{pq} \cdot \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} dx^i \otimes dx^j \\
\implies g_{ij} &= h_{pq} \cdot \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j}, \tag{2.69}
\end{aligned}$$

$$\implies g^{ij} = h^{pq} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{\partial x^j}{\partial y^q}, \tag{2.70}$$

$$\implies \sqrt{g} = \sqrt{h} \cdot \left| \det \frac{\partial y}{\partial x} \right|. \tag{2.71}$$

Wir berechnen nun den Effekt des Koordinatenwechsels $x \mapsto y$ in (1.13):

$$\begin{aligned}
\delta(\omega) &:= -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \cdot g^{ij} \cdot \omega_j) \\
&\stackrel{(2.69), (2.71)}{=} -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\left| \det \frac{\partial y}{\partial x} \right| \cdot \sqrt{h} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{\partial x^j}{\partial y^q} \cdot h^{pq} \cdot \omega_j \right) \\
&\stackrel{(2.68)}{=} -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\left| \det \frac{\partial y}{\partial x} \right| \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \cdot \sqrt{h} \cdot h^{pq} \cdot \eta_q \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\left| \det \frac{\partial y}{\partial x} \right| \cdot \underbrace{\frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}}_{\frac{\partial}{\partial y^p}} \cdot \sqrt{h} \cdot h^{pq} \cdot \eta_q + \sqrt{h} \cdot h^{pq} \cdot \eta_q \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left| \det \frac{\partial y}{\partial x} \right| \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \right) \\
&\stackrel{(2.72)}{=} -\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left| \det \frac{\partial y}{\partial x} \right| \cdot \frac{\partial}{\partial y^p} (\sqrt{h} \cdot h^{pq} \cdot \eta_q) \\
&\stackrel{(2.71)}{=} -\frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \frac{\partial}{\partial y^p} (\sqrt{h} \cdot h^{pq} \cdot \eta_q).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\det \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\det \frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^p} + \det \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^i \partial y^p} \\
&= \det \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \text{tr} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^p} + \det \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^i \partial y^p} \\
&= \det \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^r} \cdot \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^i \partial x^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^p} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^i \partial y^p} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \det \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^r} \cdot \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^k \partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^p} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^i \partial y^p} \right) \\
 (2.73) \quad &\stackrel{=}{=} \det \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \left(- \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial y^r} \cdot \frac{\partial y^r}{\partial x^i}}_{\delta_i^k} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k \partial y^p} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^i \partial y^p} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Hierbei wiederum haben wir benutzt:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta_p^r) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial y^r}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \right) \\
 &= \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^k \partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^p} - \frac{\partial y^r}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k \partial y^p}.
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Durch die Wahl spezieller Koordinaten können wir nun einen invarianten Ausdruck für $\delta(\omega)$ berechnen. Sei dazu $p \in M$ beliebig. Nach Bemerkung 1.3.4 gilt in riemannschen Normalkoordinaten um p :

$$(\delta\omega)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(0).$$

Setze nun die Vektoren $\partial_1, \dots, \partial_n \in T_p M$ so zu einer lokalen Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n fort, dass $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Damit ist

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \right) (0) &= (\nabla_{e_i} \omega_i)(p) \\
 &= \left(\nabla_{e_i} (\omega(\partial_i)) \right) (p) \\
 &= \left((\nabla_{e_i} \omega)(\partial_i) \right) (p) + \omega \left(\underbrace{(\nabla_{e_i} \partial_i)(p)}_{=0} \right) \\
 &= \left((\nabla_{e_i} \omega)(e_i) \right) (p)
 \end{aligned}$$

unabhängig von der Wahl von Koordinaten. □

Übung 1.4.4. Offensichtlich ist $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0_\beta}$ eine Norm. Es bleibt also zu zeigen:

$$\mathcal{C}^0_\beta(M) := \left\{ u \in \mathcal{C}^0(M) \mid \|u\|_{\mathcal{C}^0_\beta} := \sup_{x \in M} (\varrho^{-\beta}(x) \cdot |u(x)|) < \infty \right\}$$

ist in der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0_\beta}$ vollständig, d.h. jede $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0_\beta}$ -Cauchy-Folge konvergiert gegen eine Funktion in $\mathcal{C}^0_\beta(M)$. Sei also $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

* u_k konvergiert punktweise, denn für jedes $x \in M$ ist $u_k(x)$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Setze also: $u(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$.

* Es gilt $u_k \xrightarrow{C^0_\beta} u$ und $\|u\|_{C^0_\beta} < \infty$: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|u_k - u_l\|_{C^0_\beta} \leq \varepsilon$ für alle $k, l \geq N_0$. Für ein beliebiges $x \in M$ wähle $N_1(x) \geq N_0$, so dass $|u(x) - u_k(x)| \cdot \varrho^{-\beta}(x) \leq \varepsilon$ für alle $k \geq N_1(x)$. Damit ist für alle $k \geq N_0$:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_k(x)| \cdot \varrho^{-\beta} &\leq |u(x) - u_{N_1(x)}(x)| \cdot \varrho^{-\beta} + |u_{N_1(x)}(x) - u_k(x)| \cdot \varrho^{-\beta} \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Für alle $k \geq N_0$ ist daher $\|u - u_k\|_{C^0_\beta} \leq 2\varepsilon$, d.h. $u_k \xrightarrow{C^0_\beta} u$. Ferner ist

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^0_\beta} &\leq \|u - u_k\|_{C^0_\beta} + \|u_k\|_{C^0_\beta} \\ &\leq 2\varepsilon + \|u_k\|_{C^0_\beta} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

* Die punktweise gebildete Grenzfunktion u ist stetig: Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in M$ beliebig. Wähle $k \in \mathbb{N}$, so dass $\|u - u_k\|_{C^0_\beta} \leq \varepsilon$ und $|u(x) - u_k(x)| \leq \varepsilon$. Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass $|u_k(x) - u_k(y)| \leq \varepsilon$ und $|\varrho^\beta(x) - \varrho^\beta(y)| \leq \varepsilon$ für alle $y \in B_\delta(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_k(x)| + |u_k(x) - u_k(y)| + |u_k(y) - u(y)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + |u_k(y) - u(y)| \cdot \varrho^{-\beta}(y) \cdot \varrho^\beta(y) \\ &\leq 2\varepsilon + \|u_k - u\|_{C^0_\beta} \cdot (\varrho^\beta(x) + \varepsilon) \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon \cdot (\varrho^\beta(x) + \varepsilon). \end{aligned} \quad \square$$

Übung 2.2.6. Die stereografische Projektion im Nordpol $\sigma : S^n - \{e_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$x = \sigma(y) = \frac{\hat{y}}{1 - y^0}.$$

Ihre Umkehrabbildung berechnet sich zu

$$y = \sigma^{-1}(x) = \frac{1}{|x|^2 + 1} (|x|^2 - 1, 2x).$$

Lösungen

Für affin-lineare Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x) = Ax + b$, berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \sigma^{-1} \circ F \circ \sigma(y) &= \sigma^{-1} \circ F \left(\frac{\hat{y}}{1-y^0} \right) \\
 &= \sigma^{-1} \left(\frac{A\hat{y}}{1-y^0} + b \right) \\
 &= \frac{1}{\left| \frac{A\hat{y}}{1-y^0} + b \right|^2 + 1} \left(*, \frac{2A\hat{y}}{1-y^0} + 2b \right) \\
 &= \frac{1-y^0}{|A\hat{y} + (1-y^0)b|^2 + (1-y^0)^2} (*, 2A\hat{y} + 2(1-y^0)b)
 \end{aligned}$$

Auf der nördlichen Hemisphäre, d.h. für $y^0 > 0$, ist $y^0 = \sqrt{1-|\hat{y}|^2}$ und somit liefert \hat{y} ein Koordinatensystem. In diesem Koordinatensystem haben wir an der Stelle $\hat{y} = 0$ die Ableitung der Abbildung

$$\begin{aligned}
 \hat{y} &\mapsto 2 \frac{1-y^0}{|A\hat{y} + (1-y^0)b|^2 + (1-y^0)^2} (A\hat{y} + (1-y^0)b) \\
 &= 2 \frac{(1+y^0)(1-y^0) \left((1+y^0)A\hat{y} + (1+y^0)(1-y^0)b \right)}{|(1+y^0)A\hat{y} + (1+y^0)(1-y^0)b|^2 + (1+y^0)^2(1-y^0)^2} \\
 &= 2 \frac{(1-(y^0)^2) \left((1+y^0)A\hat{y} + (1-(y^0)^2)b \right)}{|(1+y^0)A\hat{y} + (1-(y^0)^2)b|^2 + (1-(y^0)^2)^2} \\
 &= 2 \frac{|\hat{y}|^2 \left((1+y^0)A\hat{y} + |\hat{y}|^2 b \right)}{|(1+y^0)A\hat{y} + |\hat{y}|^2 b|^2 + |\hat{y}|^4} \\
 &= 2 \frac{(1+y^0)A\hat{y} + |\hat{y}|^2 b}{\left| (1+y^0)A \left(\frac{\hat{y}}{|\hat{y}|} \right) + |\hat{y}|b \right|^2 + |\hat{y}|^2} \\
 &= 2 \frac{(1+y^0)A\hat{y} + |\hat{y}|^2 b}{(1+y^0)^2 \left| A \left(\frac{\hat{y}}{|\hat{y}|} \right) \right|^2 + 2(1+y^0)\langle A\hat{y}, b \rangle + |\hat{y}|^2(1+|b|^2)}
 \end{aligned}$$

zu berechnen, wobei, wie gesagt, $y^0 = \sqrt{1-|\hat{y}|^2}$.

Im Fall $A \in O(n)$ ist dies die Abbildung

$$\hat{y} \mapsto 2 \frac{(1+y^0)A\hat{y} + |\hat{y}|^2 b}{(1+y^0)^2 + 2(1+y^0)\langle A\hat{y}, b \rangle + |\hat{y}|^2(1+|b|^2)}. \quad (2.74)$$

Die Ableitung in $\hat{y} = 0$ ergibt sich zu

$$2 \frac{2 \cdot A \cdot 4 - 0}{16} = A.$$

Insbesondere für eine Translation F hat die Abbildung $\Phi = \sigma^{-1} \circ F \circ \sigma$ in e_0 somit das Differential $d\Phi(e_0) = \text{id}$.

Im Fall $A = \delta_\alpha = \alpha^{-1} \cdot \text{id}$ und $b = 0$ haben wir die Abbildung

$$\hat{y} \mapsto 2 \cdot \frac{(1 + y^0) \alpha^{-1} \hat{y}}{(1 + y^0)^2 \alpha^{-2} + |\hat{y}|^2} = 2 \cdot \frac{(1 + y^0) \alpha \hat{y}}{(1 + y^0)^2 + \alpha^2 |\hat{y}|^2}.$$

Sie hat in $\hat{y} = 0$ die Ableitung

$$2 \cdot \frac{2 \cdot \alpha \cdot \text{id} \cdot 4 - 0}{16} = \alpha \cdot \text{id}$$

Also hat die Abbildung $\Phi = \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$ im Nordpol das Differential $d\Psi(e_0) = \alpha \cdot \text{id} = \delta_{\alpha^{-1}}$. \square

Übung 2.5.4. Sei x^1, \dots, x^n eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n , die B diagonalisiert. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \langle Bx, x \rangle d\text{vol}_{S^{n-1}} &= \int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^n \lambda_i (x^i)^2 d\text{vol}_{S^{n-1}} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\int_{S^{n-1}} (x^i)^2 d\text{vol}_{S^{n-1}}}_{=: c_n} \\ &= \text{tr}(B) \cdot c_n, \end{aligned}$$

denn wegen der Symmetrie ist der Wert von $\int_{S^{n-1}} (x^i)^2 d\text{vol}_{S^{n-1}}$ unabhängig von i . Zur Berechnung der Konstante c_n setzen wir die Einheitsmatrix I_n ein und erhalten:

$$\begin{aligned} n \cdot c_n &= \text{tr}(I_n) \cdot c_n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{S^{n-1}} (x^i)^2 d\text{vol}_{S^{n-1}} \\ &= \int_{S^{n-1}} |x|^2 d\text{vol}_{S^{n-1}} \\ &= \text{vol}(S^{n-1}) \\ &= n \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}. \end{aligned}$$

Daher ist $c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$. \square

Literaturverzeichnis

- [1] Aubin, Thierry: *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998
- [2] Hebey, Emmanuel: *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Fondations. Paris: Diderot Editeur, 1997
- [3] Hebey, Emmanuel: *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **1635**, Springer-Verlag, Berlin, 1996
- [4] Hebey, Emmanuel: *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, Courant Lecture Notes in Mathematics **5**, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999
- [5] Lee, John M.; Parker, Thomas H.: *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **17** (1987), no. 1, 37–91
- [6] Schoen, Richard; Yau, Shing Tung: *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. Math. Phys. **65** (1979), no. 1, 45–76
- [7] Schoen, Richard; Yau, Shing Tung: *Proof of the positive mass theorem II*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), no. 2, 231–260
- [8] Schoen, Richard; Yau, Shing Tung: *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. Math. **92** (1988), no. 1, 47–71

Index

- $(\cdot, \cdot)_{L^2}$, L^2 -Skalarprodukt, 56
- $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\beta^{k,\alpha}}$, gewichtete Hölder-Norm, 41
- $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\beta^k}$, gewichtete \mathcal{C}^k -Norm, 40
- $\|\cdot\|_{L_\beta^p}$, gewichtete L^p -Norm, 3
- $\|u\|_{L_\beta^\infty}$, 4
- \otimes , Kulkarni-Nomizu-Produkt, 79
- $\mathcal{C}_\beta^k(M, \varrho)$, gewichteter \mathcal{C}^k -Raum, 40
- $\mathcal{C}_\beta^{k,\alpha}(M, \varrho)$, gewichteter Hölder-Raum, 41
- $\mathcal{C}_c^\infty(M)$, 4
- $\text{Conf}(M, g)$, konforme Gruppe, 83
- $\mathcal{D}'(M)$, Distributionen, 63
- EXP, Matrix-Exponentialfunktion, 124
- $H^k(M)$, Sobolev-Raum, 63
- $H^{-k}(M)$, Dualraum von $H^k(M)$, 63
- $H^{k,p}(M)$, Sobolev-Raum, 17
- $H_\beta^{k,p}(M)$, gewichteter Sobolev-Raum, 17
- $\text{Isom}(M, g)$, Isometriegruppe, 82
- L^* , formal adjungierter Operator, 56
- $L_{loc}^1(M)$, lokal integrierbare Funktionen, 57
- $L_\beta^\infty(M, \varrho)$, 4
- $L_\beta^p(M, \varrho)$, gewichteter L^p -Raum, 3
- $(\widehat{M}, \widehat{g})$, Umstülpung von (M, g) , 133
- $O^{(k)}(r^\tau)$, Asymptotik mit k Ableitungen, 129
- \mathcal{P}_m , homogene Polynome vom Grad m , 118
- Q , Yamabe-Funktional, 73
- Q_g , Yamabe-Funktional, 74
- Q_g^s , subkritisches Yamabe-Funktional, 96
- R_4 , $(4, 0)$ -Krümmungstensor, 80
- W , Weyl'scher Krümmungstensor, 80
- W_4 , Weyl'scher $(4, 0)$ -Krümmungstensor, 80
- $m(N, g)$, ADM-Masse, 137
- Δ , Laplace-Operator, 36
- Δ_0 , euklidischer Laplace-Operator, 118
- Γ_{x_0} , Green-Funktion von Y in x_0 , 128
- ΣM , Spinorbündel, 140
- δ , Kodifferential, 35
- δ_α , Dilatation, 84
- $\lambda_s(M, g)$, subkritische Yamabe-Invariante, 96
- σ_n , Sobolev-Konstante, 11
- ADM-Masse, 137
- α -Hölder-stetig, 41
- Arzela-Ascoli, Satz von \sim , 26
- Aubin, Satz von \sim , 113
- Bartnik, Satz von \sim , 137
- \mathcal{C}^k -Norm, gewichtete, 40
- Differentialoperator, 54
- Dilatation, 84
- Dirac-Operator
 - auf M , 140
 - auf \mathbb{R}^n , 140
- Distributionen, 63
- Divergenzsatz, 37
- Einbettungssatz, Sobolev'scher
 - lokaler, 48
 - Teil 1, 20
 - Teil 2, 43
- Einstein'sche Summenkonvention, 16

Index

- Einstein-Metrik, 2
- elliptische Abschätzung, 58
 - lokale, 59
- elliptische Regularität
 - globale, 58
 - lokale, 59
- folgenkompakt, 24
- formal adjungierter Operator, 56
- formal selbstadjungiert, 56
- Formel
 - Green'sche, 39
 - Lichnerowicz-Schrödinger-~, 140
- Gagliardo-Nirenberg, Lemma von ~, 6
- Gauß'scher Divergenzsatz, 37
- Gewicht, 40
- Gewichtsfunktion, 3, 17, 40
- gleichgradig stetig, 26
- Graham, Satz von ~, 121
- Green'sche Formeln, 39
- Green-Funktion, 65
- Heine-Borel, Satz von ~, 25
- Hölder-Norm, gewichtete, 41
- Hölder-Raum, gewichteter, 41
- Hölder-Ungleichung, 3
 - verallgemeinerte, 5
- Hopf-Rinow, Satz von ~, 25
- Integration, partielle, 39
- Invariante, Yamabe- ~, 75
- Isometriegruppe, 82
- isotherme Koordinaten, 77
- kanonische Paarung, 63
- Kodifferential, 35
- kompakt, 25
- Kompaktheitssatz
 - Rellich-Kondrakhov'scher
 - Teil 2, 48
 - Rellich-Kondrakhov'scher
 - Teil 1, 34
- konform äquivalent, 36
- konform flach, 77
- konforme Gruppe, 83
- konforme Klasse von g , 75
- konforme Normalkoordinaten, 112
- Kulkarni-Nomizu-Produkt, 79
- L^2 -Skalarprodukt, 56
- Laplace-Operator, 36
 - konformer, 71
- Lemma von
 - Aubin, 100
 - Trudinger, Aubin, 101
- Lichnerowicz-Schrödinger-Formel, 140
- Maximum-Prinzip, schwaches, 49
- Modellräume, 76
- Normalkoordinaten, konforme, 112
- Operator
 - formal adjungierter, 56
 - konformer Laplace-, 71
 - Laplace-, 36
 - Yamabe-, 71
- Paarung, kanonische, 63
- partielle Integration, 39
- Poincaré-Ungleichung, 41
- Positive-Masse-Theorem, 140
- präkompakt, 24
- Rellich-Kondrakhov, Satz von ~
 - Teil 1, 34
 - Teil 2, 48
- Satz von
 - Arzela-Ascoli, 26
 - Aubin, 113
 - Bartnik, 137
 - Gauß, 37
 - Graham, 121
 - Heine-Borel, 25
 - Rellich-Kondrakhov
 - Teil 1, 34
 - Teil 2, 48
 - Sobolev
 - lokal, 48

- Teil 1, 20
- Teil 2, 43
- Witten, 140
- Schauder-Abschätzung, 58
 - lokale, 59
- schwach konvergent, 99
- schwacher Sinn, 57
- selbstadjungiert, formal, 56
- Singularitätenhebungssatz, 104
- Sobolev'scher Einbettungssatz
 - lokaler, 48
 - Teil 1, 20
 - Teil 2, 43
- Sobolev-Konstante, 11
- Sobolev-Norm, gewichtete, 17
- Sobolev-Raum, 17
 - gewichteter, 17
- Spin-Mannigfaltigkeit, 140
- Spinorbündel, 140
- Spinoren
 - auf \mathbb{R}^n , 139
 - auf M , 140
- stereografische Projektion, 78
- Theorem
 - Positive-Masse-~, 140
- überdeckungskompakt, 24
- Umstülpabbildung, 133
- Umstülpung, 133
- USA, Umstülpabbildung, 133
- Weyl'scher Krümmungstensor, 80
- Witten, Satz von, 140
- Yamaba-Operator, 71
- Yamabe-Funktional, 73, 74
 - subkritisches, 96
- Yamabe-Invariante, 75
 - subkritische, 96