GEOMETRIE IN POTSDAM

Christian Bär

Charakteristische Klassen

MPI für Gravitationsphysik, Potsdam,
Crashkurs, Oktober 2006

Version vom 23. Februar 2017

Universität Potsdam

Titelseite:

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies sind die Notizen einer sehr komprimierten Einführung in charakteristische Klassen, die ich einmal an der Universität Hamburg und im Oktober 2006 am Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik in Potsdam gegeben habe. Ich danke Frank Pfäffle und Lutz Seeger für die Erstellung der ursprünglichen Version des Skripts und Bernd Ammann für den Hinweis auf einen subtilen Vorzeichenfehler.

Potsdam, Februar 2017

1 Chern-Klassen

Das Ziel des Folgenden ist es - grob gesprochen - jedem Vektorbündel $E \to M$ über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M Kohomologie-Klassen in der de-Rham-Kohomologie $H^*(M;\mathbb{R})$ zuzuordnen, die die Nichttrivialität von E messen.

Wir betrachten komplexe Vektorbündel $E \to M$ und setzen $G := GL(n,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{g} := \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ ($\cong \mathbb{C}^{n^2}$).

Definition 1.1. Eine polynomiale Funktion $P : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ heißt **invariantes Polynom**, falls für alle $X \in \mathfrak{g}$ und alle $T \in G$ gilt:
$$P(TXT^{-1}) = P(X). \tag{1.1}$$

Bemerkung 1.2. Zu (1.1) ist äquivalent:

$$P(XY) = P(YX) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1.2}$$

Beweis. Aus (1.2) folgt (1.1) wegen $P(TXT^{-1}) = P(T^{-1}TX) = P(X)$ für $T \in G$. Für die Umkehrung betrachten wir zunächst $Y \in G$, aus (1.1) folgt dann:

$$P(XY) = P(YXYY^{-1}) = P(YX).$$

Da G in $\mathfrak{g}$ eine dichte Teilmenge ist, erhält man mit der Stetigkeit von P, dass (1.2) für alle $Y \in \mathfrak{g}$ gilt. □

Beispiele für invariante Polynome sind die Determinante, $P(X) = \det(X)$, und die Spur, $P(X) = tr(X)$.

Bemerkung 1.3. Ist $\mathcal{A}$ eine kommutative $\mathbb{C}$-Algebra, so induziert eine polynomiale Funktion $P : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung $P : \mathrm{Mat}(n,\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

Bemerkung 1.4. Für polynomiale Funktionen $Q_1, Q_2 : \mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. $Q_1 = Q_2$ als Polynome.

2. $\forall\, X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}$: $Q_1(X_1, \ldots, X_k) = Q_2(X_1, \ldots, X_k)$.

3. Für alle kommutativen $\mathbb{C}$-Algebren $\mathcal{A}$ gilt:
   $\forall A_1, ..., A_k \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{A}):\ \ Q_1(A_1, ..., A_k) = Q_2(A_1, ..., A_k)$.

Beweis. Die Schlüsse 1. $\Rightarrow$ 3. und 3. $\Rightarrow$ 2. sind trivial und 2. $\Rightarrow$ 1. folgt daraus, dass die Charakteristik von $\mathbb{C}$ null ist. □

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $E \to M$ ein (komplexes) Vektorbündel vom Rang n. Wir wählen einen Zusammenhang ∇ auf E. Den zugehörigen Krümmungstensor bezeichnen wir mit R, d. h.

$$R(X,Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s.$$

Über „kleinen“ offenen Mengen $U \subset M$ kann man das Bündel E trivialisieren, d.h. es gibt (glatte) Schnitte $s_1, \dots, s_n$ von E über U, so dass für alle $x \in U$ die Vektoren $s_1(x), \dots, s_n(x)$ linear unabhängig sind. Wir definieren $\mathbb{C}$-wertige 2-Formen Ω_i^j auf U durch:

$$R(X,Y)s_i =: \sum_j \Omega_i^j(X,Y) s_j.$$

Dass Ω_i^j auch tatsächlich eine 2-Form ist, liegt daran, dass R in X und Y antisymmetrisch ist. Wir fassen $\Omega := (\Omega_i^j)$ als eine $\mathfrak{g}$-wertige 2-Form auf oder - anders ausgedrückt - als Matrix mit Einträgen in der kommutativen $\mathbb{C}$-Algebra der geraden $\mathbb{C}$-wertigen Formen

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}^{\mathrm{even}}(U) := \{\text{gerade } \mathbb{C}\text{-wertige Formen auf } U\}.$$

Man bezeichnet Ω als die *Krümmungsmatrix* von ∇ bezüglich der Schnitte $s_1, ..., s_n$.

Lemma 1.5. *Seien $s_1, ..., s_n$ und $\tilde{s}_1, ..., \tilde{s}_n$ Trivialisierungen von E über U mit Krümmungsmatrizen Ω und $\widetilde{\Omega}$, sei $P : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ ein invariantes Polynom. Dann gilt:*

$$P(\Omega) = P(\widetilde{\Omega}).$$

Beweis. Sei $T : U \to GL(n, \mathbb{C})$ die Transformation, die $s_1, ..., s_n$ in $\tilde{s}_1, ..., \tilde{s}_n$ überführt. Dann ist $\widetilde{\Omega}(X,Y) = T \cdot \Omega(X,Y) \cdot T^{-1}$, woraus mit der Invarianz von P die Behauptung folgt. □

Damit ist $P_\nabla := P(\Omega) \in \mathcal{A}^{\mathrm{even}}(M)$ eine wohldefinierte Form auf M.

Beispiel 1.6. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_\nabla &= \Omega_1^1 + ... + \Omega_n^n \in \mathcal{A}^2(M), \\ \det{}_\nabla &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \Omega_1^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \Omega_n^{\sigma(n)} \in \mathcal{A}^{2n}(M). \end{aligned}$$

Sei ω die Zusammenhangsmatrix von ∇ bezüglich des Rahmens $s_1, \ldots, s_n$, d.h. $\omega = (\omega_i^j)$ mit

$$\nabla_X s_i = \sum_j \omega(X)_i^j s_j.$$

Lemma 1.7. *Es gilt*

a) $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$;

b) $d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$. ***(Bianchi-Identität)***.

Beweis. Seien $X|_p$ und $Y|_p$ Tangentialvektoren an M im Punkt p, die wir zu in p synchronen Vektorfeldern X und Y fortsetzen, d.h. $\nabla X|_p = \nabla Y|_p = 0$ und damit $[X, Y]|_p = 0$. Dann gilt an der Stelle p:

$$\begin{aligned}
\sum_j \Omega_i^j(X,Y)s_j &= R(X,Y)s_i \\
&= \nabla_X \nabla_Y s_i - \nabla_Y \nabla_X s_i \\
&= \nabla_X \Big(\sum_k \omega_i^k(Y) s_k \Big) - \nabla_Y \Big(\sum_k \omega_i^k(X) s_k \Big) \\
&= \sum_{k,l} \Big(\omega_i^k(Y) \omega_k^l(X)\, s_l - \omega_i^k(X)\omega_k^l(Y)\, s_l \Big) \\
&\qquad + \sum_k \Big(\partial_X \omega_i^k(Y)\, s_k - \partial_Y \omega_i^k(X)\, s_k \Big) \\
&= \sum_j \Big(\partial_X \omega_i^j(Y) - \partial_Y \omega_i^j(X) + \sum_k (\omega_i^k(Y)\omega_k^j(X) - \omega_i^k(X)\omega_k^j(Y)) \Big) s_j \\
&= \sum_j \Big(d\omega_i^j(X,Y) + \sum_k (\omega_k^j \wedge \omega_i^k)(X,Y) \Big) s_j.
\end{aligned}$$

D.h., es gilt

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j + \sum_k \omega_k^j \wedge \omega_i^k.$$

Damit ergibt sich die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned}
d\Omega &= d^2\omega + d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\
&= 0 + (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) \\
&= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.8. *P_∇ ist geschlossen, d.h. $dP_\nabla = 0$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit A^i_j den Eintrag der Matrix $A \in \mathfrak{g}$ in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Für die weitere Rechnung setzen wir $P'(A)^j_i := \frac{\partial P}{\partial A^i_j}(A)$ und fassen diese Komponenten zusammen zu $P'(A) := \left(P'(A)^j_i\right) \in \mathfrak{g}$.

Zeige: $\left[P'(A), A\right] = 0$.
Bezeichne E^j_i die Elementarmatrix, bei der alle Einträge null sind außer dem in der j-ten Zeile und i-ten Spalte, der soll 1 sein. Weil P ein invariantes Polynom ist, gilt wegen (1.2) für alle i, j und für alle $t \in \mathbb{R}$

$$P\Big((1 + tE^j_i)A\Big) = P\Big(A(1 + tE^j_i)\Big).$$

Wir leiten nun beide Seiten dieser Gleichung nach t ab, zuerst die linke:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P\Big((1 + tE^j_i)A\Big) \,|_{t=0} &= \sum_{k,l} \frac{\partial P}{\partial A^l_k}(A) \cdot (E^j_i \cdot A)^l_k = \sum_k \frac{\partial P}{\partial A^j_k}(A) \cdot A^i_k \\ &= \sum_k A^i_k \cdot P'(A)^k_j = \Big(A \cdot P'(A)\Big)^i_j \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für die Ableitung der rechten Seite:

$$\frac{d}{dt} P\Big(A(1 + tE^j_i)\Big) \,|_{t=0} = \Big(P'(A) \cdot A\Big)^i_j.$$

Daraus folgt $P'(A) \cdot A = A \cdot P'(A)$, also die Zwischenbehauptung. ✓

Mit Lemma 1.7 und der Zwischenbehauptung folgt:

$$\begin{aligned} dP_\nabla &= dP(\Omega) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial P}{\partial A^i_j}(\Omega) \wedge (d\Omega)^i_j \\ &= \operatorname{tr}(P'(\Omega) \wedge d\Omega) \\ &= \operatorname{tr}(P'(\Omega) \wedge \Omega \wedge \omega - P'(\Omega) \wedge \omega \wedge \Omega) \\ &= \operatorname{tr}(\Omega \wedge P'(\Omega) \wedge \omega - P'(\Omega) \wedge \omega \wedge \Omega). \end{aligned}$$

Setzen wir $X := P'(\Omega) \wedge \omega = (X^i_j)_{i,j}$, und beachten wir, dass Ω^j_i eine 2-Form ist und damit $\Omega^j_i \wedge X^i_j = X^i_j \wedge \Omega^j_i$ gilt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} dP_\nabla &= \mathrm{tr}(\Omega \wedge X - X \wedge \Omega) \\ &= \sum_{i,j} (\Omega^i_j \wedge X^j_i - X^i_j \wedge \Omega^j_i) \\ &= \sum_{i,j} (\Omega^i_j \wedge X^j_i - \Omega^j_i \wedge X^i_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Wegen Lemma 1.8 wird durch P_∇ eine Kohomologieklasse definiert:

$$[P_\nabla] \in H^{\text{even}}(M;\mathbb{C}).$$

Betrachten wir nun das Pullback-Bündel f^*E von $E \to M$ bezüglich einer differenzierbaren Abbildung $f : N \to M$:

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ N \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Der Zusammenhang ∇ auf E induziert einen Zusammenhang $f^*\nabla$ auf f^*E, der wie folgt charakterisiert ist: Ist ω die Zusammenhangsmatrix von ∇ bzgl. $s_1, \ldots, s_n$, so ist $f^*\omega$ die Zusammenhangsmatrix von $f^*\nabla$ bzgl. $s_1 \circ f, \ldots, s_n \circ f$. Damit gilt für die Krümmungsform:

$$\Omega^{f^*\nabla} = d(f^*\omega) - f^*\omega \wedge f^*\omega = f^*(d\omega - \omega \wedge \omega) = f^*\Omega.$$

Daraus folgt: $P(\Omega^{f^*\nabla}) = P(f^*\Omega) = f^*P(\Omega)$, und somit:

$$[P_{f^*\nabla}] = f^*[P_\nabla] \in H^{\text{even}}(N;\mathbb{C}).$$

Satz 1.9. *Die Kohomologieklasse*

$$[\mathbf{P}(\mathbf{E})] := [P_\nabla] \in H^{\text{even}}(M;\mathbb{C})$$

ist unabhängig von der Wahl des Zusammenhangs ∇. Ferner gilt:

$$[P(f^*E)] = f^*[P(E)].$$

Beweis. Seien ∇^0 und ∇^1 zwei Zusammenhänge auf E. Wir betrachten $X := M \times \mathbb{R}$ und die Projektion $\pi : X \to M$. Durch $\widetilde{\nabla}^0 := \pi^*\nabla^0$ und $\widetilde{\nabla}^1 := \pi^*\nabla^1$ werden Zusammenhänge auf $\widetilde{E} := \pi^*E$ (als Bündel über X) definiert.

Wir definieren einen Zusammenhang $\widetilde{\nabla}$ auf $\widetilde{E}$, indem wir für $v \in T_{(m,\lambda)}X$ setzen:

$$\widetilde{\nabla}_v s = (1-\lambda)\widetilde{\nabla}^0_v s + \lambda\,\widetilde{\nabla}^1_v s.$$

Mit $i_\lambda : M \to X, m \mapsto (m,\lambda)$ bezeichnen wir die Inklusion. Dann gilt auf E:

$$i_\lambda^* \widetilde{\nabla} = (1-\lambda)\nabla^0 + \lambda\,\nabla^1.$$

Da die Inklusionen i_0 und i_1 homotop sind, induzieren sie auf der Kohomologie dieselbe Abbildung $i_0^* = i_1^*$:

$$[P_{\nabla^1}] = i_1^*[P_{\widetilde{\nabla}}] = i_0^*[P_{\widetilde{\nabla}}] = [P_{\nabla^0}].$$

Definition 1.10. Sei $P(A) := \det(1 + \frac{1}{2\pi i} A)$. Dann heißt

$$\mathbf{c(E)} := [P(E)] \in H^{\text{even}}(M;\mathbb{C})$$

die **totale Chern-Klasse** von E.

Hat A Diagonalgestalt, also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dann erhält man:

$$\begin{aligned} P(A) &= \det\left(1 + \frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) \\ &= \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1}{2\pi i}\lambda_j\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sigma_k\left(\frac{1}{2\pi i}\,\lambda_1, \dots, \frac{1}{2\pi i}\,\lambda_n\right), \end{aligned}$$

wobei σ_k die k-te elementarsymmetrische Funktion bezeichnet. Ist A diagonalisierbar und bezeichnen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A, so liefert die Invarianz von P dieselbe Formel:

$$P(A) = \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1}{2\pi i}\lambda_j\right).$$

Und weil die diagonalisierbaren Matrizen eine dichte Teilmenge von $\mathfrak{g}$ bilden,[1] liefert die Stetigkeit von P eben diese Formel für alle Matrizen $A \in \mathfrak{g}$. Setzen wir

$$P_k(A) := \sigma_k\left(\frac{1}{2\pi i}\lambda_1, \dots, \frac{1}{2\pi i}\lambda_n\right) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

so bedeutet dies explizit:

$$\begin{aligned} P_0(A) &= 1 \\ P_1(A) &= \frac{1}{2\pi i}\operatorname{tr}(A) \\ &\vdots \\ P_n(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \det(A). \end{aligned}$$

Definition 1.11. Wir nennen

$$\boldsymbol{c_k(E)} := [P_k(\Omega^E)] \in H^{2k}(M; \mathbb{C})$$

die **$\boldsymbol{k}$-te Chern-Klasse** von E.

Es gilt: $c(E) = c_0(E) + \ldots + c_n(E)$.

Satz 1.12. *Seien E, E_1, E_2 Bündel über M und bezeichne E^* das duale Bündel zu E. Dann gilt:*

1. $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \cdot c(E_2)$;

2. $c_k(E^*) = (-1)^k c_k(E)$;

3. Falls $E_1 \cong E_2$, dann gilt $c(E_1) = c(E_2)$.

Beweis. 1. Sei ∇^i ein Zusammenhang auf E_i. Sei ∇ der Summenzusammenhang auf $E_1 \oplus E_2$, d.h. für Schnitte s_i in E_i definiert man

$$\nabla_X(s_1 \oplus s_2) := (\nabla^1_X s_1) \oplus (\nabla^2_X s_2).$$

[1] Tatsächlich liegen bereits die Matrizen mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten dicht und diese sind, wegen des Satzes über die Jordan'sche Normalform, diagonalisierbar.

Dann hat die Krümmungsform von ∇ die Gestalt

$$\Omega^{\nabla} = \left(\begin{array}{c|c} \Omega^{\nabla^1} & 0 \\ \hline 0 & \Omega^{\nabla^2} \end{array}\right).$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \det\left(1 + \frac{1}{2\pi i}\,\Omega^{\nabla}\right) &= \det\left(\begin{array}{c|c} 1 + \frac{1}{2\pi i}\,\Omega^{\nabla^1} & 0 \\ \hline 0 & 1 + \frac{1}{2\pi i}\,\Omega^{\nabla^2} \end{array}\right) \\ &= \det\left(1 + \frac{1}{2\pi i}\,\Omega^{\nabla^1}\right) \cdot \det\left(1 + \frac{1}{2\pi i}\,\Omega^{\nabla^2}\right). \end{aligned}$$

2. Sei ∇ ein Zusammenhang auf E und ∇^* der davon induzierte Zusammenhang auf E^*, d.h. für $\eta \in \Gamma(E^*)$ und $e \in \Gamma(E)$:

$$(\nabla^*_X \eta)(e) = \partial_X(\eta(e)) - \eta(\nabla_X e).$$

Ist Ω^{∇} die Krümmungsmatrix von ∇ bezüglich $s_1, \ldots, s_n$, dann ist die Krümmungsmatrix von ∇^* bezüglich des dualen Rahmens $s_1^*, \ldots, s_n^*$ gegeben durch:

$$\Omega^{\nabla^*} = -\Omega^{\nabla}.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_k P_k\left(\frac{1}{2\pi i}\Omega^{\nabla^*}\right) &= \det\left(1 + \frac{1}{2\pi i}\Omega^{\nabla^*}\right) \\ &= \det\left(1 - \frac{1}{2\pi i}\Omega^{\nabla}\right) \\ &= \sum_k P_k\left(-\frac{1}{2\pi i}\Omega^{\nabla}\right) \\ &= \sum_k (-1)^k P_k\left(\frac{1}{2\pi i}\Omega^{\nabla}\right). \end{aligned}$$

3. Wir betrachten einen Bündelisomorphismus $\Phi : E_1 \to E_2$. Sei ∇ ein Zusammenhang auf E_2, dann wird durch $\widetilde{\nabla}_X := \Phi^{-1} \circ \nabla_X \circ \Phi$ ein Zusammenhang auf E_1 erklärt.
Ist Ω^{∇} die Krümmungsmatrix von ∇ bezüglich $s_1, \ldots, s_n$, dann ist die Krümmungsmatrix von $\widetilde{\nabla}$ bezüglich des Rahmens $\Phi^{-1} \circ s_1, \ldots, \Phi^{-1} \circ s_n$ gegeben durch: $\Omega^{\widetilde{\nabla}} = \Omega^{\nabla}$. Damit gilt:

$$c(E_1) = \left[\det(1 + \frac{1}{2\pi i}\Omega^{\widetilde{\nabla}})\right] = \left[\det(1 + \frac{1}{2\pi i}\Omega^{\nabla})\right] = c(E_2). \qquad \square$$

Lemma 1.13. *Die Chern-Klasse ist reell, d.h.*

$$c(E) \in H^{\mathrm{even}}(M;\mathbb{R}) \subset H^{\mathrm{even}}(M;\mathbb{C}).$$

Beweis. Wir wählen ein hermitesches Skalarprodukt auf E und einen metrischen Zusammenhang ∇. Für einen orthonormalen Rahmen $s_1, \ldots, s_n$ gilt dann:

$$\omega^\nabla(X),\ \Omega^\nabla(X,Y) \in \mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{g} \mid A^* = -A\}.$$

Das liefert:

$$\begin{aligned} \overline{\det\Big(1 + \frac{1}{2\pi i}\Omega^\nabla\Big)} &= \det\overline{\Big(1 + \frac{1}{2\pi i}\Omega^\nabla\Big)} = \det\Big(1 - \frac{1}{2\pi i}\overline{\Omega^\nabla}\Big) \\ &= \det\Big(1 - \frac{1}{2\pi i}(\Omega^\nabla)^*\Big) = \det\Big(1 + \frac{1}{2\pi i}\Omega^\nabla\Big). \end{aligned}$$

Folglich ist die Form $\det(1 + \frac{1}{2\pi i}\Omega^\nabla)$ reell. □

Bemerkung 1.14. Tatsächlich ist $c(E)$ sogar im Bild $H^{\mathrm{even}}(M;\mathbb{Z}) \to H^{\mathrm{even}}(M;\mathbb{R})$, d.h. für jeden glatten singulären Zykel σ gilt:

$$\big\langle c(E), [\sigma]\big\rangle = \int_\sigma c(E) \in \mathbb{Z},$$

wobei c_E eine repräsentierende Form der Chern-Klasse $c(E)$ ist.

Proposition 1.15. *a) Ist E trivial, so gilt $c(E) = 1 \in H^0(M;\mathbb{R})$.*

b) Ist E vom Rang n und besitzt k überall linear unabhängige Schnitte, dann ist

$$c_j(E) = 0 \quad \textit{für alle } j > n-k.$$

Beweis. a) Ist E trivial, so findet man auf E einen flachen Zusammenhang ∇. Die zugehörige Krümmungsmatrix Ω ist überall null, und damit ist $P_\nabla \equiv 1$.

b) Wegen der Voraussetzung gibt es ein triviales Unterbündel $\varepsilon^k \subset E$ vom Rang k und ein weiteres Unterbündel F vom Rang $n-k$, so dass sich E schreiben lässt als

$$E = \varepsilon^k \oplus F.$$

Dann liefert Satz 1.12:

$$c(E) = c(\varepsilon^k) \cdot c(F) = 1 \cdot c(F) = c(F).$$

Daraus und aus der Tatsache, daß $c_j(F) = 0$ für alle $j > rk(F) = n - k$, folgt die Behauptung b). □

Im Folgenden bezeichnen wir mit ε^k immer das triviale Bündel vom Rang k.

Beispiel 1.16. Wir berechnen die Chern-Klasse des komplexifizierten Tangentialbündels $T_{\mathbb{C}}S^n := TS^n \otimes \mathbb{C}$ der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Das Normalenbündel von S^n ist ein triviales Geradenbündel, mit ε^1 bezeichnen wir seine Komplexifizierung. Es gilt:

$$T_{\mathbb{C}}S^n \oplus \varepsilon^1 = T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n} \otimes \mathbb{C} = \varepsilon^{n+1}.$$

Mit Satz 1.12 und Proposition 1.15 gelangen wir zu:

$$1 = c(\varepsilon^{n+1}) = c(T_{\mathbb{C}}S^n) \cdot c(\varepsilon^1) = c(T_{\mathbb{C}}S^n).$$

Dieses Beispiel zeigt, dass $c(E)$ auch dann trivial sein kann, wenn E nicht trivial ist.

Beispiel 1.17. Wir betrachten das tautologische Geradenbündel über dem komplex-projektiven Raum $\mathbb{C}P^N$:

$$\begin{aligned} \gamma_N &:= \{(v,p) \in \mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C}P^N \mid v \in p\} \\ \gamma_N &\to \mathbb{C}P^N,\ (v,p) \mapsto p. \end{aligned}$$

Vom trivialen Bündel $\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C}P^N \to \mathbb{C}P^N$ erbt $E := \gamma_1 \subset \mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C}P^N$ eine hermitesche Metrik und einen Zusammenhang ∇:
Zu einem lokalen Schnitt $s : U \to E$ sei $v : U \to \mathbb{C}^{N+1}$ die Funktion, so dass $s(p) = (v(p), p)$ für $p \in U$. Bezeichne $\pi_p : \mathbb{C}^{N+1} \to p$ die Orthogonalprojektion, dann ist für $X \in T_p\mathbb{C}P^N$:

$$\nabla_X s = (\pi_p(\partial_X v), p).$$

Sei zunächst $N = 1$. Wir verwenden homogene Koordinaten:

$$\mathbb{C}P^1 = \{[z : w] \mid (z,w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0,0\}\}$$

und setzen $U := \mathbb{C}P^1 \setminus \{[1 : 0]\}$. Dann liefert die Abbildung $\mathbb{C} \to U, z \mapsto [z : 1]$, einen Diffeomorphismus. Wir betrachten den Schnitt

$$s([z : 1]) = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

in E über U und berechnen:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \begin{pmatrix} cz \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\pi_{[z:1]}}{\longmapsto} \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\bar{z}}{1 + |z|^2} \cdot s. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang ist gegeben durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} s = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} s = \frac{\bar{z}}{1+|z|^2} \cdot s,$$

und der Krümmungstensor ist bestimmt durch

$$R\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z}\right) s = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \left(\frac{\bar{z}}{1+|z|^2} \cdot s\right) = \frac{1}{\left(1+|z|^2\right)^2} \cdot s.$$

Folglich gilt mit $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\,\Omega &= \frac{1}{2\pi i\,\left(1+|z|^2\right)^2}\; d\bar{z} \wedge dz \\
&= \frac{1}{2\pi i\,\left(1+x^2+y^2\right)^2}\; (dx - i\,dy) \wedge (dx + i\,dy) \\
&= \frac{1}{\pi\,\left(1+x^2+y^2\right)^2}\; dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Wir haben eine repräsentierende Form für die erste Chern-Klasse von E außerhalb einer Nullmenge von $\mathbb{C}P^1$ berechnet, bei Integration spielt die Nullmenge $\{ [1:0] \}$ natürlich keine Rolle, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\left\langle c_1(E), [\mathbb{C}P^1] \right\rangle &= \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{2\pi i}\,\Omega = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r^2)^2}\, dr\, d\varphi \\
&= 2 \int_0^{\infty} \frac{r}{(1+r^2)^2}\, dr = \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} = 1.
\end{aligned}$$

Somit erzeugt $c_1(E)$ die ganzzahlige Kohomologie (als Ring, mit dem cup-Produkt).
Für N allgemein betrachten wir $i : \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$, die Inklusion als projektive Gerade. Es gilt dann $i^*\gamma_N = \gamma_1$ und somit $i^* c_1(\gamma_N) = c_1(\gamma_1) \neq 0$.

2 Additive und multiplikative Klassen

Wir behandeln nun Konstruktionsverfahren, die es erlauben, aus den Chern-Klassen neue, für Anwendungen wichtige charakteristische Klassen zu bauen. Dazu zunächst einige algebraische Vorbemerkungen.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $R = R^0 \oplus R^1 \oplus R^2 \oplus \ldots$ eine kommutative[1] graduierte $\mathbb{K}$-Algebra mit Einselement $1 \in R^0$. Der Terminus „graduiert" bedeutet hierbei, dass die R^j Untervektorräume von R sind und dass $R^j \cdot R^k \subset R^{j+k}$ gilt.

Definition 2.1. Sei
$$g(x) = g_0 + g_1 \cdot x + g_2 \cdot x^2 + \cdots \in \mathbb{K}[[x]]$$
eine formale Potenzreihe. Wir definieren einen zugehörigen Vektorraum-Endomorphismus $\boldsymbol{\Lambda_g} : R \to R$ durch
$$\Lambda_g(R^j) \subset R^j, \quad \Lambda_g|_{R^j} = (-1)^{j+1} \cdot j \cdot g_j.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ und $c = 1 + c_1 + c_2 + \cdots \in R = R^0 \oplus R^1 \oplus R^2 \oplus \ldots$ erhalten wir ein neues Element in R durch die Vorschrift
$$ng_0 \cdot 1 + \Lambda_g(\log(c)).$$
Hierbei wird für die Auswertung von $\log(c)$ die Potenzreihenentwicklung
$$\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \mp \cdots$$
mit $y = c_1 + c_2 + \cdots$ benutzt. Man beachte, dass dabei der Anteil von $\log(c)$ vom Grad j ein endlicher polynomialer Ausdruck in $c_1, \ldots, c_j$ ist. Es treten also keinerlei Konvergenzfragen auf. Aus den Eigenschaften des Logarithmus folgt, dass für $n, \widetilde{n}, c, \widetilde{c}$ wie oben gilt
$$(n + \widetilde{n})g_0 \cdot 1 + \Lambda_g\big(\log\,(c \cdot \widetilde{c})\big) = ng_0 \cdot 1 + \Lambda_g\big(\log(c)\big) + \widetilde{n}g_0 \cdot 1 + \Lambda_g\big(\log\,(\widetilde{c})\big).$$

Wir wenden dies nun an auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $R^j = H^{2j}(M, \mathbb{R})$, $c = c(E)$ die Chern-Klasse eines komplexen Vektorbündels E über M vom Rang n:

[1] „kommutativ" bedeutet hier wirklich kommutativ im konventionellen Sinn, dass nämlich $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in R$ gilt, und nicht etwa „graduiert kommutativ", was ein zusätzliches Vorzeichen involvieren würde.

Definition 2.2. Sei $c = c(E)$ die Chern-Klasse eines komplexen Vektorbündels E über M vom Rang n. Dann heißt

$$\boldsymbol{g_c(E)} := ng_0 \cdot 1 + \Lambda_g\Big(\log\left(c(E)\right)\Big)$$

die **additive Klasse von $\boldsymbol{E}$ bzgl. $\boldsymbol{g}$**.

Aus den Eigenschaften der Chern-Klasse und der Konstruktion folgt direkt, dass g_c natürlich ist, d. h. für glatte Abbildungen ϕ gilt

$$g_c(\phi^* E) = \phi^* g_c(E).$$

Ferner erklärt sich die Bezeichnung „additive Klasse“ aus

$$g_c(E_1 \oplus E_2) = g_c(E_1) + g_c(E_2).$$

Beispiel 2.3. Die additive Klasse bzgl. der Exponentialreihe

$$g(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

nennt man **Chern-Charakter** von E. Hierfür schreibt man $\mathrm{ch}(E) \in H^{\mathrm{even}}(M, \mathbb{R})$.
Nach Definition ist die Komponente $\mathrm{ch}_0(E) \in H^0(M, \mathbb{R})$ der Rang von E. Wir berechnen $\mathrm{ch}_1(E) \in H^2(M, \mathbb{R})$ und $\mathrm{ch}_2(E) \in H^4(M, \mathbb{R})$. Dazu berechnen wir zunächst, unter Missachtung aller Terme in $H^6(M, \mathbb{R}) \oplus H^8(M, \mathbb{R}) \oplus \dots$,

$$\begin{aligned}
\log(c(E)) &= \log\left(1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots\right) \\
&= \left(c_1(E) + c_2(E) + \dots\right) - \frac{\left(c_1(E) + c_2(E) + \dots\right)^2}{2} + \dots \\
&= c_1(E) + c_2(E) - \frac{c_1(E)^2}{2} + \dots
\end{aligned}$$

Also ist $\log\left(c(E)\right)_1 = c_1(E)$ und $\log\left(c(E)\right)_2 = c_2(E) - \frac{c_1(E)^2}{2}$. An der Exponentialreihe lesen wir ab, dass

$$\Lambda_{e^x} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Somit ist $\mathrm{ch}_1(E) = \log\left(c(E)\right)_1 = c_1(E)$ und $\mathrm{ch}_2(E) = -\log\left(c(E)\right)_2 = \frac{c_1(E)^2}{2} - c_2(E)$.

Kommen wir nun zu den multiplikativen Klassen.

Definition 2.4. Sei

$$f(x) = 1 + f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + \ldots \in \mathbb{K}[\![x]\!]$$

eine formale Potenzreihe, die mit 1 beginnt. Dann heißt

$$\boldsymbol{F_c(E)} := \exp(\Lambda_{\log f}(\log(c(E)))) \in H^{\mathrm{even}}(M, \mathbb{R})$$

die **multiplikative Klasse von $\boldsymbol{E}$ bzgl. $\boldsymbol{f}$**.

Man sieht sofort, dass gilt:

Satz 2.5. *Für glatte Abbildungen gilt*

a) $F_c(\phi^* E) = \phi^* F_c(E)$

b) $F_c(E_1 \oplus E_2) = F_c(E_1) \cdot F_c(E_2)$.

Beispiel 2.6. Die multiplikative Klasse zur Potenzreihe

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \ldots$$

heißt **Todd-Klasse**. Sie wird $\mathrm{Td}(E)$ geschrieben. Berechnen wir $\mathrm{Td}_1(E)$ und $\mathrm{Td}_2(E)$. Zunächst sehen wir

$$\begin{aligned}
\log f(x) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \ldots\right)^2 \pm \ldots \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^2}{8} + \ldots \\
&= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{24} + \ldots
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\Lambda_{\log f} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{12} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Td}(E) &= \exp(\Lambda_{\log f}(\log(c(E)))) \\
&= \exp\left(\Lambda_{\log f}\left(c_1(E) + c_2(E) - \frac{c_1(E)^2}{2} + \cdots\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(\frac{1}{2}c_1(E) + \frac{1}{12}\left(c_2(E) - \frac{c_1(E)^2}{2}\right) + \cdots\right) \\
&= \exp\left(\frac{c_1(E)}{2} + \frac{2c_2(E) - c_1(E)^2}{24} + \cdots\right) \\
&= 1 + \left(\frac{c_1(E)}{2} + \frac{2c_2(E) - c_1(E)^2}{24} + \cdots\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{c_1(E)}{2} + \frac{2c_2(E) - c_1(E)^2}{24} + \cdots\right)^2 + \cdots \\
&= 1 + \frac{c_1(E)}{2} + \frac{2c_2(E) - c_1(E)^2}{24} + \frac{c_1(E)^2}{8} + \cdots \\
&= 1 + \frac{c_1(E)}{2} + \frac{c_2(E) + c_1(E)^2}{12} + \cdots
\end{aligned}
$$

Wir haben $\mathrm{Td}_1(E) = \frac{c_1(E)}{2}$ und $\mathrm{Td}_2(E) = \frac{c_2(E)+c_1(E)^2}{12}$ berechnet.

Additive und multiplikative charakteristische Klassen sind z. B. in der Indextheorie wichtig. Ein Beispiel hierfür ist der

Satz 2.7 (Riemann-Roch-Hirzebruch). *Sei M eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, sei E ein holomorphes Vektorbündel über M. Dann gilt*

$$\sum_q (-1)^q \, h^{0,q}(M, E) = \langle \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{Td}(TM), [M] \rangle$$

Hierbei sind $h^{p,q}(M, E)$ die so genannten ***Hodge-Zahlen*** *von M mit Koeffizienten in E, die mit Hilfe der Dolbeault-Kohomologie definiert sind.*

3 Pontrjagin-Klassen

Wir wollen nun charakteristische Klassen für reelle Vektorbündel definieren.

Sei zunächst $E = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ die Komlexifizierung eines reellen Vektorbündels V. Wegen $V \cong V^*$ gilt $E \cong E^*$. Hieraus folgt

$$c_k(E) = c_k(E^*) = (-1)^k c_k(E)$$

und somit

$$c_k(E) = 0 \quad \text{für } k \text{ ungerade.}$$

Definition 3.1. Sei $V \to M$ ein reelles Vektorbündel. Dann heißt

$$\boldsymbol{p_j(V)} := (-1)^j c_{2j}(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \in H^{4j}(M;\mathbb{R})$$

die **j-te Pontrjagin-Klasse** von V und

$$\boldsymbol{p(V)} = \sum_j p_j(V) \in H^{4*}(M;\mathbb{R})$$

die **totale Pontrjagin-Klasse** von V.

Satz 3.2. *a) Die Pontrjagin-Klasse ist natürlich, das heißt, es gilt $p(f^*V) = f^*p(V)$.*

b) $p(V_1 \oplus V_2) = p(V_1)\, p(V_2)$.

c) $V_1 \cong V_2 \Rightarrow p(V_1) = p(V_2)$.

d) V trivial $\Rightarrow p(V) = 1 \in H^0(M;\mathbb{R})$.

Beweis. Die Aussagen a), c) und d) folgen aus den entsprechenden Aussagen für die Chern-Klassen.
Für b) schreiben wir $E_1 = V_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und $E_2 = V_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Aus

$$c_k(E_1 \oplus E_2) = \sum_{i+j=k} c_i(E_1)\, c_j(E_2)$$

folgt dann

$$\begin{aligned} p_j(V_1 \oplus V_2) &= (-1)^j\, c_{2j}(E_1 \oplus E_2) \\ &= (-1)^j \sum_{n+m=2j} c_n(E_1)\, c_m(E_2) \\ &= (-1)^j \sum_{\mu+\nu=j} c_{2\mu}(E_1)\, c_{2\nu}(E_2) \\ &= (-1)^j \sum_{\mu+\nu=j} (-1)^\mu\, p_\mu(V_1)\, (-1)^\nu\, p_\nu(V_2) \\ &= \sum_{\mu+\nu=j} p_\mu(V_1)\, p_\nu(V_2)\,. \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.3. Wir berechnen die Pontrjagin-Klasse der Sphäre $p(TS^n) \in H^*(S^n;\mathbb{R})$. Aus $TS^n \oplus \varepsilon^1 = \varepsilon^{n+1}$ folgt

$$1 = p(\varepsilon^{n+1}) = p(TS^n)\ \underbrace{p(\varepsilon^1)}_{=1} = p(TS^n).$$

Beispiel 3.4. Wir berechnen die Pontrjagin-Klasse des komplex projektiven Raums $p(T\mathbb{C}P^N) \in H^*(\mathbb{C};\mathbb{R})$.
Erinnerung: Für das tautologische Geradenbündel γ_N über $\mathbb{C}P^n$ ist die erste Chern-Klasse

$$a := c_1(\gamma_N) \in H^2(\mathbb{C}P^N;\mathbb{Z}) \subset H^2(\mathbb{C}P^N;\mathbb{R})$$

ein Erzeuger der Kohomologiegruppe. Der Totalraum von γ_N ist gegeben durch

$$\left\{(v,p) \in \mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C}P^N \mid v \in p\right\}.$$

Wir betrachten nun das Vektorbündel mit dem Totalraum

$$E = \left\{(v,p) \in \mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C}P^N \mid v \perp p\right\}.$$

Hierbei bezeichnet $\perp$ Orthogonalität bezüglich des üblichen hermiteschen Produktes auf $\mathbb{C}^{N+1}$. Aus $\gamma_N \oplus E = \varepsilon^{N+1}$ folgt

$$1 = c(\varepsilon^{N+1}) = c(\gamma_1)\, c(E) = (1+a)\, c(E)$$

und somit

$$c(E) = \frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 \pm \ldots + (-1)^N a^N\,.$$

Behauptung: $T\mathbb{C}P^N \cong \mathrm{Hom}(\gamma_N, E)$ als komplexe Vektorbündel.

Die Hopffaserung ist eine Submersion $\pi : S^{2N+1} \subset \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}P^N$. Es bezeichne $V = \ker d\pi \subset TS^{2N+1}$ das vertikale Vektorbündel. Dann erhalten wir einen Isomorphismus

$$TS^{2N+1} = V \oplus \pi^* E \subset S^{2N+1} \times \mathbb{C}^{N+1}.$$

Sei $p \in \mathbb{C}P^N$ und $x \in \pi^{-1}(p) \subset S^{2N+1}$. Dann ist also

$$d_x\pi|_{E_p} : (\pi^* E)_x = E_p \to T_p\mathbb{C}P^N$$

ein komplexer Vektorraum-Isomorphismus. Hieraus folgt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\gamma_N, E) &\to T\mathbb{C}P^N, \\ \ell &\mapsto d_x\pi(\ell(x)) \quad \text{für ein } x \in \pi^{-1}(p), \end{aligned}$$

ein Isomorphismus zwischen komplexen Vektorbündeln ist. Die Linearität von ℓ und die Invarianz von π unter der $U(1)$-Wirkung auf S^{2N+1} liefern dabei die Wohldefiniertheit dieser Abbildung. ✓

Daraus folgt

$$\begin{aligned} T\mathbb{C}P^N \oplus \varepsilon^1 &\cong \mathrm{Hom}(\gamma_N, E) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_N, \gamma_N) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\gamma_N, E \oplus \gamma_N) \\ &= \mathrm{Hom}(\gamma_N, \varepsilon^{N+1}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\gamma_N, \varepsilon^1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_N, \varepsilon^1) \\ &\cong \gamma_N^* \oplus \ldots \oplus \gamma_N^* \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} c(T\mathbb{C}P^N) &= c(T\mathbb{C}P^N \oplus \varepsilon^1) = c(\gamma_N^*) \ldots c(\gamma_N^*) \\ &= (1-a)^{N+1}. \end{aligned}$$

Dies hat wiederum zur Konsequenz

$$\begin{aligned} c(T\mathbb{C}P^N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) &= c\left(T\mathbb{C}P^N \oplus \overline{T\mathbb{C}P^N}\right) \\ &= (1-a)^{N+1}(1+a)^{N+1} \\ &= (1-a^2)^{N+1}, \end{aligned}$$

so dass wir letztendlich als Pontrjagin-Klasse von $\mathbb{C}P^N$ erhalten

$$p(T\mathbb{C}P^N) = (1+a^2)^{N+1}.$$

Konkret bedeutet das:

$$\begin{aligned} N = 1 :& \quad p(T\mathbb{C}P^1) = (1+a^2)^2 = 1, \\ N = 2 :& \quad p(T\mathbb{C}P^2) = (1+a^2)^3 = 1 + 3\,a^2, \\ N = 3 :& \quad p(T\mathbb{C}P^3) = (1+a^2)^4 = 1 + 4\,a^2, \\ & \qquad \vdots \end{aligned}$$

Nun betrachten wir multiplikative Klassen, die zu Pontrjagin-Klassen konstruiert werden. Dazu wenden wir die Konstruktion aus dem letzten Kapitel mit $K = \mathbb{R}$ und $R^j = H^{4j}(M, \mathbb{R})$ an.

Definition 3.5. Zu einer formalen Potenzreihe

$$f(x) = 1 + f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + \cdots \in \mathbb{R}[\![x]\!]$$

erhalten wir den Endomorphismus

$$\Lambda_{\log f} : H^{4*}(M, \mathbb{R}) \to H^{4*}(M, \mathbb{R})$$

und bezeichnen

$$F_p(V) := \exp\left(\Lambda_{\log f}\left[\, \log\left(p(V)\right)\right]\right)$$

als die **multiplikative Klasse des reellen Vektorbündels** V **bzgl.** f.

Beispiel 3.6. Für die Reihe

$$\widehat{a}(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sinh\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)} = 1 - \frac{x}{24} + \frac{7x^2}{5760} + \ldots$$

ist

$$\log\left(\widehat{a}(x)\right) = -\frac{x}{24} + \frac{x^2}{2880} + \ldots$$

und somit

$$\Lambda_{\log(\widehat{a}(x))} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -\frac{1}{24} & & \\ & & -\frac{1}{1440} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \widehat{A}(V) &= \exp\left(\Lambda_{\log(\widehat{a}(x))}\left[\, \log\left(p(V)\right)\right]\right) \\ &= \exp\left(\Lambda_{\log(\widehat{a}(x))}\left[p_1(V) + p_2(V) - \frac{p_1(V)^2}{2} + \cdots\right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{p_1(V)}{24} + \frac{p_1(V)^2 - 2p_2(V)}{2880} + \ldots\right) \\ &= 1 - \frac{p_1(V)}{24} + \frac{p_1(V)^2 - 2p_2(V)}{2880} + \frac{p_1(V)^2}{1152} + \cdots \\ &= 1 - \frac{p_1(V)}{24} + \frac{7p_1(V)^2 - 4p_2(V)}{5760} + \cdots, \end{aligned}$$

also $\widehat{A}_1(V) = -\frac{p_1(V)}{24}$ und $\widehat{A}_2(V) = \frac{7p_1(V)^2 - 4p_2(V)}{5760}$.

Die $\widehat{A}$-Klasse ist wichtig, da sie im Indexsatz für Dirac-Operatoren vorkommt.

Satz 3.7 (Atiyah-Singer). *Sei M eine kompakte gerade-dimensionale Spin-Mannigfaltigkeit, sei E ein komplexes Vektorbündel über M. Dann gilt für den Index des Dirac-Operators D, wirkend auf Spinoren mit Koeffizienten in E,*

$$\mathrm{ind}(D) = \langle \mathrm{ch}(E) \cdot \widehat{A}(TM), [M] \rangle.$$

Beispiel 3.8. Die **Hirzebruch'sche L-Klasse** ist die durch die Potenzreihe

$$\ell(x) = \frac{\sqrt{x}}{\tanh \sqrt{x}}$$

gegebene multiplikative Klasse eines reellen Vektorbündels.

Satz 3.9 (Hirzebruch). *Sei M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit durch 4 teilbarer Dimension. Dann gilt für die Signatur von M*

$$\mathrm{sign}(M) = \langle \mathrm{L}(TM), [M] \rangle.$$

4 Die Euler-Klasse

Wir geben nun noch eine wichtige Klasse an, welche sich nicht ohne weiteres durch die Pontrjagin-Klasse ausdrücken lässt.

Sei zunächst V ein reeller orientierter euklidischer Vektorraum der Dimension $n = 2m$. Für ein Element A der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(V)$ der schiefsymmetrischen Endomorphismen von V definieren wir $\mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{R}$ durch

$$\underbrace{A \wedge \ldots \wedge A}_{m-\text{mal}} = \mathrm{Pf}(A) \cdot \mathrm{vol} \in \bigwedge^{2m} V = \bigwedge^{n} V.$$

Hierbei benutzen wir den Isomorphismus $\mathfrak{so}(V) \cong \bigwedge^2 V$. Andererseits induziert $A \in \mathfrak{so}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ den Endomorphismus

$$A \wedge \ldots \wedge A = \det A : \bigwedge^n V \to \bigwedge^n V$$

und es gilt

$$(\mathrm{Pf}(A))^2 = \det A.$$

Auf einem reellen orientierten Vektorbündel V von Rang $n = 2m$ ausgestattet mit einer Riemannschen Metrik und einem metrischen Zusammenhang ∇ definieren wir nun die **Euler-Klasse**

$$\chi(V) = \mathrm{Pf}\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) \in H^n(M;\mathbb{R}),$$

wobei Ω die Krümmungsmatrix bezüglich eines lokalen Orthonormal-Rahmens bezeichnet. Diese Klasse trägt ihren Namen zurecht, denn es gilt

Satz 4.1 (Chern-Gauss-Bonnet). *Sei M eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt für die Euler-Charakteristik*

$$\chi(M) = \int_M \chi(TM).$$

Index