# Konvexe Mengen

Skript zur Seminar
Wintersemester 2012/13
Universität Potsdam

Dr. H. Wendland

Stand vom 7. November 2012

# Inhaltsverzeichnis


**1 Konvexe Mengen im Euklidischen Raum 1**

1.1 Affine Unterräume, affine Träger . . . . . 1

1.2 Konvexe Mengen . . . . . 5

1.3 Relatives Inneres, relativer Rand und konvexe Körper . . . . . 11

1.4 Seiten und Stützhyperebenen . . . . . 17

1.5 Konvexe Hülle . . . . . 25

1.6 Extrempunkte und konvexe Polytope . . . . . 32

**2 Konvexe Mengen in normierten Räumen 41**

2.1 Normierte Räume und konvexe Eichfiguren . . . . . 41

2.2 d-Konvexität . . . . . 45

2.3 d-konvexe Hülle . . . . . 56

2.4 Stützeigenschaften d-konvexer Mengen . . . . . 60

**3 Konvexe Mengen in Verbindungsräumen 65**

3.1 Verbindungsräume . . . . . 65

3.2 Die Inzidenzrelation in Verbindungsräumen . . . . . 68

3.3 v-konvexe Mengen . . . . . 70

3.4 Verbindungsgeometrien (Join geometries) . . . . . 72

# Kapitel 1

# Konvexe Mengen im Euklidischen Raum

Im ersten Kapitel beschäftigen wir uns mit dem üblichen Konvexitätsbegriff in euklidischen Räumen. Die konvexen Mengen sind hier die bezüglich der Verbindung durch Strecken abgeschlossenen Mengen, oft spricht man deshalb zur Unterscheidung von anderen Konvexitätsbegriffen auch von linear konvexen Mengen.

## 1.1 Affine Unterräume, affine Träger

Mit $\mathbb{A}^n$ bezeichnen wir in diesem Abschnitt den n-dimensionalen affinen Raum über den reellen Zahlen. Die Elemente des $\mathbb{A}^n$ nennen wir die Punkte des Raumes. Sind $P$ und $Q$ zwei Punkte des affinen Raumes, dann bezeichnet $a := Q - P$ den Vektor des zugehörigen euklidischen Vektorraumes $\mathbb{E}^n$, für den $P + a = Q$ gilt. Für die Punkte des affinen Raumes $\mathbb{A}^n$, die Vektoren aus $\mathbb{E}^n$ und die Abbildung

$$+ : \mathbb{A}^n \times \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

gelten bekanntlich die Regeln

$$\begin{array}{rrcl} & \forall P, Q \in \mathbb{A}^n \ \exists^g a \in \mathbb{E}^n & : & P + a = Q \\ \text{und} & \forall P \in \mathbb{A}^n \ \forall a, b \in \mathbb{E}^n & : & (P + a) + b = P + (a + b). \end{array}$$

Bei der Darstellung der Punkte des affinen Raumes bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $\{O; e_1, ...e_n\}$ stimmt das Koordinatentupel eines Punktes $P$ mit dem des nach obiger Regel eindeutig bestimmten Vektors $p \in \mathbb{E}^n$ überein, für den $P = O + p$ gilt. Man nennt $p$ auch den Ortsvektor des Punktes $P$.
Um bei der analytischen Beschreibung von Mengen künftig wenn möglich ausschließlich Vektoren verwenden zu können, identifizieren wir (wie oft üblich) im

folgenden die Punkte des affinen Raumes mit den Vektoren des euklidischen Raumes.

Das Skalarprodukt $\langle \quad , \quad \rangle : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{E}^n$. Sind $a$ und $b$ zwei Vektoren des $\mathbb{E}^n$ und $(a_i)$ bzw. $(b_k)$ ihre Koordinatentupel bezüglich der orthonormierten Basis $\{e_1, ..., e_n\}$, dann gilt

$$\langle a, b\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

$\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ bezeichnet die Norm des Vektors $a$, damit wird $(\mathbb{E}^n, \| \quad \|)$ zu einem normierten (Vektor-)Raum.

Die Menge

$$[ab] = \{x \in \mathbb{E}^n | x = \lambda a + (1-\lambda)b,\ \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

bezeichnet die abgeschlossene Strecke zwischen den Punkten $a$ und $b$. Für die offenen Strecke $[ab] \setminus \{a, b\}$ verwenden wir die Bezeichnung $(ab)$, also

$$(ab) = \{x \in \mathbb{E}^n | x = \lambda a + (1-\lambda)b,\ \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Die Verbindungsgerade zweier Punkte $a, b \in \mathbb{E}^n$ ist durch

$$g_{ab} = \{x \in \mathbb{E}^n | x = \lambda a + (1-\lambda)b,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

oder auch

$$g_{ab} = \{x \in \mathbb{E}^n | x = \lambda_1 a + \lambda_2 b,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

gegeben. Die von drei Punkten $a, b, c$ aufgespannte Ebene erhalten wir dementsprechend durch

$$\varepsilon_{abc} = \{x \in \mathbb{E}^n | x = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\}.$$

Verbindungsgeraden $g_{ab}$ und Ebenen $\varepsilon_{abc}$ sind Beispiele für affine Unterräume, also von Teilräumen, die mit zwei verschiedenen Punkten auch stets deren Verbindungsgerade enthalten. Natürlich ist auch der Durchschnitt von affinen Unterräumen stets wieder ein affiner Unterraum. Insbesondere ist der Durchschnitt aller eine Menge $M$ enthaltenden affinen Unterräume der kleinste affine Unterraum, der M enthält.

**Definition 1.1** Ist $M$ eine Teilmenge des $\mathbb{E}^n$ und $\mathbb{U}_M$ die Menge aller affinen Unterräume, die $M$ enthalten, dann heißt

$$\text{aff } M := \bigcap \mathbb{U}_M$$

der ***affine Träger von*** $M$.

Offenbar ist der affine Träger einer Strecke die Verbindungsgerade ihrer Endpunkte. Sind $a, b, c$ linear unabhängig, dann ist aff$\{a, b, c\}$ die Verbindungsebene $\varepsilon_{abc}$.

Eine andere Beschreibung dieser Räume erhält man vermöge des Konzepts der affin abhängigen bzw. unanhängigen Punkte.

**Definition 1.2** Ein Punkt $p$ heißt von der Menge $M$ ***affin abhängig*** genau dann, wenn es Punkte $p_0, ..., p_k \in M$ und reelle Zahlen $\lambda_0, ..., \lambda_k$ mit

$$p = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$$

gibt.
Eine Punktmenge $M = \{p_0, p_1, ..., p_m\}$ heißt genau dann ***affin unabhängig***, wenn keiner der Punkte $p_i$ von der jeweiligen Restmenge $M \setminus \{p_i\}$ affin abhängig ist.

Der affine Träger einer Menge erweist sich nun als Menge aller von dieser Menge affin abhängigen Punkte.

**Satz 1.1** *Ist $M$ eine Teilmenge des $\mathbb{E}^n$, dann ist die Menge der von $M$ affin abhängigen Punkte der affine Träger von $M$, das heißt, aff $M$ ist die Menge*

$$\{p \in \mathbb{E}^n | \ \exists \lambda_0, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}, p_0, ..., p_k \in M \ mit \ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i | = p, \ und \ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\}.$$

Auf den Beweis des Satzes wollen wir hier zwar verzichten (vgl. dazu [6]), benutzen aber im folgenden beide Möglichkeiten zur Beschreibung des affinen Trägers einer Menge.

Die Definition der affinen Unabhängigkeit von Punkten erinnert stark an den Begriff der linearen Unabhängigkeit von Vektoren. Die enge Verwandschaft der beiden Begriffe zeigt die folgende Äquivalenz.

**Hilfssatz 1.2** *Eine Punktmenge $\{p_0, p_1, ..., p_m\}$ ist affin unabhängig genau dann, wenn das Vektorsystem $\{p_1 - p_0, ..., p_n - p_0\}$ linear unabhängig ist.*

*Beweis.* Ist der Punkt $p_i$ von $M \setminus \{p_i\}$ affin abhängig, dann gibt es Zahlen $\lambda_0, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n$ mit

$$p_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j p_j \quad \text{und} \quad \sum_{j \neq i} \lambda_j = 1.$$

Wir erhalten

$$p_i - p_0 = \sum_{j \neq i} \lambda_j p_j - 1 \cdot p_0 = \sum_{j \neq i} \lambda_j p_j - \sum_{j \neq i} \lambda_j p_0$$

also

$$o = \sum_{j<i} \lambda_j (p_j - p_0) - (p_i - p_0) + \sum_{j>i} \lambda_j (p_j - p_0).$$

Damit sind aber die Vektoren $p_j - p_0$ nicht linear unabhängig.
Umgekehrt folgt aus

$$p_i - p_0 = \sum_{j \neq i} \mu_j (p_j - p_0) \quad \text{mit} \quad \mu_0, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$$

sofort die Darstellung

$$p_i = \sum_{j \neq i} \mu_j (p_j - p_0) + p_0 = (1 - \sum_{j \neq i} \mu_j) p_0 + \sum_{j \neq i} \mu_j p_j$$

für $p_i$, in der die Summe aller Koeffizienten gleich 1 ist. $p_i$ ist affin abhängig von den restlichen Punkten aus $M$. □

**Hilfssatz 1.3** *Der affine Träger von $k+1$ affin unabhängigen Punkten $p_0, ..., p_k$ ist ein $k-$dimensionaler affiner Unterraum. Ist umgekehrt aff $M$ ein $k-$dimensionaler affiner Unterraum, dann existieren $k+1$ affin unabhängige Punkte in $M$.*

*Beweis.* Sind die Punkte $p_0, ..., p_k$ affin unabhängig, dann sind die Vektoren $p_1 - p_0, ..., p_k - p_0$ linear unabhängig, also gilt *dim* aff $\{p_0, ..., p_k\} \geq k$. Andererseits ist nach dem Satz 1.1

$$\text{aff } \{p_0, ..., p_k\} = \{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i | \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \}.$$

Für irgendeinen Punkt $q \in$ aff $\{p_0, ..., p_k\}$ erhalten wir aus

$$q = \sum_{i=0}^{k} \mu_i p_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{k} \mu_i = 1$$

eine Darstellung

$$q = p_0 + \sum_{i=0}^{k} \mu_i p_i - \sum_{i=0}^{k} \mu_i p_0 = p_0 + \sum_{i=0}^{k} \mu_i (p_i - p_0).$$

Damit ist *dim* aff $\{p_0, ..., p_k\} = k$.
Die zweite Aussage ergibt sich als Folgerung aus dem Hilfssatz 1.2, den ein $k-$dimensionaler Unterraum enthält $k$ linear unabhängige Vektoren $v_1, ..., v_k$. Ist nun $p_0$ ein Punkt des Raumes, dann sind die Punkte $p_0, p_0+v_1, p_0+v_2, ..., p_0+v_k$ affin unabhängig. □

## 1.2 Konvexe Mengen

Während die affinen Unterräume mit zwei Punkten stets deren Verbindungsgerade enthalten, werden wir nun die konvexen Mengen als diejehnigen Teilmengen des $\mathbb{E}^n$ definieren, die mit zwei Punkten auch immer deren Verbindungsstrecke enthalten

**Definition 1.3** Eine Menge $M \subseteq \mathbb{E}^n$ heißt ***konvex*** (oder auch: ***linear konvex***) genau dann, wenn mit zwei Punkten $a, b$ aus $M$ auch die (Verbindungs-)strecke $[ab]$ ganz in $M$ liegt. (*kurz:* $M$ *konvex* $:\Longleftrightarrow \forall a, b \in M \,|\, [ab] \subseteq M$)
Eine konvexe Menge $M$ heißt ***konvexer Körper***, wenn $\operatorname{aff} M = \mathbb{E}^n$ gilt.

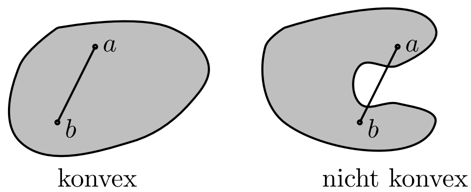



*Abb. 1*

**Beispiele:** Erste Beispiele konvexer Mengen liefern die Strecken $[ab]$, die Verbindungsgeraden $g_{ab}$ und auch die Ebenen $\varepsilon_{abc}$. Es ist aber auch jeder andere $k-$dimensionale affine Unterraum des $\mathbb{E}^n$ konvex. Insbesondere auch die durch

$$H_{a,c} := \{x| \ \langle a, x\rangle = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}\}$$

beschriebenen Hyperebenen $H_{a,c}$.
Spezielle konvexe Menge, die aber keine affinen Unterräume sind, sind die durch

$$\mathcal{H}_{a,c} := \{x| \ \langle a, x\rangle \leq c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}\}$$

beschriebenen Halbräume $\mathcal{H}_{a,c}$.
Schließlich seien noch die Kugeln mit dem Mittelpunkt $m$ und dem Radius $r$

$$K_{m,r} = \{x \in \mathbb{E}^n | \, \langle x - m, x - m\rangle \leq r^2, \ r > 0\}$$

sowie die $\varepsilon-$Umgebungen ($\varepsilon > 0$)

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{E}^n | \sqrt{\langle x - a, x - a\rangle} < \varepsilon\}$$

eines Punktes $a$ als Beispiele konvexer Mengen genannt. Die Halbräume, Kugeln und $\varepsilon-$Umgebungen sind Beispiele für konvexe Körper.

Für den Umgang mit konvexen Menge nutzt man neben der angegebenen Definition auch hier eine zur Darstellung der affinen Unterräume analoge algebraische Beschreibung.

**Definition 1.4** Ein Punkt $x$ heißt ***konvex abhängig*** von der Menge $M$, wenn es Punkte $p_0, p_1, ..., p_k \in M$ und nichtnegative reelle Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$ mit $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i$ und $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ gibt. Die angegebene Darstellung von $x$ nennt man eine ***Konvexkombination*** des Punktes $x$ aus den Punkten $p_0, ..., p_k$.

Nach der im ersten Abschnitt angegebenen Beschreibung der Strecken ist $[ab]$ gerade die Menge aller von $a$ und $b$ konvex abhängigen Punkte. Analog ist für drei affin unabhängige Punkte $a_1, a_2$ und $a_3$ durch

$$\{x \in \mathbb{E}^n |\ x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i a_i, \quad \text{mit} \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\}$$

die Punktmenge des Dreiecks $(a_1 a_2 a_3)$ gegeben.

Als wichtiges Beispiele für konvexe Mengen definieren wir in Verallgemeinerung der Strecke, des Dreiecks bzw des Tetraeders im $\mathbb{E}^1, \mathbb{E}^2$ bzw. im $\mathbb{E}^3$ den Simplex im $n-$dimensionalen Raum $\mathbb{E}^n$.

**Definition 1.5** Sind $p_0, ..., p_n$ affin unabhängige Punkte, dann nennen wir die Menge

$$S := \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i \quad \text{mit} \quad \lambda_0, ..., \lambda_n \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$

einen ***Simplex*** im Raum $\mathbb{E}^n$. Die Punkte $p_0, ..., p_n$ heißen die ***Ecken des Simplex***.

Ein Simplex $S$ besteht also aus der Menge aller von einer Menge $M$ konvex abhängigen Punkte, wobei $M$ selbst eine Menge von $n+1$ affin unabhängigen Punkten ist. Man überlegt sich leicht, dass ein Simplex eine konvexe Menge ist.

Sind $x$ und $y$ zwei Punkte aus $S$, dann gehört auch jeder Punkt der Strecke $[xy]$ zum Simplex $S$. Dazu sei

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i' p_i \in S, \qquad y = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i'' p_i \in S \quad \text{und} \quad z = \alpha x + (1-\alpha) y \in [xy]$$

also $0 \leq \alpha \leq 1$.
Wir erhalten dann

$$z = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{n} \lambda_i' p_i + (1-\alpha) \sum_{i=0}^{n} \lambda_i'' p_i = \sum_{i=0}^{n} (\alpha \cdot \lambda_i' + (1-\alpha) \lambda_i'') p_i,$$

wobei wegen der Voraussetzungen für die $\lambda_i', \lambda_j''$ $(i, j = 0, ..., n)$ auch

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha \cdot \lambda_i' + (1-\alpha) \lambda_i'') = \alpha + (1-\alpha) = 1 \quad \text{und} \quad \alpha \cdot \lambda_i' + (1-\alpha) \lambda_i'' \geq 0$$

für alle $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ folgt. Somit gilt $z \in S$ und $S$ ist eine konvexe Menge, insbesondere sogar ein konvexer Körper.

Der folgende Satz liefert nun die andere Möglichkeit konvexe Mengen zu definieren.

**Satz 1.4** *Eine Teilmenge $M$ des $\mathbb{E}^n$ ist genau dann konvex, wenn $M$ alle von $M$ konvex abhängigen Punkte enthält.*

*Beweis.* Wenn $M$ alle konvex abhängigen Punkte enthält, dann gehören mit zwei Punkte $a$ und $b$ offenbar auch alle Punkte der Strecke

$$[ab] = \{x \in \mathbb{E}^n | x = \lambda a + (1 - \lambda)b,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

zur Menge $M$. Also ist $M$ konvex.
Nun setzen wir die Konvexität von $M$ voraus und zeigen durch Induktion über die in der Definition 1.4 auftretende Zahl $k$, dass $M$ dann alle von $M$ konvex abhängigen Punkte enthält. Für k = 1 ist nichts zu zeigen. Wir nehmen nun an, $M$ enthalte mit $p_0, p_1, ..., p_{k-1} \in M$ auch alle Punkte

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i p_i \quad \text{mit} \quad \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{k-1} \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i = 1.$$

Nun sei $p = \sum_{i=0}^{k} \mu_i p_i$ mit $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_k \geq 0$ und $\sum_{i=0}^{k} \mu_i = 1$ ein beliebiger von $M$ konvex abhängiger Punkt. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu_k \neq 1$ und damit $\mu := \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i \neq 0$ annehmen.
Wir erhalten dann

$$p = \sum_{i=0}^{k} \mu_i p_i = \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i (\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\mu_j}{\mu} p_j) + \mu_k p_k$$

wobei der Punkt $q = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\mu_j}{\mu} p_j$ wegen $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\mu_j}{\mu} = 1$ nach unserer Induktionsvoraussetzung bereits zu $M$ gehört. Die letzte Gleichung für $p$ stellt diesen als Punkt der Strecke $[q, p_k]$ dar, denn nach der Voraussetzung über $p$ ist $1 - \mu_k = \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i$. Also gilt auch $p \in M$. □

Nach dieser mehr analytischen Beschreibung von Konvexität formulieren wir noch einige Sätze über allgemeine Eigenschaften konvexer Mengen.

**Satz 1.5** *Der Durchschnitt einer beliebigen Familie konvexer Mengen ist eine konvexe Menge.*

*Beweis.* Ist $\mathbb{M} = \{M_i |\ M_i \subseteq \mathbb{E}^n,\ i \in I\}$ eine Familie konvexer Mengen, dann folgt aus $a, b \in \bigcap M_i$ zunächst $a, b \in M_i$ für alle $i$. Nach Voraussetzung gilt also $[ab] \subseteq M_i$ für alle $i$ und damit auch $[ab] \subseteq \bigcap M_i$. □

**Bemerkung**: *Bekanntlich gelten analoge Sätze für offene bzw. abgeschlossene Mengen. So ist die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen eine offene und entsprechend der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen stets eine abgeschlossene Menge. Mit Satz (1.3) ist also der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener konvexer Mengen wieder eine abgeschlossene konvexe Menge.*

Eine für viele Beweise hilfreiche Aussage ist die Invarianz der Konvexität bei Translationen und Streckungen.

**Hilfssatz 1.6** *Ist $M$ eine konvexe Menge, dann sind für jeden Vektor $v$, jeden Punkt $p$ und jede positive reelle Zahl $t$ auch die Mengen*

$$M + v := \{x + v |\ x \in M\} \quad \textit{und} \quad \theta(p,t)(M) := \{p + t(x - p)|\ x \in M\}$$

*konvexe Mengen. $\theta(p,t)$ bezeichnet hier die zentrische Streckung mit dem Zentrum $p$ und dem Streckungsfaktor $t$.*

*Beweis.* Für zwei Punkte $x + v, y + v \in M + v$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ ergibt sich die Behauptung für die erstgenannte Menge sofort aus

$$\lambda(x + v) + (1 - \lambda)(y + v) = \lambda x + (1 - \lambda)y + v \in M + v$$

Analog erhält man für $p + t(x - p)$ und $p + t(y - p)$

$$\lambda(p+t(x-p)) + (1-\lambda)(p+t(y-p)) = p+t((\lambda x + (1-\lambda)y) - p) \in \theta(p,t)(M).$$

□

**Bemerkung**: *Der Hilfssatz 1.6 ist nur eine Teilaussage des allgemeineren Satzes, dass die Konvexität bei affinen Transformationen invariant ist.*

**Definition 1.6** Ist $M$ eine konvexe Menge und $p$ ein beliebiger Punkt des $\mathbb{E}^n$ dann heißt die Menge

$$C(p,M) := \{x \in \mathbb{E}^n |\ x = \lambda p + (1 - \lambda)q, q \in M, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

die ***konvexe Verbindung*** von $p$ und $M$.

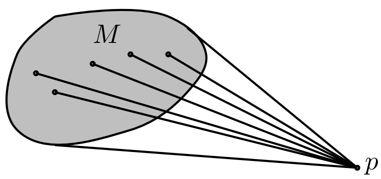



*Abb. 2*

Zur Rechtfertigung der Bezeichnung zeigen wir, dass $C(p,M)$ konvex ist.

**Satz 1.7** *Ist $M$ eine konvexe Menge und $p \in \mathbb{E}^n$, dann ist $C(p, M)$ konvex.*

*Beweis.* Für die Fälle $M = \emptyset$ und $M = \{p\}$ ist nichts zu zeigen.
Es seien nun $x$ und $y$ zwei verschiedene Punkte aus $C(p, M)$. Falls die Vektoren $x - p$ und $y - p$ linear abhängig sind, gilt $x \in [py]$ oder $y \in [px]$. Damit wäre die Teilstrecke $[xy]$ entweder in $[py]$ oder in $[px]$ enthalten. In beiden Fällen wäre $[xy] \subset C(p, M)$.
Nun seien $x - p$ und $y - p$ linear unabhängig. Nach Definition von $C(p, M)$ existieren Punkte $x_1$ und $y_1$ in $M$, so dass $x$ und $y$ konvex abhängige Punkte von $p, x_1$ bzw. $p, y_1$ sind, also $x \in [px_1]$ und $y \in [py_1]$.

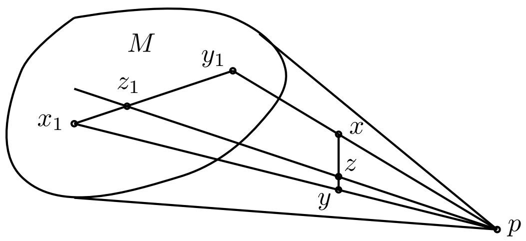



*Abb. 3*

In der von den Vektoren $x - p$ und $y - p$ aufgespannten Ebene schneidet nun jede von $p$ ausgehende Gerade durch einen Punkt $z$ der Strecke $[xy]$ auch die Strecke $[x_1 y_1]$ in genau einem Punkt $z_1$, der wegen der vorausgesetzten Konvexität zur Menge $M$ gehört. Mit $z \in [pz_1]$ haben wir dann aber auch $z \in C(p, M)$, diese Menge ist also ebenfalls konvex. □

Eine besondere Rolle in der Theorie der konvexen Mengen spielen die sogenannten "kegelförmigen" Mengen.

**Definition 1.7** Eine konvexe Menge $M$ heißt ein ***konvexer Kegel***, wenn es einen Punkt $p_0 \in M$ gibt, so dass für alle Punkte $x \in M$ und für alle nichtnegativen Zahlen $t \in \mathbb{R}$ auch die Punkte $p + t(x - p_0)$ zur Menge $M$ gehören. Ein Punkt $p_0$ mit dieser Eigenschaft heißt ein ***Scheitelpunkt*** oder ***Scheitel*** des Kegels $M$. Die Menge aller Scheitelpunkte von $M$ nennt man die ***Scheitelmenge*** des Kegels.

Einfache Beispiele für konvexe Kegel sind trivialerweise alle affinen Unterräume. Hier ist jeder Punkt auch ein Scheitelpunkt. Die Halbräume $\mathcal{H}_{a,c}$ sind Kegel mit der Scheitelmenge $H_{a,c}$, und der Durchschnitt zweier Halbräume $\mathcal{H}_{a,c}$ und $\mathcal{H}_{b,d}$ mit linear unabhängigen Vektoren $a, b$ ist ebenfalls ein konvexer Kegel. Seine Scheitelmenge ist der Durchschnitt der beiden Hyperebenen $H_{a,c}$ und $H_{b,d}$.

Unmittelbar aus der Definition von Kegel und Scheitelpunkt ergibt sich eine entsprechende Aussage für den Durchschnitt beliebiger konvexer Kegel.

**Satz 1.8** *Sind $M_1$ und $M_2$ zwei konvexe Kegel mit einem gemeinsamen Scheitelpunkt $p_0$, dann ist der Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ ebenfalls ein konvexer Kegel mit dem Scheitelpunkt $p_0$.*

Spezielle Kegel, die mit Bezug auf eine gegebene konvexe Menge $M$ definiert werden, sind die charakterischen und Stützkegel der Menge $M$.

**Definition 1.8** Ist $M$ ein konvexe Menge und $p_0$ ein Punkt dieser Menge $M$, dann heißt die Menge

$$C_M(p_0) := \{x \in M |\ p_0 + t(x - p_0) \in M \quad \text{für alle} \quad t \geq 0\}$$

der ***charakteristische Kegel*** von $M$ im Punkt $p_0$.

**Satz 1.9** *Die charakteristischen Kegel einer konvexen Menge $M$ sind konvexe Kegel.*

*Beweis.* Es sei $p_0$ ein Punkt der konvexen Menge $M$.
Falls $C_M(p_0) = \{p_0\}$ gilt, ist die Behauptung richtig. Offenbar besteht $C_M(p_0)$ immer genau dann aus einem einzigen Punkt, wenn $M$ eine beschränkte Menge ist und somit keine Halbgeraden enthalten kann.
Falls ein Punkt $x$ mit $p_0 \neq x \in C_M(p_0)$ existiert, dann liegt nach der Definition auch die ganze $x$ enthaltende Halbgerade mit dem Anfangspunkt $p_0$ in $C_M(p_0)$. Die Menge hat also die definierende Eigenschaft aus der Definition 1.7 eines Kegels. Zu zeigen ist nun noch die Konvexität von $C_M(p_0)$.
Dazu seien $x_1, x_2$ zwei verschiedene Punkte aus $C_M(p_0)$ und $x$ sei ein Punkt der Strecke $[x_1x_2]$, also etwa

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda x_2) \quad \text{mit} \quad 0 < \lambda < 1.$$

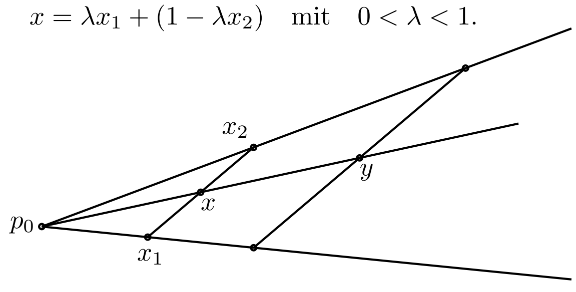



*Abb. 4*

Ist nun $y = p_0 + t(x - p_0)$ mit $t > 0$ ein Punkt der durch $x$ bestimmtem Halbgeraden mit dem Anfangspunkt $p_0$, dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda(p_0 + t(x_1 - p_0)) + (1 - \lambda)((p_0 + t(x_2 - p_0)) &= p_0 + t(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - p_0) \\ &= p_0 + t(x - p_0) = y.\end{aligned}$$

Damit ist $y$ eine Konvexkombination der nach Voraussetzung zu $C_M(p_0)$ gehörenden Punkte $p_0 + t(x_1 - p_0)$ und $p_0 + t(x_2 - p_0)$. Da $C_M(p_0) \subset M$ gilt sichert die Konvexität von $M$ nun $y \in C_M(p_0)$. □

**Definition 1.9** Ist $M$ ein konvexe Menge und $p_0$ ein Punkt dieser Menge, dann heißt die Menge

$$S_M(p_0) := \bigcup_{x \in M} \{p_0 + t(x - p_0), \quad t \geq 0\}$$

der ***Stützkegel*** der Menge $M$ im Punkt $p_0$.

Im Gegensatz zum charakteristischen Kegel gilt hier die Inklusion $M \subseteq S_M(p_0)$. Auch Stützkegel sind konvexe Kegel. Letzteres kann völlig analog zum Konvexitätsnachweis im Beweis von 1.7 gezeigt werden.
In der Litratur (vgl. [4]) werden Stützkegel oft als Durchschnitte abgeschlossener Halbräume, also stets als abgeschlossene Mengen definiert. Nach obiger Definition ist $S_M(p_0)$ zwar abgeschlossen, wenn $M$ abgeschlossen ist. Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

## 1.3 Relatives Inneres, relativer Rand und konvexe Körper

Die topologischen Begriffe *innerer Punkt*, *offen*, *abgeschlossen*, *Randpunkt* und *Häufungspunkt* einer Menge $M$ verwenden wir in der üblichen Weise und bezeichnen mit $int\ M$, $\overline{M}$ bzw. $\delta M$ das *Innere*, den *Abschluß* und den *Rand* einer Menge $M$. Bekanntlich gelten die Mengenbeziehungen

$$\overline{M} = int\ M \cup \delta M \quad , \quad int\ M = \overline{M} \setminus \delta M \quad \text{und} \quad \delta M = \overline{M} \setminus int\ M.$$

Wir werden nun zeigen, dass für eine konvexe Menge $M$ auch die Menge ihrer inneren Punkte und deren Vereinigung mit den Randpunkten konvexe Mengen sind. Dazu verallgemeinern wir vorher die entsprechenden Begriffsbildungen, um auch auch für Mengen, die keine inneren Punkte im Sinne der Topologie des $\mathbb{E}^n$ besitzen, zwischen "Randpunkten" und "inneren" Punkten unterscheiden zu können.

**Definition 1.10** Ist $M$ eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{E}^n$ und der $k-$dimensionale Teilraum $T^k = \text{aff}\, M$ der affine Träger der Menge $M$, dann heißt $x$ ein ***relativ innerer Punkt*** der Menge $M$, falls er ein innerer Punkt bezuglich des Teilraums $T^k$ ist.
Die Menge $ri\ M$ bezeichnet die Menge aller relativ inneren Punkte von $M$, das ***relative Innere*** der Menge $M$, entsprechend heißt $\delta_r M = \overline{M} \setminus ri\ M$ der

***relative Rand*** von $M$.

Für einelementige Mengen $M = \{x\}$ setzen wir noch $ri\ M = \{x\}$ und $\delta_r M = \emptyset$. Gilt $\operatorname{aff} M = \mathbb{E}^n$, dann ist $ri\ M = int\ M$ und $\delta_r M = \delta M$

Analog zur Definition 1.5 erklärt man mit $k+1$ affin unabhängigen Punkten einen $k$-Simplex in einem $k-$dimensionalen Unterraum des $\mathbb{E}^n$. Den Simplex entsprechend 1.5 nennt man dann auch $n$-Simplex.

Sind $p_0, ..., p_k$ affin unabhängige Punkte des $\mathbb{E}^n$ und ist

$$S := \{x \in \mathbb{E}^n |\ x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i \text{ mit } \lambda_0, ..., \lambda_k \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\}$$

der von diesen Punkten aufgespannte $k$-Simplex, dann ist

$$ri\ S := \{x \in \mathbb{E}^n |\ x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i \text{ mit } \lambda_0, ..., \lambda_k > 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\}$$

die Menge seiner relativ inneren Punkte. Die Menge der Randpunkte ist durch $\delta S := \bigcup_{j=0}^{k} S_j$ mit

$$S_j = \{x \in \mathbb{E}^n |\ x = \sum_{i=0, i\neq j}^{k} \lambda_i p_i \text{ mit } \lambda_0, ..., \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, ..., \lambda_k \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0, i\neq j}^{k} \lambda_i = 1\}$$

gegeben. (vgl. [6], S. 14)

**Satz 1.10** *Das relative Innere $ri\ M$ und der Abschluß $\overline{M}$ einer konvexen Menge $M$ sind konvex und es gilt $ri\ M \neq \emptyset$.*

*Beweis.* Es seien $x, y$ zwei verschiedene Punkte aus $ri\ M$, es existieren also in dem Teilraum $\operatorname{aff} M$ Umgebungen $U_{\varepsilon_1}(x)$, $U_{\varepsilon_2}(y)$ mit $U_{\varepsilon_1}(x), U_{\varepsilon_2}(y) \subset M$. Wir setzen $\varepsilon := Min\ \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ und zeigen für jeden Punkt $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ mit $0 < \lambda < 1$ liegt die $\varepsilon-$Umgebung von $z$ in $M$.
Es sei also $z_1 \in U_\varepsilon(z)$. Es gilt dann $\|z_1 - z\| < \varepsilon$, $x_1 := x + (z_1 - z) \in U_{\varepsilon_1}(x)$ und $y_1 := y + (z_1 - z) \in U_{\varepsilon_2}(y)$. Mit $x_1, y_1 \in M$ gilt dann auch

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 &= \lambda(x + (z_1 - z)) + (1-\lambda)(y + (z_1 - z)) \\ &= \lambda x + (1-\lambda) y + (z_1 - z) \\ &= z + (z_1 - z) = z_1 \in M. \end{aligned}$$

Wir haben $U_\varepsilon(z) \subset M$, also $z \in ri\ M$, d.h., $ri\, M$ ist konvex.

Wir beweisen nun die analoge Aussage bezüglich $\overline{M}$. Dazu seien $x, y$ zwei verschiedene Punkte aus $\overline{M}$, also Häufungspunkte der Menge $M$. Es gibt somit in

jeder $\varepsilon-$Umgebung dieser Punkte mindestens einen weiteren Punkt der Menge $M$. Wir wählen $\varepsilon < \frac{1}{2}\|x-y\|$ und $x_1 \in U_\varepsilon(x)$ bzw. $y_1 \in U_\varepsilon(y)$. Dann gilt $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$ und $x_1 \neq y_1$.
Ist nun $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ ein Punkt der offenen Strecke $(xy)$, dann hat die offenen Strecke $(x_1, y_1)$ mit der $\varepsilon-$Umgebung von $z$ einen nichtleeren Durchschnitt, denn es ist

$$\begin{aligned}\|z - (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1)\| &= \|\lambda(x-x_1) + (1-\lambda)(y-y_1)\| \\ &\leq \lambda\|x-x_1\| + (1-\lambda)\|y-y_1\| \\ &< \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Es gibt also ein $\lambda$ mit $z_1 := \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \in U_\varepsilon(z)$, und wegen $x_1, y_1 \in M$ gilt auch $z_1 \in M$. Da die obige Abschätzung aber auch für ein beliebiges $\varepsilon'$ mit $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}\|x-y\|$ gilt, ist $z$ ein Häufungspunkt von $M$, also gilt $z \in \overline{M}$.

Es bleibt noch $ri\ M \neq \emptyset$ zu zeigen. Falls $M$ eine einelementige Menge ist, gilt $ri\, M = \{x\}$ nach Definition.
Nun sei $\operatorname{aff} M$ ein k-dimensionaler affiner Unterraum mit $k \geq 1$. Nach Satz 1.3 existieren dann $k+1$ affin unabhängige Punkte $p_0, , , , , p_k \in M$. Da $M$ nach Satz 1.4 auch alle von $M$ konvex abhängigen Punkte enthält, gilt $p \in M$ für alle Punkte

$$p = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i \quad \text{mit} \quad \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1.$$

Die Menge dieser Punkte ist ein $k-$-Simplex $S$. Jeder relativ innere Punkt dieses Simplex (vgl. obiges Beispiel) ist nun aber wegen $ri\ S \subset S \subset M$ auch ein relativ innerer Punkt von $M$. □

Wir stellen noch eine weitere, in späteren Beweisen hilfreiche Aussage bereit.

**Hilfssatz 1.11** *Ist $M$ eine konvexe Menge, $x \in \overline{M}$ und $y \in ri\ M$, dann gilt $[xy] \setminus \{x\} \subseteq ri\ M$.*

*Beweis.* Wir setzen zunächst $x \in M$ voraus. Ist nun $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in (xy)$ und $U_\varepsilon(y) \subseteq M \subset \operatorname{aff} M$, dann ist die Menge

$$V := \lambda x + (1-\lambda)U_\varepsilon(y) := \{\lambda x + (1-\lambda)y' |\ y' \in U_\varepsilon(y)\}$$

eine $(1-\lambda)\cdot\varepsilon-$ Umgebung von $z$, denn einerseits ist $z \in V$ und andererseits gilt für ein $z' \in V$

$$\|z'-z\| = \|\lambda x + (1-\lambda)y' - (\lambda x + (1-\lambda)y)\| = \|(1-\lambda)(y'-y)\| \leq (1-\lambda)\cdot\varepsilon.$$

Damit ist $z$ ein innerer Punkt von $M$, da wegen der Konvexität von $M$ alle Punkte von $V$ in $M$ liegen.

Den Fall $x \notin M$ führen wir nun auf den eben bewiesenen Fall zurück. Die Menge $W = \frac{1}{\lambda}z - \frac{1-\lambda}{\lambda}U_\varepsilon(y)$ ist eine Umgebung von $x$, denn es gilt $\frac{1}{\lambda} - \frac{1-\lambda}{\lambda} = 1$ und aus $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ folgt

$$x = \frac{1}{\lambda}z - \frac{1-\lambda}{\lambda}y \in \frac{1}{\lambda}z - \frac{1-\lambda}{\lambda}U_\varepsilon(y) = W.$$

Da $x \in \overline{M}$ gilt, existiert ein $x_1 \in W \cap M$. Es sei etwa $x_1 = \frac{1}{\lambda}z - \frac{1-\lambda}{\lambda}y_1$ mit $y_1 \in U_\varepsilon(y)$. Damit haben wir $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1$, wobei wie im oberen Fall $x_1, y_1 \in M$ gilt. □

Eine weitere Eigenschaft konvexer Mengen ist eine gewisse "Sternförmigkeit" bezüglich jedes inneren Punktes.

**Hilfssatz 1.12** *Ist $M$ eine nichtleere konvexe Menge, $p$ ein Punkt aus $ri\ M$ und $a \neq o$ ein Vektor, dann schneidet jede Halbgerade $h_a = \{x|\ x = p + ta, t \geq 0\}$ den Rand $\delta_r M$ in höchstens einem Punkt.*
*Gilt $h_a \cap \delta_r M = \{x\}$, dann ist $(px) \subseteq ri\ M$.*

*Beweis.* Falls $h_a \cap \delta_r M = \emptyset$ gilt, ist nichts zu zeigen.
Setzen wir nun $h_a \cap \delta_r M = \{x\}$ voraus und ist $\operatorname{aff} M$ der $k-$dimensionale Träger von $M$, dann liefert der Hilssatz 1.11 auf diesen Teilraum angewandt die Inklusion $(px) \subseteq ri\ M$.
Wären $x$ und $x'$ zwei verschiedene Punkte in $h_a \cap \delta_r M$, dann hätten wir entweder $x \in (px')$ oder $x' \in (px)$. Damit liefert aber die bereits gezeigte Inklusion, dass entweder $x$ oder $x'$ im Widerspruch zur Annahme ein relativ innerer Punkt von $M$ wäre. □

Für zwei konvexe Mengen mit nichtleerem Durchschnitt beweisen wir noch eine Eigenschaft bezüglich der Durchschnittsmenge. Die Aussage des Satzes ließe sich leicht auf endliche Mengensysteme erweitern und analog bzw. durch Rückführung auf den Fall von zwei Mengen beweisen

**Satz 1.13** *Für konvexe Mengen $M_1, M_2$ mit $ri\ M_1 \cap ri\ M_2 \neq \emptyset$ gilt:*

$$\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$$

*Beweis.* Offensichtlich gilt die Aussage falls eine der beiden Mengen einelementig ist. Wir setzen also im folgenden $dim(\operatorname{aff} M_1), dim(\operatorname{aff} M_2) \geq 1$ voraus.

a) Es sei $x$ ein beliebiger Punkt der Menge $\overline{M_1 \cap M_2}$. Da $x$ dann ein Häufungspunkt der Menge $M_1 \cap M_2$ ist liegt in jeder $\varepsilon-$Umgebung von $x$ ein weiterer Punkt $y$ von $M_1 \cap M_2$. Dann ist $y \in M_1, M_2$ und somit ist $x$ Häufungspunkt beider Mengen. Damit gilt $x \in \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$. Dies beweist die Inklusion $\overline{M_1 \cap M_2} \subseteq \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$.

b) Die bereits gezeigte Inklusion zeigt auch, dass die Menge $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$ nicht leer ist. Es sei jetzt $x^*$ ein beliebiger Punkt dieses Durchschnitts und $x'$ sei ein Punkt aus $ri\ M_1 \cap ri\ M_2$. Nach 1.10 bzw. 1.12 erhalten wir sowohl $(x^*x') \subseteq M_1$ als auch $(x^*x') \subseteq M_2$. Aus $(x^*x') \subseteq M_1 \cap M_2$ folgt aber dann, dass in jeder $\varepsilon-$Umgebung von $x^*$ ein weiter Punkt $y^*$ mit $y^* \in (x^*x') \subseteq M_1 \cap M_2$ liegt. $x^*$ ist also auch ein Häufungspunkt von $M_1 \cap M_2$, also gilt $x^* \in \overline{M_1 \cap M_2}$.
Damit ist auch die umgekehrte Inklusion und somit die Gleichheit bewiesen. □

Der folgende Satz zeigt, dass der affine Träger einer konvexen Menge als Stützkegel dieser Menge dargestellt werden kann.

**Satz 1.14** *Ist $M$ ein konvexe Menge und $p$ ein Punkt aus $ri\ M$, dann gilt*

$$\operatorname{aff} M = S_M(p).$$

*Beweis.* Die Inklusion $S_M(p) \subseteq \operatorname{aff} M$ ist klar.
Es seien nun $a, b \in S_M(p)$ zwei verschiedene Punkte und $x$ sei ein beliebiger Punkt der Geraden $g_{ab}$. Dann liegt $x$ auch in $\operatorname{aff} M$ und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein hinreichend großes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x' := p + \frac{1}{\lambda}(x - p) \in U_\varepsilon(p)$. Da $p$ als innerer Punkt vorausgesetzt wurde, finden wir so immer einen Punkt $x' \in M \cap U_\varepsilon(p)$ mit $x = p + \lambda(x' - p) \in S_M(p)$. Damit ist $S_M(p)$ ein affiner Unterraum mit $M \subseteq S_M(p)$, also ist auch $\operatorname{aff} M \subseteq S_M(p)$. □

Im eben bewiesenen Satz betrachteten wir den Stützkegel einer Menge in einem ihrer inneren bzw. relativ inneren Punkte. Für spätere Beweise stellen wir noch einen Hilfssatz über die Randpunkte eines Stützkegels bereit.

**Hilfssatz 1.15** *Es sei $M$ eine abgeschlossene konvexe echte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $p$ ein Punkt aus $\delta_r(M)$, und $S_p = S_M(p)$ der Stützkegel der Menge $M$ in $p$. Ist $q$ ein Punkt aus $\delta_r(S_p)$, dann liegt die vom Punkt $p$ ausgehende Halbgerade $h := \{x |\ x = p + t(q - p),\ t \geq 0\}$ in $\delta_r(S_p)$ und die Gerade $g_{pq}$ liegt vollständig in $\delta_r(S_{S_p}(q))$, also im Rand des Stützkegels von $S_p$ im Punkt $q$.*

*Beweis.* Der Definition 1.9 entnimmt man sofort, dass $p \in \delta_r(S_p)$ gilt.
Wäre nun ein Punkt $x = p + t_x(q - p)$ mit $t_x > 0$ kein Randpunkt von $S_p$, dann gäbe es im Teilraum $\operatorname{aff} S_p$ eine Umgebung mit $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq S_p$. Wie im Beweis von 1.11 findet man dann eine zentrische Streckung mit dem Zentrum $p$ und dem Faktor $\frac{1}{t}$, die daraus auch eine solche Umgebung von $q$ erzeugt. Dies liefert den Widerspruch zu $q \in \delta_r(S_p)$.

Die Inklusion $g_{pq} \subseteq S_{S_p}(q)$ ist nach der Definition 1.9 klar. Außerdem ist $p$ nun auch ein Randpunkt von $S_{S_p}(q)$, denn sonst gäbe es eine Umgebung mit $p \in U_\varepsilon(p) \subseteq S_{S_p}(q)$. Jede Halbgerade mit dem Anfangspunkt $q$ durch einen Punkt dieser Umgebung müßte somit mindestens einen Punkt aus $S_p$ enthalten. Letzteres widerspricht aber der Konvexität von $S_p$, da $p$ ja ein Randpunkt diese Kegels ist.

Wir nehmen nun an, es gäbe einen Punkt $r \in g_{pq} \cap ri\ S_{S_p}(q)$. Liegt $p$ zwischen $r$ und $q$ dann liefert 1.11 den Widerspruch $p \in (qr) \subseteq ri\ S_{S_p}(q)$. Analog folgt $q \in (pr) \subseteq ri\ S_{S_p}(q)$ für den Fall $q \in (pr)$. Im verbleibenden Fall $r \in (pq)$ gäbe es eine $\varepsilon$-Umgebung des Punktes $r$ in $S_{S_p}(q)$. Wie oben würden wir dann aber durch geeignete zentrische Streckungen auch solche Umgebungen für $p$ und $q$ angeben können. □

Bekanntlich ist der Abschluß einer nichtleeren Menge $M$ stets ebenfalls eine nichtleere Menge. Dagegen müssen innere Punkte nicht in jedem Fall existieren. Zum Beispiel besitzt die konvexe Menge der Punkte eines Dreiecks als Teilmenge des $\mathbb{E}^3$ zwar relativ innere Punkte, aber keine inneren Punkte. Wir werden nun die konvexen Körper als diejehnigen konvexen Mengen kennzeichnen, die innere Punkte besitzen.

**Hilfssatz 1.16** *Jede $\varepsilon-$Umgebung eines Punktes $p$ enthält $n+1$ affin unabhängige Punkte.*

*Beweis.* Ist $\{a_1, ..., a_n\}$ eine Basis des n-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{E}^n$, dann sind die Punkte $\{p, p_1, ..., p_n\}$ mit $p_i = p + a_i$ affin unabhängig. Das gleiche gilt dann auch für die Punkte $\{p, p'_1, ..., p'_n\}$ mit $p'_i := p + \frac{\varepsilon}{\|a_i\|} a_i$, außerdem haben wir dann noch $p, p'_1, ..., p'_n \in U_\varepsilon(p)$. □

Wenn jede $\varepsilon-$Umgebung $n+1$ affin unabhängige Punkte enthält, dann gilt dies auch für jede Menge $M$ mit $int\ M \neq \emptyset$. Damit erhalten wir die angekündigte Charakterisierung der konvexen Körper.

**Satz 1.17** *Eine konvexe Menge $M$ ist genau dann ein konvexer Körper, wenn $int\ M \neq \emptyset$ gilt.*

*Beweis.* Wir setzen zunächst $int\ M \neq \emptyset$ voraus. Es sei etwa $p \in int\ M$ und $U_\varepsilon(p) \subset M$. Sind nun $p_0, p_1, ..., p_n$ affin unabhängige Punkte in $U_\varepsilon(p)$, dann gilt nach dem Hilfssatz 1.3 bereits $\mathbb{E}^n = \text{aff}\{p_0, p_1, ..., p_n\} \subseteq aff\ M$.

Ist nun umgekehrt der affine Träger der Menge $M$ der ganze Raum $\mathbb{E}^n$. dann existieren nach dem Hilfssatz 1.3 in $M$ $n+1$ affin unabhängige Punkte $p_0, p_1, ..., p_n$. Die Menge der von diesen Punkten affin abhängigen Punkte ist ein Simplex des $\mathbb{E}^n$, der eine Teilmenge der konvexen Menge $M$ ist. Die inneren Punkte dieses Simplex sind natürlich auch innere Punkte von $M$ □

Zum Abschluß definieren wir noch einer Verschärfung des Konvexitätsbegriffs.

**Definition 1.11** Eine konvexe Menge $M$ heißt ***streng konvex***, wenn für beliebige Punkte $x, y \in \delta_r M$ mit $x \neq y$ stets $(xy) \subseteq ri\ M$ gilt.

Im $\mathbb{E}^3$ sind Kugeln bzw. Ellipsoide Beispiele streng konvexer Körper. Simplex und $k$-Simplex dagegen genügen der Definition 1.11 nicht.

## 1.4 Seiten und Stützhyperebenen

In diesem Abschnitt untersuchen wir insbesondere abgeschlossenen konvexe Mengen, also Mengen $M$ mit $\delta_r M \subseteq M$. Wir betrachten nun zunächst Hyperebenen, die solche Mengen in gewisser Weise „tangieren“.

**Definition 1.12** Eine Hyperebene $H$ des $\mathbb{E}^n$ heißt ***Stützhyperebene*** einer konvexen Menge $M$, wenn $H \cap \delta(M) \neq \emptyset$ gilt und $M$ ganz in einem abgeschlossenen Halbraum bezüglich $H$ liegt.

Im Fall $n = 2$ spricht man natürlich von Stützgeraden. Die Abbildung zeigt Beispiele für Stützgeraden an Mengen im $\mathbb{E}^2$.

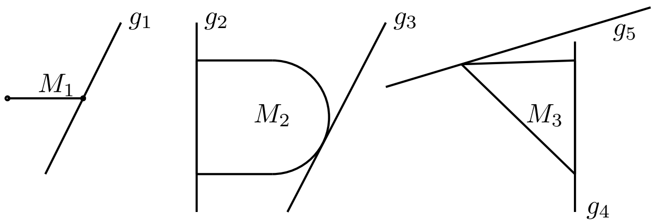



*Abb. 5*

Offensichtlich kann eine Stützhyperebene an einen konvexen Körper $K$ nur Randpunkte von $K$ enthalten. Für konvexe Mengen $M$ mit $\dim \operatorname{aff} M < n$ ist jede Hyperebene $H$ mit $M \subset H$ eine Stützhyperebene an $M$. Wir beweisen folgende Umkehrung dieser Aussage.

**Hilfssatz 1.18** *Ist $M$ eine abgeschlossene konvexe Menge und ist $H$ eine Stützhyperebene an $M$ die einen Punkt $x$ aus $ri\ M$ enthält, dann gilt $M \subseteq H$.*

*Beweis.* Es sei $x \in ri\ M \cap H$. In diesem Fall existiert im Teilraum $T := \operatorname{aff} M$ eine $\varepsilon$-Umgebung $U$ von $x$ mit $U \subset M$. Wir wenden den Hilfssatz 1.16 auf den Teilraum $T$ an und erhalten $\operatorname{aff} U = T$. Im Fall $U \subset H$ folgt dann sofort $M \subset \operatorname{aff} M = \operatorname{aff} U \subseteq H$, also $M \subseteq H$. Der andere Fall $U \not\subset H$ widerspricht aber der definierenden Eigenschaft der Stützhyperbene, denn wäre $y$ ein Punkt in $U \setminus H$, da dann wäre auch $y' := x - (y - x) \in U \setminus H$. Die Punkte $y$ und $y'$ aus $M$ lägen nun in verschiedenen Halbräumen bezüglich der Hyperebene $H$. $\square$

Für den Durchschnitt einer konvexe Mengen $M$ mit einer Stützhyperebene $H$ an diese Menge gilt somit also entweder $M = M \cap H$ oder $M \cap H \subseteq \delta_r M$.

Natürlich interessieren besonders die Stützhyperbenen durch Randpunkte einer Menge $M$, die keine inneren Punkte, also Punkte von $ri\ M$ enthalten. Solche

„echten“ Stützhyperbenen existieren auch für jeden Punkt $p \in \delta_r M$. Zunächst beweisen wir aber eine schwächere Aussage.

**Hilfssatz 1.19** *Ist $M$ eine abgeschlossene konvexe Menge im $\mathbb{E}^n$, dann existiert durch jeden Randpunkt $p_0 \in \delta(M)$ eine Stützhyperebene.*[1]

*Beweis.* Wenn $M$ kein konvexer Körper ist, also wenn *dim* aff $M < n$ bzw. $\delta(M) = M$ gilt, dann ist wie oben bemerkt jede Hyperebene, die aff $M$ enthält, eine Stützhyperebene von $M$.
Nun sei $M$ ein konvexer Körper. Wir betrachten den $M$ umfassenden Stützkegel $S_0 := S_M(p_0)$, der ebenfalls ein konvexer Körper ist. Wählen wir nun einen Punkt $p_1 \neq p_0$ aus $\delta(S_0)$, dann ist auch $S_1 := S_{S_0}(p_1)$ konvex und die Gerade $g := g_{p_0 p_1}$ liegt nach 1.15 vollständig in $\delta(S_1)$. Ist nun $p_2$ ein Punkt aus dem Rand $\delta(S_1)$, der nicht in $g$ liegt, dann bezeichne $S_2$ den Stützkegel von $S_1$ im Punkt $p_2$, also $S_2 := S_{S_1}(p_2)$. $S_2$ ist wiederum konvex und die zweidimensionale Ebene $E$ durch $p_0, p_1$ und $p_2$ liegt in $\delta(S_2)$.
Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir eine Folge von Stützkegeln $S_0, S_1, ..., S_{n-1}$ mit $M \subseteq S_0 \subseteq S_1 \subseteq ... \subseteq S_{n-1}$, wobei der Rand von $S_{n-1}$ die Hyperebene $H$ durch $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ enthält. Damit ist $H$ eine Begrenzungshyperebene des Halbraums $S_{n-1}$, der $M$ enthält. Also ist $H$ eine Stützhyperebene von $M$ durch den Punkt $p_0$. $\square$

**Bemerkung:** *Der eben bewiesene Satz gilt auch für den Fall, dass $M$ selbst eine Hyperebene ist. In diesem Fall gilt $M = \delta_r M$ und $M$ ist selbst die einzige Stützhyperebene an $M$. Analog gilt dies auch für die Aussage der nun folgenden Verschärfung von 1.19.*

**Satz 1.20** *Ist $M$ eine abgeschlossene konvexe Menge im $\mathbb{E}^n$, dann existiert durch jeden Punkt $p_0 \in \delta_r(M)$ eine Stützhyperebene an $M$, die keine Punkte von $ri(M)$ enthält.*

*Beweis.* Es sei $T :=$ aff $M$ und $k = \dim T \leq n$. In diesem $k-$dimensionalen Raum ist $M$ ein konvexer Körper, dessen Randpunkte die Punkte aus $\delta_r(M)$ sind. Nach dem eben bewiesenen Satz 1.19 existiert zu $p_0 \in \delta_r(M)$ also eine $(k-1)$-dimensionale Hyperebene $H'$ mit $H' \cap M \subset \delta_r(M)$.
Es existieren nun Punkte $p_1, ..., p_{k-1} \in H'$, für die die $k-1$ Vektoren $v_i := p_i - p_0$ linear unabhängig sind. Sie bilden eine Basis des Untervektorraumes $U$ der Hyperebene $H'$ Mit $v_k$ bezeichnen wir einen vom Nullvektor verschiedenen Vektoren aus dem eindimensionalen Komplement des $(k-1)$-dimensionalen Unterraumes $U$ bezüglich $T$. Schließlich seien $v_{k+1}, ..., v_n$ weitere Vektoren aus $\mathbb{E}^n$, die dieses Vektorsystem zu einer Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ von $\mathbb{E}^n$ vervollständigen.
Die Punktmenge $K := \{p_0, p_1, ..., p_{k-1}, p_{k+1} := p_0 + v_{k+1}, ..., p_n := p_0 + v_n\}$ ist nach dem Hilfssatz (1.2) dann eine Menge von $n$ affin unabhängigen Punkten

[1] Die Aussage dieses Satzes gilt natürlich auch in jedem k-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{E}^n$ $(1 < k < n)$. Hyperebenen sind dann die (k-1)-dimensionalen affinen Unterräume.

und der affine Träger von $K$ ist ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum, also eine Hyperebene $H$ des $\mathbb{E}^n$.
Auf Grund der Konstruktion von $H$ gilt nun $H \cap M = H' \cap M$ also ist $H$ eine Stützhyperebene an $M$ mit $H \cap ri(M) = \emptyset$. □

Wir wollen nun definieren, was man unter einer Seite einer konvexen Menge versteht. Die anschauliche Vorstellung von den Seiten eines Polyeders ist in gewisser Weise Vorbild für folgende Definition.

**Definition 1.13** Ist $M$ eine abgeschlossene konvexe Menge und $H$ eine Stützhyperebene dieser Menge, dann heißt $F = H \cap M$ eine ***Seite*** der Menge $M$.

Wie oben bereits bemerkt ist im Fall $\dim(\mathrm{aff}\ M) < n$ jede Hyperebene $H$, die die konvexe Menge $M$ enthält auch eine Stützhyperebene von $M$. Damit ist $M$ auch eine Seite von $M$. Man nennt $M$ die ***uneigentliche*** Seite von $M$. Alle von $M$ verschiedenen Seiten heißen ***eigentliche*** Seiten von $M$.
Eine eigentliche Seite $F$ von $M$ heißt eine ***maximale Seite***, wenn es keine eigentliche Seite $G$ von $M$ mit $F \subset G$ gibt. Analog dazu heißt $F$ ***minimale Seite*** von $M$, wenn keine Seite $G$ von $M$ mit $G \subset F$ existiert.

**Beispiel**: Es sei $M$ der in Definition 1.5 definierte Simplex, also

$$M = S = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i \quad \text{mit} \quad \lambda_0, ..., \lambda_n \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$

für $n+1$ affin unabhängige Punkte $p_0, ..., p_n$.

Da $\dim(\mathrm{aff}\ S) = n$ gilt, besitzt $S$ nur eigentliche Seiten. Die minimalen Seiten sind die $n+1$ Ecken des Simplex und seine maximalen Seiten sind die $n+1$ $(n-1)$-dimensionalen Simplexe

$$S_j = \{x \in \mathbb{E}^n |\ x = \sum_{i=0, i \neq j}^{k} \lambda_i p_i \text{ mit } \lambda_0, ..., \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, ..., \lambda_k \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0, i\neq j}^{k} \lambda_i = 1\}.$$

Dass bei konvexen Mengen die minimalen und maximalen Seiten zusammenfallen können, zeigt das Beispiel des Zylinders $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ im $\mathbb{E}^3$, bei dem die Mantellinien sowohl minimale als auch maximale und damit sämtliche eigentlichen Seiten dieser Menge sind.

Wir formulieren einige einfache Folgerungen aus der Definition dieses Begriffs.
Da neben den betrachtenen Mengen $M$ auch die Hyperebenen abgeschlossene konvexe Mengen in $\mathbb{E}^n$ sind, gilt dies auch für die Mengen $M \cap H$.

**Satz 1.21** *Jede Seite einer abgeschlossenen konvexen Menge $M$ ist eine abgeschlossene konvexe Menge.*

**Satz 1.22** *Der Durchschnitt zweier verschiedener Seiten $M \cap H_1$ und $M \cap H_2$ einer abgeschlossenen konvexen Menge $M$ ist entweder leer oder wiederum eine Seite von $M$, die auch eine gemeinsame Seite der Mengen $M \cap H_1$ und $M \cap H_2$ ist.*

*Beweis.* Es sei $p \in (H_1 \cap M) \cap (H_2 \cap M) = (H_1 \cap H_2) \cap M$. Die Vektoren $n_1$ und $n_2$ seinen Stellungsvektoren der Hyperebenen $H_1$ und $H_2$. Da die Hyperebenen Strützhyperebenen an $M$ sind, kann noch $\langle n_1, x\rangle, \langle n_2, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in M$ gefordert werden. Damit gilt dann auch $\langle n_1 + n_2, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in M$. Die Hyperebene $H$ durch $p$ mit dem Stellungsvektor $n_1 + n_2$ ist eine Stützhyperebene an $M$.

Für jeden Punkt $y$ der Menge $S = (H_1 \cap H_2) \cap M$ gilt $\langle y, n_1\rangle = \langle y, n_2\rangle = 0$, also ist auch $\langle y, n_1 + n_2\rangle = 0$. Damit gilt $S \subset H$.
Es gilt sogar $S = M \cap H$, den für $q \in M \cap H$ gilt sowohl $\langle q, n_1 + n_2\rangle = 0$ als auch $\langle n_1, q\rangle, \langle n_2, q\rangle \geq 0$. Hieraus folgt $\langle n_1, q\rangle = \langle n_2, q\rangle = 0$ und damit $q \in (H_1 \cap H_2)$. $S$ ist also eine Seite von $M$.
Wegen $S = (H_1 \cap M) \cap (H_2 \cap M) = H_1 \cap (H_2 \cap M) = H_2 \cap (H_1 \cap M)$ ist $S$ auch eine gemeinsame Seite von $(H_1 \cap M)$ und $(H_2 \cap M)$. □

In dem oben betrachteten Beispiel des Simplex ist die Vereinigungsmenge aller maximalen Seiten gerade die Menge der Randpunkte von $S$. Allgemein gilt

**Satz 1.23** *Die Vereinigungsmenge aller eigentlichen Seiten einer abgeschlossenen konvexen Menge ist gleich der Menge ihrer relativen Randpunkte, d.h.,*

$$\delta_r(M) = \bigcup \{F \mid F \textit{ eigentliche Seite von } M\}.$$

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, dass einelementige Mengen keine Randpunkte besitzen. Im Fall $M = \{p\}$ gilt $M = ri(M)$. Nach obiger Definition sind dann genau die Hyperebenen durch den Punkt $p$ Stützhyperebenen der Menge $M = \{p\}$, aber damit existieren auch keine eigentlichen Seiten von $M$.
Ist nun $p$ ein Punkt aus $\delta_r(M)$, dann existiert nach Satz 1.20 eine Stützhyperebene $H$ an $M$ durch diesen Punkt mit $M \not\subset H$. Damit ist $p$ ein Punkt der eigentlichen Seite $M \cap H$.
Ist umgekehrt $p$ Punkt einer eigentlichen Seite $F = M \cap H$ von $M$, dann enthält die Stützhyperebene $H$ nur Randpunkte, also Punkte aus $\delta_r(M)$. □

Nach diesem Satz liegt jeder Randpunkt einer abgeschlossenen konvexen Menge auf mindestens einer Seite dieser Menge. Die folgende Definition ordnet nun jedem Punkt einer solchen Menge eindeutig genau eine Seite der Menge zu.

**Definition 1.14** Ist $M$ eine abgeschlossene konvexe Menge und $x \in M$, dann heißt die Menge, die den Punkt $x$ und alle Punkte $y \in M$ enthält, für die die Gerade $g_{xy}$ eine offene Strecke $(ab)$ mit $x \in (ab) \subseteq M$ enthält, die ***p-Seite*** $F_x$ des Punktes $x$ von $M$.

Offensichtlich gilt auch für diesen Seitenbegriff $F_x = M$, wenn $x$ ein Punkt aus $ri\ M$ ist. Wir nennen $F_x$ deshalb eine uneigentliche p-Seite von $M$. Auch die Begriffe „eigentlich“, „maximal“ und „minimal“ werden wie für die in Definition 1.13 beschriebenen Seiten verwendet.

Es bleibt zunächst offen, ob die Menge der Seiten einer Menge $M$ nach Definition 1.13 mit der Menge der p-Seiten nach Definition 1.14 übereinstimmt. Wir beweisen zuerst einige Aussagen über p-Seiten.

**Satz 1.24** *Die p-Seite $F_x$ des Punktes $x$ einer Menge $M$ ist die größte konvexe Teilmenge $Q \subseteq M$, für die $x$ ein relativ innerer Punkt ist.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Konvexität von $F_x$. Dazu seien $y_1, y_2 \in F_x$ und $y$ sei ein Punkt der Strecke $[y_1y_2]$.
Im Fall $g_{xy_1} = g_{xy_2}$ ist nichts zu zeigen, denn dann ist natürlich auch $g_{xy} = g_{xy_1}$ und $y$ gehört somit zu $F_x$.
Wir setzen nun $x, y_1, y_2$ als nicht kollineare Punkte voraus. Ferner seien $a_1, a_2, b_1$ und $b_2$ die Punkte aus $M$, für die entsprechend Definition 1.14 $x \in (a_1b_1) \subset g_{xy_1}$ und $x \in (a_2b_2) \subseteq g_{xy_2}$ gilt. Jede Gerade der Ebene des Vierecks $a_1a_2b_1b_2$ durch $x$ schneidet dann entweder die Strecken $(a_1a_2)$, $(b_1b_2)$ oder $(a_1b_2)$, $(b_1a_2)$ in

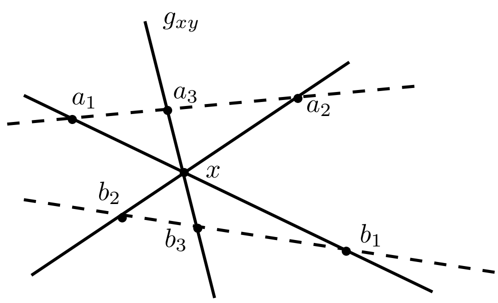



*Abb. 6*

Punkten $a_3, b_3$. Mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in M$ gilt wegen der Konvexität von $M$ dann auch $a_3, b_3 \in M$. Also existiert für $y \in (y_1y_2)$ auch eine offene Strecke $(a_3b_3)$ in $M$ mit $x \in (a_3b_3) \subset g_{xy}$ und damit ist $y \in F_x$.

Wir zeigen nun, dass $x \in ri\ F_x$ gilt. Für einelementige Mengen $F_x$, also wenn $F_x = \{x\}$ gilt, ist die Behauptung nach Definition 1.10 klar.

Anderenfalls existiert ein $y$ mit $x \neq y \in ri\, F_x$ nach Satz 1.10, da im ersten Teil des Beweises gezeigt wurde, dass $F_x$ konvex ist.

Wir erhalten Punkte $a, b \in M$ mit $x \in (ab) \subset g_{xy}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \in (a, y)$. Da zu $y$ eine Umgebung $U_\varepsilon(y)$ in aff $F_x$ mit $U_\varepsilon(y) \subseteq F_x$ existiert, gibt es auch eine solche Umgebung für $x$. Man betrachte etwa das

Bild $U_{t\cdot\varepsilon}(x)$ von $U_\varepsilon(y)$ bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum in $a$ und dem Streckungsfaktor $t := \frac{d(a,x)}{d(a,y)}$. Wegen der Konvexität von $F_x$ liegt auch diese Umgebung in $F_x$. Somit ist $x$ ein innerer Punkt von $F_x$.

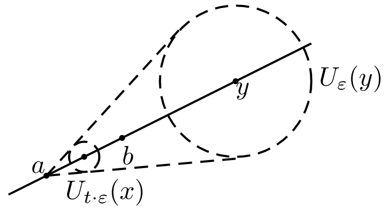



*Abb. 7*

Nun sei $Q$ eine konvexe Teilmenge von $M$ mit $x \in ri\ Q$ und $y$ ein von $x$ verschiedener Punkt von $Q$. Es gibt zu $x$ eine $\varepsilon-$Umgebung in aff $Q$, die ganz in $Q$ liegt. Wir setzen $\varepsilon' := \frac{1}{2}\varepsilon$ und $k := \{z \in \text{aff } Q |\ d(x,z) = \varepsilon'\}$ und erhalten zwei Punkte $a, b \in k \cap g_{xy}$ mit $x \in (ab) \subset M$. Also ist $y \in F_x$, womit $Q \subseteq F_x$ gezeigt ist.

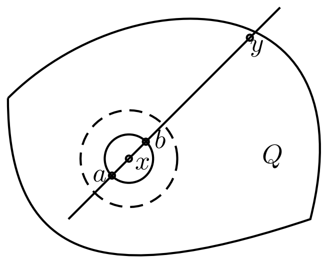



*Abb. 8*

Da $F_x$ selbst eine konvexe Menge mit $x \in ri\ F_x$ ist, ist mit dieser Inklusion auch die Maximalität von $F_x$ gezeigt. □

**Satz 1.25** *Für jeden Punkt $x$ einer abgeschlossenen konvexen Menge $M$ ist die p-Seite $F_x$ eine abgeschlossene konvexe Menge.*

*Beweis.* Es sei $F_x \neq \{x\}$ eine p-Seite von $M$ und $y \in \delta_r(F_x) \subset M$. Da $F_x$ konvex ist, gilt nach 1.11 dann $[xy] \setminus y \subset ri\ F_x$. Ist nun $z \in (xy)$, dann gilt $g_{xz} = g_{xy}$ und somit wegen $z \in F_x$ auch $y \in F_x$. □

**Satz 1.26** *Sind $F_x$ und $F_y$ p-Seiten der Punkte $x$ bzw. $y$ einer konvexen Menge $M$, dann gilt:*

*a) Es ist $F_x = F_y$ genau dann, wenn $y \in ri\ F_x$ gilt.*

*b) Aus $y \in \delta_r(F_x)$ folgt, dass $F_y$ p-Seite des Punktes $y$ von $F_x$ ist.*

*Beweis.* a) Nach Voraussetzung ist $F_x$ eine konvexe Menge, die $y$ als relativ inneren Punkt enthält. Mit der Maximalitätsaussage aus 1.24 folgt hieraus bereits $F_x \subseteq F_y$.

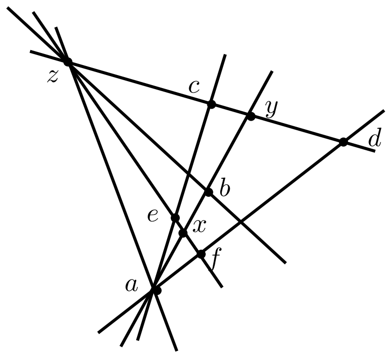



*Abb. 9*

Nun sei $z$ ein Punkt aus $F_y$. Falls $z$ ein Punkt der Geraden $g_{xy}$ ist folgt sofort wegen $y \in F_x$ auch sofort $z \in F_x$. Sind $x, y$ und $z$ nicht kollinear, dann gibt es also Punkte $a, b, c, d \in M$ mit $x \in (ab) \subset g_{xy}$ und $y \in (cd) \subset g_{yz}$. (Abb. 9) Dabei liegt entweder $a$ oder $b$ nicht in der Halbebene bezüglich der Geraden $g_{xz}$, die $y$ enthält. Ist dies der Punkt $a$, und wählen wir das Intervall $(cd)$ so klein, dass auch $z \notin (cd)$ gilt, dann schneiden die Strecken $(ac)$ und $(ad)$ die Gerade $g_{xz}$ in Punkten $e, f$ mit $x \in (ef) \subset g_{xz}$. Also ist $z \in F_x$. Insgesamt gilt also $F_x = F_y$. Die Umkehrung der Äquivalenz a) ist trivial.

b) Die Seite des Punktes $y$ bezüglich der Menge $M$ bzw. der ebenfalls konvexen Menge $F_x \subseteq M$ ist nach 1.24 die größte konvexe Teilmenge von $M$ bzw. von $F_x$ mit $y$ als relativ innerem Punkt von $M$ bzw. von $F_x$.
Da $F_x \subseteq M$ gilt und wie im Beweis zu a) aus $y \in F_x$ auch $F_y \subseteq F_x$ folgt, stimmen diese maximalen konvexen Mengen überein. $F_y$ ist also auch p-Seite des Punktes $y$ von $F_x$. Da nun $y \in \delta_r(F_x)$ vorausgesetzt wurde, folgt $F_x \neq F_y$ nach a). Damit ist $F_y$ sogar eine eigentliche p-Seite von $F_x$. □

**Beispiel**: Im $\mathbb{E}^3$ sind die Seitenflächen, Kanten und Ecken die eigentlichen Seiten gemäß Definition1.13 eines Würfels $W$. Dabei sind die Kanten und Ecken auch eigentliche Seiten der Seitenflächen, die ihrerseits die maximalen Seiten des Würfels sind. Die Ecken sind die minimalen Seiten des Würfels.

Für die p-Seiten $F_x$ des Würfels gilt nun:
- Ist $x$ eine Ecke des Würfels, dann ist $F_x = \{x\}$.
- Ist $x$ ein Punkt einer Kante $[ab]$, aber keine Ecke, dann ist $F_x = [ab]$.
- Liegt $x$ in $\delta W$, ist aber weder ein Eckpunkt noch Punkt einer Kante, dann ist

$F_x$ die Seitenfläche, in der dieser Punkt liegt.
- Schließlich gilt $F_x = W$ für alle $x \in int\ W$:

**Satz 1.27** *Ist der Durchschnitt zweier p-Seiten $F_x$ und $F_y$ einer Menge $M$ nicht leer, dann existiert ein $z$ mit $F_x \cap F_y = F_z$, d.h., der Durchschnitt ist selbst eine p-Seite von $M$.*

*Beweis.* Es seien $F_x, F_y$ zwei p-Seiten von $M$ mit nichtleerem Durchschnitt. Wir unterscheiden vier Fälle bezüglich der möglichen Lage eines gemeinsamen Punktes $z$. Nach dem Satz 1.26 führen diese Fälle auf folgende Situationen.

1. Existiert ein Punkt $z$ mit $z \in ri\ F_x \cap ri\ F_y$, dann gilt $F_z = F_x = F_y = F_x \cap F_y$.

2. Gibt es einen Punkt $z$ mit $z \in ri\ F_x$ und $z \in \delta_r(F_y)$, dann ist $F_z = F_x$ eine eigentliche Seite von $F_y$, also $F_z = F_x = F_x \cap F_y$.

3. Gilt $z \in \delta_r(F_x)$ und $z \in ri\ F_y$, dann folgt analog $F_z = F_y = F_x \cap F_y$.

4. Es bleibt noch der Fall $F_x \cap F_y \subseteq \delta_r(F_x), \delta_r(F_y)$ zu betrachten.
Existiert genau ein Punkt im Durchschnitt $F_x \cap F_y$, dann ist $F_z$ eine eigentliche Seite von $F_x$ und $F_y$. Damit gilt also $F_z \subset F_x \cap F_y = \{z\}$, also $F_x \cap F_y = F_z$.
Anderenfalls gibt es einen Punkt $z$ mit $z \in ri\ (F_x \cap F_y)$. Da der Durchschnitt beider Seiten konvex ist, erhalten wir dann ebenfalls $F_z = (F_x \cap F_y)$. □

**Satz 1.28** *Ist $M$ eine konvexe Menge im $\mathbb{E}^n$ und $H$ eine Stützhyperebene von $M$ durch den Punkt $x \in \delta_r(M)$, dann gilt $F_x \subseteq H$. Ist $F_x$ eine maximale p-Seite von $M$, dann gilt $F_x = M \cap H$.*

*Beweis.* Es sei $y \in F_x$. Nach Definition einer Seite existieren dann Punkte $a, b$ der Menge $M$ mit $x \in (ab) \subset g_{xy}$. Wäre $y$ kein Punkt der Hyperebene, dann hätten wir $g_{xy} \cap H = \{x\}$. Dann wären aber $a$ und $b$ Punkte in verschiedenen Halbräumen bezüglich $H$. Dies widerspricht der Stützebeneneigenschaft. Also gilt $y \in H$ und damit $F_x \subseteq H$.

Nun sei $F_x$ eine maximale Seite von $M$. Angenommen, es gäbe einen Punkt $y$ in $(H \cap M) \setminus F_x$. Wegen der Konvexität von $M$ gilt dann $[xy] \subseteq M$. Betrachtet man nun einen Punkt $z \in (xy)$, hätten wir offensichtlich $x, y \in F_z$. Die Seite $F_z$ ist eine eigentliche Seite, da $z$ auch ein Punkt der Stützhyperebene, also ein Randpunkt von $M$ ist. Nach 1.26 hätten wir dann aber entweder $F_x = F_z$ im Widerspruch zu $y \notin F_x$. Oder $F_x$ wäre eigenliche Seite von $F_z$, was der Maximalität der Seite $F_x$ widerspricht. Somit gilt $F_x = M \cap H$. □

Mit dem letzten Satz ist auch der Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen „Seite eine Menge $M$“ nach Definition 1.13 und „p-Seite eines Punktes $x$ der Menge $M$“ nach Definition 1.14 geklärt. Es gilt:

**Satz 1.29** *Ist $S = H \cap M$ eine Seite der Menge $M$ und $x \in S$, dann ist $F_x \subseteq S$, wobei sogar $F_x = S$ gilt, falls $F_x$ eine maximale Seite ist.*

Das folgende Beispiel zeigt allerdings, dass umgekehrt aus $F_x = S$ nicht notwendig die Maximalität von $F_x$ folgt.
Im Raum $\mathbb{R}^2$ sei $M$ die Vereinigungsmenge des Rechtecks $abcd$ mit der Halbkreisfläche über der Seite $[bc]$.

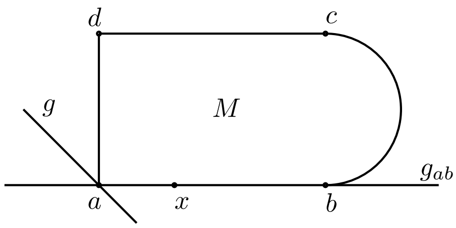



*Abb. 10*

Jede Gerade $g$ durch den Punkt $a$ mit $g \cap M = \{a\}$ ist eine Stützgerade an $M$, damit ist also $\{a\}$ eine Seite von $M$ und außerdem gilt $F_a = \{a\}$. Wegen $a \in g_{ab} \cap M = [ab] = F_x$ für $x \in (ab)$ ist $F_a$ aber keine maximale p-Seite.
Da $g_{ab}$ die einzige Stützgerade an $M$ durch den Punkt $b$ ist, ist $[ab]$ die einzige eigentliche Seite von $M$, die den Punkt $b$ enthält. Andererseits ist aber $F_b = \{b\}$. Damit zeigt das Beispiel auch, dass nicht jede p-Seite eine Seite von $M$ im Sinne von Definition 1.13 ist.

## 1.5 Konvexe Hülle

Der affine Träger einer Menge $M$ (*in der Literatur auch: affine Hülle von* $M$) wurde in 1.1. als Durchschnitt aller affinen Teilräume, die $M$ enthalten, definiert. In analoger Weise erklären wir jetzt die konvexe Hülle einer Menge.

**Definition 1.15** Der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die eine gegebene Teilmenge $X$ des $\mathbb{E}^n$ enthalten, heißt die ***konvexe Hülle*** *conv* $X$ von $X$.

$$conv\ X = \bigcap \mathbb{M} \quad \text{mit} \quad \mathbb{M} := \{M \subseteq \mathbb{E}^n |\ X \subseteq M \wedge M\ konvex\}$$

Nach Satz 1.5 ist *conv* $X$ eine konvexe Menge. Sie ist per Definition die kleinste konvexe Menge, die $X$ enthält. Weitere sich unmittelbar aus der Definition ergebende Eigenschaften fassen wir in folgendem Satz zusammen.

**Satz 1.30** *Die durch* $X \mapsto conv\ X$ *gegebene Abbildung hat folgende Eigenschaften einer Hüllenoperation:*

*(a)* $X \subseteq Y \Longrightarrow conv\ X \subseteq conv\ Y$

*(b)* $conv\ (conv\ X) = conv\ X$

*(c)* $X$ *konvex* $\Longleftrightarrow conv\ X = X$

Für den Umgang mit konvexen Hüllen von beliebigen Punktmengen nutzt man neben der angegebenen Definition auch hier eine zur Darstellung des affinen Trägers analoge algebraische Beschreibung von *conv* $M$ durch die Menge der von $M$ convex abhängigen Punkte. Wir beweisen zunächst eine entsprechende Aussage für endliche Punktmengen.

**Hilfssatz 1.31** *Ist* $M = \{p_0, p_1, ..., p_n\}$ *eine endliche Menge von Punkten, dann gilt*

$$conv\ M = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i |\ \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}$$

*Beweis.* Es seien $x$ und $y$ zwei beliebige Punkte aus der rechts stehenden Menge $K := \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i |\ \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}$. Es gibt also entsprechende Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ und $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n$ mit

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i \quad \text{und} \quad y = \sum_{i=0}^{n} \mu_i p_i.$$

Nun sei $z = tx + (1-t)y$ mit $0 < t < 1$ ein Punkt der Strecke $[x, y]$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} z &= t \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i + (1-t) \sum_{i=0}^{n} \mu_i p_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (t\lambda_i + (1-t)\mu_i) p_i \end{aligned}$$

mit $t\lambda_i + (1-t)\mu_i \geq 0$ für alle $i$ und

$$\sum_{i=0}^{n} (t\lambda_i + (1-t)\mu_i) = t \sum_{i=0}^{n} \lambda_i + (1-t) \sum_{i=0}^{n} \mu_i = t + (1-t) = 1.$$

Also gehört auch $z$ zur Menge $K$, die Menge K ist also auch konvex. Wegen $M \subset K$ gilt dann $conv\ M \subseteq conv\ K = K$ nach 1.30.
Wir zeigen nun noch die umgekehrte Inklusion $K \subseteq conv\ M$. Nach der Definition ist *conv* $M$ eine konvexe Menge. Diese enthält nach 1.4 alle von *conv* $M$ konvex abhängigen Punkte, also insbesondere die Menge $K$, die Menge aller von $M$ konvex abhängigen Punkte. □

**Bemerkung.** *Nach dem diesem Hilfssatz ist ein Simplex gerade die konvexe Hülle seiner Ecken.*

Wir formulieren nun den zu 1.31 analogen Satz für beliebige Mengen.

**Satz 1.32** *Für eine Teilmenge $X$ und einen Punkt $p$ gilt $p \in conv\ X$ genau dann, wenn es Punkte $p_0, p_1, ..., p_k \in X$ und nichtnegative reelle Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$ mit $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ und $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i = p$ gibt.*

*Beweis.* Wir folgen weitgehend der Beweisidee des vorangegangenen Hilfssatzes und zeigen zuerst die Konvexität der Menge.

$$K = \{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i |\ p_0, p_1, ..., p_k \in X,\ \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Sind $x$ und $y$ Punkte aus $K$, dann gibt es nichtnegative Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$ und $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_j$ sowie Punkte $p_0, p_1, ..., p_k, p'_0, p'_1, ..., p'_j \in X$ mit

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i \quad \text{und} \quad y = \sum_{i=0}^{j} \mu_i p'_i.$$

Ist nun $z = tx + (1-t)y$ mit $0 < t < 1$ ein Punkt der Strecke $[x, y]$, dann erhalten wir

$$z = t \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i + (1-t) \sum_{i=0}^{j} \mu_i p'_i.$$

Unabhängig davon, wieviele der Punkte $p'_i$ bereits zur Menge $\{p_0, p_1, ..., p_k\}$ gehören, sind alle Koeffizienten in obiger Darstellung $\geq 0$ und deren Summe beträgt auch hier 1. Damit gilt $z \in K$, die Menge $K$ ist konvex. Wie beim Beweis des Hilssatzes folgt hieraus $conv\ X \subseteq conv\ K = K$ wegen $X \subset K$.
Die umgekehrte Inklusion ergibt sich wie im vorangegangenen Beweis als Folgerung aus der Konvexität der konvexen Hülle. □

Bekanntlich ist die Dimension eines Untervektorraums die maximale Anzahl linear unabängiger Vektoren dieses Unterraums. Dementsprechend ist $k+1$ die maximale Anzahl affin unabhängiger Punkte eines $k-$dimensionalen Unterraums des $\mathbb{E}^n$. Wir zeigen nun, dass man auch höchstens $k+1$ Punkte einer Teilmenge eines solchen Unterraums benötigt, um jeden Punkt der konvexen Hülle diese Menge als Konvexkombination darzustellen.

**Satz 1.33** *Ist $M$ eine nichtleere Teilmenge eines $k-$dimensionalen Unterraums $\mathbb{T}^k$ des $\mathbb{E}^n$, dann läßt sicher jeder Punkt $x$ aus $conv\ M$ als Konvexkombination von höchstens $k+1$ Punkten aus $M$ darstellen.*

**Folgerung.** *Die konvexe Hülle einer beliebigen Teilmenge $M$ des $\mathbb{E}^n$ ist die Vereinigungsmenge aller k-Simplizes $(k \leq n)$ mit in $M$ gelegenen Ecken.*

*Beweis.* Es sei $x$ ein Punkt aus $conv\ M$ mit der Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i \quad \text{mit} \quad \lambda_0, ...\lambda_m \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1,$$

wobei zunächst $m > k$ sei.
Die Vektoren $p_1 - p_0, p_2 - p_0, ..., p_m - p_0$ sind wegen $m > k$ linear abhängig. Es existieren also Zahlen $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (p_i - p_0) = o \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{m} |\alpha_i| > 0,$$

das heißt, die Menge $I := \{i |\ \alpha_i \neq 0\}$ist nicht leer.
Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_0 = o,$$

setzen $\alpha_0 = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ und haben jetzt

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i p_i = o \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 0.$$

Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$\lambda_i(\varepsilon) := \lambda_i - \varepsilon \alpha_i$$

und definieren

$$\varepsilon_0 := \min_{i \in I} \{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} |\ \alpha_i \neq 0\} \quad \text{und} \quad I' := \{ i \in I |\ \varepsilon_0 = \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \}.$$

Offensichtlich ist $I' \neq \emptyset$ und es gilt

$$\lambda_i(\varepsilon_0) = 0 \quad \text{für} \quad i \in I' \quad \text{sowie} \quad \lambda_i(\varepsilon_0) > 0 \quad \text{für} \quad i \in I \setminus I'.$$

Außerdem gilt

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i(\varepsilon_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i - \varepsilon_0 \cdot \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$$

und

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i(\varepsilon_0) p_i = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i - \varepsilon_0 \cdot \sum_{i=0}^{m} \alpha_i p_i = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i = x.$$

Da nun aber für alle $i \in I'$ stets $\lambda_i(\varepsilon_0) = 0$ gilt, haben wir bereits eine Darstellung von $x$ durch

$$\sum_{i \in \{0,...,m\} \setminus I'} \lambda_i(\varepsilon_0) p_i.$$

Dabei gilt neben

$$\sum_{i \in \{0,...,m\} \setminus I'} \lambda_i(\varepsilon_0) = 1 \quad \text{auch} \quad \lambda_i(\varepsilon_0) > 0 \quad \text{für} \quad i \in \{0, ..., m\} \setminus I'.$$

Wegen $I' \neq \emptyset$ ist $\{0, ..., m\} \setminus I' \neq \{0, ..., m\}$. Die Menge $\{0, ..., m\} \setminus I'$ ist also eine echte Teilmenge der Menge $\{0, ..., m\}$. Enthält sie nur noch höchstens $k+1$ Elemente, dann haben wir die gesuchte Konvexkombination für $x$ gefunden, anderenfalls wiederholen wir das obige Vorgehen und erhalten nach endlich vielen Schritten eine solche Darstellung des Punktes.
Die Folgerung ist nun klar. □

**Satz 1.34** *Für beliebige Teilmengen $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ gilt*

$$conv\ (M_1 \cup M_2) = conv\ (conv\ M_1 \cup conv\ M_2).$$

*Beweis.* . Ist $M$ eine konvexe Menge, die die Menge $(conv\ M_1 \cup\ conv\ M_2)$ umfaßt, dann gilt auch $conv\ M_1, conv\ M_2 \subseteq M$ und $M_1, M_2 \subseteq M$. Also enthält $M$ auch die Menge $M_1 \cup M_2$. Nach der Definition 1.15 gilt damit
$conv\ (M_1 \cup M_2) \subseteq conv\ (conv\ M_1 \cup conv\ M_2)$. Umgekehrt folgt für jede konvexe Menge $M$ aus $M_1 \cup M_2 \subseteq M$ auch $M_1, M_2 \subseteq M$. Nach 1.30(a),(c) folgt hieraus $conv\ M_1,\ conv M_2 \subseteq\ conv\ M = M$, also auch $conv\ M_1 \cup\ conv M_2 \subseteq M$. Dies beweis die andere Inklusion. □

Im Beweis des letzten Satzes haben wir nur von der Definition der konvexen Hülle als Durchschnitt konvexer Mengen Gebrauch genmacht. Im folgenden Satz nutzen wir wieder die Darstellung von *conv M* als Menge aller Konvexkombinationen von Punkten aus $M$.

**Satz 1.35** *Es seien $M_1$ und $M_2$ nichtleere Punktmengen und $\nu_1, \nu_2$ beliebige reelle Zahlen. Für die Menge*

$$\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 := \{x \in \mathbb{E}^n |\ x = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2, \quad x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2\}$$

*gilt dann*

$$conv\ (\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2) = \nu_1\ conv\ M_1 + \nu_2\ conv\ M_2.$$

***Zusatz.*** *Sind $M_1$ und $M_2$ konvexe Mengen, dann ist auch $\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2$ eine konvexe Menge.*

*Beweis.* Es sei $x$ ein beliebiger Punkt aus $conv\ (\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2)$. Nach 1.32 gibt es endlich viele Punkte $p_0, ...p_k \in \nu_1 M_1 + \nu_2 M_2$ mit

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i, \quad \lambda_0, ..., \lambda_k \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1.$$

Zu jedem Punkt $p_i$ existieren Punkte $p_i^1, p_i^2$ mit $p_i^j \in M_j$ und $p_i = \nu_1 p_i^1 + \nu_2 p_i^2$. Wir haben also

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i = \nu_1 \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i^1 + \nu_2 \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i^2.$$

Die Konvexkombinationen $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i^1$ und $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i^2$ gehören zu *conv* $M_1$ bzw. zu *conv* $M_2$ und somit gilt bereits

$$x \in \nu_1 \; conv \; M_1 + \nu_2 \; conv \; M_2.$$

Nun sei $x$ als Punkt aus $\nu_1$ *conv* $M_1 + \nu_2$ *conv* $M_2$ vorausgesetzt. Es gibt also Punkte $x^i \in conv \; M_i$ mit $x = \nu_1 x^1 + \nu_2 x^2$. Dabei sind die Punkte $x^1, x^2$ Konvexkombinationen aus Punkten der Mengen $M_1$ bzw. $M_2$. Es sei für $x_0^1, ..., x_{k_1}^1 \in M_1$ und $x_0^2, ..., x_{k_2}^2 \in M_2$

$$x^j = \sum_{i=0}^{k_j} \lambda_i^j x_i^j, \quad \text{mit} \quad \lambda_0^j, ..., \lambda_{k_j}^j \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{k_j} \lambda_i^j = 1 \qquad (j = 1, 2).$$

Hieraus folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} \lambda_i^1 \lambda_j^2 (\nu_1 x_i^1 + \nu_2 x_j^2) &= \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} \lambda_i^1 \lambda_j^2 \nu_1 x_i^1 + \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} \lambda_i^1 \lambda_j^2 \nu_2 x_j^2 \\
&= \sum_{j=0}^{k_2} \lambda_j^2 \sum_{i=0}^{k_1} \lambda_i^1 \nu_1 x_i^1 + \sum_{i=0}^{k_1} \lambda_i^1 \sum_{j=0}^{k_2} \lambda_j^2 \nu_2 x_j^2 \\
&= 1 \cdot \sum_{i=0}^{k_1} \lambda_i^1 \nu_1 x_i^1 + 1 \cdot \sum_{j=0}^{k_2} \lambda_j^2 \nu_2 x_j^2 \\
&= \nu_1 \sum_{i=0}^{k_1} \lambda_i^1 1 x_i^1 + \nu_2 \sum_{j=0}^{k_2} \lambda_j^2 x_j^2 = \nu_1 x^1 + \nu_2 x^2 = x
\end{aligned}$$

wobei $\lambda_i^1 \lambda_j^2 \geq 0$ und auch $\sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} \lambda_i^1 \lambda_j^2 = 1$ gilt. Damit ist $x$ eine Konvexkombination der Punkte $\nu_1 x_i^1 + \nu_2 x_j^2$, die zur Menge $\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2$ gehören. Folglich ist $x$ ein Punkt der konvexen Hülle *conv* $(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2)$.
Damit ist der Satz bewiesen.

Der Zusatz ergibt sich nun wie folgt. Wenn $M_1$ und $M_2$ bereits konvexe Mengen sind, dann gilt *conv* $M_1 = M_1$ und *conv* $M_2 = M_2$. Nach dem eben bewiesenen Satz folgt also

$$conv \; (\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2) = \nu_1 \; conv \; M_1 + \nu_2 \; conv \; M_2 = \nu_1 M_1 + \nu_2 M_2,$$

also ist auch $\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2$ eine konvexe Menge. □

Dem soeben bewiesenen Satz entnehmen wir, dass der Übergang zur konvexen Hülle die Eigenschaften eines linearen Operators besitzt, denn es gilt für alle $\nu \in \mathbb{R}$ und alle Mengen $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{E}^n$

a) *conv* $(\nu M) = \nu$ (*conv* $M$) und

b) *conv* $(M_1 + M_2) =$ *conv* $M_1 +$ *conv* $M_2$.

Wir verallgemeinern nun noch den Begriff der Konvexkombination auf Mengen.

**Definition 1.16** Sind $M_1$ und $M_2$ nichtleere Mengen des $\mathbb{E}^n$, und sind $\nu_1, \nu_2$ nichtnegative reelle Zahlen mit $\nu_1 + \nu_2 = 1$, dann heißt die Menge $\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2$ eine Konvexkombination der Mengen $M_1$ und $M_2$.

Nach dem Zusatz zum Satz 1.35 ist jede Konvexkombination zweier konvexer Mengen wieder konvex. Man kann nun zeigen, dass man durch Vereinigung aller Konvexkombinationen zweier nichtleerer konvexer Mengen die konvexe Hülle der Vereinigung der beiden Mengen erhält. Es gilt dann also

$$conv\ (M_1 \cup M_2) = \bigcup_{\substack{\nu_1+\nu_2=1 \\ \nu_1,\nu_2 \geq 0}} (\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2).$$

(Beweis siehe [7], S.34 ff)

Dass diese Gleichheit für nichtkonvexe Mengen nicht gelten muß, zeigt das folgende Beispiel dreier affin unabhängiger Punkte $x, y, z$.
Es sei $M_1 = \{x, y\}$ und $M_2 = \{z\}$. Hier ist $M_1$ nicht konvex. Die konvexe Hülle von $M_1 \cup M_2$ ist das gesamte abgeschlossene Dreieck mit den Ecken $x, y$ und $z$. Dagegen liefert die Vereinigung der Konvexkombinationen nur die Strecken $[xz]$ und $[yz]$.

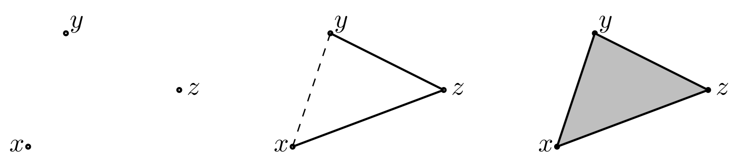



*Abb. 11*

Abschließend formulieren wir noch einige topologische Eigenschaften der Hüllenbildung.

**Satz 1.36** *Die konvexe Hülle einer offenen Menge $X$ ist ebenfalls eine offene Menge.*

*Beweis.* Ist $X$ eine offene Menge, dann gilt bekanntlich $X = ri\ X$. Außerdem gilt $X \subseteq conv\ X$, also haben wir bereits $X = ri\ X \subseteq ri\ (conv\ X)$. Nach 1.10, hier angewandt auf das relative Innere, ist auch $ri\ (conv\ X)$ eine konvexe Menge. Somit gilt nach der Definition der konvexer Hüllen $conv\ X \subseteq\ ri\ (conv\ X)$. Da die umgekehrte Inklusion trivial ist, gilt sogar $conv\ X =\ ri\ (conv\ X)$. Somit ist die Menge $conv\ X$ offen. □

Eine zu 1.36 analoge Eigenschaft für abgeschlossener Mengen gilt bemerkenswerterweise nicht. Als Gegenbeispiel betrachten wir die aus einer Geraden $g$ und einem nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt $p$ bestehende abgeschlossenen Menge $M = g \cup \{p\}$. Als konvexe Hülle von $M$ erhalten wir hier einen halboffenen „*Streifen*“ zwischen $p$ und $g$.

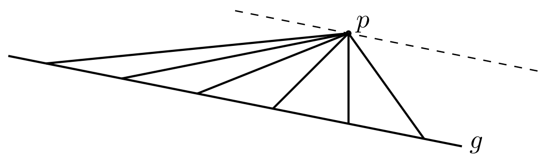



*Abb. 12*

Im Gegensatz dazu kann man für kompakte bzw. beschränkte Mengen zeigen, dass die konvexen Hüllen solcher Mengen wieder kompakt bzw. beschränkt sind.

## 1.6 Extrempunkte und konvexe Polytope

Als Folgerung aus dem Hilfssatz 1.31 ergab sich, dass ein Simplex die konvexe Hülle seiner Ecken ist. Wir definieren nun Punkte, die bei beliebigen konvexen Mengen diese Eigenschaft besitzen.

**Definition 1.17** Ein Punkt $p$ einer konvexen Menge $M$ heißt ein ***Extrempunkt*** der Menge $M$, wenn $M \setminus \{p\}$ konvex ist. Die Menge der Extrempunkte einer Menge $M$ bezeichnen wir mit *ext* $M$.

Eine äquivalente Fassung dieses Begriffs liefert folgender Hilfssatz.

**Hilfssatz 1.37** *Ein Punkt $p$ ist Extrempunkt der Menge $M$ genau dann, wenn es keine Punkte $a, b \in M$ mit $p \in (ab)$ gibt.*

*Beweis.* Gäbe es Punkte $a, b \in M$ mit $p \in (ab)$, dann wäre $M \setminus \{p\}$ nicht konvex. Umgekehrt erfüllt die Menge $M \setminus \{p\}$ offensichtlich die Definition 1.3, wenn solche Punkte nicht existieren. $\square$

Unmittelbar aus der Definition ergibt sich auch die folgende Behauptung.

**Satz 1.38** *Ist $X$ eine Teilmenge des $\mathbb{E}^n$ und ist $M = conv\ X$ deren konvexe Hülle, dann gilt ext $M \subseteq X$.*

*Beweis.* Wäre $p$ ein Extrempunkt von $M$, der nicht zu $X$ gehört, dann wäre nach der Definition 1.15 aber $conv\ X \subseteq M\backslash\{p\}$ im Widerspruch zu $M = conv\ X$. $\square$

**Beispiel:** Ein erstes Beispiel für die Menge $ext\ M$ ist die Eckenmenge $\{p_0, ..., p_n\}$ des Simplex $S$ entsprechend Definition 1.5.
Einerseits gilt $ext\ S \subseteq \{p_0, ..., p_n\}$ nach obigem Satz 1.38. Andererseits ist jede Ecke $p_k$ ein Extrempunkt von $S$, denn sonst gäbe es nach 1.37 Punkte $a, b \in S$ mit $p_k \in (ab)$. Aus den entsprechenden Darstellungen

$$a = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i, \quad b = \sum_{i=0}^{n} \beta_i p_i \quad \text{und} \quad p_k = \lambda a + (1-\lambda)b \quad \text{mit} \quad 0 < \lambda < 1$$

für diese Punkte erhielten wir

$$p_k = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i + (1-\lambda) \cdot \sum_{i=0}^{n} \beta_i p_i = \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot \alpha_i + (1-\lambda) \cdot \beta_i) p_i.$$

Dies liefert wegen $\sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot \alpha_i + (1-\lambda) \cdot \beta_i) = 1$

$$o = \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot \alpha_i + (1-\lambda) \cdot \beta_i) p_i - 1 \cdot p_k = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (\lambda \cdot \alpha_i + (1-\lambda) \cdot \beta_i)(p_i - p_k)$$

mit den $n$ linear unabhängigen Vektoren $p_i - p_k$ $(i \neq k)$, also $\lambda \cdot \alpha_i + (1-\lambda) \cdot \beta_i = 0$ für alle $i \neq k$. Hieraus folgt sofort $\alpha_i = \beta_i = 0$ für alle $i \neq k$, und folglich dann $a = \alpha_k p_k$ und $b = \beta_k p_k$. Damit gilt nun entweder $p_k = a$, $p_k = b$ oder $\alpha_k, \beta_k < 1$. Also in jedem Fall ein Widerspruch zu $p_k \in (ab)$.
Damit gilt auch $\{p_0, ..., p_n\} \subseteq ext\ S$, also insgesamt $ext\ S = \{p_0, ..., p_n\}$.

Nach dem Hilfssatz 1.37 kann ein innerer Punkt, allgemeiner ein Punkt aus $ri\ M$, niemals ein Extrempunkt von $M$ sein. Daraus ergibt sich die Aussage des nächsten Satzes.

**Satz 1.39** *Jeder Extrempunkt einer konvexen Menge $M$ ist ein Randpunkt von $M$ relativ zum affinen Träger aff $M$, es ist also $ext\ M \subseteq \delta_r M$.*

Wir beziehen nun wieder die Stützhyperebenen konvexer Mengen mit ein, deren Durchschnitte mit den Mengen wiederum konvexe Mengen sind.

**Satz 1.40** *Ist $M$ eine konvexe Menge des $\mathbb{E}^n$ und $H$ eine Stützhyperebene von $M$, dann gilt*

$$ext\ (M \cap H) = (ext\ M) \cap H.$$

*Beweis.* Aus der trivialen Inklusion $M \cap H \subseteq M$ folgt sofort

$$(ext\ M) \cap H \subseteq ext\ (M \cap H),$$

denn nach der Definition 1.17 ist ein Extrempunkt $p$ von $M$, der in $H$ liegt, auch Extrempunkt der konvexen Teilmenge $M \cap H$.
Es sei nun $p \in ext\ (M \cap H)$, dann existieren keine Punkte $a, b \in M \cap H$ mit $p \in (ab)$. Gäbe es aber Punkte $a, b \in M$ mit $p \in (ab)$, dann würden diese wegen $p \in H$ ebenfalls zu $H$ gehören, denn $H$ wurde als Stützhyperebene von $M$ vorausgesetzt. Also gilt $p \in ext\ M$ bzw. $p \in ext\ M \cap H$. □

Der folgende Satz aus einer Arbeit von Krein und Milman aus dem Jahr 1940 stellt eine Verschärfung der Aussage von Satz 1.38 für kompakte konvexe Mengen dar.

**Satz 1.41 (Krein-Milman)** *Für abgeschlossene und beschränkte konvexe Teilmengen des $\mathbb{E}^n$ gilt $M = conv\ (ext\ M)$.*

*Beweis.* Wir übernehmen den Beweis durch vollständige Induktion über die Dimension des affinen Trägers von $M$ aus [6], S. 37.
Ist $\dim\ \text{aff}\ M = 0$, dann besteht $M$ nur aus einem einzigen Punkt $p$ und es gilt $M = ext\ M = conv\ (ext\ M) = \{p\}$.
Unter der Annahme, die Behauptung sei für alle $k = \dim\ \text{aff}\ M < m$ bewiesen, zeigen wir nun die Aussage für den Fall $m = \dim\ \text{aff}\ M$.
Die Inklusion $conv\ (ext\ M) \subseteq M$ ist trivial, da $M$ als konvex vorausgesetzt wurde. Nun sei $x$ ein beliebiger Punkt aus $M$ und $g$ eine Gerade durch diesen Punkt, die in aff $M$ liegt. Der Durchschnitt $g \cap M$ ist dann eine Strecke $[yz]$, denn $M$ ist kompakt und konvex. Insbesondere gilt $y, z \in \delta_r(M)$. Mit $Y$ und $Z$ bezeichnen wir nun die nach Satz 1.19 existierenden (m-1)-dimensionalen Stützhyperbenen aus aff $M$ an die Menge $M$ in den Punkten $y$ und $z$. Die Schnitte dieser Hyperebenen mit $M$ sind dann kompakte und konvexe Mengen mit

$$\dim(\text{aff}\ (M \cap Y)), \dim(\text{aff}\ (M \cap Z)) \leq m - 1.$$

Wir wenden nun Satz 1.40 im m-dimensionalen Raum aff $M$ an und erhalten unter Nutzung der Induktionsannahme

$$conv(ext\ M \cap Y) = conv(ext(M \cap Y)) = M \cap Y$$

und

$$conv(ext\ M \cap Z) = conv(ext(M \cap Z)) = M \cap Z.$$

Da nun $y \in M \cap Y \subseteq conv(ext\ M)$ und $z \in M \cap Z \subseteq conv(ext\ M)$ gilt, haben wir auch $x \in g \cap M = [yz] \subseteq conv(ext\ M)$. Damit ist auch $M \subseteq conv(ext\ M)$ gezeigt. □

Wir wenden uns jetzt speziell den konvexen Hüllen endlicher Mengen zu.

**Definition 1.18** Die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge $\{p_0, ...p_k\}$ heißt das von $p_0, ..., p_k$ aufgespannte (konvexe) ***Polytop***.

Polytope sind nach dieser Definition abgeschlossene konvexe Mengen. Eine erste bemerkenswerte Eigenschaft liefert der folgende Satz von J. Radon (1887-1956).

**Satz 1.42** *Ist* $X = \{p_0, ..., p_k\}$ *eine Menge von mindestens* $n+2$ *Punkten des* $n$*-dimensionalen Raumes* $\mathbb{E}^n$*, dann kann* $X$ *derart in zwei disjunkte Teilmengen* $Y$ *und* $Z$ *zerlegt werden, dass die von den Mengen* $Y$ *und* $Z$ *aufgespannten Polytope einen nichtleeren Durchschnitt haben.*

*Beweis.* Nach der Voraussetzung über $X$ gilt $k \geq n+1$ und die Punktmenge ist affin abhängig. Damit existiert für mindestens einer der Punkte eine Darstellung der Form

$$p_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i p_i \quad \text{mit} \quad \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad j \neq i \in \{0, 1, ..., k\},$$

das heißt, es existieren Zahlen $\alpha_0, ..., \alpha_{j-1}, -1, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_k$ mit

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i = o \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad (\alpha_0, ..., \alpha_k) \neq (0, ..., 0).$$

Durch Umnumerierung können wir für die Koeffizienten

$$\alpha_0, ..., \alpha_{k'} > 0, \qquad \alpha_{k'+1}, ..., \alpha_k \leq 0 \quad \text{mit} \quad 1 \leq k' < k$$

erreichen.

Damit kann nun die durch obige Relation beschriebene affine Abhängigkeit durch

$$p := \sum_{i=0}^{k'} \alpha_i p_i = - \sum_{i=k'+1}^{k} \alpha_i p_i$$

ausgedrückt werden. Wir setzen

$$\beta_i := \frac{\alpha_i}{\sum_{i=0}^{k'} \alpha_i} \quad \text{für} \quad i \in \{0, 1, ..., k'\}$$

und

$$\gamma_i := \frac{\alpha_i}{\sum_{i=k'}^{k} \alpha_i} \quad \text{für} \quad i \in \{k'+1, ..., k\}$$

und erhalten wegen $\sum_{i=0}^{k'} \alpha_i = - \sum_{i=k'+1}^{k} \alpha_i$

$$q = \frac{p}{\sum_{i=0}^{k'} \alpha_i} = \sum_{i=0}^{k'} \beta_i p_i = - \sum_{i=k'+1}^{k} \gamma_i p_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{k'} \beta_i = \sum_{i=k'+1}^{k} \gamma_i = 1.$$

Für die Mengen $Y := \{p_0, ..., p_{k'}\}$ und $Z := \{p_{k'+1}, ..., p_k\}$ gilt damit

$$q \in conv\ Y \cap conv\ Z.$$

□

Wesentlich leichter einzusehen ist, dass die konvexe Hülle der Vereinigungsmenge zweier konvexer Polytope wieder ein konvexes Polytop ist.

**Satz 1.43** *Für beliebige endliche Teilmengen* $\{x_0, ..., x_k\}$ *und* $\{y_0, ..., y_l\}$ *des* $\mathbb{E}^n$ *gilt*

$$conv\ (conv\ \{x_0, ..., x_k\} \cup conv\ \{y_0, ..., y_l\}) = conv\ \{x_0, ..., x_k, y_0, ..., y_l\}.$$

*Beweis.* Die Inklusion

$$conv\ (conv\ \{x_0, ..., x_k\} \cup conv\ \{y_0, ..., y_l\}) \supseteq conv\ \{x_0, ..., x_k, y_0, ..., y_l\}$$

ergibt sich unmittelbar aus der Definition der konvexen Hülle, denn jede konvexe Menge die $conv\ \{x_0, ..., x_k\} \cup conv\ \{y_0, ..., y_l\}$ umfaßt, enthält auch alle Punkte $x_0, ..., x_k, y_0, ..., y_l$.
Nun sei $p \in conv\ (conv\ \{x_0, ..., x_k\} \cup conv\ \{y_0, ..., y_l\})$ vorausgesetzt, also ist $p$ eine Konvexkombination von Punkten aus der Vereinigungsmenge von $conv\ \{x_0, ..., x_k\}$ und $conv\ \{y_0, ..., y_l\}$. Es sei etwa $p = \lambda x + (1-\lambda)y$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ sowie $x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i$ und $y = \sum_{i=0}^{l} \beta_i y_i$ mit $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = \sum_{i=0}^{l} \beta_i = 1$.
Wir erhalten

$$p = \sum_{i=0}^{k} \lambda\alpha_i x_i + \sum_{i=0}^{l} (1-\lambda)\beta_i y_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda\alpha_i + \sum_{i=0}^{l} (1-\lambda)\beta_i = \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Damit liegt $p$ als Konvexkombination der Punkte $x_0, ..., x_k, y_0, ..., y_l$ in deren konvexer Hülle. □

Dass ein analoger Satz für den Durchschnitt zweier Mengen $\{x_0, ..., x_k\}$ und $\{y_0, ..., y_l\}$ nicht gilt, zeigt bereits das triviale Gegenbeispiel $k = l = 1$ mit $x_1 \neq y_1$.

Nach dem Satz 1.38 ist für jedes Polytop $P = conv\{p_o, ..., p_k\}$ die Menge der Extrempunkte von $P$ eine Teilmenge der aufspannenden Punktmenge, also $ext\ P \subseteq \{p_0, ..., p_k\}$. Wir nennen die Extrempunkte eines Polytops im folgenden auch kurz die ***Ecken*** des Polytops.
Da ein Polytop nach der angegebenen Definition eine abgeschlossene und beschränkte konvexe Menge ist, erhalten wir die folgende Aussage als Folgerung aus dem Satz 1.41.

**Satz 1.44** *Für jedes konvexe Polytop* $P$ *gilt* $P = conv\ (ext\ P)$.

Da ein Polytop als konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge $\{p_o, ..., p_k\}$ definiert wurde, ist die Menge $ext\ P$ nach 1.38 ebenfalls eine endliche Menge. Deshalb kann der Beweis von 1.41 für diesen Fall auch anders erbracht werden. Wir geben hier zusätzlich einen solchen Beweis für 1.44 an.

Ist $P = conv\ \{p_o, ..., p_k\}$ und einer der Punkte $p_i$ keine Ecke von $P$, dann ist $P \setminus \{p_i\}$ nach der Definition 1.17 nicht mehr konvex. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies für $p_k$ angenommen. Damit muss es Punkte $a, b$ in $P$ mit

$p_k \in (ab)$ geben. Aus den Konvexkombinationen

$$a = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i, \qquad b = \sum_{i=0}^{k} \beta_i p_i \quad \text{und} \quad p_k = \lambda a + (1-\lambda) b$$

erhalten wir

$$p_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i) p_i + (\lambda\alpha_k + (1-\lambda)\beta_k) p_k \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{k} (\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i) = 1$$

bzw.

$$(1 - (\lambda\alpha_k + (1-\lambda)\beta_k)) p_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\lambda\alpha_i + (1 - \lambda\beta_i) p_i.$$

Im Fall $(1 - (\lambda\alpha_k + (1-\lambda)\beta_k)) = 0$ bzw. $(\lambda\alpha_k + (1-\lambda)\beta_k) = 1$ hätten wir $\sum_{i=0}^{k-1} (\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i) = 0$ woraus aber $\alpha_0, ..., \alpha_{k-1}, \beta_0, ..., \beta_{k-1} = 0$ und damit $a = \alpha_k p_k$ und $b = \beta_k p_k$ im Widerspruch zu $p_k \in (ab)$ folgen würde. Wir können durch $(1 - (\lambda\alpha_k + (1-\lambda)\beta_k))$ dividieren und erhalten mit

$$p_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i}{(1 - (\lambda\alpha_k + (1-\lambda)\beta_k))} p_i$$

eine Darstellung von $p_k$ als Konvexkombination der restlichen Punkte, denn die Summe der Koeffizienten in dieser Darstellung ist offensichtlich 1. Damit gilt dann aber $p_k \in \mathit{conv}\ \{p_0, ..., p_{k-1}\}$, das heißt, es ist bereits

$$P = \mathit{conv}\ \{p_0, ..., p_k\} = \mathit{conv}\ \{p_0, ..., p_{k-1}\}.$$

Nach endlich vielen Wiederholungen dieser Schlußkette ergibt sich wegen 1.38 zwangsläufig die Behauptung von 1.44.

Wir formulieren abschließend noch einige Aussagen über die Seiten eines Polytops $P$. Zunächst betrachten wir die Seiten entsprechend der Definition 1.13, also die Schnittmengen $P \cap H$ mit Stützhyperebenen.

**Satz 1.45** *Jede Seite $P \cap H$ eines Polytops $P$ ist selbst ein Polytop. Die Ecken von $P \cap H$ sind genau die Ecken von $P$, die in $H$ liegen.*

*Beweis.* Gemäß Satz 1.44 sei $P = \mathit{conv}\ (\mathit{ext}\ P)$ ein konvexes Polytop im $\mathbb{E}^n$. Für die Seite $P \cap H$ gilt dann nach 1.40

$$\mathit{ext}(P \cap H) = \mathit{ext}\ P \cap H$$

und damit

$$P \cap H = \mathit{conv}\ (\mathit{ext}(P \cap H)) = \mathit{conv}\ (\mathit{ext}\ P \cap H).$$

Da $ext\ P \cap H$ eine endliche Menge ist, ist $P \cap H$ nach Definition ein Polytop mit der Eckenmenge $ext\ P \cap H$. $\square$

Wir geben einige Bespiele für Polytope im $\mathbb{E}^3$.

**Tetraeder**: Sind $p_0, p_1, p_2, p_3$ vier affin unabhängige Punkte, also die Ecken des 3-Simplex $T = conv\ \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, dann sind die vier Dreiecke $conv\ \{p_i, p_j, p_k\}$ $(i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad i \neq j \neq k \neq i)$, die sechs Strecken $[p_i p_k]$ $(i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad i \neq k)$ und die die vier Ecken $p_0, p_1, p_2, p_3$ die eigentlichen Seiten dieses Polytops. Das Tetraeder ist das einzige Polytop im $\mathbb{E}^3$ mit affin unabhängigen Ecken.
Analog sind die $k$-Simplize im $k$-dimensionalen Raum $\mathbb{E}^k$ die einzigen Polytope mit affin unabhängigen Eckenpunktmengen.

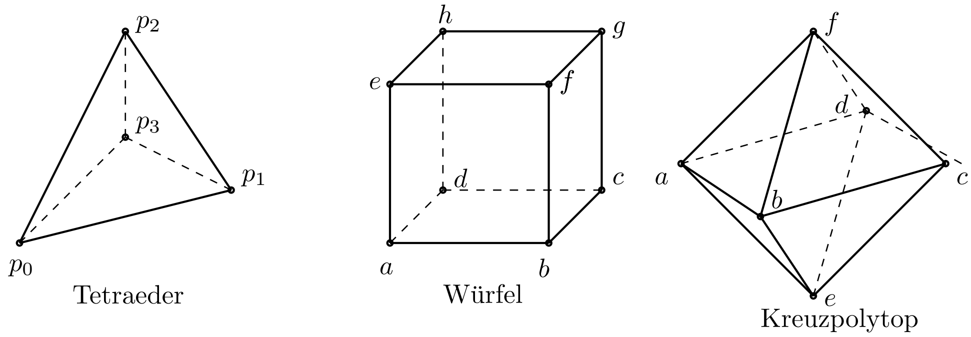



*Abb. 13*

***Würfel***: Die Ecken eines Würfels $abcdefgh$ sind natürlich affin abhängig, und da $8 > 3+1$ gilt sind die Voraussetzungen von 1.42 erfüllt. Die disjunkten Teilmengen $Y = \{a, c, f, h\}$ und $Z = \{b, d, e, g\}$ realisieren die Aussage des Satzes. Neben den acht minimalen Seiten in Form der Ecken haben wir sechs Vierecke und zwölf Strecken als eigentliche Seiten dieses Polytops.
Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems im $\mathbb{E}^n$ kann der Würfel (Parallelepiped) als konvexe Hülle der $2^n$ Punkte $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ mit $\varepsilon_i \in \{1, 2\}$ dargestellt werden.

***Kreuzpolytop***: Als Kreuzpolytop bezeichnet man im $\mathbb{E}^n$ die Punktmenge

$$P_n := \{x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) | \ \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \leq 1\}.$$

Es ist die konvexe Hülle der $2n$ Punkte $\pm e_i = (\pm\delta_{1i}, \pm\delta_{2i}, ..., \pm\delta_{ni})$.
Das Kreuzpolytop $P_3$ hat acht Dreiecke, zwölf Strecken und sechs Punkte als eigentliche Seiten.

Zum Abschluß dieses Kapitels formulieren wir noch einige Aussagen ohne Beweis über Polytpe und deren Seiten. (vgl. dazu [6])

1. Eine Eigenschaft der Seiten eines Polytops, die an den Beispielen im $\mathbb{E}^3$ leicht einzusehen ist, gilt allgemein für Polytope.

   **Satz 1.46** *Jede Seite einer Seite eines Polytops $P$ ist eine Seite von $P$.*

2. Da die Eckenzahl eine Polytops endlich ist, existieren auch nur endlich viele eigentlichen Seiten eines Polytops. Nach den Satz 1.22 bilden die eigentlichen Seiten eines Polytops bezüglich der Inklusion als Ordnung einen endlichen Verband $V(P)$. Man nennt deshalb zwei Polytope $P$ und $Q$ des $\mathbb{E}^n$ kombinatorisch äquivalent, wenn deren Verbände $V(P)$ und $V(Q)$ isomorph sind. Somit sind zum Beispiel im $\mathbb{R}^3$also alle Tetraeder untereinander und alle 4-seitigen Prismen zum Würfel kombinatorisch äquivalent.

3. Nach dem Satz 1.27 wissen wir, dass die p-Seite $F_x$ einer konvexen Menge in jeder Stützhyperebene des Polytops durch den Punkt $x$ liegt, wenn dieser ein Punkt des relativen Randes $\delta_r(M)$ des Polytops ist. Die maximalen Seiten sind sogar identisch mit dem Durchschnitt des Polytops mit diesen Hyperebenen.
   Ist das Polytop $P$ nun sogar ein konvexer Körper und $F_x$ eine maximale p-Seite von $P$, dann gilt $\dim \operatorname{aff} F_x = n - 1$. Somit ist $H := \operatorname{aff} F_x$ die eindeutig bestimmte Hyperebene mit $x \in H$ und $F_x = P \cap H$.

   Es gilt sogar allgemeiner, dass jede p-Seite $F_x$ eines konvexen Polytops $P$ auch eine Seite von $P$ im Sinne von Definition 1.13 ist, also als Schnitt von $P$ mit einer geeigneten Stützhyperebene darstellbar ist.

   **Satz 1.47** *Jede p-Seite eines Polytops $P$ ist eine Seite des Polytops, das heißt, zu jedem $x \in \delta_r(P)$ existiert eine Stützhyperebene an $P$ durch $x$ mit $F_x = P \cap H$.*

   Dass dies für beliebige konvexe Mengen nicht zutrifft, zeigte das Beispiel am Ende des Abschnitts 1.4. Für die p-Seite $F_b = \{b\}$ existierte keine Stützhyperebene $H$ an $M$ mit $F_b = M \cap H$.
   Damit gilt auch der Satz 1.46 nicht für beliebige beschränkte konvexe Mengen, denn $F_b$ ist zwar eine Seite der Seite $[ab]$ , aber selbst eben keine Seite von $M$.

# Kapitel 2

# Konvexe Mengen in normierten Räumen

Im diesem Kapitel wollen wir einen Konvexitätsbegriff in normierten Räumen definieren, der zwar ebenfalls durch die Abgeschlossenheit bezüglich gewisser Verbindungsstrecken erklärt wird, der sich aber im allgemeinen von der linearen Konvexität des ersten Abschnitts unterscheidet, weil von einem anderemn Streckenbegriff ausgegangen wird. Grundlage der neuen Auffassung von Verbindungsstrecke ist die durch die Norm induzierte Metrik $d$ des Raumes. Wir sprechen dann auch von $d$-Strecken und $d$-konvexen Mengen, zur Unterscheidung nennen wir die konvexen Mengen entsprechend der Definition 1.3 nun konsequent „linear konvex".

## 2.1 Normierte Räume und konvexe Eichfiguren

Im diesem Abschnitt bezeichne $R^n$ einen $n$-dimensionalen affinen Raum. Wir verzichten also zunächst auf eine durch ein Skalarprodukt definierte Metrik.

**Definition 2.1** Eine reelle Funktion $\| \quad \|$: $R^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine ***Norm*** auf $\mathbb{R}^n$ und $(R^n, \| \quad \|)$ heißt ***normierter Vektorraum*** genau dann, wenn für alle Vektoren $x, y \in R^n$ und alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Bedingungen gelten:

N1: $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = o$

N2: $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

N3: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Wie im Abschnitt 1.1 erwähnt, wird der euklidische Raum durch das dort definierte Sklalarprodukt $\langle \ , \ \rangle$ vermöge $\|x\|_e := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ zu einem normierten Raum.

Zur Unterscheidung vom affinen Raum $R^n$ verwenden wir ab sofort für den entsprechenden normierten Raum $(R^n, \| \ \|)$ abkürzend die Bezeichnung $\mathbb{R}^n$. Etwas genauer heißt das, $\mathbb{R}^n$ ist der n-dimensionale reelle Vektorraum, auf dem eine Norm gegeben ist.

Im n-dimensionalen euklidischen Raum beschreibt $\{x \mid \|x\|_e = 1\}$ bekanntlich die Punktmenge der Einheitssphäre $S^{n-1}$. Wir definieren nun allgemeiner:

**Definition 2.2** Ist $\mathbb{R}^n$ ein $n$-dimensionaler normierter Raum, dann heißt die Menge

$$\Sigma := \{x| \ \|x\| \leq 1\}$$

die ***Einheitskugel*** oder auch die ***Eichfigur*** auf $\mathbb{R}^n$.

Wie die Kugeln im $\mathbb{E}^n$ sind auch die Eichfiguren in normierten Räumen linear konvexe Mengen.

**Satz 2.1** *Ist $p$ ein Punkt des $\mathbb{R}^n$, dann ist*

$$\Sigma_p := \{x \mid \|x - p\| \leq 1\}$$

*eine abgeschlossene und beschränkte linear konvexe Punktmenge.*

*Beweis.* Abgeschlossenheit und Beschränktheit von $\Sigma_p$ sind klar, und wegen 1.6 genügt es offenbar die Konvexität für den Fall $p = o$ zu beweisen.
Sind also $x, y \in \Sigma_o$ und ist $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$, dann gilt nach $N3$ und $N2$

$$\begin{aligned} \|z\| &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \\ &\leq \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| \\ &= \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \\ &\leq \lambda + (1 - \lambda) = 1. \end{aligned}$$

□

Den Begriff Eichfigur rechtfertigen wir nun, indem wir zeigen, dass durch jeden abgeschlossenen beschränkten[1] linear konvexen Körper $\Sigma$ im $R^n$, der überdies zentralsymmetrisch ist, eine Norm im $R^n$ induziert wird, bezüglich der $\Sigma$ die Einheitskugel ist. Dazu sei $\Sigma \subset R^n$ eine solche bezüglich eines Punktes $p$ zentralsymmetrische Punktmenge. Ist nun $q$ ein beliebiger Punkt des $R^n$, dann betrachten wir die Halbgerade $\{x| \ x = p + \lambda(q - p), \ t > 0\}$ und den Schnittpunkt $p_1$ dieser Halbgeraden mit dem Rand $\delta\Sigma_p$.
Die Voraussetzungen über $\Sigma$ sichern, dass stets genau ein solcher Schnittpunkt existiert.

[1] Die topologischen Begriffe abgeschlossen und beschränkt sind hier im Sinne der euklidischen Metrik auf $R^n$ zu verstehen.

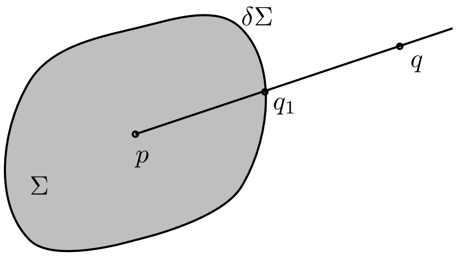



*Abb. 14*

Definiert man nun

$$\|p-q\| = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad p = q \\ t & \text{für} \quad t \cdot (q_1 - p) = (q-p), \end{cases}$$

dann ist dadurch eine Norm auf dem Vektorraum $V^n = \{q-p \mid q \in R^n\}$ gegeben. Die Normeigenschaft $N1$ folgt dabei unmittelbar aus der Definition.
Der Definition von $\|p-q\|$ entnimmt man auch, dass $\|p-q\| \leq 1$ für $q \in \Sigma_p$ und $\|p-q\| = 1$ gerade für $q \in \delta\Sigma_p$ gilt.

Nun sei $q - p = t \cdot (q_1 - p)$ für $t > 0$ und $q_1 \in \delta(\Sigma_p)$, also $\|p-q\| = t$. Wir setzen $p_1 := q + (p - q_1)$ dann gilt $p_1 \in g_{pq}$ und $\|p_1 - q\| = \|p - q_1\|$. Wegen der Zentralsymmetrie von $\Sigma$ ist also $p_1 \in \delta(\Sigma_q)$. Wir erhalten

$$t(p_1 - q) = t(p + (p - q_1) - q) = t(p - q_1) = -t(q_1 - p) = -(q-p) = p - q.$$

Damit ist $t = \|p-q\| = \|q-p\|$ gezeigt.

Um N3 zu beweisen sei nun $t_1 = \|q-p\|$ und $t_2 = \|r-p\|$, also $t_1 \cdot (q_1 - p) = (q-p)$ und $t_2 \cdot (r_1 - p) = (r-p)$.

Falls $p, q$ und $r$ kollinear sind, also etwa $q \in [pr]$, haben wir $q_1 = r_1$ und mit $s := p + (q-p) + (r-p)$ gilt auch $s_1 = q_1$. Damit ist

$$(s-p) := (q-p) + (r-p) = t_1 \cdot (q_1 - p) + t_2 \cdot (q_1 - p) = (t_1 + t_2) \cdot (s_1 - p).$$

Damit wäre $\|(q-p) + (r-p)\| = (t_1 + t_2) = \|q-p\| + \|r-p\|$.

Nun seien $p, q$ und $r$ nicht kollinear. Wir betrachten die Menge

$$\Sigma_p^{(t_1+t_2)} := \{x \mid \|x-p\| \leq t_1 + t_2\},$$

die als Bild der Eichfigur $\Sigma_p$ bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor $t_1 + t_2$ nach 1.6 ebenfalls linear konvex ist.

Wir haben dann $q, r \in \Sigma_p^{(t_1+t_2)}$ und betrachten Punkte $q_0, r_0$ auf dem Rand dieser Menge mit $p + (t_1 + t_2) \cdot (q_1 - p) = q_0$ und $p + (t_1 + t_2) \cdot (r_1 - p) = r_0$.

Aus der Definition von $t_1$ und $t_2$ ergibt sich

$$q-p = t_1 \cdot (q_1 - p) = \frac{t_1}{t_1 + t_2} \cdot (q_0 - p) \quad \text{und} \quad r-p = t_1 \cdot (r_1 - p) = \frac{t_2}{t_1 + t_2} \cdot (r_0 - p).$$

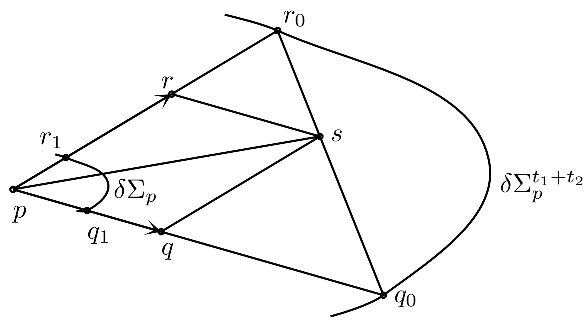



*Abb. 15*

Wir setzen wieder $s := p + (q - p) + (r - p)$ und erhalten

$$s - p = (q - p) + (r - p) = \frac{t_1}{t_1 + t_2} \cdot (q_0 - p) + \frac{t_2}{t_1 + t_2} \cdot (r_0 - p).$$

Damit ist $s = \frac{t_1}{t_1+t_2} \cdot q_0 + \frac{t_2}{t_1+t_2} \cdot r_0$ eine Konvexkombination von $q_o$ und $r_o$, also gilt $s \in (q_o r_o) \subset \Sigma_p^{(t_1+t_2)}$ und damit $\|s - p\| \leq t_1 + t_2$. Hiermit ist auch $N3$ bewiesen.

Insgesamt haben wir gezeigt:

**Satz 2.2** *Ist im affinen Raum ein abgeschlossener, beschränkter und zentralsymmetrischer linear konvexer Körper $\Sigma$ gegeben, dann kann durch $\Sigma$ eine Norm definiert werden, bei der $\Sigma$ die Einheitskugel mit dem Symmetriezentrum als Mittelpunkt ist.*

Setzt man dann für $x, y \in R^n$

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

dann hat die Funktion $d : R^n \times R^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bekanntlich die Eigenschaften einer Metrik[2], das heißt, für alle $x, y, z \in R^n$ gilt:

d1 $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

d2 $d(x, y) = d(y, x)$

d3 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

$(R^n, d)$ wird zu einem einem metrischen Raum.

[2]Den Nachweis, dass jede Norm auf die angegebene Weise eine Metrik erzeugt, und damit jeder normierte Raum auch ein metrischer Raum ist, setzen wir hier als bekannt voraus.

## 2.2 d-Konvexität

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels sei mit $\mathbb{R}^n$ stets ein $n-$dimensionaler affiner Raum bezeichnet, in dem durch eine konvexe Eichfigur $\Sigma$ im Sinne von 2.2 eine Norm $\| \ \ \|$ und damit auch die durch diese Norm definierte Metrik $d$ gegeben ist.

In der euklidischen Geometrie werden die Strecken auch als die im Sinne der Metrik kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten charakterisiert. Es handelt sich bei $[ab]$ also genau um die Menge aller Punkte $x$, für die die euklidischen Abstände $e(x,y) := \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ die (Dreiecks-)Gleichung $e(a,b) = e(a,x) + e(x,b)$ erfüllen.
Wir verallgemeinern nun den Streckenbegriff in normierten Räumen mit konvexer Eichfigur durch die dazu analoge Eigenschaft der Punktmenge.

**Definition 2.3** Sind $a$ und $b$ zwei Punkte aus $\mathbb{R}^n$, dann heißt die Menge

$$[ab]_d := \{x \in \mathbb{R}^n |\ d(a,b) = d(a,x) + d(x,b)\}$$

die ***d-Strecke*** zwischen $a$ und $b$.

Wir vergleichen zunächst die so definierten Punktmengen mit den linearen Strecken $[ab]$. Offensichtlich gilt stets

$$[ab] \subseteq [a,b]_d,$$

denn nach der Definition der Norm aus dem vorangegangenen Abschnitt haben wir zwar eine richtungsabhängige Längenmessung, innerhalb einer Geraden wird aber im wesentlichen euklidisch gemessen, denn aus $x \in [ab]$ folgt danach

$$\|a-b\| = \|a-x\| + \|b-x\|.$$

Dass die umgekehrte Inklusion im allgemeinen nicht gilt, zeigt bereits das folgende einfache Bespiel im $\mathbb{R}^2$. Die Eichfigur $\Sigma$ sei durch das Quadrat mit den Ecken $p_0 = (2,2),\ p_1 = (2,-2),\ p_2 = (-2,-2)$ und $p_3 = (-2,2))$ gegeben, also

$$\Sigma := \sum_{i=0}^{3} \lambda_i p_i \quad \text{mit} \quad \lambda_0, ..., \lambda_3 \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{3} \lambda_i = 1.$$

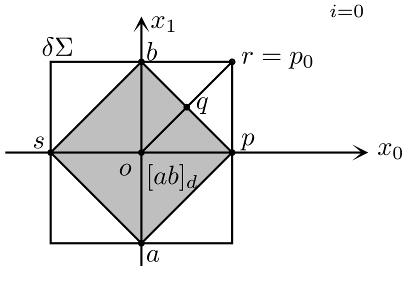



*Abb. 16*

Die obige Definition der Norm bzw. der Metrik $d$ liefert hier für $a = (0, -2)$, $p = (2, 0)$, $r = (2, 2)$ und $q = (1, 1)$ die Abstände $d(a, p) = d(o, r) = 1$ und $d(o, q) = \frac{1}{2}$, analog gilt für $b = (0, 2)$ dann $d(b, p) = 1$ und $d(b, q) = \frac{1}{2}$. Damit gehört der Punkt $p$ zu $[ab]_d$ und $q$ zu $[ob]_d$.
Wie später gezeigt wird gilt hier

$$[ab]_d = \{x | \sum_{i=1}^{2} |x_i| \leq 1\},$$

die d-Strecke zwischen $a$ und $b$ ist das Kreuzpolytop im $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $a, p, b$ und $s = (-2, 0)$.
Im Gegensatz dazu erhält man aber für die Punkte $q$ und $r$ die Übereinstimmung von linearer und d-Strecke $[qr] = [qr]_d$.

**Satz 2.3** *Es gilt für alle Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $[qr] = [qr]_d$ genau dann, wenn die Eichfigur $\Sigma$ streng linear konvex ist.*

*Beweis.* Für den Fall $a = b$ ist nichts zu zeigen, denn dann gilt $[ab] = [ab]_d = \{a\}$. Um den Satz auch für den Fall $a \neq b$ zu beweisen, zeigen wir, dass für beliebige nichtkollineare Punkte $a, b$ und $c$ die echte Ungleichung $d(a, b) < d(a, c) + d(c, b)$ genau dann gilt, wenn $\Sigma$ streng konvex ist.

Wir setzen zunächst $\Sigma_p$ als nicht streng konvex voraus. Nach Definition 1.11 existieren dann drei verschiedene kollineare Randpunkte. Es sei also $x, y, z \in \delta\Sigma$ und $y \in (xz)$. Es gilt also $d(p, x) = d(p, y) = d(p, z) = 1$, und es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda < 1$ und $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$. Wir setzen $b := p + \lambda(x - p)$ und $c := p + (1 - \lambda)(z - p)$ haben dann $\lambda = d(p, b)$ und $1 - \lambda = d(p, c)$. Außerdem gilt für die nichtkollinearen Punkte $p, b$ und $y$

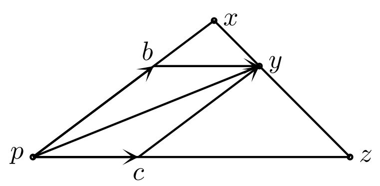



*Abb. 17*

$$\begin{aligned}
(y - p) &= (b - p) + (y - b) = (b - p) + ((\lambda x + (1 - \lambda)z) - (p + \lambda(x - p)) \\
&= (b - p) + (1 - \lambda)(z - p) \\
&= (b - p) + (c - p).
\end{aligned}$$

Damit ist $y - b = c - p$ und deshalb

$$1 = d(p, y) \leq d(p, b) + d(b, y) = d(p, b) + d(c, p) = \lambda + (1 - \lambda) = 1.$$

Damit gilt sogar $d(p,y) = d(p,b) + d(b,y)$ und folglich $b \in [py]_d \neq [py]$.

Wir setzten nun die Existenz von Punkten $a$ und $b$ mit $[ab]_d \neq [ab]$ voraus und folgen im wesentlichen einer Beweisidee aus [5, Seite 152]. Die Punkte $a, b$ und $c$ seien also nichtkollineare Punkte mit $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$. Wir betrachten für $\gamma := d(a,b)$ die „gestreckte" Eichfigur

$$\Sigma_a^\gamma := \{x |\ d(a,x) \leq \gamma\}.$$

Es gilt $b \in \delta(\Sigma_a^\gamma)$ und $(ab) \subseteq ri\ \Sigma_a^\gamma$.

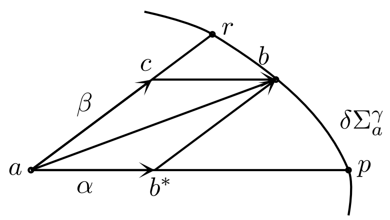



*Abb. 18*

Wegen $\beta := d(a,c) < \gamma$ existiert ein Punkt $r \in \delta(\Sigma_a^\gamma)$ mit $c \in (ar)$. Wir setzen $b^* := a + (b - c)$. Dann ist $d(b^*, a) = \|b^* - a\| = \|b - c\| = d(b,c)$ und wegen $\alpha := d(b,c) < \gamma$ existiert auch ein $p \in \delta(\Sigma_a^\gamma)$ mit $b^* \in (ap)$. Dabei gilt $b \neq p, r$. Für die so gewählten Punkte gilt dann also wegen

$$\alpha + \beta = \gamma = d(a,b) = d(a,p) = d(a,r)$$

auch noch

$$d(a,b^*) = d(b,c) = d(c,r) = \alpha \quad \text{und} \quad d(a,c) = d(b^*,b) = d(b^*,p) = \beta.$$

Wir erhalten die Gleichungen

$$\frac{\gamma}{\alpha}(r - c) = r - a \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{\alpha}(b - c) = \frac{\gamma}{\alpha}(b^* - a) = (p - a)$$

und damit

$$\frac{\gamma}{\alpha}(r - b) = \frac{\gamma}{\alpha}((r - c) + (c - b)) = (r - a) + (a - p) = (r - p).$$

Da $\frac{\gamma}{\alpha} < 1$ gilt, ist $b$ ein Punkt in $\delta\Sigma_R^\delta \cap (pr)$ zwischen $p$ und $r$, das heißt $\Sigma_a^\gamma$ und damit auch $\Sigma_a$ sind nicht streng konvex. $\square$

Wir erklären nun in Anlehnung an die Definition der linearen Konvexität einen neuen Konvexitätsbegriff.

**Definition 2.4** Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ***d-konvex*** (oder auch: ***metrisch konvex***) genau dann, wenn mit zwei Punkten $a, b$ aus $M$ auch die d-Strecke $[ab]_d$ ganz in $M$ liegt.

$$M \text{ d-konvex } :\Longleftrightarrow \forall a, b \in M \,|\, [ab]_d \subseteq M$$

Eine d-konvexe Menge $M$ heißt ***d-konvexer Körper***, wenn aff $M = \mathbb{R}^n$ gilt.

Wegen $[ab] \subseteq [ab]_d$ ist jede d-konvexe Menge auch linear konvex. Das die Umkehrung nicht gilt zeigt bereits unser obiges Beispiel, denn offenbar gilt dort für die linear konvexe Menge $[ab]$ nicht $[ab]_d \subseteq [ab]$. Andere Eigenschaften linear konvexer Mengen lassen sich jedoch problemlos verallgemeinern.

**Hilfssatz 2.4** *Ist $M$ eine d-konvexe Menge, dann sind für jeden Vektor $v$ und jede zentrische Streckung $\theta(p, t)$ mit $p \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ auch die Mengen*

$$M + v := \{x + v |\ x \in M\} \quad \textit{und} \quad \theta(p, t)(M) := \{p + t(x - p)|\ x \in M\}$$

*d-konvexe Mengen.*

*Beweis.* Die Behauptungen sind einfache Folgerungen aus der Invarianz von Teilverhältnissen bei affinen Transformationen. Für beliebige Punkte $a, b \in M$ gilt deshalb nach der Definition der Metrik $d$

$$d(a + v, b + v) = d(a, b) \quad \text{und} \quad d(p + t(a - p), p + t(b - p)) = t \cdot d(a, b).$$

Gilt also die Dreiecksgleichung für drei Punkte $a, b, c \in M$, dann gilt sie auch für deren Bildpunkte in $M + v$ bzw. $\theta(p, t)(M)$. □

**Satz 2.5** *Der Durchschnitt einer beliebigen Familie d-konvexer Mengen ist eine d-konvexe Menge.*

Auf einen Beweis können wir hier verzichten. Wir müßten nur im Beweis von 1.5 die Strecken $[ab]$ durch $[ab]_d$ ersetzen.

Wie bei der linearen Konvexität gilt die analoge Aussage für die Vereinigung solcher Mengen nicht. Man kann aber zeigen:

**Satz 2.6** *Ist $\{M_i\}$ eine Folge d-konvexer Mengen mit $M_j \subseteq M_k$ für alle $j, k$ mit $j < k$, dann ist die Menge $M = \bigcup_i M_i$ eine d-konvexe Menge.*

*Beweis.* Für zwei Punkte $a, b \in M$ existieren Folgenglieder $M_j$ und $M_k$ mit $a \in M_j$ und $b \in M_k$. Ist k die größere der beiden Zahlen, dann gilt nach der Voraussetzung $a, b \in M_k$ (anderenfalls gilt $a, b \in M_j$). Damit wäre dann aber $[ab]_d \subseteq M_k \subseteq M$. □

Eine etwas andere Fassung der d-Konvexität erhält man, wenn man den in metrischen Räumen üblichen Begriff der Länge eines einfachen Bogens verwendet.

**Satz 2.7** *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann d-konvex, wenn für zwei beliebige Punkte $a, b$ aus $M$ jeder einfache Bogen mit den Endpunkten $a$ und $b$, der die Länge $\|b-a\|$ hat, ganz in $M$ enthalten ist.*

*Beweis.* Es sei $M$ eine Menge mit der genannten Eigenschaft. Ferner seien $a$ und $b$ Punkte aus $M$ und $c$ sei ein Punkt der d-Strecke $[ab]_d$. Es gilt also $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$. Die Strecken $[ac]$ und $[cb]$ sind einfache Bögen mit den Längen $\|c-a\|$ und $\|b-c\|$. Ihre Vereinigung ist somit ein einfacher Bogen von $a$ nach $b$ der Länge

$$\|c-a\| + \|b-c\| = d(a,c) + d(c,b) = d(a,b) = \|b-a\|,$$

der dann aber nach der Voraussetzung zu $M$ gehört. Somit ist auch $z \in M$, die Menge $M$ ist d-konvex.

Umgekehrt sei nun $M$ als d-konvexe Menge vorausgesetzt und $\omega$ sei ein einfacher Bogen mit den Endpunkten $a, b \in M$ der Länge $l = \|b-a\|$. Durch einen beliebigen Punkt $c$ auf $\omega$ zerlegen wir diesen in zwei Teilbögen $\omega_1$ und $\omega_2$.

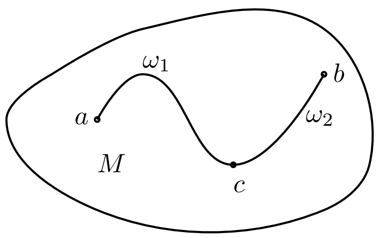



*Abb. 19*

Die Längen $l_1, l_2$ dieser Teilbögen sind nicht kleiner als $\|c-a\|$ bzw. $\|b-c\|$. Somit gilt für die Länge des Gesamtbogens $\|b-a\| = l = l_1 + l_2 \geq \|c-a\| + \|b-c\|$. Da nach der Dreiecksungleichung $N3$ auch die umgekehrte Relation gilt, erhalten wir die Gleichung $d(a,b) = \|b-a\| = \|c-a\| + \|b-c\| = d(a,c) + d(c,b)$. Damit gehört aber $c$ zur d-Strecke $[a,b]_d$, also gilt auch $c \in M$. □

Während die linearen Strecken erste einfache Beispiele linear konvexer Mengen lieferten, gilt eine analoge Aussage für d-Strecken nicht. Es können d-Strecken existieren, die selbst keine d-konvexen Mengen sind, weil aus $x, y \in [ab]_d$ nicht notwendig $[xy]_d \subseteq [ab]_d$ folgt.

Wir geben hierfür ein Beispiel im $\mathbb{R}^3$ an. Die Eichfigur sei der Würfel

$$\Sigma = W_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 |\ |x_1|, |x_2|, |x_3| \leq 1\}.$$

Die Ecken des Würfels bezeichenen wir (vgl. Abbildung 20) mit $a, b, c, d, e, f, g$ und $h$.

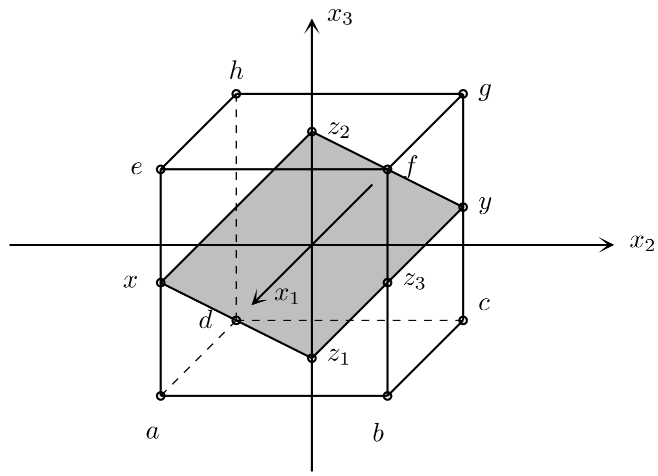



*Abb. 20*

Wir betrachten die d-Strecke zwischen den Punkten $x = (1, -1, 0)$ und $y = (-1, 1, 0)$. Man überlegt sich leicht, dass für die Punkte $z_1 = (0, 0, -1)$ und $z_2 = (0, 0, 1)$ sowohl

$$d(x, z_1) + d(z_1, y) = d(e, o) + d(o, g) = 1 + 1 = 2 = d(x, y)$$

als auch

$$d(x, z_2) + d(z_2, y) = d(a, o) + d(o, c) = 1 + 1 = 2 = d(x, y)$$

gilt. Also haben wir $z_1, z_2 \in [xy]_d$. Dagegen ist $z_3 = (1, 1, 0)$ kein Punkt von $[xy]_d$, denn hier gilt

$$d(x, z_3) + d(z_3, y) = 2 + 2 = 4 > d(x, y).$$

Betrachten wir jetzt die d-Strecke zwischen $z_1$ und $z_2$, dann gilt aber $z_3 \in [z_1 z_2]_d$ wegen

$$d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) = 1 + 1 = 2 = d(z_1, z_2).$$

Damit ist $[z_1 z_2] \not\subseteq [xy]_d$, die d-Strecke $[xy]_d$ ist nicht d-konvex.

**Bemerkung**: *Wie der nächste Satz zeigen wird, ist die d-Strecke $[xy]_d$ gerade das ebene Viereck $xz_1yz_2$, dagegen ist die Strecke $[z_1 z_2]_d$ sogar ein Körper, eine quadratische Doppelpyramide zwischen den Spitzen $z_1$ und $z_2$.*

Für die Beschreibung der d-Strecken in normierten Räumen verwenden wir nun gewisse Kegelmengen (vgl. Def. 1.7).

Sind $a, b$ zwei verschiedene Punkte, dann bezeichne $\Sigma_a$ die Eichfigur bzw. Eichkugel um $a$ mit dem Radius $d(a, b)$, also

$$\Sigma_a := \{x \in \mathbb{R}^n | \ \|x - a\| \leq d(a, b)\}.$$

Analog sei $\Sigma_b$ die Eichkugel mit dem Mittelpunkt $b$ und diesem Radius. Mit $F_a$ bezeichnen wir nun die kleinste Seite der Kugel $\Sigma_b$, die den Punkt $a$ enthält. Entsprechend sei $F_b$ die kleinste Seite von $\Sigma_a$ mit $b \in F_b$. Schließlich seien die Mengen $K_a$ und $K_b$ durch

$$K_a := \{x \in \mathbb{R}^n | x = a + t(y-a),\ t \geq 0,\ y \in F_b\}$$

und

$$K_b := \{x \in \mathbb{R}^n | x = b + t(y-b),\ t \geq 0,\ y \in F_a\}$$

definiert.

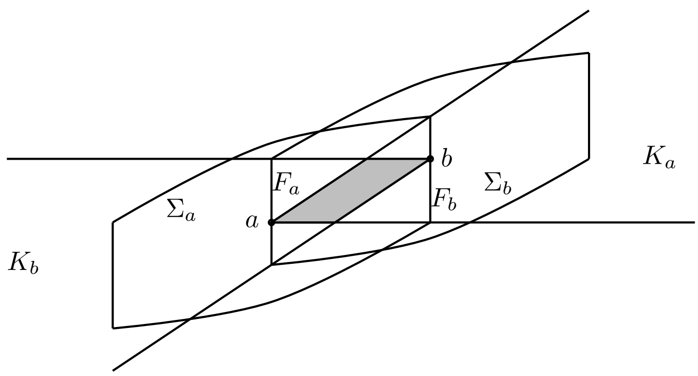



*Abb. 21*

Die Mengen $K_a, K_b$ sind per Definition linear konvexe Kegel mit den Spitzen in $a$ bzw. $b$. Da die Mengen $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ zentralsymmetrisch sind ist auch der Durchschnitt $K_a \cap K_b$ eine bezüglich des Mittelpunkts der Strecke $[ab]$ zentralsymmetrische Punktmenge.

**Satz 2.8** *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt* $[ab]_d = K_a \cap K_b$.

*Beweis.* Es sei $z \in K_a \cap K_b$. Es existieren dann Punkte $x_a \in F_b$ und $x_b \in F_a$ sowie Zahlen $t_a, t_b \geq 0$ mit $z = a + t_a(x_a - a) = b + t_b(x_b - b)$.
Da $x_a$ ein Randpunkt von $\Sigma_a$ ist, gilt $d(a, x_a) = d(a, b)$. Nach unserer Definition des Abstands $d$ ist also $d(a, z) = t_a \cdot d(a, b)$. Analog folgt $d(b, z) = t_b \cdot d(a, b)$.

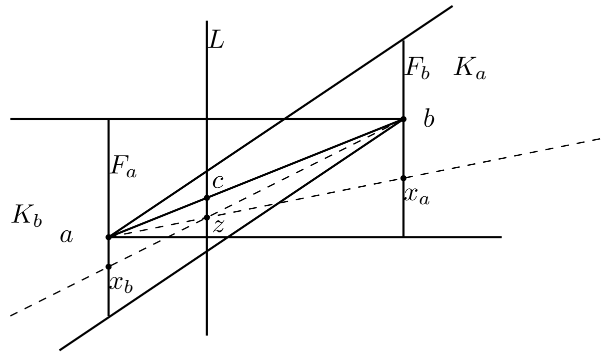



*Abb. 22*

Mit $L$ bezeichnen wir den affinen Unterraum, der das Bild von aff $F_b$ bei der Streckung $\theta(a, t_a)$. Wegen $x_a \in F_b$ gilt dann $z \in L$. Mit der gleichen Begründung gilt auch $c := a + t_a(b - a) \in L$.
Es ist also $c = (1 - t_a)a + t_a b$ der Schnittpunkt von $[ab]$ mit $L$. Die analoge Überlegung für $L'$ als Bild von aff $F_a$ unter der Streckung $\theta(b, t_b)$ liefert einen Punkt $c'$ mit $c' := t_b a + (1 - t_b)b \in L'$.
Da aber wegen der Zentralsymmetrie von $\Sigma$ und der Lage von $\Sigma_a$ und $\Sigma_b$ zueinander die affinen Räume aff $F_a$ und aff $F_b$ parallel zueinander sind, gilt dies auch für deren gestreckte Bilder $L$ und $L'$. Mit $z \in L, L'$ gilt dann sogar $L = L'$, also haben wir $c = c'$.
Aus den Darstellungen für $c$ und $c'$ folgt dann sofort $t_a = 1 - t_b$, also $t_a + t_b = 1$. Damit erhalten wir

$$d(a, z) + d(z, b) = t_a d(a, b) + t_b d(a, b) = (t_a + t_b)d(a, b) = d(a, b),$$

womit $z \in [ab]_d$ und damit die Inklusion $K_a \cap K_b \subseteq [ab]_d$ bewiesen ist.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei jetzt $d(a, y) + d(y, b) = d(a, b)$, also $y \in [ab]_d$. Mit $p$ bezeichnen wir den Punkt der linearen Strecke $[ab]$, für den $d(a, p) = d(a, y)$ gilt. Entsprechend gilt dann $d(p, b) = d(y, b)$. Wir setzen

$$\mu := \frac{d(a, y)}{d(a, b)} = \frac{d(a, p)}{d(a, b)}$$

und betrachten die Punkte $f := a + \frac{1}{\mu}(y - a)$ und $g := a + \frac{1}{1-\mu}(b - y)$.
Falls $\mu = 0$ oder $\mu = 1$ gilt, haben wir $y = a$ oder $y = b$, also $y \in K_a \cap K_b$.
Für $0 < \mu < 1$ haben wir

$$d(a, f) = \|f - a\| = \frac{1}{\mu}\|y - a\| = \frac{1}{\mu} d(a, y) = d(a, b)$$

und

$$d(a, g) = \|g - a\| = \frac{1}{1 - \mu}\|b - y\| = \frac{1}{1 - \mu} d(y, b) = d(a, b).$$

Das bedeutet die Punkte $f$ und $g$ sind Randpunkte von $\Sigma_a$. Außerdem gilt $\mu f + (1-\mu)g = \mu(a + \frac{1}{\mu}(y-a)) + (1-\mu)(a + \frac{1}{1-\mu}(b-y)) = b$, das heißt, es ist $b \in (fg)$. Die Punkte $f$ und $g$ liegen also auf der Seite $F_b$ der Kugel $\Sigma_a$. Dann ist aber auch der Punkt

$$a + \mu(f-a) = a + \mu(\frac{1}{\mu}(y-a)) = y$$

ein Punkt des Kegels $K_a$.
Analog zeigt man auch $y \in K_b$ und damit die Inklusion $[ab]_d \subseteq K_a \cap K_b$. □

**Bemerkung:** Nach der Definition der hier verwendeten Kegel $K_a$ und $K_b$ liegen diese symmetrisch bezüglich des Mittelpunkts $m = \frac{a+b}{2}$ der Strecke $[ab]$, das heißt, für die Spiegelung an $m$ gilt $\sigma_m(K_a) = K_b$ und $\sigma_m([ab]_d) = [ab]_d$.

Wir zeigen noch eine weitere Folgerung aus dem Satz 2.8, die im Abschnitt 3 beim Nachweis der Eigenschaften einer Verbindunsoperation benötigt wird.

**Korollar 2.9** *Ist $x$ ein von $a$ und $b$ verschiedener Punkt der d-Strecke $[ab]_d$, dann gilt $[ax]_d \subset [ab]_d$ und $[bx]_d \subset [ab]_d$.*

*Beweis.* Wiederum seien $K_a$ und $K_b$ die Kegel, für die entsprechend Satz 2.8 $[ab]_d = K_a \cap K_b$ gilt. Ist nun $x \in [ab]_d \setminus \{a, b\}$, dann sei $x_a$ wieder derjehnige Punkt auf $F_b$ mit $x \in [a, x_a]$ und $x = a + t_a(x_a - a)$. Mit unseren Voraussetzungen gilt dann $0 < t_a < 1$.

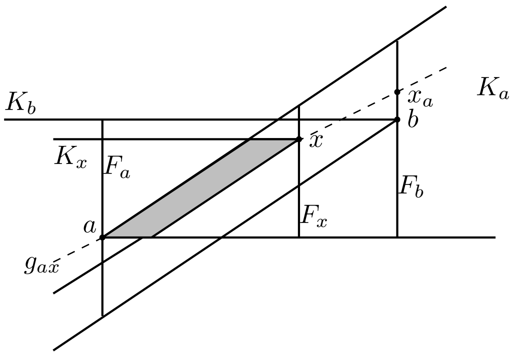



*Abb. 23*

Nun bezeichne $F_x$ wieder die Seite von $\Sigma_a$ mit dem Radius $d(a, x)$, die den Punkt $x$ enthält und $K_x$ sei der Kegel, für den dann $[a, x]_d = K_a \cap K_x$ gilt. Offensichtlich ist $x$ das Bild von $x_a$ bei der zentrischen Streckung mit Zemtrum $a$ und dem Faktor $t_a$. Damit ist dann aber auch $F_x$ das Bild von $F_b$ und $K_x$ ist das Bild von $K_b$ bei dieser Abbildung. Wegen $t_a < 1$ gilt dann $K_x \subset K_b$.

Damit ist aber bereits $[ax]_d = K_a \cap K_x \subset K_a \cap K_b = [ab]_d$ gezeigt. Die zweite Behauptung folgt analog. □

Im Abschnitt 1.2 haben wir einige Konvexitätsaussagen unter Einbeziehung topologischer Begriffe wie innerer Punkt oder Randpunkt einer Menge bewiesen. Wir bemerken hier zunächst, dass die durch $\Sigma$ auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Metrik die gleiche Topologie erzeugt wie die euklidische Metrik im $\mathbb{E}^n$. Das liegt daran, dass offenbar für jeden Punkt und zu jedem $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta$ mit $0 < \delta \leq \varepsilon$ mit $\Sigma_p^\delta \subset U_\varepsilon(p)$ gefunden werden kann.
Da $\Sigma$ als linear konvexer Körper vorausgesetzt wurde, findet man auch umgekehrt noch ein $\varepsilon' > 0$ mit $0 < \varepsilon' \leq \delta$ und $U_{\varepsilon'}(p) \subset \Sigma_p^\delta$.

Damit können wir entsprechende Aussagen für d-konvexe Mengen in einigen Fällen durch geringfügige Modifizierungen der Beweise aus dem Abschnitt 1.2. herleiten. Für eine der zu 1.10 analogen Aussagen soll hier ein solches Beweisbeispiel gegeben werden.

**Satz 2.10** *Das Innere int $M$ einer d-konvexen Menge $M$ ist d-konvex.*

*Beweis.* Es seien $x, y$ zwei verschiedene Punkte aus *int* $M$ und $U_{\varepsilon_1}(x)$, $U_{\varepsilon_2}(y)$ Umgebungen mit $U_{\varepsilon_1}(x), U_{\varepsilon_2}(y) \subset M$. Wir setzen $\varepsilon := Min\ \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ und zeigen für jeden Punkt $z \in [xy]_d$ liegt die $\varepsilon-$Umgebung von $z$ in $M$.
Es sei also $z_1 \in U_\varepsilon(z)$. Es gilt dann $\|z_1 - z\| < \varepsilon$, $x_1 := x + (z_1 - z) \in U_{\varepsilon_1}(x)$ und $y_1 := y + (z_1 - z) \in U_{\varepsilon_2}(y)$. Mit $x_1, y_1 \in M$ gilt dann

$$d(x_1, z_1) + d(z_1, y_1) = d(x, z) + d(z, y) = d(x, y) = d(x_1, y_1).$$

Damit gehört $z_1$ zur d-Strecke $[x_1 y_1]_d$ und diese liegt nach Voraussetzung in $M$. Wir haben $U_\varepsilon(z) \subset M$, also $z \in int\ M$. □

Wir geben hier noch einen anderen Beweis dieses Satzes unter Verwendung von 2.6 an.

*2. Beweis von 2.10* Es sei $x$ ein Punkt aus *int* $M$ und $M_k$ die Bildmenge von $M$ unter der zentrischen Streckung $\theta_k := \theta(x, 1 - \frac{1}{k})$. Diese Mengen sind Teilmengen von $M$ und die Vereinigungsmenge aller dieser Bilder

$$M^i := \bigcup_k M_k$$

ist nach 2.4 und 2.6 auch d-konvex. Wir zeigen nun, dass $M^i = int\ M$ gilt.
Dazu sei $y$ ein beliebiger Punkt aus $M^i$, das heißt, es gibt einen Punkt $\overline{y} \in M$ und eine Zahl $j \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + (1 - \frac{1}{j})(\overline{y} - x)$. Ferner sei $U_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von $x$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq M$. Wir setzen $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{j}$ und betrachten einen beliebigen Punkt $z \in U_{\varepsilon'}(y)$.

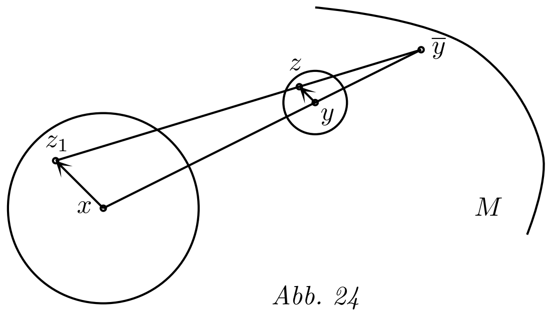



*Abb. 24*

Für $z_1 := x + j(z - y)$ erhalten wir wegen $\|z_1 - x\| = \|j(z - y\| < j \cdot \varepsilon' = \varepsilon$ einerseits $z_1 \in U_\varepsilon(x)$, und andererseits gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{j}x + (1 - \frac{1}{j})\overline{y} &= \frac{1}{j}x + (z - y) + (1 - \frac{1}{j})\overline{y} \\ &= (\frac{1}{j} - 1)x + x + (z - y) + (1 - \frac{1}{j})\overline{y} \\ &= (z - y) + x + (1 - \frac{1}{j})(\overline{y} - x) \\ &= (z - y) + y = z.\end{aligned}$$

Damit ist $z$ eine lineare Konvexkombination der Punkte $x$ und $\overline{y}$, gehört also zur konvexen Menge $M$. Mit $U_{\varepsilon'} \subseteq M$ ist gezeigt, dass $y$ ein innerer Punkt von $M$ ist.

Nach diesem Muster kann auch der nächste Satz bewiesen werden.

**Satz 2.11** *Der Abschluß $\overline{M}$ einer d-konvexen Menge $M$, mit int $M \neq \emptyset$ ist d-konvex.*

*Beweis.* Es sei $a$ ein beliebiger Punkt aus *int* $M$. Wir betrachten diesmal die durch zentrische Streckungen mit dem Zentrum $a$ und den Faktoren $1+\frac{1}{k}$ aus $M$ entstehenden Mengen $M_k$. Diese Mengen sind wieder sämtlich d-konvex. Damit ist auch

$$M^a := \bigcap_k M_k$$

eine d-konvexe Menge.
Wir zeigen, dass $M^a = \overline{M}$ gilt. Dazu sei $x \in M^a$ und $\varepsilon > 0$. Der Punkt $x$ gehört also zu jeder der Mengen $M_k$. Es muß also zu jedem $k$ einen Punkt $x_k \in M$ mit $x = a + (1 + \frac{1}{k})(x_k - a)$ geben. Für diese Punkte gilt

$$\|x - x_k\| = \|a + (1 + \frac{1}{k})(x_k - a) - x_k\| = \frac{1}{k}\|(x - a)\|.$$

Wählt man nun $k > \frac{\|x-a\|}{\varepsilon}$, dann gilt $\|x - x_k\| < \varepsilon$. Es ist also $x_k \in U_\varepsilon(x)$, das heißt $x$ ist ein Häufungspunkt von $M$ bzw. $x \in \overline{M}$. $\square$

## 2.3 d-konvexe Hülle

Wir wollen nun auch den Hüllenbegriff auf d-konvexe Mengen verallgemeinern.

**Definition 2.5** Der Durchschnitt aller d-konvexen Mengen, die eine gegebene Teilmenge $X$ des $\mathbb{R}^n$ enthalten, heißt die ***d-konvexe Hülle*** $conv_d\ X$ von $X$.

$$conv_d\ X = \bigcap \mathbb{M} \quad \text{mit} \quad \mathbb{M} := \{M \subseteq \mathbb{R}^n |\ X \subseteq M \wedge M\ d-konvex\}$$

Nach 2.5 ist $conv_d\ X$ eine d-konvexe Menge. Sie ist auch hier die kleinste d-konvexe Menge, die $X$ enthält. Auch die Eigenschaften der Hüllenoperation aus dem Satz 1.30 werden von der Abbildung $conv_d$ erfüllt.

Im Gegensatz zur Hüllenbildung mit linear konvexen Mengen fehlt zur Darstellung der d-konvexen Hülle nun allerdings eine solche einfachen analytischen Hilfsmittel, wie die Konvexkombination in 1.4 und die sich daraus ergebenden Sätze.

Da eine d-konvexe Menge alle d-Strecken zwischen Punkten dieser Menge enthalten muß, liegt es nahe, die d-konvexe Hülle als Vereinigung von d-Strecken zu beschreiben. Dieser Prozeß muß jedoch gegebenenfalls abzählbar oft wiederholt werden, bevor man eine bezüglich der Verbindung durch d-Strecken abgeschlossene Menge erhält.

**Satz 2.12** *Ist $M_0$ eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und sind die Mengen $M_i$ der Folge $M_1, M_2, M_3, ...$ jeweils als Vereinigungsmengen aller d-Strecken von Punkten der Mengen $M_{i-1}$ definiert, dann gilt*

$$conv_d\ M_0 = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i.$$

*Beweis.* Da für alle $i$ offensichtlich $M_i \subseteq conv_d\ M_0$ gilt, ist die Inklusion

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i \subseteq conv_d\ M_0$$

klar. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, genügt es die d-Konvexität der Vereinigungsmenge zu zeigen, denn $conv_d\ M_0$ ist ja die kleinste aller $M_0$ enthaltenden d-konvexen Mengen.
Es seien $a$ und $b$ zwei Punkte aus dieser Vereinigungsmenge. Damit existieren Zahlen $j, k$ mit $a \in M_j$ und $b \in M_k$. Wegen $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq ...$ gilt dann $a, b \in M_l$, wenn $l$ die größere der beiden Zahlen $j$ und $k$ ist. Damit haben wir aber dann

$$[ab]_d \subseteq M_{l+1} \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i.$$

Die Vereinigungsmenge ist d-konvex. □

Der folgende Satz behandelt die Beziehung zwischen der Bildung der d-konvexen Hülle und dem Abschluß einer Menge $X$.

**Satz 2.13** *Für jede beliebige Teilmenge $X$ des $\mathbb{R}^n$ gilt*

$$conv_d\ \overline{X} \subseteq \overline{conv_d\ X}.$$

*Beweis.* Die Hülle $conv_d\ X$ ist d-konvex, nach 2.11 ist dann auch deren Abschluß $\overline{conv_d\ X}$ d-konvex. Da diese Menge auch abgeschlossen ist und $conv_d\ X$ die Menge $X$ enhält, gilt auch $\overline{X} \subseteq \overline{conv_d\ X}$. Die Behauptung folgt nun aus 1.30(a). □

Dass die Aussage von 2.13 auch für beschrankte Mengen nichtverschärft werden kann[3)], zeigt folgendes Beispiel.

Es seien seien $K_1$ und $K_2$ die euklidischen Einheitskugeln um die Mittelpunklte $P_1 = (0,0,1)^t$ und $P_2 = (0,0,-1)^t$ im Raum $R^3$. Ferner sei $U$ durch $x_3 = 0$ und $x_1^2 + x_2^2 \leq 3$ definiert.

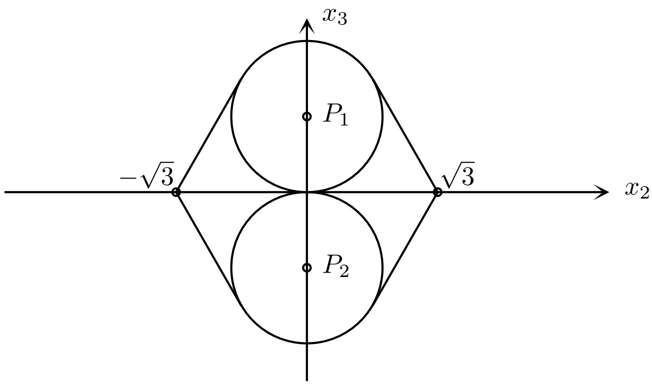



*Abb. 25*

Als Eichfigur zur Normierung von $R^3$ zum Raum $\mathbb{R}^3$ wählen wir nun

$$\Sigma := conv\ (K_1 \cup K_2 \cup U).$$

Die Abbildung zeigt den Schnitt mit der $x_2 - x_3-$Ebene.

Bezeichnet $E_{12}$ die durch $x_3 = 0$ definierte Ebene, dann gilt $[ab]_d = [ab]$ genau dann, wenn
- der Vektor $b - a$ parallel zu $E_{12}$ ist, oder

[3]Bezüglich der linearen Konvexität gilt bei beschränkten Mengen sogar die Mengengleichheit $conv\ \overline{X} = \overline{conv\ X}$.

- wenn der Winkel zwischen $b - a$ und $E_{12}$ größer als $\frac{\pi}{3}$ ist.

In beiden Fällen wären nämlich die Seiten $F_a, F_b$, die bei der Bildung von $[ab]_d$ als Durchschnitt der Kegel $K_a$ und $K_b$ entsprechend 2.8 betrachtet werden, einelementige Mengen. Damit sind die Kegel $K_a, K_b$ nur Halbgeraden.

Ist der Winkel zwischen $b - a$ und $E_{12}$ kleiner als $\frac{\pi}{3}$, dann ist $[ab]_d = K_a \cap K_b$ ein Parallelogramm mit den Innenwinkeln $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{2 \cdot \pi}{3}$. Das Parallelogramm liegt in einer zu $E_{12}$ senkrechten Ebene und eine seiner Seiten ist parallel zu $E_{12}$.

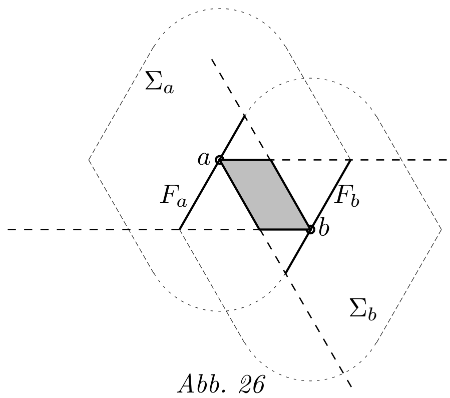
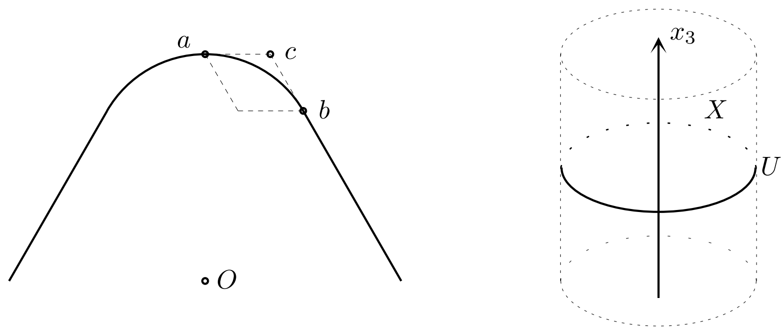



*Abb. 26*

Man überzeugt sich nun leicht, dass die Eichfigur $\Sigma$ selbst nicht d-konvex ist. Dazu betrachte man etwa die Punkte $a = (0, 0, 2)^t$ und $b = (0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2})^t$. Das oben beschriebene Parallelogramm liegt nicht vollständig in $\Sigma$. Es gilt

$$d(a, c) + d(c, b) = d(ab) \quad \text{für} \quad c = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 2)^t \notin \Sigma.$$




$[ab]_d \not\subseteq \Sigma$ $\qquad$ $X = conv_d\ \Sigma$

*Abb. 27*

Nun sei $Z$ der Zylinder, der durch $x_1^2 + x_2^2 < 3$ und $|x_3| \leq 2$ definiert wird. Wir setzen $X = Z \cup U$. Offensichtlich ist $X$ zwar eine d-konvexe aber keine abgeschlossene Menge. Mit der Bildungsvorschrift für die d-Strecken kann man sogar zeigen, dass $X$ die kleinste konvexe Menge ist, die die Menge $\Sigma$ enthält. Demnach gilt $X = conv_d\ \Sigma = conv_d\ \overline{\Sigma}$.
Damit haben wir in diesem Fall $conv_d\ \overline{\Sigma} \neq \overline{conv_d\ \Sigma}$.

Mit der Definition 1.6 haben wir einem Punkt $p$ und einer linear konvexen Menge $M$ ihre ebenfalls linear konvexe Verbindung $C(p, M)$ zugeordnet. Betrachten wir die analoge Menge bezüglich der d-Konvexität, dann zeigt das letzte Beispiel bereits, dass hier die Menge

$$C_d(M, p) := \{[px]_d |\ x \in M\}$$

im allgemeinen nicht d-konvex ist.

Mit $M = U$ als d-konvexer Teilmenge und $p = (0, 0, 2)$ ergibt sich als $C_d(M, p)$ der Kegelstumpf zwischen $U$ und dem dazu parallelen Kreis mit dem Radius $r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ um $p$.

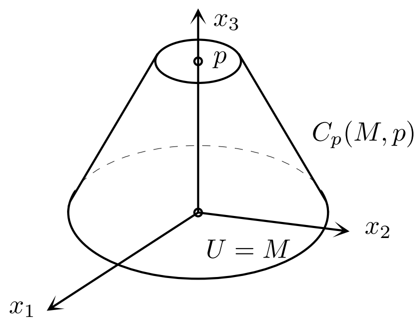



*Abb. 28*

Die Mantelfläche dieses Kegelstumpfs erfüllt die Kegelgleichung

$$3x_1^2 + 3x_2^2 - (x_3 - 3)^2 = 0.$$

Man rechnet leicht nach, dass die Punkte $a = (\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{1}{12}}, 2)$ und $b = (\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{13}{12}}, 1)$ zu dieser Fläche gehören.
Die d-Strecke zwischen den Punkten $a$ und $b$ ist ein Parallelogramm $acbd$ in der durch $x_1 = \frac{1}{2}$ bestimmten Ebene mit $[ab]$ als längster Diagonale. (vgl. Abbildung 20)

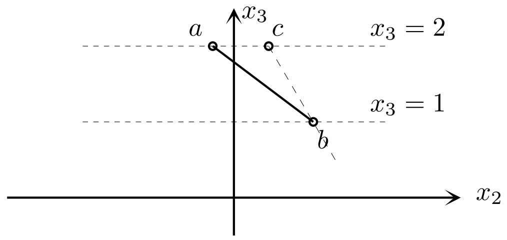



*Abb. 29*

Der Punkt $c = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{3}}, 2)$ liegt auf der zur Mantellinie in der $x_2 - x_3-$ Ebene parallelen Geraden durch $b$. Er liegt aber weder im Kegelstumpf $C_d(M,p)$ noch auf dessen Rand, denn für seinen Abstand zur $x_3$-Achse bzw. zum Punkt $p$ gilt

$$d(c,p) = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{3}})^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{3}} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}} = r_2.$$

Damit liegt die d-Strecke $[ab]_d$ nicht vollständig in $C_d(M,p)$, die Verbindungsmenge ist nicht d-konvex.

## 2.4 Stützeigenschaften d-konvexer Mengen

**Satz 2.14** *Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-konvexe Menge und $p$ ein Punkt aus $M$, dann ist der Stützkegel $S_M(p)$ eine d-konvexe Menge.*

*Beweis.* Der Stützkegel wurde in Definition 1.9 durch

$$S_M(p) := \bigcup_{x \in M} \{p + t(x-p), \quad t \geq 0\}$$

definiert. Wir betrachten nun die Mengen $M_k$, die durch zentrische Streckungen mit dem Zentrum $p$ und dem Faktor $k \in \mathbb{Z}$ aus $M$ hervorgehen. Es gilt dann $M = M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset ...$ und alle Mengen $M_k$ sind d-konvex. Nach 2.6 ist dann auch

$$M' := \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

d-konvex. Mit der leicht einzusehenden Mengengleichheit $M' = S_M(p)$ ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Wie bereits die ersten Beispiele für Eichfiguren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gezeigt haben, sind selbst lineare Unterräume nicht notwendig d-konvex. Dies gilt aber für die affinen Hüllen d-konvexer Mengen.

**Satz 2.15** *Der affine Träger einer d-konvexen Menge ist d-konvex.*

*Beweis.* Für einelementige Mengen $M$ ist nichts zu zeigen. Existieren zwei verschiedene Punkte $a, b \in M$, dann existiert wegen $[ab] \subseteq [ab]_d \subseteq M$ auch ein Punkt $p \in ri\ M$.
Nach 1.14 ist $S_M(p) = \text{aff } M$, wenden wir dann 2.14 an, erhalten wir die Behauptung. □

Die letzten Sätze lieferten d-konvexe Mengen, die eine gegebene d-konvexe Menge enthielten. Die Kegel $C_M$ aus Definition 1.8 sind dagegen Teilmengen der gegebenen Menge $M$.

**Satz 2.16** *Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine unbeschränkte d-konvexe Menge und $p$ ein Punkt aus $M$, dann ist der charakteristische Kegel $C_M(p)$ eine d-konvexe Menge.*

*Beweis.* Wegen der Unbeschränktheit und der d-Konvexität von $M$ können wir wie am Beginn des vorangegangegen Beweises von der Existenz eines Punktes $q \in ri\ M$ ausgehen. Für alle $x \in M$ bezeichne nun $M_x$ die mit dem Translationsvektor $q - x$ verschobene Menge $M_x = M + (q - x)$, die nach 2.4 wiederum d-konvex ist.
Wir zeigen jetzt Mengengleichheit

$$C_M(q) = Q := \bigcap_{x \in M} M_x.$$

Für alle $x \in M$ gilt zunächst $C_M(q) = C_M(x) + (q - x)$. Wegen $C_M(x) \subset M$ folgt hieraus $C_M(q) \subset M_x$. Damit haben wir bereits die Inklusion $C_M(q) \subseteq Q$ gezeigt.

Nun sei $s \in Q$. Da für alle $x \in M$ immer $M_x \subseteq \text{aff } M$ gilt, ist auch $Q \subseteq \text{aff } M$. Wir nehmen nun an, dass $s \in \text{aff } M \setminus C_M(q)$ gelte. Das heißt, die Halbgerade

$$h := \{x \in \text{aff } M \mid x = q + t(s - q), \quad t \geq 0\}$$

wäre nicht vollständig in $M$ enthalten.

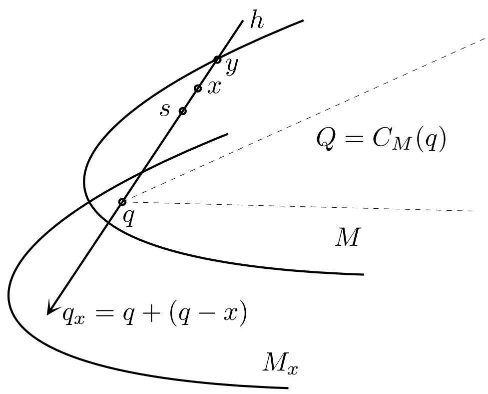


*Abb. 30*

Da $q$ als Punkt aus $ri\ M$ vorausgesetzt wurde, finden wir dann zu $\{y\} := \delta_r M \cap h$ einen Punkt $x \in [qy]$ mit $d(x,y) < d(q,s)$. Damit gehört zwar $x$ zu $M$, doch offensichtlich gilt $s \notin M_x$. Das ergibt den Widerspruch $s \notin Q$.
Es gilt also $s \in C_M(q)$, womit auch die Inklusion $Q \subseteq C_M(q)$ gezeigt ist.
Nach 2.5 ist $Q = C_M(q)$ und damit dann auch $C_M(p) = C_M(q) + (p-q)$ ein d-konvexer Kegel. □

Die im Abschnitt über abgeschlossene linear konvexe Mengen betrachteten Seiten solcher Mengen waren stets selbst konvexe Mengen. Für d-konvexe Mengen gilt das zunächst nur für die p-Seiten.

**Satz 2.17** *Jede p-Seite einer abgeschlossenen d-konvexen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist d-konvex.*

*Beweis.* Es seien $a$ und $b$ zwei beliebige Punkte einer Seite $F_p$ von $M$, und es sei $c$ ein Punkt aus $[ab]_d$. Es gilt also $d(a,c) + d(c,b) = d(a,b)$.
Wir setzen $x := \frac{1}{2}(a+b)$ und $d := 2x - c$. Damit ist $x$ Mittelpunkt von $[ab]$ und von $[cd]$. Wir haben also $a - d = c - b$, $d - b = a - c$, $d(a,d) = d(c,b)$ und $d(d,b) = d(a,c)$.

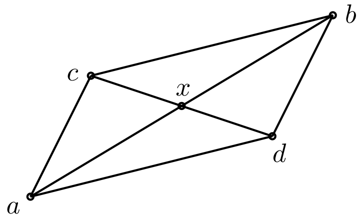



*Abb. 31*

Wir erhalten $d(a,d) + d(d,b) = d(c,b) + d(a,c) = d(a,b)$, also ist $d \in [ab]_d$. Wegen der d-Konvexität von $M$ gilt also $c, d, x \in M$. In der Seite $F_x$ liegen auch die Punkte $a, b, c$ und $d$ , weil $x$ der Mittelpunkt der beiden Strecken $[ab]$ und $[cd]$ ist.
Da $[ab] \subseteq F_x, F_p$ gilt, haben wir nach 1.25 auch $F_x \subseteq F_p$. Damit gilt dann auch $c \in F_p$, also $[ab]_d \subseteq F_p$. Die Seite $F_p$ ist d-konvex. □

**Bemerkung:** *Ist $F$ eine Seite der Form $F = M \cap H$, wobei $H$ eine Hyperebene des $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist $F$ nach Satz 2.5 d-konvex falls $H$ d-konvex ist. Wir wissen aber bereits, das affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$ nicht notwendig d-konvex sind. Die Hyperebenen haben diese Eigenschaft genau dann, wenn auch die von ihr erzeugten offenen und abgeschlossenen Halbräume d-konvex sind.*

**Hilfssatz 2.18** *Ein Halbraum $\mathcal{H}$ des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann d-konvex, wenn seine Begrenzungshyperebene $H$ d-konvex ist.*

*Beweis.* Es sei $\mathcal{H}$ ein d-konvexer Halbraum. Nach 2.11 können wir $\mathcal{H}$ als abgeschlossenen Halbraum voraussetzen. Dann ist aber seine Begrenzungshyperebene $H$ für jeden Punkt $p \in H$ eine p-Seite von $\mathcal{H}$ . Nach 2.17 ist $H$ dann auch d-konvex.
Nun setzen wir umgekehrt $H$ als d-konvex voraus. Wäre nun der Halbraum $\mathcal{H}$ nicht d-konvex, dann gäbe es Punkte $x, y \in \mathcal{H}$ und $z \notin \mathcal{H}$ mit $d(x,z)+d(z,y) = d(x,y)$. Es gibt also Schnittpunkte $a, b$ der Strecken $[xz]$ und $[yz]$ mit $H$.

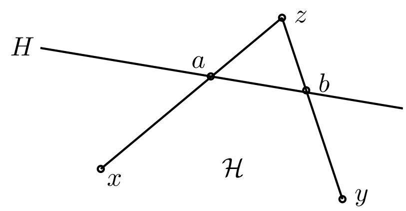



*Abb. 32*

Trivialerweise gilt dann $d(x,a)+d(a,z) = d(x,z)$ und $d(y,b)+d(b,z) = d(y,z)$. Also haben wir $d(x,y) = d(x,a) + d(a,z) + d(z,b) + d(b,y)$. Aus der Dreiecksungleichung

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y)$$

folgt dann $d(a,b) \geq d(a,z) + d(z,b)$. Abermals wegen der Dreiecksungleichung hätten wir dann aber auch $d(a,b) \leq d(a,z)+d(z,b)$ und damit $d(a,b) = d(a,z)+d(z,b)$ im Widerspruch zur d-Konvexität von $H$. Also ist $\mathcal{H}$ und damit auch der offene Halbraum *int* $\mathcal{H}$ d-konvex. □

Wir können jetzt den Satz 1.19 für d-konvexe Mengen formulieren und weitgehend anlog (bei zusätzlicher Beachtung von 2.14) beweisen.

**Satz 2.19** *Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener d-konvexer Körper, dann existiert durch jeden Randpunkt $p_0 \in \delta(M)$ eine d-konvexe Stützhyperebene.*

*Beweis.* Wir betrachten den Stützkegel $S_0 := S_M(p_0)$, der nach 2.14 d-konvex ist. Wählen wir nun einen Punkt $p_1 \neq p_0$ aus $\delta(S_0)$, dann ist auch $S_1 := S_{S_0}(p_1)$ eine d-konvexe Menge und die Gerade $g := g_{p_0p_1}$ liegt in $\delta(S_1)$. Ist nun $p_2$ ein Punkt aus dem Rand $\delta(S_1)$, der nicht in $g$ liegt, dann bezeichne $S_2$ den Stützkegel von $S_1$ im Punkt $p_2$, also $S_2 := S_{S_1}(p_2)$. $S_2$ ist wiederum d-konvex und die zweidimensionale Ebene $E$ durch $p_0, p_1$ und $p_2$ liegt in $\delta(S_2)$.
Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir eine Folge von Stützkegeln $S_0, S_1, ..., S_{n-1}$ mit $M \subseteq S_0 \subseteq S_1 \subseteq ... \subseteq S_{n-1}$, wobei $S_{n-1}$ die Hyperebene $H$ durch $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ enthält. Damit ist $H$ eine Begrenzungshyperebene des d-konvexen Halbraums $S_{n-1}$, der $M$ enthält. Also ist $H$ d-konvexe Stützhyperebene von $M$ durch $p_0$. □

# Kapitel 3

# Konvexe Mengen in Verbindungsräumen

In diesem abschließenden Kapitel verwenden wir das allgemeine Konzept einer Verbindungsgeometrie (Join geometry) und formulieren dort einen Konvexitätsbegriff, der die bisher betrachteten Definitionen als Spezielfälle mit erfasst. Konvexe Mengen wurden in den ersten beiden Abschnitten als abgeschlossen bezüglich der Verbindungsstrecke bzw. d-Strecke definiert. An die Stelle der Strecken zwischen zwei Punkten $a$ und $b$ tritt in Verbindungsräumen nun die vermöge einer axiomatisch definierten Verbindungsoperation $\nu$ zugeordnete Menge $\nu(a, b)$.

## 3.1 Verbindungsräume

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Abschnitten gehen wir weder von einem affinen noch von einem normierten Raum aus. Die folgende Struktur wird für beliebige Mengen definiert.

Es sei $X$ eine beliebige nicht leere Menge und $\nu : \ X \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung, die je zwei Elementen von $X$ eine Teilmenge von $X$ zuordnet.
Das Bild $\nu(a, b)$ von $(a, b) \in X \times X$ nennt man auch die ***Verbindung*** von $a$ und $b$. Für eine Teilmenge $Y \subseteq X$ setzen wir noch

$$\nu(a, Y) := \bigcup_{b \in Y} \nu(a, b).$$

Triviale Beispiele für solche Abbildungen sind durch $\nu_i : X \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ mit $\nu_1(a, b) = \{a\}$, $\nu_2(a, b) = \{b\}$, $\nu_3(a, b) = X$ und $\nu_4(a, b) = \emptyset$ für alle $a, b \in X$ gegeben. Für alle $a, b \in X$ und Teilmengen $Y \neq \emptyset$ von $X$ ist dann

$$\nu_1(a, Y) = \{a\}, \quad \nu_2(a, Y) = Y, \quad \nu_3(a, Y) = X \text{ und } \nu_4(a, Y) = \emptyset.$$

**Definition 3.1** $(X, \nu)$ heißt ein ***Verbindungsraum*** genau dann, wenn für alle $a, b$ und $c$ aus $X$ folgende Bedingungen gelten:

(V1) $\nu(a, b) \neq \emptyset$
(V2) $\nu(a, b) = \nu(b, a)$
(V3) $\nu(\nu(a, b), c) = \nu(a, \nu(b, c))$
(V4) $\nu(a, a) = \{a\}$

Die Elemente von $X$ heißen Punkte des Verbindungsraumes und $\nu$ heißt ***Verbindungsoperation*** auf $X$.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir künftig kurz $ab$ statt $\nu(a, b)$ für die Verbindungsmenge von $a$ und $b$ und entsprechend $aY$ statt $\nu(a, Y)$ für die Verbindung von $a$ mit der Teilmenge $Y$. Wie etwa in der Gruppentheorie üblich, sprechen wir auch abkürzend vom Verbindungsraum $X$ anstelle von $(X, \nu)$.

Analog zur Definition von $aY$ erklären wir für zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ die Verbindung von $A$ und $B$ durch

$$\nu(A, B) := \bigcup_{a \in A, b \in B} \nu(a, b) \quad \text{oder kurz} \quad AB = \bigcup_{a \in A, b \in B} ab.$$

Offensichtlich gilt dann auch

$$AB = \bigcup_{a \in A} aB = \bigcup_{b \in B} bA.$$

**Satz 3.1** *Ist $X$ ein Verbindungsraum, dann gelten für alle Teilmengen $A, B, C$ und $D$ von $X$ die Monotoniegesetze*

*(M1) $A \subseteq B \Longrightarrow AC \subseteq BC$ und*
*(M2) $A \subseteq B \ \wedge \ C \subseteq D \Longrightarrow AC \subseteq BD$.*

*Beweis.* M1: Ist $x \in AC$, dann existiert ein $a \in A$ und ein $c \in C$ mit $x \in ac$. Da wegen $A \subseteq B$ aber auch $ac \subseteq BC$ gilt folgt $x \in BC$.
M2: Ist $x \in AB$, dann existieren also $a \in A$ und $b \in B$ mit $x \in ab$. Wegen $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$ gilt dann auch $x \in ab \subseteq CD$. □

**Satz 3.2** *Ist $X$ ein Verbindungsraum, dann gelten für alle nicht leeren Teilmengen $A, B, C \subseteq X$ die Regeln (vgl. Definition 3.1)*

*(T1) $AB \neq \emptyset$,*
*(T2) $AB = BA$,*
*(T3) $(AB)C = A(BC)$ und*
*(T4) $A \subseteq AA$.*

*Beweis.* Die Regeln T1, T2 und T3 sind unmittelbare Folgerungen aus den entsprechenden Eigenschaften V1, V2 und V3 der Verbindungsoperation. Schließlich gilt auch für alle $a \in A$ wegen T4 noch $a \in \{a\} = aa \subseteq AA$, also ist auch $A \subseteq AA$ gezeigt. $\square$

Überraschenderweise gilt statt T4 nicht $A = AA$ (analog zu V4). Wir geben ein einfaches Gegenbeispiel hierfür an. Es sei $X = \mathbb{R}^2$ und $ab$ sei für $a \neq b$ durch die offenen Strecke $(ab)$ und für $a = b$ durch $\{a\}$ definiert.
Man prüft leicht nach, dass die Eigenschaften V1 - V4 erfüllt sind. Betrachten wir nun die Teilmenge $A = \{a, b\} \subseteq X$ mit $a \neq b$, dann ist

$$AA = ab \cup ba \cup \{a\} \cup \{b\} = [ab] \neq \{a, b\} = A.$$

Unmittelbar aus der Definition für $AB$ ergibt sich auch die folgende Distributivität der Verbindungsoperation.

**Satz 3.3** *Für beliebige Teilmengen $A, B, C$ eines Verbindungsraums $X$ gilt*

$$A(B \cup C) = AB \cup AC.$$

Als eine gewisse Umkehroperation zur Verbindung von Mengen definiert man in Verbindungsräumen die den Quotienten von zwei Punkten bzw. zweier Mengen.

**Definition 3.2** Sind $a$ und $b$ zwei Punkte eines Verbindungsraumes $X$, dann heißt die Menge

$$a/b := \{x \in X|\ a \in bx\}$$

der ***Quotient*** von $a$ und $b$.
Für Teilmengen $A, B \subseteq X$ heißt

$$A/B := \bigcup_{a \in A, b \in B} a/b$$

der ***Quotient*** vonb $A$ und $B$, oder auch die ***Erweiterung*** von $A$ durch $B$.

Als Beispiel betrachten wir nochmal das obige Beispiel des Raumes $\mathbb{R}^2$ mit $ab := (ab)$. Hier ist $a/b = \{x | x = a + t(a - b), t > 0\}$ die offene Halbgerade in $g_{ab}$ mit $a$ als Anfangspunkt, die den Punkt $b$ nicht enthält. Die folgende Abbildung veranschaulicht die Mengen $a/b$, $b/a$ und $A/B$ für dieses Beispiel.

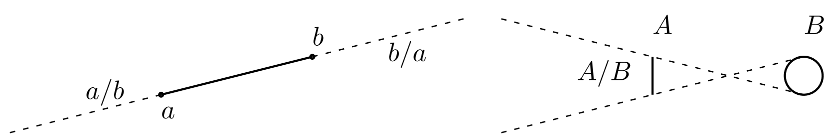



*Abb. 33*

Wie für die Verbindung von Mengen bereits gezeigt, ergeben sich unmittelbar aus der Definition nun einige Rechenregeln für die Quotientenbildung.

**Satz 3.4** *Für beliebige Teilmengen $A, B, C$ eines Verbindungsraums $X$ gelten*
*(M1)* $A \subseteq B \Longrightarrow A/C \subseteq B/C$,
*(M2)* $A \subseteq B \ \wedge \ C \subseteq D \Longrightarrow A/C \subseteq B/D$,
*(I)* $A \subseteq A/A$,
*(D1)* $A/(B \cup C) = A/B \cup A/C$ *und*
*(D2)* $(A \cup B)/C = A/C \cup B/C$.

*Beweis.* Wir geben nur einige Beweisbeispiele:
(M1) Ist $x \in A/C$, dann existiert ein $a \in A$ und ein $c \in C$ mit $x \in a/c$, also gilt $a \in cx$. Aus $a \in A \subseteq B$ folgt nun umgekehrt auch $x \in B/C$. Analog zeigt man auch (M2).
(I) Für alle $a \in A$ folgt wegen $a \in \{a\} = aa$, dass $a \in a/a$ gilt. Damit ist bereits $A \subseteq A/A$ gezeigt.
(D1) Es sei $x \in A/(B \cup C)$. Es existieren also $a \in A$ und $d \in (B \cup C)$ mit $x \in a/d$. Da nun $a/d \subseteq A/B$ oder $a/d \subseteq A/C$ gilt, liegt $x$ in der Vereinigungsmenge dieser Mengen. Die Umkehrung ergibt sich analog und ähnlich beweist man auch (D2). □

## 3.2 Die Inzidenzrelation in Verbindungsräumen

Neben der Verbindungsoperation betrachten wir nun noch eine Relation „ $\sim$ “ zwischen Teilmengen eines Verbindungsraumes. Dabei gelte $A \sim B$ genau dann, wenn die Mengen $A$ und $B$ eine nichtleere Durchschnittsmenge besitzen. Wir sprechen deshalb auch von einer Inzidenzrelation.

**Definition 3.3** Für Teilmengen $A$ und $B$ eines Verbindungsraumes $X$ setzen wir

$$A \sim B :\Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

$A$ ***inzidiert*** mit $B$

In der Literatur (vgl. [8]) heißt die Relation auch „*intersects*“ oder „*meets*“.

Als einfache Folgerungen aus dieser Definition ergeben sich die Regeln des folgenden Satzes.

**Satz 3.5** *Für Teilmengen $A, B, C$ und $D$ eines Verbindungsraumes gilt*
*(a)* $A \sim A \Longleftrightarrow A \neq \emptyset$,
*(b)* $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$,
*(c)* $A \sim B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \sim C$,
*(d)* $A \sim B \wedge C \neq \emptyset \Longrightarrow AC \sim BC$ *und*
*(e)* $A \sim B \wedge C \sim D \Longrightarrow AC \sim BD$.

*Beweis.* Die Eigenschaften $(a), (b)$ und $(c)$ sind rein mengentheoretische Folgerungen auf Grund der Eigenschaften der Durchschnittsoperation für Mengen.
Unter den Voraussetzungen von $(d)$ existiert ein Punkt $x \in A \cap B$ und ein $c \in C$. Damit ist dann $xc \subseteq AC$ und $xc \subseteq BC$ und nach $(V1)$ ist $xc \neq \emptyset$. Also gilt $AC \sim BC$.
Ist $x \in A \cap B$ und $y \in C \cap D$ dann folgt analog $\emptyset \neq xy \subseteq AC \cap BD$, also gilt auch $(e)$. □

Nach 3.5 $b$ ist die Relation „ $\sim$ “ symmetrisch. Einfache Beispiele für Teilmengen einer beliebigen Menge $X$ zeigen aber, dass aber keine Tranmsitivität gilt. In Verbindungsräumen kann aber eine Beziehung zur Verbindungsoperation bzw. zur Quotientenbildung hergestellt werden.

**Satz 3.6** *Für Teilmengen $A, B$ und $C$ eines Verbindungsraumes gilt*

$$A \sim BC \Longleftrightarrow A/B \sim C.$$

*Beweis.* Es sei zunächst $A \sim BC$ vorausgesetzt. Dann existiert ein $a \in A \cap BC$, dabei sei nun $a \in bc$ für $b \in B$ und $c \in C$. Nach der Definition 3.2 gilt dann $c \in a/b$ und damit auch $c \in A/B$. Es ist also $c \in A/B \cap C$, das heißt, es gilt $A/B \sim C$.
Umgekehrt folgt aus $A/B \sim C$, dass ein $c$ in $C \cap A/B$ existiert. Nun sei $c \in a/b$ für $a \in A$ und $b \in B$. Damit ist dann nach Definition 3.2 dann $a \in bc$ bzw. $a \in BC$, also haben wir wieder $a \in A \cap BC$. Damit ist dann $A \sim BC$ gezeigt.
□

**Bemerkung:** Für Punkte $a, b$ und $c$ eines Verbindungsraumes gilt nach 3.6 also

$$\{a\} \sim bc \Longleftrightarrow a/b \sim \{c\}.$$

Wir zeigen abschließend noch gewisse Assoziativitätsgesetze für die Quotientenbildung.

**Satz 3.7** *Für Punkte $a, b, c$ und Teilmengen $A, B$ und $C$ eines Verbindungsraumes gilt*
*(a) $(a/b)/c = a/bc$ und*
*(b) $(A/B)/C = A/BC$.*

*Beweis.* Um (a) zu beweisen sei etwa $x \in (a/b)/c$. Dazu äquivalente Aussagen sind jeweils
- $xc \sim a/b$ nach der Definition des Quotienten,
- $(xc)b \sim \{a\}$ nach der Bemerkung im Anschluß an Satz 3.6,
- $x(bc) \sim \{a\}$ nach (V2) und (V3) und schließlich
- $\{x\} \sim a/bc$ wiederum nach Satz 3.6. Die letzte Aussage wiederum ist gleichbedeutend mit $x \in a/bc$.

Auf einen Beweis für (b), der nun nach dem gleichen Muster geführt werden könnte, soll hier verzichtet werden. □

**Bemerkung.** Da die Verbindungsoperation auf $X$ je zwei Elementen eine Teilmenge von $X$ zuordnet, haben wir bisher für die einelementigen Mengen konsequent die Mengenklammern verwendet, so lautete (V4) dann $\nu(a, a) = aa = \{a\}$. Künftig werden statt wir, wie auch in [8] praktiziert, die etwas *„schlampige aber bequemere“* [1] Schreibweise $aa = a$ verwenden.

## 3.3 v-konvexe Mengen

Wie in linearen Räumen werden wir nun eine Teilmenge eines Verbindungsraumes konvex nennen, wenn mit je zwei Punkten $a$ und $b$ auch deren Verbindung $ab$ ganz in dieser Menge liegt. Zur Unterscheidung von den in den Abschnitten 1 und 2 diskutierten Konvexitätsbegriffen nennen wir solche Mengen dann v-konvex.

**Definition 3.4** Eine Teilmenge $M$ eines Verbindungsraumes $X$ heißt ***v-konvex*** genau dann, wenn für alle $a, b \in M$ stets $ab \subseteq M$ gilt.

Als unmittelbare Folgerung aus dieser Definition ergeben sich äquivalente Charakterisierungen konvexer Mengen.

**Satz 3.8** *Eine Menge $M$ ist genau dann v-konvex, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*
*(a) $MM \subseteq M$*
*(b) $MM = M$*

*Beweis.* Beachtet man die Definition von $MM$, dann ist (a) genau die Bedingung, die in der Definition 3.4 gefordert wird.
Unter Beachtung von (T4) ist aber $MM \subset M$ auch äquivalent zu $MM = M$, also zu (b). □

Mit 3.8 ergibt sich unmittelbar, dass jede Verbindung von Punkten eine v-konvexe Menge liefert. Sind also $p_1, p_2$ und $p_3$ Punkte eines Verbindungsraumes, dann folgt nach (V3) bzw. (T3) unter Beachtung von (T4), dass

$$M = p_1p_2p_3 =: p_1(p_2p_3) = (p_1p_2)p_3$$

eine v-konvexe Menge ist.

Wir formulieren noch einige einfache Sätze über v-konvexe Mengen, deren Beweise sich fast ausschließlich aus den Eigenschaften der Verbindunsgoperation und der Definition der v-Konvexität ableiten lassen.

[1] vgl. LENZ: Grundlagen der Elementarmathematik, 1975

**Satz 3.9** *Sind A und B Teilmengen einer konvexen Menge M dann gilt* $AB \subseteq M$.

*Beweis.* Ist $x \in AB$, dann existieren Punkte $a \in A \subset X$ und $b \in B \subset X$ mit $x \in ab$. Da $M$ konvex ist, folgt hieraus bereits $x \in ab \subset M$. □

**Satz 3.10** *Sind A und B zwei v-konvexe Teilmengen eines Verbindungsraumes, dann sind die Mengen AB und* $A \cap B$ *ebenfalls v-konvexe Mengen.*

*Beweis.* Der Beweis für die Menge $A \cap B$ ist trivial.
Nun seien $x$ und $y$ zwei Punkte aus $AB$, also etwa $x \in a_1b_1$ und $y \in a_2b_2$ mit $a_1, a_2 \in A$ und $b_1, b_2 \in B$. Damit erhalten wir mit (M2) aus dem Satz 3.1 und (V2) und (V3)

$$xy \subset (a_1b_1)(a_2b_2) = (a_1a_2)(b_1b_2) \subset AB.$$

Damit ist $AB$ konvex. □

Nach der Definition der Verbindungsoperation ist der Verbindungsraum $X$ als unechte Teilmenge von $X$ selbst v-konvex. Es gibt also zu jeder Teilmenge $A \subset X$ eine v-konvexe Menge $B \subseteq X$, die $A$ als Teilmenge enthält. Dementsprechend kann auch der Begriff der konvexen Hülle wie im Abschnitt 1 definiert werden.

**Definition 3.5** Der Durchschnitt aller v-konvexen Mengen, die eine gegebene Teilmenge $M$ eines verbindungsraumes $X$ enthalten, heißt die ***v-konvexe Hülle*** $conv_v\ M$ von $M$.

$$conv_v\ M = \bigcap \mathbb{M} \quad \text{mit} \quad \mathbb{M} := \{N \subseteq X | M \subseteq N\ \wedge N\ v - konvex\}$$

Man überlegt sich nun leicht, dass auch $conv_v$ die Eigenschaften einer Hüllenoperation besitzt. Die v-konvexe Hülle einer Menge von endliche vielen Punkten nennt man in Verbindungsräumen ebenfalls ein Polytop oder ***v-Polytop***. Insbesondere ist $ab$ für zwei verschiedene Punkte $a, b \in X$ ein solches v-Polytop.

Obwohl auf einem Verbindungsraum werder eine Topologie noch eine Metrik definiert sein muß, lassen sich Begriffe wie innerer oder auch Randpunkt einer Menge in dieser Struktur für v-konvexe Mengen definieren.

**Definition 3.6** Ein Punkt $p \in M$ einer v-konvexen Menge $M$ heißt ein innerer Punkt von $M$, wenn für jeden Punkt $x \in M$ ein Punkt $y \in M$ mit $p \in xy$ existiert.
Ein Punkt $q \in M$ einer v-konvexen Menge $M$, der kein innerer Punkt von $M$ ist, heißt ein Randpunkt von $M$.

Dass diese Definition nur für v-konvexe Mengen sinnvoll ist, zeigt das folgende Beispiel. Die Menge $M \subset R^2$ sei die Vereinigung der beiden Strecken $[ab]$ und

$[ac]$, wobei $a, b, c$ nichtkollineare Punkte sind. Mit der üblichen Verbindungsoperation durch die linearen Strecken, wäre dann jeder innere Punkt des Dreiecks $abc$ bereits ein innerer Punkt von $M$.

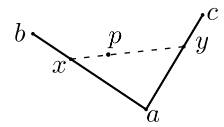



*Abb. 34*

Viele der im ersten Abschnitt über linear konvexe Mengen behandelten Eigenschaften und Sätze lassen sich nun in analoger Weise für v-konvexe Mengen formulieren und beweisen. (Vgl. dazu [8]) Lediglich der Begriff der Stützhyperebene und die damit erklärten Seitenbegriffe einer Menge ergeben hier keinen Sinn, da kein linearer Raum vorausgesetzt wurde. Entsprechend gibt es auch keine Möglichkeit die Menge der v-konvex abhängigen Punkte oder die v-konvexe Hülle einer Punktmenge analytisch darzustellen. Zur Verfügung stehen lediglich die Verbindungsoperation und die Inzidenzrelation „ $\sim$ “.

## 3.4 Verbindungsgeometrien (Join geometries)

Eine sehr natürliche geometrische Realisierung eines Verbindungsraumes ist durch den n-dimensionalen affinen Raum $R^n$ als Punktmenge und der Zuordnung zweier Punkte $a$ und $b$ zu ihrer offenen Verbindungstrecke $(ab)$ als Operation gegeben. Neben den bereits allgemein gezeigten Regeln für die Verbindung, die Quotientenbildung und die Inzidenzrelation gelten in diesem Beispiel weitere Eigenschaften, die sich aber in einem allgemeinen Verbindungsraum nicht beweisen lassen.
Dieses Standardbeispiel dient somit als Vorbild für den Begriff der Verbindungsgeometrie. Wir fordern zusätzlich einige geometrisch motivierte Eigenschaften als Axiome für diese speziellen Verbindungsräume.

**Definition 3.7** Ein Verbindungsraum $(X, \nu)$ heißt eine ***Verbindungsgeometrie***, wenn neben den Eigenschaften (V1) bis (V4) für alle $a, b, c, d \in X$ zusätzlich folgende Bedingungen gelten:
(V5) $a/b \neq \emptyset$
(V6) $a/b \sim c/d \Longrightarrow ad \sim bc$
(V7) $a/a = a$

Analog zu dem eingangs erwähnte Beispiel einer solchen Verbindungsoperation auf dem $R^n$

$$ab := \begin{cases} a & \text{falls } a = b \\ (ab) & \text{für } a \neq b \end{cases}$$

geben wir hier noch ein Verbindungsoperation auf einem offenen Halbraum des euklidischen Raumes $\mathbb{E}^n$ an. Dabei sei $X$ die Menge aller offenen Halbgeraden

$$h_v = \{x \in \mathbb{E}^n | \; x = tv, \; t > 0\} \text{ mit } v \in \mathbb{E}^n \text{ und } v_n \neq 0.$$

Als Verbindung von $h_v$ und $h_w$ aus $X$ definieren wir $h_v w_w := \{h_v\}$ falls $h_v = h_w$ gilt, und für $h_v \neq h_w$ setzen wir

$$h_v h_w := \{h_u | \; u = \lambda v + \mu w, \text{ mit } \lambda + \mu = 1 \text{ und } 0 < \lambda, \mu < 1\}.$$

In analoger Weise lassen sich auf vielen Teilmengen von $R^n$ und $\mathbb{E}^n$ (Unterräume, offene linear konvexe Mengen) entsprechende Operationen definieren, bezüglich der diese Teilmengen Beispiele für Verbindungsgeometrien liefern. Eine längere Liste solcher Beispiele findet man in [8] Seite 211.

**Bemerkungen zu den Axiomen (V5) - (V7)**

(V5) Diese Forderung sichert eine gewisse Fortsetzbarkeit, oder topologische Offenheit des Raumes $X$. Zu zwei verschiedenen Punkten $a$ und $b$ existieren immer Punkte $x, y \in X$ mit $a \in bx$ und $b \in ay$.

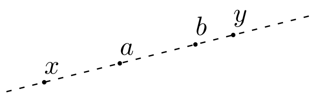
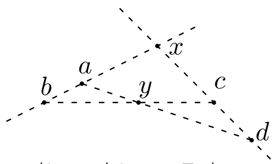



*Abb. 35*

(V6) Hinter diesem Axiom verbirgt sich eine Dimensionbeschränkung. Im Standardmodell des $\mathbb{R}^n$ bedeutet diese Implikation, dass zwei sich schneidende Geraden in einem zweidimensionalen Unterraum liegen.




$$x \in a/b \cap c/d \Longrightarrow \exists y | \; y \in ad \cap bc$$

*Abb. 36*

(V7) Offenbar gilt bei allen Beispielen von Verbindungsgeometrien für $a \neq b$ immer $a, b \notin ab$. Dies ist eine Folgerung aus (V7), denn sonst wäre ja für alle $x \in X$ stets $a \in ax$ und damit $x \in a/a$. Die Verbindungsoperation in Form der abgeschlossenen Strecke $\nu(a,b) := [ab]$ und $\nu(a,a) := a$ im Raum $R^n$ liefert also zwar einen Verbindungsraum $(X, \nu)$ im Sinne von Definition 3.1 aber keine Verbindungsgeometrie gemäß Definition 3.7.

Wir wollen abschließend zeigen, dass die Verbindung zweier Punkte eines normierten Raumes $\mathbb{R}^n$ durch ihre d-Strecke weder eine Verbindungsgeometrie noch einen Verbindungsraum liefert. Dazu setzen wir

$$aa := a \quad \text{und} \quad ab := [ab]_d \setminus \{a, b\} \text{ für } a \neq b.$$

Die Eigenschaften (V1), (V2) und (V4) eines Verbindungsraums ergeben sich unmittelbar aus dieser Definition für $ab$. Gleichermaßen offensichtlich ist auch, dass (V5) und (V7) durch diese Definition realisiert sind.
Die Assoziativität (V3) ist aber allgemein nicht zu beweisen.
Wäre (V3) erfüllt, dann läge ein Verbindungsraum vor und nach Definition 3.4 sind dann die einelementigen Mengen $\{a\}$ und $\{b\}$ v-konvex. Mit Satz 3.10 ist dann auch $ab$ v-konvex. Somit müßten die d-Strecken v-konvexe, also bei der oben definierten Verbindungsoperation d-konvexe Mengen sein. An einem Beispiel im Abschnitt 2.2. wurde aber gezeigt, dass bei entsprechender Norm des Raumes auch nicht d-konvexe d-Strecken existieren.

Man kann anstelle von (V3) für die Verbindung in Form der d-Strecken eine gewisse Abschwächung der Assoziativität beweisen.

**Satz 3.11** *Für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt $a(ab) = (aa)b = ab$.*

Für $a = b$ ist die Behauptung trivial, denn dann gilt $a(ab) = a(aa) = aa = ab$.
Nun sei $a \neq b$ und $x \in (ab)$ und $z$ sei der Schnittpunkt der Geraden durch $a$ undf $x$ mit dem Rand von $K_b$. Falls $z = x$ gilt, ist $x \in (ay)$ für $y := \frac{1}{2}(x + b)$, anderenfalls folgt nach 2.9 sofort $x \in [az] \subset [ab]$, also $x \in a(ab)$.

Ist nun umgekehrt $x \in a(ab)$, dann existiert ein $y \in ab$ mit $x \in ay$. Dabei ist $x \neq a, y$ und $y \neq a, b$. Nach 2.9 ist dann $[ay]_d \subset [ab]_d$ und damit auch $x \in [ab]_d$. Um nun auf $x \in ab$ schließen zu können, muß nur noch $x \neq b$ gezeigt werden. Wäre aber $x = b$, dann hätten wir $d(a, x) + d(x, y) = d(a, b) + d(b, y) = d(a, y)$. Mit $d(a, y) + d(y, b) = d(a, b)$ würde hieraus aber der Widerspruch $2d(b, y) = 0$ folgen. $\square$

Viele der üblicherweise zu erwartenden Eigenschaften v-konvexer Mengen lassen sich überraschenderweise auch bereits mit dieser schwächeren Forderung zeigen.

# Literaturverzeichnis


[1] Barvinok, A.: *A course in convexity.* AMS, 2002

[2] Benson, R.V.: *Euclidean geometry and convexity.* McGraw-Hill, 1966

[3] Boltyanskij, V.G., Soltan, P.S.: *Kombinatornaya geometriya razlichnykh klassov vypuklykh mnozhestv (russisch).* Shtiintsa, Kishinev, 1978.

[4] Boltyanski, V., Martini, H, Soltan, P.S.: *Excursions into Combinatorial Geometry.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1997.

[5] Klotzek, B., Quaisser, E.: *Nichteuklidische Geometrie.* DVW, Berlin, 1978.

[6] Leichtweiß, K.: *Konvexe Mengen.* DVW, Berlin, 1980.

[7] Nozicka, F., Grygarova, L., Lommatsch, K.: *Geometrie konvexer Mengen und konvexe Analysis.* Akademie-Verlag, Berlin, 1988.

[8] Prenowitz, W., Jantosciak, J.: *Join geometries.* Springer-Verlag, New York, 1979.

# Index

abgeschlossene Menge, 11
Abschluß einer Menge , 11
affin abhängig, 3
affin unabhängig, 3
affiner Träger, 2
affiner Unterraum, 2

Bogen, 48

d-konvex, 48
d-konvexe Hülle, 56
d-konvexer Körper, 48
d-Strecke, 45

Ecken des Simplex, 6
Ecken eines Polytops, 36
Eichfigur, 42
eigentliche Seite, 19
Einheitskugel, 42
Erweiterung, 67
Extrempunkt, 32

Häufungspunkt einer Menge, 11
Halbraum, 5
Hyperebene, 5

innerer Punkt, 11
Inneres einer Menge , 11
Inzidenzrelation, 68
inzidiert mit, 68

Join geometry, 65

konvex, 5
konvex abhängiger Punkt, 6
konvexe Hülle, 25
konvexe Verbindungsmenge, 8
konvexer Körper, 5
konvexer Kegel, 9
Konvexkombination, 6
Kreuzpolytop, 38

linear konvex, 1, 5

maximale Seite, 19
metrisch konvex, 48
minimale Seite, 19

Norm, 2, 41
normierter Vektorraum, 41

offene Menge, 11

p-Seite, 21
Parallelepiped, 38
Polytop, 34

Quotient, 67

Rand einer Menge, 11
relativ innerer Punkt, 11
relativer Rand, 12
relatives Inneres, 12

Scheitel, 9
Scheitelmenge, 9
Scheitelpunkt, 9
Seite, 19
Simplex, 6
Skalarprodukt, 2
Stützhyperebene, 17
streng konvex, 16

Tetraeder, 38

uneigentliche Seite, 19

v-Distributivität, 67
v-konvex, 70
v-konvexe Hülle, 71
v-Polytop, 71
Verband, 39
Verbindungsgeometrie, 72
Verbindungsoperation, 66
Verbindungsraum, 66

Würfel, 38

zentrische Streckung, 8