Kleines Aufgabenbrevier

Eine Aufgabe verstehen heißt
sie sich stellen.
Hans-Georg Gadamer

Diese Ausführungen sollen Praktikern Anregungen sein und bieten, über Mathematikaufgaben nachzudenken, und bei deren Einschätzung, Beurteilung und Konstruktion behilflich zu sein. Es geht also weniger um eine strenge Kategorisierung solcher Aufgaben nach welchen Gesichtspunkten auch immer, sondern mehr um eine Entfaltung von Sichtweisen und Gedanken, die die Lehrkraft ermutigen will, der Thematik überlegt und phantasievoll zu begegnen und nach den Umständen ihrer Schulen und Stunden in ihrem Unterricht für ihre Schülerinnen und Schüler „das Beste daraus zu machen".

Wir entwickeln hier unsere Gedanken und Vorstellungen an Stichworten, die unterschiedliche Aspekte von Aufgaben beleuchten sollen, die aber weder systematisch noch disjunkt aufzufassen sind. Wo es uns sinnvoll und erforderlich erscheint, geben wir auch Beispiele, obwohl der Praktiker ja Legionen von Aufgaben kennt und die Schulbuchliteratur von ihnen wimmelt.[i]

Wortlose und –arme Aufgaben

Eine erste einfache Möglichkeit, einzelne Aufgaben oder Aufgabengruppen (z.B. in Klassenarbeiten) einzuschätzen, besteht darin, die Wörter zu zählen, die sie enthalten. Enthält eine Aufgabe keine oder nur sehr wenige deutsche Wörter, z.B. Aufforderungen wie „Multipliziere aus!", „Vereinfache!", „Forme um!", „Berechne das bestimmte Integral!", dann ist in der Regel ein vorher behandeltes und klar umrissenes Verfahren auszuführen, ein Algorithmus anzuwenden. Das Trainieren und Beherrschen eines Verfahrens und es zu verstehen ist zweierlei. Beschränkte sich der Mathematikunterricht auf das erstere, erschöpfte er sich in einem Verfahrenstraining, dann geriete er in der Tat in Gefahr, durch die zunehmende Verbreitung von Computer-Algebra-Systemen (CAS) an den Rand gedrängt oder sogar überflüssig zu werden.

In der pädagogischen und didaktischen Literatur wird immer wieder ein „verständnisintensives" Lernen angemahnt und in das Zentrum der Überlegungen gestellt. Dabei wird zuweilen übergangen oder unterschätzt, dass auch das Beherrschen eines Verfahrens ein Verständnis voraussetzt, nämlich ein instrumentelles Verstehen: man muss verstehen, „was man tun soll", und dies dann richtig ausführen, z.B. bei der Multiplikation von Bruchzahlen eine Regel wie „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner" anwenden. Dieses Verstehen einer Regel in dem

Sinne, dass man sie ausführen kann, ist natürlich nicht unabhängig vom Verständnis der Regel selbst, aber es ist etwas anderes. (Man kann auch falsche Regeln, z.B. zur Addition von zwei Bruchzahlen „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner“ instrumentell verstehen und dann – richtig – anwenden.) Vielen didaktischen Autoren scheint dieses instrumentelle Verstehen selbstverständlich und eine natürliche Folge des inhaltlichen Verstehens. Schulpraktiker sehen das in der Regel anders und kämpfen die nächste Klassenarbeit und das Klassenziel vor Augen mit dem Problem des instrumentellen Verstehens, das sich ihnen unmittelbar aufdrängt, während ein inhaltliches Verstehen mancher Auffassung nach gar nicht allen Lernenden zugänglich ist oder sie erreicht.

Würde man Lernprozesse von einzelnen Schülerinnen und Schülern tatsächlich im Detail „aufzudröseln“ versuchen, würde sich vermutlich herausstellen, dass Lernen weder so noch so verläuft, sondern ein individueller chaotischer paradoxer dialektischer Prozess ist, der jedenfalls nicht parallel einer stoffdidaktischen Stufung und Analyse des betrachteten Verfahrens abläuft. Auch das – auf welchem Niveau auch immer – Verstandene wird sich dem einzelnen Lernenden anders darstellen, als der Experte dies vermutet, der zu glauben geneigt ist, der Lernende habe das verstanden, was der Experte ihn lehrte, verbinde also nun die gleiche Vorstellung wie dieser mit der besprochenen Sache. Lernen im Mathematikunterricht ist häufig noch dadurch beengt – und vielleicht sogar behindert, dass das zu Lernende gar nicht zur Disposition und zuweilen nicht einmal zur Diskussion steht, sondern dass das mathematische Verfahren eben feststeht und man es nur zu verstehen hat. Dadurch liegt es für den Lernenden nahe, auf das inhaltliches Verstehen zu verzichten, es sich gleichsam zu sparen, da für die Richtigkeit des Verfahrens nicht die eigene Erkenntnis sondern der Unterrichtende und das Schulbuch (und die ganze Anstalt ohnehin) gerade stehen.

Übungsaufgaben

Aufgaben, die nur wenige Worte enthalten, fordern fast immer (nur) das instrumentelle Verständnis. Sie stehen häufig im Vordergrund und nehmen den größten Teil der Schülerarbeitszeit im Unterricht ein. Vielfach werden sie als unabdingbare Übungs- oder Trainingsaufgaben gesehen. Man sollte sie nicht streichen, aber doch in ihrer Anzahl deutlich reduzieren und sie aspektreicher gestalten. Dazu kann man z.B.

- das Ergebnis eines Verfahrens vorgeben und nach der Eingabe fragen.
- Zwischenschritte angeben und nach der Ein- und Ausgabe des Verfahrens fragen.
- das Verfahren oder Teile davon in Worten formulieren oder formulieren lassen.

Zu den TIMSS-Items für die Jahrgangsstufen 7 und 8 gehörte z.B. die Aufgabe:

Wenn das Vierfache einer Zahl 48 ist, wie groß ist dann 1/3 dieser Zahl?

Nur 30% der deutschen Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 7 und 38% der Jahrgangstufe 8 beantworteten diese Frage richtig. Vermutlich hätten deutlich mehr die Aufgabe

$$4x = 48 \Rightarrow \frac{x}{3} = ?$$

richtig beantwortet. Wortformulierungen fordern sogleich ein Verständnis an, das über das bloße Manipulieren hinaus geht. Die Aufgabe

Welche Zahl verhält sich zu 52 wie 7 zu 13?

verlangt ein tieferes Verständnis als die Aufgabe

$$\frac{x}{52} = \frac{7}{13} \Rightarrow x = ?$$

Nicht nur instrumentelles sondern auch inhaltliches Verstehen kann man üben. Der Auftrag eine einfache Situation zu erzählen, die auf die Gleichung

$$4x + 2 = 12$$

führt, macht schnell deutlich, dass zu der Gleichung

$$4(x + 2) = 12$$

eine andere Situation gehört, und „übt" so Syntax und Semantik einfacher Gleichungen. Kennzeichnend für Aufgaben, die über das Trainieren des instrumentellen Verständnisses hinausgehen ist wohl grundsätzlich, dass im Aufgabentext die rein objektsprachliche Ebene – also die der mathematischen Zeichenreihe(n) – verlassen wird. Dieses kann in harmloser aber auch in umfassender Weise geschehen. Wir geben drei Beispiele:

Größer oder kleiner

Karin weiß seit langem, dass positive Zahlen beim Multiplizieren größer und beim Dividieren kleiner werden. Aber in der Bruchrechnung stimmt das nicht immer. Das scheint ihr unlogisch. Kannst du ihr helfen?

Eine doppelte Lösung

Tanja und Klaus sind ratlos! Klaus wollte eine quadratische Gleichung in Normalform bestimmen, die die Lösungen $x_1 = \sqrt{5}$ *und* $x_2 = -\sqrt{3}$ *hat. Deshalb hat er gerechnet:*

$$\left(x - x_1\right)\ \left(x - x_2\right) = \left(x - \sqrt{5}\right)\ \left(x + \sqrt{3}\right) = x^2 + \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)x - \sqrt{15}.$$

Zur Kontrolle hat er die Gleichung Tanja gegeben. Tanja will die Gleichung mit Hilfe der Diskriminante D lösen und überlegt:

$p=\sqrt{3}-\sqrt{5}$ *und* $q=-\sqrt{15}$.

Also gilt:

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\sqrt{15}=\frac{3-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+5}{4}+\sqrt{15}=\frac{8-2\sqrt{15}}{4}=+\sqrt{15}=2+\frac{\sqrt{15}}{2}$$

und damit

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{D}=-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2+\frac{\sqrt{15}}{2}} \quad \textit{und} \quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{D}=-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}-\sqrt{2+\frac{\sqrt{15}}{2}}.$$

Jetzt sind die beiden ratlos. Klaus ist sich sicher, dass seine Gleichung tatsächlich die Lösungen $\sqrt{5}$ *und* $-\sqrt{3}$ *hat, und Tanja kann in ihrer Rechnung auch keinen Fehler finden. Kannst du den beiden helfen?*

Die vierte Rechenart

Die erste Rechenart ist das Addieren: 2+5=7.
Die zweite Rechenart ist das Multiplizieren: 2·5=10.
Die dritte Rechenart ist das Potenzieren: $2^5=32$.
Denke dir eine vierte Rechenart aus; rechne mit ihr und stelle Regeln für sie auf.

Zum Addieren gehört das Subtrahieren.
Zum Multiplizieren das Dividieren.
Zum Potenzieren das Wurzelziehen.
Welche Operation gehört zu deiner vierten Rechenart?

„Textaufgaben“

„Textaufgaben“ sind das Pendant zu den wortlosen Aufgaben und folgen vermutlich der Auffassung, dass nach dem Üben des puren, sinnleeren Algorithmus derselbe nun erschwerend hinter Texten oder in ihnen zu verstecken sei. Das schreckt die Schülerinnen und Schüler zurecht und diskreditiert zudem noch Sprache und Sinn. Schnell merken sie, wenn es in den Textaufgaben gar nicht um den Text sondern darum geht, ihn loszuwerden. Dass sie dafür dann in ihrem Schreck mitunter die Daten des Textes in abenteuerliche Weise „verrechnen“, kann man ihnen kaum übel nehmen. Das Entsetzen über die Bearbeitung von „Kapitänsaufgaben“ *(26 Schafe und 10 Ziegen sind auf einem Schiff, wie alt ist der Kapitän?)* durch Schülerinnen und Schüler, sollte dem Entsetzen über einen verfahrens- und ergebnisorientierten MU weichen. Gerade gut gemeinte Anleitungen, wie man Textaufgaben lösen solle *(Notiere dir zunächst ... Überprüfe schließlich, ob du auch alle Daten ...)* entlarven die so angeleiteten Aufgaben als didaktisches Konstrukt, das die Schülerinnen und Schüler wieder dekonstruieren sollen. Textaufgaben sollten als solche vielleicht besser gar nicht thematisiert werden.

Jedenfalls sollte dem wortlosen Algorithmus nicht der versteckte folgen. Sprache, Texte und Sinn sollten im Mathematikunterricht vielmehr immer präsent sein.

Eingekleidete Aufgaben

„Eingekleideten" Aufgaben haben im Zuge der Forderung und Diskussion eines *anwendungsorientierten* oder *realitätsnahen* Mathematikunterrichtes den Unmut der Neurer auf sich ge- und besondere Prügel bezogen. Der Aufgabenbearbeiter müsse nur möglichst schnell die eingekleidete Aufgabe wieder entkleiden, um dann das mathematische Verfahren anzuwenden, das gerade eingeführt wurde und geübt werden soll. Dieses Einkleiden – Auskleiden, das natürlich auch den geduldigen, leidgeprüften und -erfahrenen Schülerinnen und Schülern nicht unbemerkt bleibt, wurde als Pseudoanwendung, als Hohn auf tatsächliche Anwendungen gesehen. Dieser kommt z.B. durch die Aufgabe

> 1 ½ Hühner legen in 1 ½ Tagen 1 ½ Eier. Wie viele Eier legt ein Huhn pro Tag?

zum Ausdruck, die durch die deutsche Tages- und Wochenpresse geisterte wohl als Persiflage auf eingekleidete Aufgaben, zur Bloßstellung eines als sinnfern oder -los betrachteten Schulfaches oder zur Diskeditierung des Mathematikunterrichtes insgesamt. Diese Kritik hatte und hat ihre Berechtigung, schießt aber über das Ziel hinaus, wenn sie eingekleideten Aufgaben grundsätzlich eine Bedeutung abspricht. Natürlich dient die Hühneraufgabe nicht dazu, die Legeleistung von Hennen zu berechnen oder betriebswirtschaftliche Aussagen über Legebatterien mathematisch abzusichern. Wer so tut, macht sich zurecht lächerlich. Eingekleidete Aufgaben offenbaren in der Regel nichts über nicht-mathematische Sachverhalte. Das ist nicht ihre Funktion oder sollte sie nicht sein. Sie können aber Mathematik veranschaulichen, einen mathematischen Satz oder Sachverhalt oder ein mathematisches Verfahren. Wenn es in der Kombinatorik etwa einen Hochzeitssatz gibt, dann ist offensichtlich, dass dieser Satz nichts Sachdienstliches über Eheschließungen oder Massenhochzeiten enthält. Seine Bezeichnung gibt viel mehr Auskunft darüber oder lässt zumindest vermuten, dass hier Aussagen über die Möglichkeit bestimmter Paarbildungen gemacht werden. Die in der Bezeichnung Hochzeitssatz angedeutete Einkleidung dient also nicht einer Auskunft über die Realität sondern über den Inhalt des Satzes. Einkleidungen können veranschaulichen und so einen mathematischen Sachverhalt verständlich oder zugänglich machen, indem sie ihn in nicht–mathematische Vorstellungen einkleiden. Man kann sogar grundsätzlich die Frage aufwerfen, ob man überhaupt anders verstehen kann als durch Einbettung in Vorstellungen, in Grundvorstellungen könnte man sagen, in denen sich allgemeine Denkinhalte und -strukturen mit mathematischen berühren, diesen zur Grundlage werden. Insofern wären eingekleidete Aufgaben dann nicht ein eher lästiges Kostümierspiel sondern ein Kern mathematischen Verständnisses überhaupt. Aber auch wenn man nicht diesem Fundamentalismus folgen will, sind eingekleidete Aufgaben doch eine Form der Veranschaulichung in einem gegenläufigen Sinne zu Anwendungen: wird dort Mathematik auf nicht–mathematische Sachverhalte angewandt, so werden hier Grundvorstellungen zu Gunsten der Mathematik mobilisiert. Damit soll freilich nicht jeder an den Haaren herbeigezogenen Einkleidung ein Freibrief ausgestellt werden, aber Einkleidungen und eingekleidete Aufgaben können sinnvoll sein. Durch geeignete Formulierungen kann man weitgehend eine Verwechslung von Anwendungsaufgaben und eingekleideten Aufgaben vermeiden. Meine Schülerinnen und Schüler haben sich z.B. an dem mangelnden Realitätsgehalt der folgenden Aufgabe kaum gestört, die Einkleidung war vielmehr eine Hilfe diese Tangentenfrage zu verstehen:

Etwas schnell

Dummy Dummkopp durchrast eine Straße, deren Verlauf sich mit Hilfe der Funktion zu

$$f(x)=\frac{x^3}{30}+\frac{x^2}{5}-\frac{21x}{10}$$

beschreiben lässt, und landete an einem Baum B mit den Koordinaten B(10|20). Wo ist er wohl aus der Kurve geflogen?

Anwendungsaufgaben

Im Rahmen der Diskussion um eine stärkere Realitätsorientierung des Mathematikunterrichtes, die die Strukturorientierung in den siebziger und achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts ablöste, wurde die Behandlung von Anwendungen als ein zentraler Gegenstand des Mathematikunterrichts gefordert. Dabei wurde anfänglich zuweilen im Überschwang der neuen Bestrebungen übersehen, dass Anwendungen die Lernenden nicht „automatisch" oder auch nur notwendig mehr motivieren als innermathematische Fragestellungen, und bald entdeckt, dass für den Schulunterricht brauchbare Anwendungen nicht leicht zu finden oder zu konstruieren sind. Das Dilemma[ii], dass viele Anwendungen nicht in Reichweite der Schulmathematik oder – im Versuch, dies zu gewährleisten – durch gröbliche Vereinfachung keine echte Anwendungen mehr waren, also gerade wieder die erwünschte Realitätsnähe vermissen ließen, dämpfte die Begeisterung an der neuen Orientierung des Mathematikunterrichtes oder wurde zumindest von deren Kritikern hervorgehoben. Diesem scheinbaren Dilemma liegt aber auch ein Missverständnis zugrunde darüber, was eine „echte" Anwendung sei. Vordergründig kann man darunter verstehen, dass – um es ein wenig zu überziehen – eine relevante Problemstellung aus der „Praxis" von den „Experten" tatsächlich mit einem bestimmten, der Schulmathematik zugänglichen, nachvollziehbaren und in ihrem Rahmen bedeutungsvollen Verfahren bearbeitet wird und dies nun im Mathematikunterricht thematisiert wird. Das wird vermutlich selten der Fall sein; aber der Kern einer mathematischen Anwendung besteht nicht darin, dass möglichst viel Zutaten, Einzelannahmen, Spezialwissen und Fachjargon in ihrem Rahmen auftauchen, sondern darin das ein – nicht-mathematischer – Sachverhalt modelliert, also mit den Augen und Mitteln der Mathematik betrachtet und behandelt wird. Wir betrachten dazu ein Gegenbeispiel[iii].

Fichten

Die Fichte ist in Nordeuropa und in den Gebirgen Mitteleuropas beheimatet. Durch Aufforsten wurde sie jedoch auch im übrigen Europa weit verbreitet. Mit einem Anteil von 42,5 % an der Gesamtwaldfläche stellt die Fichte in der Bundesrepublik Deutschland die wichtigste Holzart dar. Fichten können je nach Standort Höhen zwischen 30m und 50m und Durchmesser bis zu 120cm errichten. Als Mittelwerte für 100-jährige Fichten bester Standortklasse gelten eine Höhe von 35,5m und ein Mitteldurchmesser von 42cm. Auffällige Merkmale der Fichten sind ihr schlanker, relativ astfreier Wuchs und die nahezu zylindrische Stammform.

a) Berechnen Sie näherungsweise das Holzvolumen der 100jährigen Durchschnittsfichte.

b) Der Brusthöhendurchmesser (gemessen in 1,3m Höhe) als Funktion der Zeit werde durch die Funktion

$$d(t) = \frac{1}{1+e^{-0,05(t-60)}}, \quad t \geq 0$$

beschrieben (d in m, t in a).

b1) Untersuchen Sie d(t) auf Symmetrie, Wendepunkte und Asymptoten.

b2) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion im Bereich $0 \leq t \leq 100$.

b3) Welches Alter hat eine Fichte mit 0,4m Durchmesser?

b4) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $d^{-1}(t)$.

c) Die Höhe einer Fichte als Funktion der Zeit werde angenähert durch die Funktion

$$h(t) = a\left(1 + \arctan \frac{t-b}{c}\right)$$

beschrieben (h in m; t in a; a, b, c Konstanten).

c1) Ermitteln Sie die Koordinaten jenes Punktes S, in dem die Steigung des Graphen maximal ist. Ergebnis: s (b | a)

c2) Bestimmen Sie die Konstanten a, b und c so, dass die Fichte eine maximale Höhe von 51,4m erreicht und im Alter von 31 Jahren mit 1,0m pro Jahr das größte Längenwachstum besitzt. Ergebnis: a = 20; b = 31; c = 20.

c3) Wie lange dauert es, bis die Fichte 45m hoch ist?

c4) Mit welcher Geschwindigkeit (m/a) wächst der Baum im Alter von 3 Jahren?

c5) Wie groß ist die mittlere stündliche Längenzunahme einer 15jährigen Fichte, wenn sie drei Monate im Jahr wächst?

c6) Zeichnen Sie den Graph der Funktion h(t) im Bereich $0 \leq t \leq 120$.

d) Der Stamm einer Fichte habe näherungsweise zylinderförmige Gestalt und werde hinsichtlich seines Wachstums durch die Funktionen d(t) und h(t) in den Aufgabenteilen b) und c) beschrieben.

d1) Berechnen Sie das Volumen des Stammes als Funktion der Zeit.

d2) Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)$.

d3) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion V(t) im Bereich $0 \le t \le 100$.

d4) Das Verhältnis von Höhe zu Durchmesser des Stammes beschreibt die Schlankheit

$$s(t) = \frac{h(t)}{d(t)}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe einer Wertetabelle oder mit einem BASIC-Programm, dass die Schlankheit bei $t_0 = 36$ *mit* $s(t_0) = 107,6$ *ein Maximum besitzt. Berechnen Sie s(t) an den Grenzen des Definitionsbereiches.*

d5) Bestimmen Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen Durchmesser und Höhe, d.h. ermitteln Sie die Funktion d(h) durch Eliminierung von t.

d6) Die Dichte des waldfrischen Fichtenholzes ist $\rho = 0,8 g/cm^3$. *Berechnen Sie die Masse des Stammes im Alter von 20 / 40 / 60 / 80 / 100 Jahren.*

d7) Berechnen Sie die mittlere stündliche Massenzunahme des Fichtenstammes der 30jährigen Fichte, wenn die Wachstumsperiode 3 Monate dauert.

e) Das jährliche Längenwachstum w (im m) einer anderen Fichte in Abhängigkeit von t (in a) werde näherungsweise durch die Funktion

$$w(t) = \frac{500}{625 + (t - 38,75)^2}$$

beschrieben.

e1) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion zu der Geraden x = 38,75 achsensymmetrisch ist und genau ein Maximum besitzt.

e2) In welchem Alter wächst der Baum um 0,5 m/a?

e3) Berechnen Sie durch Integration die Höhe des Baumes als Funktion des Alters und bestimmen Sie damit die Endhöhe.

e4) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion im Bereich $0 \le t \le 120$ *(Maßstab x-Achse 1 LE ⚒1mm; y-Achse 1 LE ⚒0cm).*

Diese Aufgabe ist keine Anwendungsaufgabe in dem Sinn, dass der Aufgabensteller dem Bearbeiter einen Zugang zur Modellierung von Fichtenwachstum ermöglichte oder die Resultate seiner eigenen Modellierung begründete oder auch nur durchblicken ließe, dass hier eine Modellierung stattgefunden hat. Von der Anwendung selbst ist der Aufgabenbearbeiter ausgeschlossen. Er kann sie nicht nachvollziehen und soll es nicht. Er soll die ihm vorgesetzten Funktionsterme bearbeiten und nicht das Baumwachstum; er soll Werte berechnen und nicht (einmal) Modellergebnisse interpretieren. Er wird auch nicht aufgefordert, dass Wachstum *einer Fichte* (aus Teilaufgabe c)) und das *einer anderen Fichte* (Teilaufgabe e)) zu vergleichen, sondern diese Vorgaben hinnehmen und verrechnen.

Eine schlichte Laboraufgabe – wie die folgende – kann vom Bearbeiter mehr Anwendungsüberlegungen fordern als eine mit Fachvokabeln, -ausdrücken und -angaben gespickte.

> ***Die Vermehrung der gemeinen Reißzwecke***
>
> *Wenn man mit Reißzwecken „würfelt“, können sie auf der Spitze oder auf dem Rücken liegen bleiben. Starten Sie mit zwei Reißzwecken. Fügen Sie für jede Reißzwecke in Rückenlage dem Wurf eine weitere hinzu. Fahren Sie so fort. Wie viele Reißzwecke wird man nach 1000 Würfen angesammelt haben?*[iv]

Was – ist die Grundfrage jeder Anwendung – kann mathematisches Denken zur Bearbeitung des Problems beitragen? (Und: was nicht? sollte man eigentlich noch anfügen.) Und wie sieht dieser Beitrag dann im einzelnen aus? Der Realismus einer Anwendung besteht also zunächst einmal darin, dass die Brücke zur Realität tatsächlich in authentischer Weise gebaut wird. Dass dabei die Realität nicht in allen Aspekten getroffen wird, liegt im Anwendungsprozess selbst begründet und nicht in mangelnder Expertenhaftigkeit oder einer mangelnden Vielzahl der betrachteten Parameter oder Nebenbedingungen. „Echten“ Anwendungen liegt wesentlich dieser Brückenbau, das Modellieren zugrunde. Selbst bei einfachsten Anwendungen, bei denen der Begriff Modellierung zu hoch gegriffen und der Ausdruck Modellrechnung angemessener erscheint, wird nicht einfach die Realität abgebildet und „verrechnet“, sondern ihr Bild wird mathematisch strukturiert, was überhaupt erst die Berechenbarkeit ermöglicht. Man könnte entgegnen, dass die Schulpraxis von solch epistemologischen Feinheiten fern und unberührt bleibt, aber schon die einfachste ‚Dreisatz’-Aufgabe wird, wenn man sie tatsächlich durchdenkt, einen besseres lehren

Offene Aufgaben

Die Bezeichnung „offene Aufgaben“ hat – vor allem in der Nach-TIMSS-Diskussion – eine derart positive Bedeutung erlangt, dass man kaum noch wagt oder es für lohnend hält, über sie nachzudenken. Offene Aufgaben sind danach solche, die man stellen und propagieren soll. Und falls Aufgaben nicht offen sind, dann muss man sie eben öffnen. Ich denke, dass mit dieser Bezeichnung eher ein Mangel oder zumindest ein Unbehagen ausgedrückt wird an den Aufgaben, die sie nicht verdienen, als dass hier tatsächlich eine neue Art von Aufgaben geschaffen oder bezeichnet wird. Vermutlich sollte man besser „geschlossene Aufgaben“ charakterisieren und dann erläutern, dass diese für den Mathematikunterricht nicht ausreichend und im monokulturellen Fall für den Aufbau mathematischen Denkens sogar schädlich sind. Bei geschlossenen Aufgaben liegen alle erforderlichen Daten vor und der Algorithmus auf der Hand: es bleibt nur noch zu tun, was zu tun bleibt, und zwar richtig, um die volle Punktzahl zu erlangen, worin ihre schulische Bedeutung wesentlich auch zu sehen ist. Sie bedürfen keiner eigenen Überlegung, keiner individuellen Behandlung. Ihr Ergebnis steht fest, es hängt nicht von ihrer Behandlung ab und variiert nicht mit ihr. (Dies ist übrigens etwas, was Schülerinnen und Schüler am Mathematikunterricht entsetzen kann: sie haben keinen Einfluss auf die Ergebnisse. Wenn sie zudem keinen Einfluss auf den Unterricht haben, kann die ganze Veranstaltung ziemlich sinnlos werden.) Von solch einer negativen Charakterisierung geschlossener Aufgaben können sich nun die offenen leicht und positiv abheben. Vermutlich kann solche Schwarzweißmalerei dazu führen, über Aufgaben und ihre Bedeutung nachzudenken. Es sind aber nicht nur die Aufgaben selbst, sondern der unterrichtliche Stil mit ihnen umzugehen, der ihre Offenheit oder Geschlossenheit ausmacht: steht die Aufgabe und ihre Behandlung zur Diskussion oder ist sie eben nur abzuarbeiten, soll man sich ihrer annehmen oder ist danach gar nicht gefragt. Geht es um ihren Inhalt oder nur darum, sie zielsicher und richtig zu lösen? Überspitzt könnte man sagen: eine Aufgabe ist offen, wenn man sie individuell bearbeiten kann und soll und darf. Dies bezieht sich sowohl auf die Exposition der Aufgabe (*Welche Situation ist gegeben?*), auf ihre Behandlung (*Wie geh ich vor und was tue ich?*) und Lösung (*Wie sind die Ergebnisse zu interpretieren?*). Kennzeichnend für offene Aufgaben ist, dass es zu diesen Fragen wesentlich **unterschiedliche** Antworten gibt und diese Unterschiede bei der Bearbeitung der Aufgabe und im Unterricht eine Rolle spielen und thematisiert werden.

In der Diskussion nach „Propaganda"-Vorträgen für offene Aufgaben wird von manchen Lehrkräften einwendend hervorgehoben, dass Aufgaben dieses Typs nicht Grundlage des Standardunterrichtes sondern eher nur Zugaben sein könnten und für viele Schülerinnen und Schüler zu schwierig seien. Vermutlich liegt das an den im Vortrag vorgestellten offenen Aufgaben; um diese Aufgabenart interessant scheinen zu lassen und von schnöden Verfahrensaufgaben abzusetzen, neigt man dazu, komplexe und zunächst undurchsichtige Probleme aufzuwerfen. Es sollte aber zu jeglicher „Aufgabensorte" Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades geben, insbesondere natürlich auch einfache Aufgaben (deren Sinn nichts zuletzt auch darin liegt, dem Bearbeiter zu zeigen, dass er „schon mal etwas kann").

Aufgabenfolgen

Seit längerem wird der Einsatz von Aufgabenfolgen von einigen Autoren mit unterschiedlicher Zielsetzung vorgeschlagen. Eine Intension ist dabei, dass der Bearbeiter an einer solchen Folge (etwa zu quadratischen Gleichungen, die mit $x^2=4$ beginnt und schließlich mit $x^2+px+q=0$ endet) die Schritt für Schritt zunehmende Komplexität der Gleichungen jeweils identifiziert und wieder abbaut und so weiterarbeiten kann. Man kann dies in zweifacher

Weise als *stumme Didaktik* bezeichnen: zum einen in dem lapidaren Sinne, dass die Lehrerkraft schweigt, zum anderen in dem Sinn, dass der Bearbeiter zwischen den mathematischen Zeilen keine Erläuterungen erhält, wie er vorzugehen habe. Dennoch handelt es sich allenfalls in einem recht eingeschränkten Sinne um entdeckendes Lernen, weil die Art und Folge der „Entdeckungen“ bis ins Einzelne vorgegeben ist. Aber der Umstand, dass die Lehrkraft schweigt, die Schülerin oder der Schüler jetzt auf sich gestellt in eigenem Tempo und in eigener Verantwortung die Aufgaben bearbeitet, kann einen Ausgleich zu den Unterrichtsphasen schaffen, in denen das Unterrichtsgespräch dominiert. (Mir scheint ohnehin, dass in der deutschen „Unterrichtsbesuchsdidaktik“ das Unterrichtsgespräch über- und die Bedeutung individuellen Lernens unterbewertet wird.) Während die Schülerin oder der Schüler als Essenz einer fragend-entwickelnden Unterrichtsphase für sich – bewusst oder unbewusst – festhält: *Ich weiß jetzt, was ich soll*, wird sie oder er nach einer Aufgabenfolge vielleicht resümieren: *Ich weiß jetzt, wie es geht.* Das kann man als Fortschritt sehen, auch wenn es in beiden Fällen ein instrumentelles Verstehen im Vordergrund steht.

Komplexe Aufgaben

Bei komplexen innermathematischen oder Anwendungsaufgaben sollte – mit zunehmenden Lernalter – die Zerlegung der Aufgabe in Teilaufgaben von den Schülerinnen und Schülern vorzunehmen sein. Ist die komplexe Problemstellung bereits vorstrukturiert oder schon in eine Aufgabenfolge mit angegebenen Teilergebnissen gewandelt, dann fehlt einer ihrer wesentlichen Teile: die Durchdringung des Problems selbst. Mit zunehmender Verantwortung für das eigenen Lernen sollte auch die für die Auseinandersetzung mit dem Stoff zunehmen. Ein Ziel des Mathematikunterrichtes ist der Erwerb mathematischer Kompetenz, dass die Schülerinnen und Schüler auch später in der Lage sind, mathematikhaltige Problemstellungen kompetent zu untersuchen und zu bewerten. Dieses Ziel kann nicht erreicht werden, wenn im Unterricht alle Probleme so vorstrukturiert sind, dass den Schülerinnen und Schülern nur noch ein Abarbeiten von Teilaufgaben überlassen bleibt.

Arbeitsaufträge [v]

Noch weiter „ausholen“ als komplexe Aufgaben können Arbeitsaufträge, die zum Einstieg in einen Themenkreis gestellt werden und sozusagen das Feld zu seiner Bearbeitung bereiten können.

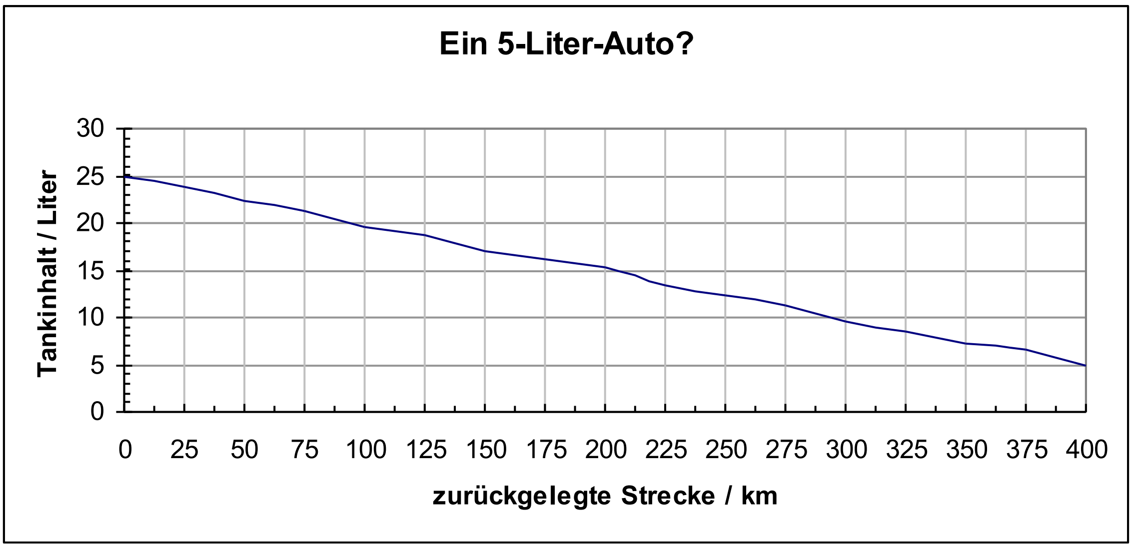
- Arbeitsaufträge – in unserem Sinne – stellen eine mathematische oder mathematikhaltige Situation dar. Falls die Situation oder das Problem nicht aus sich heraus schon ausreichend fragt, kann man eine oder zwei Fragen anfügen. Arbeitsaufträge sind durch Offenheit gekennzeichnet; das Thema möglicherweise auch die Richtung einer Bearbeitung ist vorgegeben, aber diese selbst ist offen. Arbeitsaufträge sind also keine komplexen Aufgaben, die letztlich auf eine oder mehrere Lösungen zielen; ihre Ergebnisse stehen nicht fest; vielleicht ist es dazu für die Lehrkraft zuweilen sogar gut, einen Auftrag vorweg nicht selbst so gründlich zu durchdenken, dass sie vorsätzlich oder unbewusst auf spezielle Arbeitsergebnisse wartet oder drängt.
- Arbeitsaufträge sollen reichhaltig sein, die Möglichkeit geben, an und mit einer Sache Erfahrungen zu sammeln, in unterschiedlicher Form und auf verschiedenen Wegen. Sie sollen nicht auf eine Methode drängen, eine bestimmte Bearbeitung vorgeben oder suggerieren. Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei auch selbst den Eindruck haben, dass **sie** hier gefragt sind und dass es sich nicht um eine curriculare Schnitzeljagd handelt, deren Schätze schon längst gefunden wurden und seit Jahren in ihren abgegriffenen Schulbüchern verwahrt werden. (Insbesondere wenn aus unterrichtspraktischen Gründen Bezeichnungsweisen für Größen oder Funktionen vorgegeben werden, riechen die Lernenden schnell den abgestandenen Bratenduft.)
- Arbeitsaufträge sollen zunächst dazu beitragen, ein Terrain zu sondieren, Fragen zu entwickeln (die die Schülerinnen und Schüler nicht alle beantworten werden können), einen Arbeitsplan zu entwickeln, Vorgehensweisen zu erproben und möglicherweise auch zu verwerfen.
- Arbeitsaufträge müssen nicht notwendig anwendungsbezogen oder realitätsorientiert sein. Auch innermathematisch gibt es Abenteuer und spannende Überlegungen. (Die Motivationsfrage stellt sich ohnehin in beiden Fällen.) Wenn ein Arbeitsauftrag aber realitätsorientiert ist, dann muss seine Behandlung das reale Problem auch ernst nehmen und nicht nur als verkleidetes mathematisches Problem auffassen, das nach seiner Entkleidung von der Realität nichts mehr weiß oder wissen will.
- Arbeitsaufträge können Geschichte und Kultur mathematischen Denkens thematisieren, z.B. einfache historische Texte die Schülerinnen und Schüler lesen, erläutern und interpretieren lassen.

- Arbeitsaufträge können geisteswissenschaftliche Arbeitsmethoden erfordern und zu ihnen anregen. Die häufig zu beobachtende Gleichförmigkeit des Mathematikunterrichtes ist auch auf das begrenzte Reservoir seiner Arbeitsmethoden zurückzuführen.
- Das Material und die Daten für Arbeitsaufträge können die Schülerinnen und Schüler in einzelnen Fällen etwa mit Hilfe von Lexika oder des Internets selbst zusammentragen, z.B. wenn es um Modellrechnungen zu Rohstoffresourcen oder zur Entwicklung der Weltbevölkerung geht. Aber diese Art der Quellensichtung lenkt zuweilen eher von Problemen ab, als dass sie zu ihnen hinführt.
- Ein Arbeitsauftrag kann die Ausführung einfacher Experimente und deren mathematischer Erfassung beinhalten *(Hands on!)*.
- Die Bearbeitung eines Arbeitsauftrages kann die Benutzung von Computer und geeigneter Software einschließen, wenn an der Schule die erforderlichen Voraussetzungen gegeben sind. Hier gute Aufträge zu formulieren, scheint mir besonders schwierig. Durch den Computereinsatz darf die Sache weder trivial noch undurchschaubar werden.

Wir geben ein Beispiel; weitere sind in der unten angegebenen Literatur zu Arbeitsaufträgen zu finden.

Das 5-Liter-Auto

Ein Kunde hat ein „5-Liter-Auto“ gekauft und nun ist er unzufrieden. Von einem Automobilclub lässt er deshalb den tatsächlichen Verbrauch seines Autos messen.



Dieser Auftrag problematisiert den Begriff 5-Liter-Auto und regt zu einer Definition desselben an. Mathematisch kann seine Bearbeitung zu den Begriffen mittlere und lokale Steigung (oder Änderungsrate) führen und zu deren Zusammenhang. Auch den Schrankensatz[vi] kann man bei seiner Bearbeitung entdecken oder die für die Bedeutung der Ableitung zentrale Ungleichung von Ampère, mit der man u.a. direkt und ohne die sonst erforderlichen Stetigkeitssätze den Monotoniesatz beweisen kann.[vii]

Aufgaben und Unterricht – Proben oder Üben?

Ein klassisches Muster deutschen Mathematikunterrichtes ist: Ein Sachverhalt wird im Unterrichtsgespräch erarbeitet, dann wird geübt. Man muss etwas wissen, also erst gelernt haben, um es üben zu können. Dieses Vorgehen erscheint uns so ökonomisch und logisch, dass erst ein Vergleich mit Unterrichtsskripten anderer Länder es (wieder) sichtbar werden lässt. Man kann den Unterricht aber auch umstellen und vor dem Unterrichtsgespräch üben. Die Schweizer Didaktiker Gallin und Ruf bezeichnen das als *Proben*. Die Schülerinnen und Schüler proben, sie erkunden an einer geeigneten Aufgabenstellung oder einem Arbeitsauftrag zunächst selbst den Sachverhalten, sie setzen sich mit ihm auseinander und können so selbst Erfahrungen mit ihm gewinnen. Als – vorsätzlich schlichtes innermathematisches – Beispiel geben wir einen Auftrag im Rahmen der Einführung der Multiplikation wieder:

Wie geht es weiter?

$3 \cdot 4 =$	$-3 \cdot 4 =$
$3 \cdot 3 =$	$-3 \cdot 3 =$
$3 \cdot 2 =$	$-3 \cdot 2 =$
$3 \cdot 1 =$	$-3 \cdot 1 =$
$3 \cdot 0 =$	$-3 \cdot 0 =$
$3 \cdot -1 =$	$-3 \cdot -1 =$
$3 \cdot -2 =$	$-3 \cdot -2 =$
$3 \cdot -3 =$	$-3 \cdot -3 =$
$3 \cdot -4 =$	$-3 \cdot -4 =$

Rechne zunächst die Aufgaben, die du kannst. Überlege dir dann Ergebnisse für die anderen Aufgaben. Schreibe auf, warum du deine Ergebnisse so gewählt hast.

Nach den unterrichtlichen Erfahrungen von Gallin und Ruf können die Übungsphasen deutlich kürzer ausfallen, wenn die Schülerinnen und Schüler den Sachverhalt zuvor selbst erprobt haben.

Klassenarbeiten

Klassenarbeit akzentuieren den Unterricht noch im Nachhinein. Was dort gefordert wird, wird wichtig. Wenn dort nur Verfahren und Algorithmen abgefragt werden, dann „zählt“ anderes nicht. Man muss sich nach jahrelanger anderer Praxis geradezu dazu zwingen, Klassenarbeiten so anzulegen, dass höchstens ein Drittel der Aufgaben und der Arbeitszeit auf das Abarbeiten von Verfahren entfällt. Weitere Aufgaben sollen dann auf das Verständnis von Verfahren, Begriffen und Sätze, Zusammenhängen „zielen“. Alternativ zu Aufgabenklausuren kann man Themenbereiche oder Unterrichtsabschnitte zusammenfassen oder erläutern lassen.

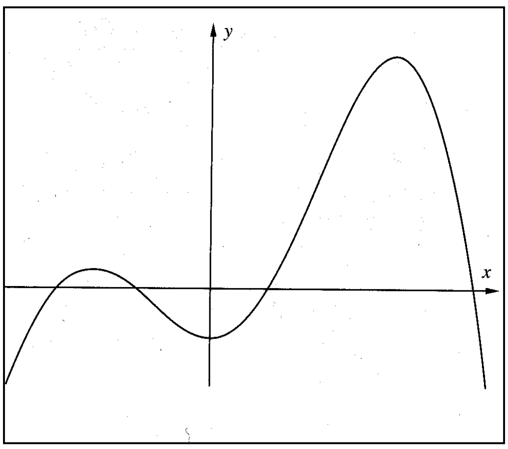
Ein Beispiel aus meinem Analysisunterricht in der Jahrgangstufe 11/I:

> ***Schreiben Sie einen Aufsatz zu folgender Situation***
>
> *Anna Lena war lange krank, so dass sie am 20.11.2000 zum ersten Mal nach den Sommerferien wieder in die Schule kommen konnte. Schreiben Sie ihr auf, was im Mathematikunterricht der Klasse 11 bisher durchgenommen wurde. Erläutern Sie ihr insbesondere die wesentlichen Begriffe, Definitionen und Sätze an geeigneten Beispielen und Zeichnungen.*

Aber auch in den üblichen Aufgabenklausuren kann und soll man entsprechende Aufgaben stellen. Dazu ein allgemeineres Beispiel

> ***Die Ableitung gibt Auskunft***
>
> *Erläutern Sie die Aussage DIE ABLEITUNGSFUNKTION f' GIBT AUSKUNFT ÜBER DAS VERHALTEN DER FUNKTION f. Veranschaulichen sie den Sachverhalt auch an einem geeigneten Beispiel.*

und ein konkretes:



> ***Funktionsgraph?***
>
> *Das Bild zeigt den Graph einer Ableitungsfunktion f'. Wie könnte der Graph der zugehörigen Funktion f aussehen? Skizzieren Sie ihn und begründen Sie Ihre Skizze.*

Die Korrektur solcher Aufgaben erweist sich als weniger problematisch und zeitaufwendig als befürchtet, wenn man die Schülerinnen und Schüler dazu anhält, die Aufgabenstellung in ganzen deutschen Sätzen und mit ordentlicher Schrift zu bearbeiten. Sie gibt darüber hinaus detaillierte Auskünfte über die „Erträge" des eigenen Unterrichtes, die weit über das hinausgehen, was professionelle TIMSS-Forscher über ihre Probanden erfahren können.

Thomas Jahnke
Potsdam im November 2001
Kritik erwünscht: jahnke@math.uni-potsdam.de

[i] Wir verweisen auch auf „alternative" Aufgabensammlungen wie z.B.: Herget, Jahnke, Kroll: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Cornelsen Verlag. Berlin 2001
[ii] Den tieferliegenden Widerspruch, dass nämlich das traditionelle schulmathematische Curriculum wohl weniger auf Anwendung als der Abkehr von Anwendungen fußt, wollen wir hier nicht thematisieren.
[iii] Schmidt, Werner: Mathematikaufgaben. Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt. Ernst Klett Verlag. Stuttgart 1984, S. 88/89
[iv] Vgl. Jahnke/Wuttke (Hrsg.): Mathematik Analysis. Cornelsen Berlin 2001, S. 8
[v] Vgl. Jahnke, Th.: Arbeitsaufträge – nicht nur – zum Einstieg. Erscheint demnächst in: Mathematik Lehren. Heft Einstiege. 2001
[vi] Vgl. Kuypers/Lauter (Hrsg.): Analysis Leistungskurse. Cornelsen Verlag Berlin 1987, S. 108ff
[vii] a.a.O. S. 192ff