Prof. Dr. Thomas Jahnke

Aufgaben im Mathematikunterricht

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

werte Anwesende,

so sehr ich mich auch durch die Einladung vor Ihnen zu sprechen geehrt fühle, so trete ich doch mit dem leisen Unbehagen zögernd vor Sie, ich könnte mit meinen Ausführungen Ihre Erwartungen nicht erfüllen. Gestatten Sie mir daher drei Vorbemerkungen:

1. Es gibt keinen Autopiloten für den Mathematikunterricht und ich habe auch keinen ersonnen. Die Lehrerin – ich will es versuchsweise mal mit der weiblichen Form halten, bis mich die Gewohnheit wieder einholt – ist keine Endverbraucherin universitärer oder bildungspolitischer oder – administrativer Ideen oder Vorgaben, sie ist, wenn man schon ökonomisch gefärbte Begriffe benutzen will, die Produzentin des Unterrichts mit ihren Koproduzentinnen, den Schülerinnen. Da sie unter einem immensen täglichem Handlungsdruck steht, zu dem sich heute noch all die impliziten und expliziten Vorgaben gesellen, den als schief vermessenen Turm von PISA gerade zu rücken, wird sie zu Recht erwarten, dass man ihr bei dieser Aufgabe hilft, sie unterstützt, statt ihr im jährlichen oder dreijährigen Turnus der Veröffentlichung neuer „Befunde“ Vorhaltungen über den unzulänglichen „Output“ ihrer anstrengenden Tätigkeit zu machen. Die Lehrerin ist eben keine Unterrichtsvariable ausschlaggebender Bedeutung im Verein mit anderen Variablen, sondern sie ist in einem ganz elementaren Sinn verantwortlich für ihren Unterricht. Das ist schon genug. Manchmal gewinnt man den Eindruck, dass das Kennzeichen einer guten Lehrerin sei, ständig ein

schlechtes Gewissen zu haben, all den Ansprüchen an sie inklusive ihren eigenen nicht ausreichend gerecht zu werden. Das wäre doch eine schreckliche und deprimierende Professionscharakteristik. Was immer an Zeitgeist und Jargon in Termini wie etwa Standards, Kompetenzen, Grundbildung, Outputorientierung, Effizienz oder Vernetzung (mir ist schon bewusst, dass heute einer Referendarin oder Bewerberin um Fachleiterinnenstelle und andere Posten solche Begriffe tunlichst irgendwie virtuos und kombinatorisch von den Lippen gehen sollten) auf sie einströmen mag, die Lehrerin gestaltet ihren Unterricht in individueller, persönlicher, pädagogischer und fachlicher Verantwortung. Und diese Verantwortung ist keine Legat der Bildungsadministration, sie ist in erster Linie eine Verantwortung gegenüber den Schülerinnen und nicht eine gegenüber OECD-Bestrebungen, den führenden Industrienationen ihre Vorherrschaft durch die Bereitstellung eines zukunftsfähigen Arbeitskräftenachwuchses zu sichern.

2. Ein zweites, was mich drückt, wenn ich vor so viele Lehrerinnen spreche, ist das Bild von der angeblichen Interessenlage dieses Berufsstandes, das mir vor allem häufig in Gesprächen mit Schulbuch- und Zeitschriftenverlagen und Fortbildungsverantwortlichen ganz unverhohlen begegnet: die Lehrerin interessiert nur das Unterrichtspraktische. Was nicht binnen – sagen wir – achtundvierzig Stunden unterrichtswirksam wird, ist in den Wind gesprochen und verschlingt nur zeitliche Ressourcen, die eigentlich der Unterrichtsvorbereitung vorbehalten sind. Diese Sicht unterstellt, dass die Lehrerin notwendig längst ein Bewusstsein für die Grundlagen ihrer Tätigkeit verloren hat. Sie bereitet den Unterricht vor und korrigiert dessen mehr oder weniger mähliche oder ermutigende Resultate. Full Stopp. Ich teile diese Sicht nicht und kann auch mit ihr wenig anfangen. Mag sein, dass es sich bei mancher Lehrerin, die so denkt oder besser fühlt, nur um eine Schutzbehauptung

handelt, um allerlei rhetorischen Tiraden zu entgehen; aber in jeder Profession und insbesondere der der Lehrerin geht es nicht nur um Methodisches, sondern jede professionelle Tätigkeit kommt nicht ohne eine Berufsphilosophie aus, auf der ihr Was und Wie und Warum basiert. Auch wenn man sich hartnäckig weigert, über Grundlegendes oder Grundlegenderes nachzudenken, folgt man einer solchen Philosophie. Dann ist es eben eine Philosophie der Bewusstlosigkeit, die man zuweilen in eigener Ausprägung bei Lehrpersonen antrifft, die in ihrem Studium oder allgemeiner noch in ihrer Lernbiographie mathematisch-naturwissenschaftlich sozialisiert sind: schulische Bildung zerfällt für sie in die als selbstverständlich erachtete Hardware ihres Faches und der allgemeinen und speziellen Folklore der anderen Fächer. Die Schülerinnen werden dann entsprechend gesehen und beurteilt. Wie auch immer: die Mathematiklehrerin kann nicht auf die Dauer von der Hand in den Mund leben. Erzwingen ihre Arbeitsbedingungen das, dann wird kein PISA-Befund und kein SINUS-Programm ihren Unterricht vor sinnentleerter Routine bewahren.

3. Schließlich beanspruche ich Ihre Aufmerksamkeit durch eine weitere Bemerkung, die ich benötige, dass unser Dialog – zwar im Moment nicht, was die Lufthoheit anbetrifft, was sich aber hoffentlich im angekündigten Workshop ändern wird – gleichberechtigt geführt werden kann. Die Sphären der Schule und der Universität stehen sich, um das wenigste zu sagen, oft distanziert und gleichgültig und dort, wo sie sich berühren eher ablehnend gegenüber: was in der einen gilt, zieht die andere in Zweifel et vice versa. Das hat seine biographischen-persönlichen Gründe im Studium der Lehramtskandidatinnen, das manche oder viele weder mit seinen hohen fachlichen Anteilen noch den pädagogisch-didaktischen sonderlich überzeugt hat und das sie in mit dem Alter nachlassender Abscheu eher zu vergessen trachten. Die strukturellen Gründe für diese

Disparität kann ich hier nicht diskutieren, sie liegen zum Teil sicher in der Anlage des Lehramtsstudiums. Wenn ich als universitärer Mathematikdidaktiker zu Ihnen spreche, dann nicht als eine Art Superlehrer, der den erfahrenen Praktikerinnen eine bessere Praxis aus seinen Erfahrungen nahe legen wollte oder oktroyieren könnte, als hätte er den Autopiloten gefunden oder als sei Theorie eine Art idealer Praxis, die es nun zu predigen gälte. Lehrerinnenfort- und Weiterbildung sollte solch missionarischen Gehabes abschwören. Ich kann Ihnen nur meine Gedanken, Ideen und Anregungen anbieten und will mich dabei jedes moralischen Untertons oder normativen Anspruchs nach Kräften enthalten. Na denn.

Grundsätzliches zu Aufgaben

Das Sujet der Aufgaben wird heute mit Erwartungen überfrachtet, die es nicht einlösen kann.

Aufgaben sollen heute

- als Materialisierung von Kompetenzen
- als Landmarken produktiven Unterrichts
- als Items

und zu anderem mehr dienen. Die Emphase, mit der heute Aufgaben Bedeutung, Gestaltungskraft und Generierung von Sinn für den Mathematikunterricht zugeschrieben wird, nimmt Formen an, die ins Surreale reichen.

Dem gegenwärtigen Aufgabenhype fehlt eine reflexive Ebene, auf der sich bestimmen ließe, was die Aufgaben eigentlich im Lehr-Lern-Prozess bezwecken außer sich selbst, also gestellt und bearbeitet zu werden. Dies gibt der Aufgabenorientierung des Mathematikunterrichts tautologische Züge.

Sicher ist eine Klassifikation von Aufgaben nur von endlichem Wert, da eine Schematisierung sich dadurch rächt, dass sie ihrerseits einen – wenn auch nur formal-organisatorischen erscheinenden – Sinn generiert, sich gleichsam selbst zuschreibt und dadurch der einzelnen Aufgabe und ihrem Witz (wenn sie denn einen hat) durch solche Subsumtion systematisch erschlägt.

Dennoch will ich in vorläufigster Form unterscheiden zwischen

- unterrichtlichen Aufgaben
- unterrichtsbezogenen Aufgaben (etwa Hausaufgaben)
- Leistungserfassungs- und/oder Leistungsmessungsaufgaben
- ‚Items'
- ‚reinen' Mathematikaufgaben.

Sie bemerken sofort, dass diese vorläufige Einteilung oder besser Akzentuierung keineswegs disjunkt oder flächendeckend ist. Den ersten vier Aufgabentypen scheint sozusagen ins Gesicht geschrieben, dass sie etwa wollen, während ich das den letzten Typ im Vagen halten will. Stellen Sie sich also solche Aufgaben etwa in einem Buch vor, von dem wir noch gar nicht wissen, ob es je einer öffnen wird und gegebenenfalls wann.

Nun einige Fragen und Thesen zu dem „Wollen":

- Aufgaben gestalten nicht den Unterricht, sondern werden bei der Unterrichtsgestaltung eingesetzt. Für die Mathematikerin: die Existenz ‚guter' Aufgaben ist notwendig aber nicht hinreichend.
- Ob man durch Aufgaben tatsächlich und gleichsam restlos feststellen kann, ob der Lernende sich ein angemessenes Bild, Verständnis, ein Konstrukt der behandelten mathematischen Inhalte aufgebaut hat, halte ich für fragwürdig.

- Ob das Curriculum in Aufgaben aufgehen kann, also ein aufgabenorientierter Unterricht das Ganze oder auch nur seinen Kern trifft, halte ich ebenso für fragwürdig.
- Eine Didaktik, die nicht mehr am Ganzen, sondern nur noch an Aufgaben und deren Lösung orientiert ist, wird gerade deshalb ihre Ziele verfehlen oder diese tautologisch und selbst erfüllend umdeuten.
- Ob durch Aufgabenstellung und –bearbeitung ein angemessenes Bild der Wissenschaft Mathematik erzeugt wird, scheint mir zweifelhaft.
- Dem Vorwurf von Beutelspacher

  „Von jedem anderen Fach hat ein Schüler am Ende der Schulzeit wenigstens eine Idee – sogar von Jura oder Wirtschafts-wissenschaften, die gar nicht im Lehrplan vorkommen. Nur bei Mathematik kommt der Schulunterricht nicht einmal in die Nähe dessen, was das Fach wirklich ist.“ (SPIEGEL 50/2004, S. 191f.)

  weiß eine Aufgabendidaktik nicht zu begegnen. Sie kennt ihn gar nicht.

Aufgaben, das ist trivial zu sagen, machen keinen Unterricht – auch in ihrer Summe nicht. Die heutige Aufgabenhysterie (Zurzeit erstellen vier nach den Himmelsrichtungen benannte Arbeitsgruppen unter Leitung eines meiner Kasseler Kollegen jeweils zweihundert Aufgaben, die dann bildend und prägend die Reform des Mathematikunterrichts voranbringen sollen) verhindert geradezu, dass man sich fragt, welche Rolle Aufgaben eigentlich im Unterricht spielen sollen. Werden dann noch Bildungsstandards – dieses begrifflichen Kompositum aus einer Menschheitshoffnung und einem Normierungsbegriff, das ein feinfühliges Ohr zusammenzucken lässt - letztlich über Aufgaben definiert, so wird die Sinnfrage tautologisch beantwortet. Die viel beschworene

Aufgabenkultur, von der man sicher nur so viel weiß, dass man jetzt den Schülerinnen auch zugesteht, Fehler zu machen, und diese irgendwie produktiv in den Unterricht einfließen lassen will, als wollte und sollte man das nicht schon immer, lässt die empfängliche Lehrerin doch auch etwas ratlos zurück. Ich will mich im Folgenden – wenn auch kritisch - wesentlich nur mit Aufgaben für den Unterricht befassen, also solchen, die dort gestellt und behandelt werden. Die so genannten Items, also Aufgaben, die zu Messzwecken entwickelt wurden und diese häufig systematisch verfehlen, interessieren mich weniger, allenfalls als Gegenbeispiele, warum sie so (schlecht und unvollkommen) sind oder gar sein müssen, wie sie sind.

Ich will aber – entgegen anderen Auffassungen – betonen und fest halten, dass eine unterrichtlich produktive Aufgabe und eine Testaufgabe durch ihre Funktion von ganz unterschiedlichem Charakter sein müssen. Deshalb ist auch die naive Frage „Was ist eine gute Aufgabe?“ eine schlecht gestellte Frage.

Wir betrachten ein Beispiel, das die PISAnerinnen offensichtlich für so gelungen hielten, dass sie es in einem Artikel in der Süddeutschen Zeitung als Paradigma ihrer Ideen vorführten:

Beispielaufgaben PISA-Hauptstudie 2003 Seite 11
Mathematik

DAS BESTE AUTO

Ein Auto-Magazin verwendet ein Bewertungssystem, um neue Autos zu beurteilen und vergibt den Preis für das „Auto des Jahres“ an das Auto mit der höchsten Gesamtpunktzahl. Fünf neue Autos werden bewertet und ihre Bewertungen werden in der Tabelle aufgelistet.

Auto Sicherheitsmerkmale (S)
Sparsamkeit beim Benzinverbrauch (B)
Äußere Erscheinung (Ä)
Innenausstattung (I)

	S	**B**	**Ä**	**I**
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Die Bewertungen werden folgendermaßen interpretiert:

3 Punkte = Ausgezeichnet
2 Punkte = Gut
1 Punkt = Mittelmäßig

Frage 1: DAS BESTE AUTO

Um die Gesamtpunktzahl für ein Auto zu berechnen, verwendet das Auto-Magazin folgende Formel, die eine gewichtete Summe der einzelnen Bewertungspunkte ist:
Gesamtpunktzahl = $(3 \cdot S) + B + Ä + I$
Berechne die Gesamtpunktzahl für das Auto „Ca“. Schreib deine Antwort auf den Platz unterhalb.
Gesamtpunktzahl für „Ca“: ....

Frage 2: DAS BESTE AUTO

Der Hersteller von Auto „Ca“ fand, dass die Formel für die Gesamtpunktzahl nicht fair sei. Schreib eine Formel zur Berechnung der Gesamtpunktzahl auf, so dass das Auto „Ca“ der Gewinner sein wird.

Deine Formel sollte jede der vier Variablen enthalten und du solltest deine Formel durch Einsetzen von positiven Zahlen in die vier Zwischenräume bei der folgenden Gleichung aufschreiben.

Gesamtpunktzahl = ……… · S + ……… · B + ……… · Ä + ……….I.

Offensichtlich verkehrt sich hier die Aufgabe durch die Hinzufügung des Lückentextes von einer mäßig interessanten Anwendungsaufgabe zu einer Testaufgabe, zu einem Item, dem die Anwendung ganz gleichgültig wurde und bei dem es jetzt nur noch darauf ankommt, die Lücken gemäß den Intentionen der Testerstellerinnen auszufüllen. Natürlich kann man noch an manch anderem mäkeln, wie etwa an der Überschrift, aber der Sinn der Aufgabe ist ohnehin schon entkommen zugunsten ihrer Testfunktion. Während die Aufgabe als Testaufgabe so gänzlich ihren Sinn ausgehaucht hat, könnte sie unterrichtlich jedoch durchaus produktiv sein, zumal sie den mathematischen Begriff des Gewichts ganz sinnfällig macht. Ohne eine solche Orientierung wäre sie freilich beliebig.

Aber wir können dieser Aufgabenmutation noch ein allgemeineres Moment entnehmen, das ich mit dem Akronym DWIM bezeichne.

Do What I Mean (DWIM)

Bevor der Umgang mit Computern durch Programme wie WINDOWS vereinfacht wurde, musste man im Betriebssystem (etwa DOS) jeden Befehl auf den gewöhnlich schwarzen Bildschirm eintippen.

Beispiel: copy a:\schule\mathematik\newtonverfahren.doc
b:\zuhause\mathematik\Sek2\newtonverfahren.doc

Natürlich hat man sich dabei häufig verschrieben und musste dann ärgerlicherweise alles noch einmal eingeben. Deshalb gab es ein kleines Programm DO WHAT I MEAN, das man mit DWIM aufrief und das gewisse Tippfehler korrigierte, also zum Beispiel cpoy in copy berichtigte. Der Nachteil dieses Programms war nur, dass man die zu korrigierenden Fehler vorher in das Programm eingeben musste.

Ich bin der Ansicht, dass in der Regel „Textaufgaben" ein solches DO WHAT I MEAN als zumeist unausgesprochener Auftrag zu Grunde liegt: Wähle alle Rahmenbedingungen passend und bearbeite die Aufgabe so, wie es die Aufgabenstellerin gemeint hat. Man könnte nun der Ansicht sein, dass man die Rahmenbedingungen im Einzelfall nur aus zeitlichen und anderen ökonomischen Gründen nicht angibt. Aber schon die einfachste Aufgabe zeigt, dass das gar nicht möglich ist.

Beispiel:

Ein Marktplatz soll gepflastert werden. 3 Arbeiter benötigen dazu 6 Arbeitstage. Jeder Arbeiter verlegt gleichviel. Die Firma hat aber nur zwei Arbeiter zur Verfügung. Wie viele Arbeitstage brauchen diese beiden, um den Marktplatz zu pflastern?

[Zur Analyse dieser Aufgabe siehe: Meyerhöfer, Wolfram: Jeder Arbeiter verlegt gleich viel. mathematik lehren 114. Oktober 2002.]

Die drei Arbeiter werden in der „Realität“ sicher nicht getrennt arbeiten. Einer könnte etwa mit einem Kleinbagger den Grund glätten und den Split und die Steine bewegen, der zweite die Steine verlegen und der dritte sie mit einem Rüttler unter ohrenbetäubendem Lärm feststampfen. Sind nur zwei Arbeiter vorhanden, so könnte das Pflaster daher vielleicht nicht in der üblichen Akkordzeit verlegt werden. Also benötigt die Aufgabenbearbeiterin den hier ausgesprochenen DWIM-Hinweis, dass jeder Arbeiter gleichviel verlegt. Aber wenn man die Sache so seziert, benötigt der Aufgabenbearbeiter noch zahlreiche weitere Hinweise, dass nämlich auch die zwei Arbeiter mit der Pflasterung technisch zurecht kommen, dass nicht der Polier ausgefallen ist, der die anderen anzutreiben pflegt, dass die beiden nicht mit einer Anliegerin befreundet sind und nebenher noch dessen Parkplatz pflastern und anders mehr. All diese Hinweise wären erforderlich und man könnte beliebig viele weitere ersinnen, wenn man gutwillig ist oder böswillig oder den hier offensichtlich angeforderten Dreisatz umgehen will. Auch der in diesem thematischen Zusammenhang von Arnold Kirsch angeforderte DWIM-Hinweis „Prüfe zunächst, ob die betrachteten Größen proportional sind“ lässt sich ja nicht bearbeiten, wenn der Aufgabensteller ihn nicht mehr oder minder ausgesprochen in die Formulierung der Aufgabe hineingesteckt hat.

Es liegt eben eine Mathematikschul(buch)aufgabe vor und diese enthält konstitutiv die DWIM-Aufforderung: „Ahne welche Rahmenbedingungen „selbstverständlich“ sind und welche – vermutlich unlängst behandelten – mathematischen Methoden Du hier einsetzen sollst.“ Man könnte nun denken, dass nur die „schlechten“, engen Textaufgaben eines bürokratischen Algorithmenerwerbsunterrichts durch das konstitutive DWIM-Element gekennzeichnet sind. Aber die heute gepriesenen, in ihrer Intention nicht so methoden-fixierten „offenen“ Aufgaben sind in dieser Beziehung nur hinter-hältiger. Sie erweitern zwar für die Bearbeiterin den Spiel- oder Denkraum aber auch nur innerhalb eines DWIM-Tellerrandes. Möglicherweise ist ihr Vorzug, dass die Bearbeiterin dazu aufgefordert wird, über dieses DWIM mit nachzudenken, also ihr hier eine gewisse Entscheidungsfreiheit angeboten wird: DO WHAT YOU SHOULD DO oder sogar DO WHAT YOU COULD DO, was der Aufgabenstellerin, die die schulische Rahmung jeglicher Aufgabe durch den Mathematikunterricht nicht reflektiert, fälschlich als ein DO WHAT CAN BE DONE -Angebot oder -Auftrag erscheinen mag (als sei die Bearbeiterin autonom), womit sie eine Entlastung von dem Vorwurf einer DWIM-Vorgabe erhofft.

Ob geschlossene oder offene Aufgaben, ich glaube, dass das DWIM-Element für Textaufgaben nicht gut oder schlecht sondern konstitutiv ist, nicht nur unvermeidbar sondern nicht-hintergehbar. Man mag den Schülerinnen mathematikhaltige Situationen vorlegen, aber transmutieren diese zu Aufgaben, so enthalten sie das DWIM-Motiv. So offen man sich auch gebärden mag, das Motiv ist schon in der Rahmung jeder Fragestellung durch die Schule und den Mathematikunterricht angelegt. Ohne es wären Textaufgaben auch gar nicht lösbar, sondern zerfaserten zu mehr oder minder problembezogenen Wenn-und-Aber-Diskussionen, denen sich möglicherweise gar kein mathematischer Gehalt mehr abgewinnen ließe. Man könnte übrigens auch die so genannten Kapitänsaufgaben vor diesem DWIM-Hintergrund diskutieren und würde dann den Schülerinnenbearbeitungen wohl gnädiger gegenüber stehen.

Sie sehen, wenn man genauer hinschaut, entschwinden so manche Gewissheiten und man wird gewahr, dass die vollmundige Formulierung der Kompetenzen insgeheim ganz andere Fähigkeiten trainiert. Es bedarf einigen Geschicks, dem Mechanismus zu entgehen, dass die Formulierung der Schul(buch)aufgabe die Beschäftigung mit der Sache eher verstellt, denn fördert, insbesondere einer Offenheit der Aufgabe, die der Bearbeiterin eine Hinwendung zur Sache tatsächlich ermöglicht.

Ich will noch einen weiteren Wehrmutstropfen in die Euphorie der Anwendungsaufgaben gießen:

Die berechtigte Kritik an einem resultat- und algorithmenorientierten, bürokratischen, sinn-freien Mathematikunterricht hat mit einem gewissen und verständlichen Überschwang Anwendungen im Unterricht gefordert. Einerseits hat sich schnell gezeigt, dass Anwendungen keine Selbstläufer sind, also quasi automatisch Motivation und Erkenntniszuwachs gewährleisten, andererseits ist vielleicht doch der Glaube geblieben, dass Anwendungen an und für sich gut für den Unterricht sind: je mehr desto besser, je bunter desto schöner, ohne die Notwendigkeit zu sehen, dass man mit den Schülerinnen auch über Anwendungen und das Anwenden von Mathematik reflektieren muss, wenn man nicht der alten Sinn-Freiheit des Unterrichts eine neue angewandte an die Seite stellen will.

Mathematik kann nur mathematische Probleme lösen, Schulmathematik nur schulmathematische. Wer anderes - mit noch so bunten, lebensnahen Beispielen - suggeriert, spielt mit falschen Karten. Je geschickter sie dies tut, desto größeren Schaden richtet er bei den Schülerinnen auf lange Sicht an, in dem sie sie ins erkenntnismäßige Abseits führt. Gerade Aufgaben und Projekte aus der Lebenswelt der Schülerinnen wie Planung einer Klassenfahrt oder eines Schulfestes machen deutlich, dass mathematische Überlegungen zu solchen Themen häufig nur einen bescheidenen und i.w. nicht-entscheidenden Beitrag liefern (können). Sinnvolle mathematische Anwendungen sind im Unterricht in der Regel Modellrechnungen, die nicht unmittelbar zu Realitätsentscheidungen führen, aber im Rahmen des gewählten Modells zu diesen beitragen. Sie sind eine Perspektive bei der Betrachtung einer (auch) mathematikhaltigen Situation. Sie können eine Entscheidungshilfe liefern, indem sie „errechnen“, welche Resultate aus den gesetzten oder gewählten Voraussetzungen formal folgen.

Anwendungsaufgaben versus Eingekleidete Aufgaben

Während Aufgaben in einem realitätsbezogenen Kontext – man könnte auch von anwendungsorientierten Aufgaben sprechen – die Mathematik dazu nutzen, um Aussagen über die Realität zu gewinnen, also in einer – möglicherweise auch gestellten – mathematikhaltigen Situation eine vernünftige Auskunft zu geben, ist es der Sinn der so genannten eingekleideten Aufgaben, die Realität zu nutzen, um mathematische Sachverhalte verständlich zu machen. Gerade das Missverständnis, eingekleidete Aufgaben würden Aussagen über die Realität machen, macht sie so lächerlich. Wenn es etwa in der Kombinatorik einen Heiratssatz gibt, dann ist es offensichtlich, dass dieser Satz nichts Sachdienliches über Eheschließungen oder Massenhochzeiten enthält. Seine Bezeichnung gibt viel mehr Auskunft darüber oder lässt zumindest vermuten, dass hier Aussagen über die Möglichkeit von Paarbildungen getroffen werden. Die in der Bezeichnung Heiratssatz angedeutete Einkleidung dient also nicht der Auskunft über die Realität sondern über den Inhalt des Satzes. Einkleidungen können veranschaulichen und so einen mathematischen Sachverhalt verständlich oder zugänglich machen, indem sie ihn in nicht-mathematische Vorstellungen einkleiden. Man kann sogar grundsätzlich die Frage aufwerfen, ob man Mathematik überhaupt anders lernen und verstehen kann als durch Einbettung in Vorstellungen, in Grundvorstellungen, in denen sich allgemeine Denkinhalte und –strukturen mit mathematischen berühren, diesen zur Grundlage werden.

Anwendungsaufgaben sollen

- die Sache ernst nehmen,

- die Mathematik ernst nehmen und
- die Schülerin ernst nehmen.

Mir ist schon durch meine Schulbuchtätigkeit bewusst, dass es leichter ist misslungene Beispiele zu finden oder zu konstruieren als gelungene. Aber hier sind Sie als unterrichtende Praktikerinnen mir gegenüber als Lehrbuchautor ja grundsätzlich im Vorteil. Auch schlechte und schlecht gestellte Schulbuchaufgaben können unterrichtlich zu produktiven Aufgaben werden. Was eine produktive Aufgabe (ich spreche seither auch gern von Aufträgen und von Projekten, die häufig dem zu behandelten Stoff zur Exploration vorausgehen statt ihm als Anwendungs- oder Übungsaufgabe zu folgen) kennzeichnet, haben Herr Herget, Herr Kroll und ich in unserem gleichnamigen Buch zu charakterisieren versucht. Ich will das hier nicht wiederholen, zumal solche Redundanzen den Hang zur Verflachung haben, zum Holzschnittartigen, das vielleicht das Abfassen einer Examensarbeit beflügelt nicht aber den Unterricht.

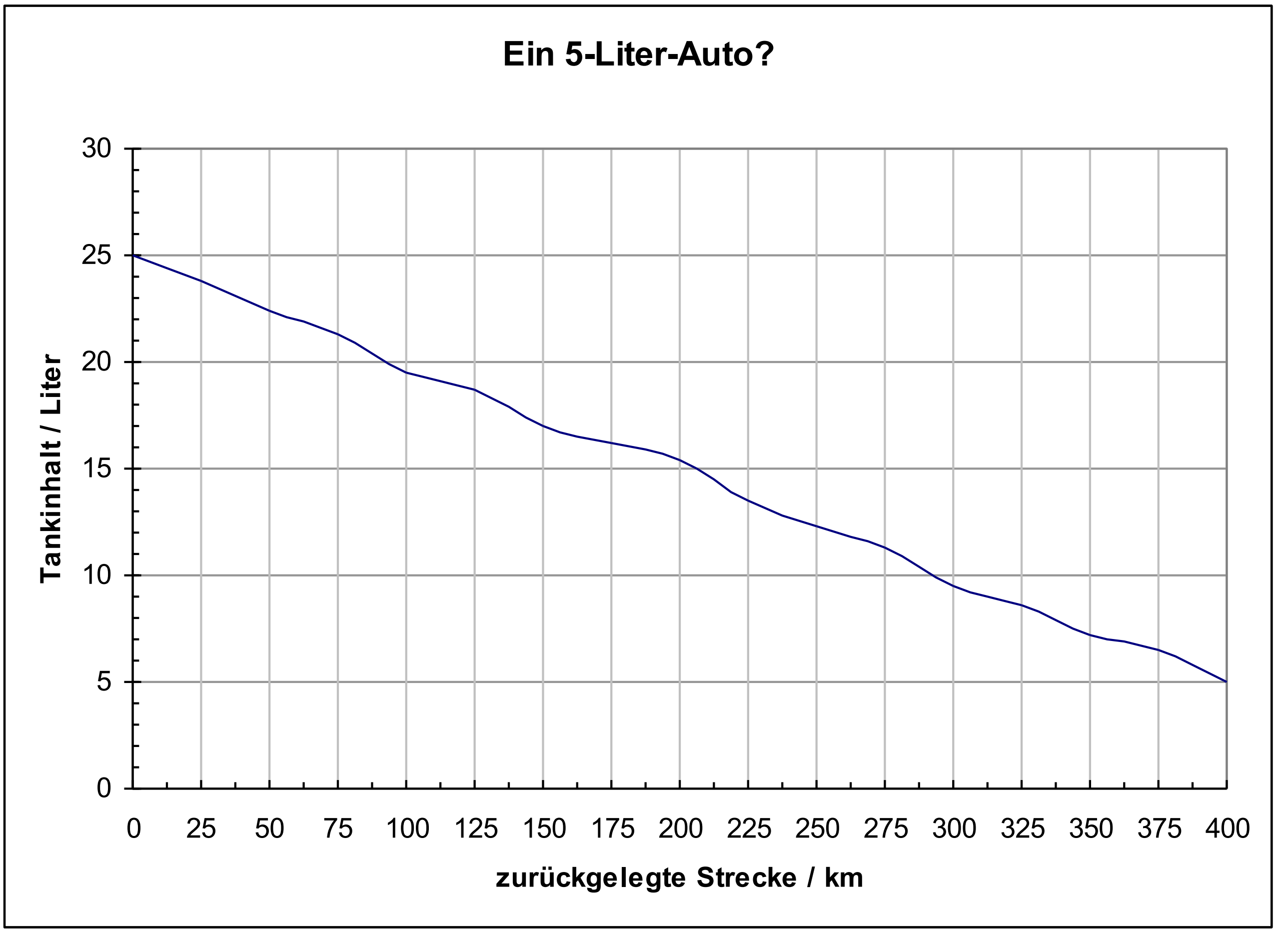
Wo bleibt das Positive?

Nachdem Sie nun schon eine ganze Weile meine – Ihnen vielleicht hie und da zu kritisch oder detailliert erscheinenden – Formulierungen gelauscht haben, will ich abschließend Ihnen noch einige Beispiele meiner jüngeren Aufgabenproduktion zeigen, deren Beurteilung ich aber ganz Ihnen überlasse.

Beispiel I: Ein 5-Liter-Auto?

Frau Jakobs ist mit ihrem neuen Auto unzufrieden. Nach den Herstellerangaben handelt es sich um ein 5-Liter-Auto, sie ist da aber anderer Meinung. Für ein Schlichtungsverfahren, wird der tatsächliche Verbrauch des Autos von einer

Ingenieurin bei einer 400 km langen Testfahrt gemessen und aufgezeichnet. Wie würdest Du als Schlichterin entscheiden?



Beispiel II: Annas Briefe

Für eine Hochschulveranstaltung für Lehramtstudierende habe ich Anna-Briefe geschrieben. Anna habe ich mir als ein aufgewecktes, etwa 12-jähriges Mädchen vorgestellt, die eine Lehramtstudentin um Rat fragt. Aufgabe meiner Studentinnen war es, jede Woche einen solchen Brief zu beantworten.

Ich denke, diese Idee eignet sich auch für die Schule. Man kann die Briefe entsprechend umformulieren oder sich besser noch selbst welche zum gerade behandelten Unterrichtsstoff ausdenken. Wenn Sie in Kompetenzen denken (wollen), so geht es hier um Kommunizieren und Argumentieren.

Anna3

Liebe

Ich kann gar nicht einschlafen, so wütend bin ich, und meine Eltern wollen auch nicht mehr mit mir reden! Ich war heute bei Berta zum Geburtstag eingeladen. Hanna und Klaus und Jakob und Christine waren auch da. Eigentlich war es sehr nett. Aber zum Schluss war eine Verlosung. Jeder durfte aus einem Hut ein Los ziehen, und weil die anderen so gedrängelt haben, habe ich das letzte Los bekommen. Das ist so ungerecht! Natürlich habe ich da nur einen Trostpreis gezogen. Bei meinem Geburtstag will ich als erste ziehen.

Hast du nicht mal gesagt, in der Mathematik wäre alles ganz gerecht? Aber nicht auf Bertas Geburtstag!

Deine Anna

Anna 4

Liebe

toll, wie Du immer alles erklären kannst. Das ist so beruhigend. Mir geht es gut und Bernd ist auch nicht mehr immer so blöd zu mir. Gestern durfte ich wegen meinem verknacksten Fuß nicht turnen und da musste ich mich auf dem Schulhof langweilen und an meinen Gummibärchen kauen. Aber da kam Bernd und wollte mit mir spielen! Er hatte einen Würfel, und wir haben immer dreimal gewürfelt. Wenn eine Sechs dabei war, habe ich ein Gummibärchen gekriegt, wenn keine Sechs dabei war, hat er eines bekommen. Da ging die Stunde schnell rum.

Ich glaube, er hat mehr Gummibärchen als ich gewonnen, aber man muss ja auch verlieren können.

Wann schreibst Du mir wieder?

Deine Anna

Anna 5

Liebe

Von Anna habe ich gehört, dass Du so toll Mathe kannst. Du bist meine letzte Rettung!

Unsere Lehrerin ist für eine Woche auf einer Klassenfahrt und hat uns für diese Zeit tausend Aufgaben gestellt. Eine davon macht mich ganz wahnsinnig. Wir sollen eine quadratische Gleichung aufstellen, die die Lösungen $\sqrt{3}$ *und* $\sqrt{5}$ *hat. Nun habe ich mir gedacht, dass* $(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})=0$ *also* $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})x+\sqrt{15}=0$ *da sicher richtig ist und habe diese Gleichung zur Sicherheit noch einmal mit der p-q-Formel gelöst:* $x_{1/2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\sqrt{15}}$.

Das ist doch ganz komisch. Da müsste doch $\sqrt{3}$ *und* $\sqrt{5}$ *rauskommen. Ich habe schon x-mal nachgerechnet und kann keinen Fehler finden. Die quadratischen Gleichungen und diese komischen Wurzeln sind einfach scheußlich. Vielleicht ist ja auch die Formel falsch?*

Bitte schreib mir schnell, denn am Mittwoch kommt Frau Lachmann zurück, und dann haben wir nichts mehr zu lachen, wenn was falsch ist.

Eilige Grüße

Deine Berta

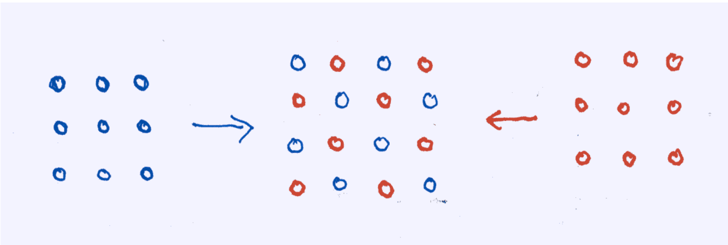
Anna 6

Liebe

stell Dir vor, mein Vati hat mich etwas gefragt!! Ich soll ihm etwas ausrechnen.

Die Sache ist so: Unsere Stadt hat eine Städtefreundschaft mit Bleumont in Frankreich und das schon seit 50 Jahren und mein Vater ist im Festausschuss. Nächste Woche kommen nahezu alle Bleumonter hierher nach Rotenberg, um mit uns auf dem Sportplatz zu feiern.

Mein Vater hat sich ausgedacht, dass dabei zu Beginn eine Gruppe von Bleumontern mit blauen T-Shirts und eine Gruppe von Rotenbergern mit roten T-Shirts sich auf beiden Seiten des Sportplatzes im Quadrat aufstellen, dann aufeinander zu gehen und sich zu einem großen rot-blauen Quadrat zusammenstellen. Ich weiß nicht, ob ich das gut erklärt habe, deshalb male ich dir noch ein Bild von oben.



Ich hoffe, Du kannst es Dir jetzt vorstellen. Ich kann so was nicht so gut zeichnen, aber rechnen kann ich schon: 9+9=18, in der Mitte stehen aber nur 16; also müssten ein Roter und ein Blauer schnell weglaufen, damit es ein schönes Quadrat in der Mitte gibt. Ich habe es dann mal mit 25 Blauen und 25 Roten versucht: 25+25=50, d.h. nur noch einer müsste schnell weglaufen, damit es ein Quadrat gibt. Mutti findet das gut genug; aber Vati will es immer ganz genau. Er sagt, dass sei sümbolisch, und ist ganz stolz auf seine Idee.

Jetzt habe ich schon alle Mensch-Ärger-Dich-Nicht-Figuren aus unserer Spieltruhe geholt. Weißt Du, wie das geht? Bernd sagt, mit dem Computer wäre das ganz einfach; aber ich habe ja noch keinen und Vati will bestimmt bald wissen, ob ich das endlich ausgerechnet habe.

Bitte schreib mir schnell.

Deine Anna

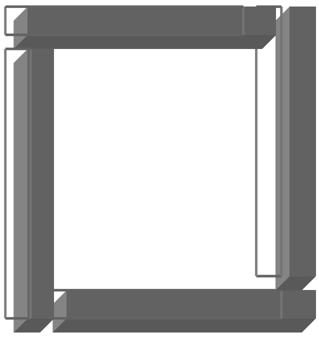
Anna 7

Liebe

Du kannst so schöne Briefe schreiben und weißt einfach alles. Heute haben wir bei einer neuen Referendarin mit Geometrie angefangen und sollen bis nächste Woche einen Würfel bauen.

Vati ist gleich in den Keller gegangen und hat mir zwölf gleichlange Holzstäbe gesägt.

Jetzt wollte ich mit Holzleim den Würfel zusammenkleben und schaffe das irgendwie nicht. Ich habe herausgefunden, dass man aus vier gleichlangen Stäben ein Quadrat zusammenkleben kann, nämlich so:



Aber jetzt weiß ich nicht, wie ich weitermachen soll. Kannst Du mir helfen? Die Würfel von den anderen sind sicher nur aus Pappe.

Viele liebe Grüße

Deine Anna

Anna 9

Liebe

ich freue mich schon so auf die Ferien. Wir fahren wieder mit unserem Boot weg. Wenn wir es ins Meer lassen, ist das immer ziemlich spannend. Ich darf dabei helfen, die Rollen aufzublasen. Die werden unter das Boot gelegt und Vati und Mutti schieben es dann über den Strand. Wenn so eine Rolle hinten am Boot rauskommt, nehme ich sie, laufe schnell nach vorn und lege sie dort wieder unter.

Irgendwie verstehe ich nicht, dass die Rollen langsamer sind als das Boot, sonst würden sie ja nicht immer hinten rauskommen. Vielleicht sind sie ja zu klein.

Ich habe mal Frau Lachmann gefragt, ob man das ausrechnen kann. Aber sie hat geantwortet, erstens wäre das Physik und zweitens bekämen wir den Kreis erst nächstes Jahr. So lange wollte ich aber nicht warten.

Vielleicht kannst Du mir ja einen Tipp geben.

Viele Grüße

Deine Anna

Die Resultate meiner Studentinnen haben mich überrascht durch ihren liebevollen Tonfall, ihre Zeichnungen und auch immer wieder durch ihr mathematisches Unverständnis. Die explizite Aufforderung, zu formulieren und zu argumentieren, war ihnen so bisher offensichtlich noch nicht begegnet. Sie haben, wie es ja auch hier in Ihrem Tagungsmotto heißt, „individuelle Lernwege" beschritten.

Ich danke Ihnen für Ihre nachsichtige Aufmerksamkeit.