Joachim Gräter

Analytische Geometrie

Potsdam, März 2004

Prof. Dr. J. Gräter
Universität Potsdam, Institut für Mathematik
Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam

Die neueste Version dieses Skriptes ist erhältlich unter
http://users.math.uni-potsdam.de/~graeter/

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 7

Affine Geometrie

1. Affine Räume

Definition 1.1 *Ist A eine nichtleere Menge und K ein Körper, so heißt A ein n-dimensionaler affiner Raum über K, wenn es einen n-dimensionalen K-Vektorraum V und eine Abbildung*

$$A \times A \longrightarrow V,\ (P,Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ}$$

so gibt, daß gilt:
i) Zu jedem P aus A und jedem v aus V gibt es genau ein Q aus A mit $v = \overrightarrow{PQ}$.
ii) Für P, Q, R aus A gilt: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Bemerkung.

1. Die Elemente von A heißen Punkte.
2. Man nennt n die Dimension von A und schreibt $\dim A = n$. Gilt $\dim A = 0$, so besteht A aus genau einem Punkt. Gilt $\dim A = 1$, so heißt A affine Gerade, und A heißt affine Ebene, wenn $\dim A = 2$.
3. V heißt der zu A gehörende Vektorraum oder *Richtung* von A.
4. Man definiert formal die leere Menge als affinen Raum der Dimension -1.
5. Statt $v = \overrightarrow{PQ}$ schreibt man auch $Q = P + v$. Sind $P \in A$ und $v, w \in V$, so gibt es $Q, R \in A$ mit $v = \overrightarrow{PQ}$ und $w = \overrightarrow{QR}$. Dann folgt
$$P + (v + w) = P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = P + \overrightarrow{PR} = R \text{ und}$$
$$(P + v) + w = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = R,$$
insgesamt also $P + (v + w) = (P + v) + w$.
6. Ist U ein beliebiger Unterraum von V, so definiert man $P + U := \{P + v \mid v \in U\}$ für jedes P in A; für $U = V$ gilt also $P + V = A$. Bei festem P ist $V \longrightarrow A,\ v \longmapsto P + v$ eine Bijektion.

Einfache Rechenregeln. Ist A ein affiner Raum, so gilt für beliebige $P, Q, P_1, \ldots, P_n \in A$:

1. $\overrightarrow{PP} = \mathcal{O}$, denn $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$.
2. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$, denn $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \mathcal{O}$.
3. $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overrightarrow{P_1P_n}$ und $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots + \overrightarrow{P_nP_1} = \mathcal{O}$.

Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und K ein Körper. Die Menge K^n der n-Tupel über K kann als affiner Raum über dem K-Vektorraum K^n aufgefaßt werden. Dabei benutzen wir gemäß Definition 1.1 die Zuordnung

$$K^n \times K^n \longrightarrow K^n, \ (x, y) \longmapsto y - x.$$

Offenbar wird hierdurch tatsächlich der K^n zu einem n-dimensionalen affinen Raum über K, wobei allerdings der K^n eine doppelte Bedeutung hat. Zum einen ist $K^n = A$ ein affiner Raum, und zum anderen ist $K^n = V$ die Richtung von A. Ohne weitere Erläuterungen ist nicht ersichtlich, ob $x \in K^n$ ein Punkt des affinen Raums K^n ist oder ein Vektor der zugehörigen Richtung. Dieses Beispiel zeigt, daß es für jeden Körper K und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ einen affinen Raum über K der Dimension n gibt.

Definition 1.2 *Ist A ein nichtleerer affiner Raum mit der Richtung V und $L \subseteq A$ eine nichtleere Teilmenge von A, dann heißt L ein (affiner) Unterraum von A, wenn es einen Unterraum U von V so gibt, daß gilt:*
i) Für alle $P, Q \in L$ ist $\overrightarrow{PQ} \in U$.
ii) Zu jedem $P \in L$ und $u \in U$ gibt es ein $Q \in L$ mit $\overrightarrow{PQ} = u$.
Ist L ein Unterraum von A, so sagt man, daß L in A liegt.

Bemerkung.

1. Sind L und U wie in Definition 1.2, so ist L ein affiner Raum mit der Richtung U im Sinne von Definition 1.1. Für alle P aus L gilt dann $P + U = L$.
2. Ist P ein Punkt des affinen Raums A und U ein Unterraum der Richtung V von A, dann ist $P + U$ ein affiner Unterraum von A mit der Richtung U.
3. Man definiert die leere Menge $L = \emptyset$ als Unterraum eines jeden affinen Raums A.
4. Die 1-dimensionalen Unterräume eines affinen Raums A werden Geraden in A genannt, die 2-dimensionalen Unterräume Ebenen in A. Hat A die Dimension n, so heißen die $(n-1)$-dimensionalen Unterräume Hyperebenen von A. Ist A eine Ebene, so sind die Hyperebenen die Geraden in A.

Satz 1.3 *Ist A ein affiner Raum und $\{L_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Unterräumen von A, so ist der Durchschnitt $L := \bigcap_{i \in I} L_i$ ein Unterraum von A. Ist L nicht leer, so ist die Richtung von L der Durchschnitt der Richtungen aller L_i.*

Beweis. Sei L nicht leer und $P \in L$. Für jedes $i \in I$ sei die Richtung U_i Unterraum der Richtung V von A. Wegen $P \in L_i$ gilt dann $L_i = P + U_i$. Sei $U = \bigcap_{i \in I} U_i$. Dann ist U Unterraum von V, und wir müssen zeigen, daß $L = P + U$ gilt:

$''\subseteq''$: Sei Q in L, also $Q \in L_i$ für jedes $i \in I$. Wegen $P \in L_i$ folgt $\overrightarrow{PQ} \in U_i$ für alle $i \in I$, also $\overrightarrow{PQ} \in U$, d.h. $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in P + U$.
$''\supseteq''$: $P + U \subseteq P + U_i = L_i$ für alle $i \in I$, also $P + U \subseteq \bigcap_{i \in I} L_i = L$.

□

Definition 1.4 *Ist A ein affiner Raum und $\{L_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Unterräumen von A, so ist $\sum_{i \in I} L_i$ der Durchschnitt aller Unterräume von A, die alle $L_i, i \in I$ enthalten. $\sum_{i \in I} L_i$ heißt Verbindung der $L_i, i \in I$.*

Bemerkung.

1. Wegen Satz 1.3 ist $\sum_{i \in I} L_i$ ein Unterraum von A und zwar der kleinste, der alle $L_i, i \in I$ enthält. Man sagt, daß $\sum_{i \in I} L_i$ von den $L_i, i \in I$ aufgespannt wird.
2. Ist speziell $I = \{1, \ldots, n\}$, so schreibt man $\sum_{i \in I} L_i = L_1 + \cdots + L_n$. Besteht weiterhin jedes L_i nur aus einem Punkt, $L_i = \{P_i\}$, so schreibt man $L_1 + \cdots + L_n = P_1 + \cdots + P_n$.

Satz 1.5 *Es sei A ein affiner Raum mit der Richtung V und $\{L_i \mid i \in I\}$ eine nichtleere Menge von Unterräumen von A. Für jedes $i \in I$ sei $L_i = P_i + U_i$ wobei $P_i \in L_i$ und U_i die Richtung von L_i ist, $U_i \subseteq| V$. Ist P ein beliebiger Punkt aus einem der L_j und ist U der von den $\overrightarrow{PP_i}$ und den $U_i, i \in I$ erzeugte Unterraum von V, so gilt*

$$\sum_{i \in I} L_i = P + U.$$

Beweis. $''\subseteq''$: Zu zeigen ist $L_i \subseteq P + U$ für jedes $i \in I$. Wegen $\overrightarrow{PP_i} \in U$ und $U_i \subseteq U$ folgt $L_i = P_i + U_i = P + \overrightarrow{PP_i} + U_i \subseteq P + U$.
$''\supseteq''$: Zu zeigen ist $P + U \subseteq \sum_{i \in I} L_i$. Zunächst gilt offenbar $P \in \sum_{i \in I} L_i$, und wir müssen nachweisen, daß U in der Richtung von $\sum_{i \in I} L_i$ enthalten ist. Da U von den $\overrightarrow{PP_j}$ und den U_j erzeugt wird, muß nur noch bewiesen werden, daß $\overrightarrow{PP_j}$ und jedes $u_j \in U_j$ in der Richtung von $\sum_{i \in I} L_i$ liegt. Wegen $P, P_j \in \sum_{i \in I} L_i$ folgt die erste Behauptung, wegen $P_j, P_j + u_j \in L_j \subseteq \sum_{i \in I} L_i$ die zweite.

□

Beispiel. Sind P und Q zwei verschiedene Punkte des affinen Raums A, so ist die Verbindung von P und Q (oder genauer von $\{P\}$ und $\{Q\}$) zum Beispiel durch $P + [\overrightarrow{PQ}]$ gegeben, denn die Richtungen von $\{P\}$ und $\{Q\}$ sind jeweils der Nullraum, d.h., die Richtung von $P + Q$ ist der Vektorraum, der von $\overrightarrow{PQ}$ erzeugt wird. Man nennt $g = P + [\overrightarrow{PQ}]$ die Verbindungsgerade von P und Q und schreibt $g = PQ$. Offenbar gilt auch $g = QP$, und g ist die einzige Gerade in A, die P und Q enthält. Da jeder vom Nullraum verschiedene Vektorraum mindestens zwei Elemente hat, liegen andererseits auf jeder Geraden g mindestens zwei verschiedene Punkte, und g ist dann deren Verbindungsgerade.

Definition 1.6 *Ist A ein affiner Raum, so heißen $P_1, \ldots, P_n \in A$ linear unabhängig, wenn*

$$\overrightarrow{P_iP_1}, \overrightarrow{P_iP_2}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_n}$$

für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ linear unabhängig sind. Anderenfalls heißen $P_1, \ldots, P_n$ linear abhängig.

Bemerkung.

1. Sind $P_1, \dots, P_n \in A$ linear unabhängig, so sind $\overrightarrow{P_iP_1}, \overrightarrow{P_iP_2}, \dots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_iP_n}$ sogar für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ linear unabhängig.

2. Sind $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ linear unabhängig, so hat der von ihnen aufgespannte Unterraum $P_0 + P_1 + \cdots + P_n \subseteq A$ die Dimension n, denn wegen Satz 1.5 gilt
$$P_0 + P_1 + \cdots + P_n = P_0 + [\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}],$$
wobei $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}$ linear unabhängig sind.

3. Jeder n-dimensionale Unterraum wird von $n+1$ linear unabhängigen Punkten aufgespannt: Sei U die Richtung von L und $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine Basis von U. Sei weiterhin P_0 aus L beliebig und $P_i := P_0 + u_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt $\overrightarrow{P_0P_i} = u_i$, also $L = P_0 + [u_1, \dots, u_n] = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$ und $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}$ sind linear unabhängig. Eine Gerade wird demnach von zwei linear unabhängigen Punkten aufgespannt. Mehr als zwei kollineare Punkte sind also linear abhängig. Eine Ebene wird von drei linear unabhängigen Punkten aufgespannt, mehr als drei komplanare Punkte sind linear abhängig. Eine Hyperebene eines n-dimensionalen affinen Raums wird von n linear unabhängigen Punkten aufgespannt.

Definition 1.7 *Es sei A ein affiner Raum über dem Körper K und $P_0, P_1, \dots, P_n, Q \in A$ sowie $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ mit $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 1$.*
$$a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n := Q + a_0 \overrightarrow{QP_0} + a_1 \overrightarrow{QP_1} + \cdots + a_n \overrightarrow{QP_n} .$$

Bemerkung.

1. $a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$ ist wohldefiniert, denn für jedes $Q' \in A$ gilt:
$$\begin{aligned} Q + a_0 \overrightarrow{QP_0} + \cdots + a_n \overrightarrow{QP_n} &= Q' + \overrightarrow{Q'Q} + a_0(\overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P_0}) + \cdots + a_n(\overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P_n}) \\ &= Q' + a_0 \overrightarrow{Q'P_0} + \cdots + a_n \overrightarrow{Q'P_n} + (-1 + a_0 + \cdots + a_n) \overrightarrow{QQ'} \\ &= Q' + a_0 \overrightarrow{Q'P_0} + \cdots + a_n \overrightarrow{Q'P_n}. \end{aligned}$$

2. $P := a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$ heißt Baryzenter (Schwerpunkt der mit den Gewichten a_i versehenen Massepunkte P_i).

3. Sind $P_0, P_1, \dots, P_n$ linear unabhängig und gilt $P := a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$, so sind $a_0, a_1, \dots, a_n$ durch P eindeutig bestimmt.

4. Hat A die Dimension n und sind $P_0, P_1, \dots, P_n$ linear unabhängig, so läßt sich jeder Punkt $P \in A$ eindeutig in der Form $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$ schreiben:
$$\begin{aligned} P &= P_0 + a_1 \overrightarrow{P_0P_1} + a_2 \overrightarrow{P_0P_2} + \cdots + a_n \overrightarrow{P_0P_n} \\ &= P_0 + a_0 \overrightarrow{P_0P_0} + a_1 \overrightarrow{P_0P_1} + a_2 \overrightarrow{P_0P_2} + \cdots + a_n \overrightarrow{P_0P_n} \end{aligned}$$
mit $a_0 = 1 - (a_1 + \cdots + a_n)$. Man nennt $a_0, a_1, \dots, a_n$ baryzentrische Koordinaten von P bezüglich $P_0, P_1, \dots, P_n$.

Beispiel.

1. P_0 und P_1 seien zwei verschiedene Punkte des affinen Raums A und $P = a_0P_0 + a_1P_1$ mit $a_0 + a_1 = 1$. Wählen wir $Q = P_0$ gemäß Definition 1.7, so gilt
$$P = a_0P_0 + a_1P_1 = P_0 + a_0 \overrightarrow{P_0P_0} + a_1 \overrightarrow{P_0P_1} = P_0 + a_1 \overrightarrow{P_0P_1} .$$
Man nennt a_1 das Teilverhältnis von P_0, P_1, P und schreibt $a_1 = \mathrm{TV}(P_0, P_1; P)$.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, die von der Charakteristik $\chi(K)$ des Körpers K nicht geteilt wird. Dann heißt
$$P = \frac{1}{n}P_1 + \cdots + \frac{1}{n}P_n$$
Mittelpunkt von $P_1, \ldots, P_n$. Ist $n = 2$, so folgt $\mathrm{TV}(P_1, P_2; P) = \frac{1}{2}$ für den Mittelpunkt P von P_1 und P_2.

3. Sei $n = 3$ und $\chi(K) \neq 2, 3$. Sind $P_1, P_2, P_3 \in A$ linear unabhängig, so bilden sie ein nichtentartetes Dreieck mit dem Mittelpunkt $P = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3$. Wegen
$$P = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2) + \frac{1}{3}P_3$$
liegt dieser auf der Geraden, die durch P_3 und den Mittelpunkt von P_1 und P_2 verläuft. Wegen Symmetrie folgt somit, daß sich die Seitenhalbierenden eines nichtentarteten Dreiecks (im Mittelpunkt des Dreiecks) schneiden.

Definition 1.8 *Ist A ein affiner Raum und sind L_1, L_2 affine Unterräume von A mit den Richtungen U_1 bzw. U_2, so heißen L_1 und L_2 parallel (geschrieben: $L_1 \parallel L_2$), wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.*

Satz 1.9 *Es sei A ein affiner Raum und $L \neq \emptyset$ ein affiner Unterraum von A. Zu jedem $P \in A$ gibt es genau einen affinen Unterraum L' von A, der P enthält, zu L parallel ist und für den* $\dim L = \dim L'$ *gilt.*

Beweis. Ist U die Richtung von L, dann erfüllt $L' = P + U$ offenbar alle geforderten Bedingungen. Sei also L'' ebenfalls ein Unterraum von A mit $L'' \parallel L$, $P \in L''$ und $\dim L'' = \dim L$. Dann gilt $L'' = P + U''$, wobei U'' die Richtung von L'' ist. Wegen $L'' \parallel L$ ist $U'' \subseteq U$ oder $U \subseteq U''$, also $U = U''$, da $\dim U'' = \dim L'' = \dim L = \dim U < \infty$. Es folgt $L'' = P + U'' = P + U = L'$.

□

Beispiel. Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es demnach genau eine Gerade, die parallel zu g ist und durch P verläuft. Weiterhin gibt es zu jeder Ebene genau eine parallele Ebene, die P enthält.

Der folgende Satz ist oft ein nützliches Hilfsmittel, um die möglichen Beziehungen verschiedener affiner Unterräume zu beschreiben.

Satz 1.10 (Dimensionssatz) *A sei ein affiner Raum und L_1, L_2 zwei affine Unterräume von A mit den Richtungen U_1 bzw. U_2.*

$$\begin{array}{ll} L_1 \cap L_2 \neq \emptyset : & \dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim L_1 \cap L_2. \\ L_1 \cap L_2 = \emptyset : & \dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(U_1 \cap U_2) - 1. \end{array}$$

Beweis. Sei zunächst $L_1 \cap L_2$ nicht leer und $P \in L_1 \cap L_2$. Dann gilt wegen der Sätze 1.5 und 1.3

$$L_1 + L_2 = P + (U_1 + U_2) \quad \text{und} \quad L_1 \cap L_2 = P + (U_1 \cap U_2).$$

Wegen $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim U_1 + \dim U_2$ und

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim L_1 \cap L_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim U_1 \cap U_2$$

ergibt sich die Behauptung des Satzes aus dem Dimensionssatz für Vektorräume (Satz 1.22 aus Kapitel 3).
Sei nun $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ und $L_1 = P_1 + U_1$ sowie $L_2 = P_2 + U_2$. Dann gilt $P_1 \neq P_2$ und $\overrightarrow{P_1P_2} \notin U_1 + U_2$, denn wäre $\overrightarrow{P_1P_2} = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, so wäre

$$P_1 + u_1 = P_1 + (u_1 + u_2 - u_2) = P_1 + (\overrightarrow{P_1P_2} - u_2) = P_2 + (-u_2) \in L_1 \cap L_2.$$

Mit Satz 1.5 folgt nun $L_1 + L_2 = P_1 + (U_1 + U_2 + [\overrightarrow{P_1P_2}])$, also $\dim(L_1 + L_2) = \dim(U_1 + U_2) + 1$. Wie oben ergibt sich schließlich die Behauptung aus dem Dimensionssatz für Vektorräume. $\square$

Beispiel. Sei A ein mindestens 3-dimensionaler affiner Raum. Wir untersuchen die Lage zweier Geraden g und h in A. Dazu sei $g = P + [u]$ und $h = Q + [v]$, also $g + h = P + [u, v, \overrightarrow{PQ}]$.

$g \cap h \neq \emptyset$:	dim g	+	dim h	=	dim $(g+h)$	+	dim $g \cap h$	
	1	+	1	=	1	+	1	$g = h$
	1	+	1	=	2	+	0	$\lvert g \cap h \rvert = 1$
	1	+	1	=	3	+	?	nicht möglich

$g \cap h = \emptyset$:	dim g	+	dim h	=	dim $(g+h)$	+	dim $([u] \cap [v]) - 1$	
	1	+	1	=	1	+	?	nicht möglich
	1	+	1	=	2	+	0	$g \neq h, g \parallel h$
	1	+	1	=	3	+	-1	g, h windschief

2. Affine Koordinaten

Definition 2.1 *Es sei A ein affiner Raum mit der Richtung V. Ist $\mathcal{O} \in A$ sowie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine K-Basis von V, dann heißt $\{\mathcal{O}, a_1, \ldots, a_n\}$ affines Koordinatensystem von A mit dem Ursprung $\mathcal{O}$ und den Achsenrichtungen $a_1, \ldots, a_n$.*

Sei $\{\mathcal{O}, a_1, \ldots, a_n\}$ ein affines Koordinatensystem des affinen Raums A. Zu jedem Punkt $P \in A$ gibt es dann $p_1, \ldots, p_n \in K$ mit

$$P = \mathcal{O} + \overrightarrow{\mathcal{O}P} = \mathcal{O} + p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n.$$

Dabei sind $p_1, \ldots, p_n$ eindeutig bestimmt und heißen affine Koordinaten und $(p_1, \ldots, p_n)$ affiner Koordinatenvektor von P bezüglich $\{\mathcal{O}, a_1, \ldots, a_n\}$. Sind andererseits $p_1, \ldots, p_n \in K$ gegeben, so existiert genau ein $P \in A$ mit

$$P = \mathcal{O} + p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n.$$

Bei festem affinen Koordinatensystem entsprechen sich hierdurch eindeutig die Punkte von A und die Vektoren aus K^n.

Die Punkte $A_i := \mathcal{O} + a_i$ heißen Einheitspunkte, die Geraden $\mathcal{O} + [a_i]$ Achsen des Koordinatensystems. Offenbar sind $\mathcal{O}, A_1, \ldots, A_n$ linear unabhängig und spannen den ganzen Raum auf. Sind andererseits $P_0, P_1, \ldots, P_n$ linear unabhängige Punkte des n-dimensionalen affinen Raums A, so ist

$$\{P_0, \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$$

ein affines Koordinatensystem mit dem Ursprung P_0 und den Einheitspunkten $P_1, \ldots, P_n$.

Bemerkung. Sei V die Richtung und $\{\mathcal{O}, a_1, \ldots, a_n\}$ ein affines Koordinatensystem von A.

1. Haben die Punkte X und Y die affinen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$, so hat der Vektor $\overrightarrow{XY} \in V$ die Koordinaten $y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n$ bezüglich der Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von V.

2. Hat X die affinen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und $\overrightarrow{XY}$ die Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$, so hat Y die affinen Koordinaten $x_1 + z_1, \ldots, x_n + z_n$.

3. Für jeden Punkt P mit den affinen Koordinaten $p_1, \ldots, p_n$ gilt

$$\begin{aligned} P &= \mathcal{O} + p_1 \overrightarrow{\mathcal{O}A_1} + \cdots + p_n \overrightarrow{\mathcal{O}A_n} \\ &= \mathcal{O} + (1 - p_1 - \cdots - p_n) \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}} + p_1 \overrightarrow{\mathcal{O}A_1} + \cdots + p_n \overrightarrow{\mathcal{O}A_n}. \end{aligned}$$

   Sind also $p_1, \ldots, p_n$ die affinen Koordinaten von P, so sind $1 - p_1 - \cdots - p_n, p_1, \ldots, p_n$ die baryzentrischen Koordinaten von P bezüglich $\mathcal{O}, A_1, \ldots, A_n$.

Beschreibung von Unterräumen durch affine Koordinaten.

Im folgenden sei A ein affiner Raum mit der Richtung V und $\{\mathcal{O}, a_1, \ldots, a_n\}$ ein affines Koordinatensystem von A sowie $L = P + U$ ein affiner Unterraum von A mit der Richtung U und $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Basis von U. Bezüglich der Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von V habe u_i den Koordinatenvektor $(u_{1i}, \ldots, u_{ni})$, und $(p_1, \ldots, p_n)$ sei der affine Koordinatenvektor von P.

Ist $X \in A$ ein beliebiger Punkt mit dem affinen Koordinatenvektor $(x_1, \ldots, x_n)$, so sollen nun Bedingungen für $x_1, \ldots, x_n$ gefunden werden, die gewährleisten, daß X in L liegt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
X \in L \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt } u \in U \text{ mit } X = P + u \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt } u \in U \text{ mit } X = \mathcal{O} + \overrightarrow{\mathcal{O}P} + u \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt } u \in U \text{ mit } \overrightarrow{\mathcal{O}X} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + u \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K \text{ mit } \overrightarrow{\mathcal{O}X} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k.
\end{aligned}$$

Die unterste Aussage bezieht sich nur auf Vektoren aus V, die übersetzt in Koordinaten bezüglich $\{a_1, \ldots, a_n\}$ folgendes ergibt:

$$\boxed{\begin{aligned}
X \in L \quad \Longleftrightarrow \quad &\text{Es gibt } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K \text{ mit} \\
&(x_1, \ldots, x_n) = (p_1, \ldots, p_n) + \lambda_1 (u_{11}, \ldots, u_{n1}) + \cdots + \lambda_k (u_{1k}, \ldots, u_{nk}).
\end{aligned}}$$

Auf diese Weise können also die affinen Koordinaten der Punkte von L explizit durch Parameter dargestellt werden, und jeder Punkt aus A, dessen Koordinaten sich nicht so darstellen lassen, gehört demnach auch nicht zu L.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Parameterdarstellungen von } L: \\[1ex]
\quad L: \quad X = P + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k \\
\quad L: \quad (x_1, \ldots, x_n) = (p_1, \ldots, p_n) + \lambda_1 (u_{11}, \ldots, u_{n1}) + \cdots + \lambda_k (u_{1k}, \ldots, u_{nk}).
\end{array}}$$

Definiert man weiterhin $x = (x_1, \ldots, x_n), p = (p_1, \ldots, p_n), \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ und

$$M := \begin{pmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nk} \end{pmatrix},$$

so ist $x^t = p^t + M\lambda^t$ ebenfalls eine Parameterdarstellung von L, die als Beschreibung der Lösungsmenge eines LGS gedeutet werden kann. Offenbar ist M eine (n, k)-Matrix vom Rang k, und es gibt eine $(n - k, n)$-Matrix B vom Rang $n - k$, so daß $M^t B^t = \mathcal{O}$ die Nullmatrix ist. Es gilt

$$\boxed{x^t = p^t + M\lambda^t \quad \Longleftrightarrow \quad Bx^t = Bp^t.}$$

Auf diese Weise können die affinen Koordinaten der Punkte von L als Lösung eines LGS aufgefaßt werden, d.h., der Unterraum L wird durch lineare Gleichungen beschrieben:

> Hat L die Dimension k, so gibt es eine $(n-k,n)$-Matrix B vom Rang $n-k$ mit
> $$X \in L \Longleftrightarrow Bx^t = Bp^t.$$

Wegen $X \in L \Longleftrightarrow Bx^t = Bp^t$ nennt man $Bx^t = Bp^t$ auch eine beschreibende Gleichung von L.

Beschreibung von Hyperebenen: Hat A die Dimension n, so sind die Hyperebenen gerade die Unterräume der Dimension $n-1$, d.h., jede Hyperebene H wird durch eine einzige Gleichung beschrieben:

$$h_1x_1 + \cdots + h_nx_n = h, \quad (h_1, \ldots, h_n) \neq (0, \ldots, 0).$$

Ist $n = 2$, so sind die Hyperebenen die Geraden in A, d.h., in der Ebene werden Geraden durch Gleichungen der Form $h_1x_1 + h_2x_2 = h$ mit $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ beschrieben.

Ist $n = 3$, so sind die Hyperebenen die Ebenen in A, d.h., in einem 3-dimensionalen Raum werden Ebenen durch Gleichungen der Form $h_1x_1+h_2x_2+h_3x_3 = h$ mit $(h_1, h_2, h_3) \neq (0, 0, 0)$ beschrieben.

Beispiel. Sei $K = \mathbb{R}$ und $\{\mathcal{O}, a_1, \ldots, a_4\}$ ein affines Koordinatensystem des 4-dimensionalen affinen Raums A über K. Diesbezüglich seien die Punkte $P_1(1, 0, 1, 1), P_2(-1, 1, 0, 0)$ und $P_3(0, 1, 0, 1)$ gegeben.

Behauptung: P_1, P_2 und P_3 sind linear unabhängig. Um das zu überprüfen, berechnen wir die Koordinatenvektoren von $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_1P_3}$ bezüglich $\{a_1, \ldots, a_4\}$ gemäß Bemerkung 1 nach Definition 2.1:

$\overrightarrow{P_1P_2}$: $-(1, 0, 1, 1) + (-1, 1, 0, 0) = (-2, 1, -1, -1)$.
$\overrightarrow{P_1P_3}$: $-(1, 0, 1, 1) + (0, 1, 0, 1) = (-1, 1, -1, 0)$.

Die Koordinatenvektoren von $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_1P_3}$ sind also $(-2, 1, -1, -1)$ und $(-1, 1, -1, 0)$. Offenbar sind diese linear unabhängig über K. Daraus folgt, daß P_1, P_2 und P_3 linear unabhängige Punkte in A sind und daß der von ihnen aufgespannte Unterraum L die Dimension 2 hat. Gesucht sind nun eine Parameterdarstellung von L und beschreibende Gleichungen.

Parameterdarstellung:

$$L: \quad x = (1, 0, 1, 1) + \lambda_1(-2, 1, -1, -1) + \lambda_2(-1, 1, -1, 0).$$

Beschreibende Gleichungen:
Um beschreibende Gleichungen zu erhalten, muß eine wie oben beschriebene Matrix B berechnet werden. Dazu löst man das homogene LGS, dessen Zeilen durch die Koordinatenvektoren von $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_1P_3}$ gegeben sind:

$$\begin{array}{rrrr|l} -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0. \end{array}$$

Durch elementare Umformungen (vgl. Kapitel 3.2) erhält man

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0. \end{array}$$

Hieraus lassen sich die zwei linear unabhängigen Lösungen $(0,-1,-1,0)$ und $(1,1,0,-1)$ ablesen. Beschreibende Gleichungen von L sind dann zum Beispiel vom Typ

$$\begin{array}{rcl} -x_2 - x_3 \qquad & = & * \\ x_1 + x_2 - \qquad x_4 & = & *. \end{array}$$

Wegen $P \in L$ müssen die Koordinaten 1,0,1,1 von P obige Gleichungen erfüllen, und somit erhält man die rechte Seite:

$$\begin{array}{rcr} -x_2 - x_3 \qquad & = & -1 \\ x_1 + x_2 - \qquad x_4 & = & 0. \end{array}$$

Schnitt, Verbindung, Parallelität:

Sei A ein affiner Raum mit den Unterräumen L und L'. Im folgenden bezeichnen kleine Buchstaben Koordinatenvektoren bezüglich eines fest gewählten Koordinatensystems.

$$\begin{array}{rll} L: & x = p + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k & \text{Parameterdarstellung} \\ & Bx^t = b^t & \text{beschreibende Gleichung} \\ L': & x = p' + \lambda'_1 u'_1 + \cdots + \lambda'_{k'} u'_{k'} & \text{Parameterdarstellung} \\ & B'x^t = b'^t & \text{beschreibende Gleichung} \end{array}$$

Schnitt: Zur Berechnung des Schnitts $L \cap L'$ müssen zum Beispiel beide Gleichungssysteme $Bx^t = b^t$ und $B'x^t = b'^t$ gleichzeitig gelöst werden. Die Lösungen sind dann die Koordinaten der Punkte, die im Schnitt $L \cap L'$ liegen. Man kann aber auch das Gleichungssystem $p + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = p' + \lambda'_1 u'_1 + \cdots + \lambda'_{k'} u'_{k'}$ lösen, um eine Parameterdarstellung des Schnitts zu erhalten.

Verbindung: Offenbar ist $x = p + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k + \lambda'_1 u'_1 + \cdots + \lambda'_{k'} u'_{k'} + \lambda(p - p')$ eine Parameterdarstellung der Verbindung $L + L'$, wobei allerdings $u_1, \ldots, u_k, u'_1, \ldots, u'_{k'}, p - p'$ i.a. nicht linear unabhängig sind. Trotzdem kann - wie oben beschrieben - mit Hilfe dieser Vektoren eine Matrix $\tilde{B}$ berechnet werden, die dann beschreibende Gleichungen liefert.

Parallelität: Zum Nachweis der Parallelität muß lediglich $[u_1, \ldots, u_k] \subseteq [u'_1, \ldots, u'_{k'}]$ oder $[u'_1, \ldots, u'_{k'}] \subseteq [u_1, \ldots, u_k]$ gezeigt werden.

Beispiel. Bezüglich eines affinen Koordinatensystems sind in einem 4-dimensionalen reellen affinen Raum folgende Punkte gegeben:

$$P_1(1,0,1,1), P_2(-1,1,0,0), P_3(0,1,0,1), P'_1(1,-1,1,-1), P'_2(-1,-1,1,1).$$

Dabei sind P_1, P_2 und P_3 wie im obigen Beispiel. Sei $L = P_1 + P_2 + P_3$ der von den P_i und

$L' = P_1' + P_2'$ der von den P_i' aufgespannte Unterraum.

$L:$	$x = (1,0,1,1) + \lambda_1(-2,1,-1,-1) + \lambda_2(-1,1,-1,0)$	Parameterdarstellung
	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	beschreibende Gleichung
$L':$	$x = (1,-1,1,-1) + \lambda_1'(-2,0,0,2)$	Parameterdarstellung

Zur Ermittlung von beschreibenden Gleichungen von L' wird eine $(3,4)$-Matrix B vom Rang 3 berechnet, für die $(-2,0,0,2)B^t = (0,0,0)$ gilt, d.h., es muß das folgende LGS gelöst werden:

$$-2 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \mid 0.$$

Drei linear unabhängige Lösungen sind zum Beispiel $(1,0,0,1),(0,1,0,0)$ und $(0,0,1,0)$. Somit ergibt sich

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die folgenden Gleichungen beschreiben L':

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Parameterdarstellung der Verbindung $L + L'$:

$$x = (1,0,1,1) + \lambda_1(-2,1,-1,-1) + \lambda_2(-1,1,-1,0) + \lambda_1'(-2,0,0,2) + \rho(0,-1,0,-2).$$

Man rechnet leicht nach, daß $L + L'$ die Dimension 4 hat.

Berechnung des Schnitts $L \cap L'$:

Wir zeigen $L \cap L' = \emptyset$ zunächst mit Hilfe des Dimensionssatzes. Wäre $L \cap L' \neq \emptyset$, so wäre wegen Satz 1.10 dann $\dim L \cap L' = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') = 2 + 1 - 4 = -1$ ein Widerspruch. Man kann auch versuchen, eine gemeinsame Lösung der bestimmenden Gleichungen beider Unterräume zu berechnen. Es muß dann gezeigt werden, daß das folgende LGS keine Lösung hat:

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Parallelität:

Man zeigt leicht, daß $(-2,1,-1,-1),(-1,1,-1,0)$ und $(-2,0,0,2)$ linear unabhängig sind. Damit sind L und L' nicht parallel.

Damit ist L eine Ebene und L' eine Gerade, die L nicht schneidet und auch nicht parallel zu L ist. Wie man sich leicht mit Hilfe des Dimensionssatzes überlegt, ist das nur möglich, weil L und L' Unterräume eines affinen Raums sind, dessen Dimension mindestens 4 ist. Wäre nämlich $\dim(L+L') \leq 3$, so wäre wegen des Dimensionssatzes

$$\dim U \cap U' - 1 = \dim L + \dim L' - \dim(L+L') \geq 2+1-3 = 0, \text{ also } \dim U \cap U' \geq 1,$$

wobei U die Richtung von L und U' die Richtung von L' ist. Mit $\dim U' = 1$ folgt $U' \subseteq U$, d.h. $L \parallel L'$.

Koordinatentransformation.

Im folgenden sei A ein affiner Raum mit der Richtung V und den affinen Koordinatensystemen

$$B = \{\mathcal{O}, a_1, \ldots, a_n\} \quad \text{und} \quad B' = \{\mathcal{O}', a_1', \ldots, a_n'\}.$$

Ist X ein Punkt in A, so sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ der Koordinatenvektor von X bezüglich B und $x' = (x_1', \ldots, x_n')$ der bezüglich B'. Wir wollen den Zusammenhang zwischen x und x' untersuchen. Sind weiterhin $w_1, \ldots, w_n$ die affinen Koordinaten von $\mathcal{O}'$ bezüglich B, so gilt:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{O}X} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n,\ \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'} = w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n,\ \overrightarrow{\mathcal{O}'X} = x_1' a_1' + \cdots + x_n' a_n',}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{also} & \overrightarrow{\mathcal{O}'X} & = & \overrightarrow{\mathcal{O}'\mathcal{O}} + \overrightarrow{\mathcal{O}X} = -w_1 a_1 - \cdots - w_n a_n + x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \\ & & = & (-w_1 + x_1) a_1 + \cdots + (-w_n + x_n) a_n. \end{array}$$

Sei nun T die Transformationsmatrix des Basiswechsels $B \longrightarrow B'$. Dann gilt

$$\boxed{T = (t_{ij}) \text{ und } a_j = t_{1j} a_1' + \cdots + t_{nj} a_n'\,.}$$

Ist also $(x_1, \ldots, x_n)$ der Koordinatenvektor von X bezüglich B und $(x_1', \ldots, x_n')$ der Koordinatenvektor von X bezüglich B', so folgt $T(x-w)^t = x'^t$, d.h.

$$\boxed{T \begin{pmatrix} x_1 - w_1 \\ \vdots \\ x_n - w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.}$$

Ist speziell $X = \mathcal{O}$, dann ist $-wT^t$ der Koordinatenvektor von $\mathcal{O}$ bezüglich B'. Bezeichnet man also den Koordinatenvektor von $\mathcal{O}$ bezüglich B' mit $(y'_1, \ldots, y'_n)$, dann gilt

$$\boxed{T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.}$$

Beispiel.
Es sei A ein 2-dimensionaler affiner Raum und bezüglich des affinen Koordinatensystems $\{\mathcal{O}, a_1, a_2\}$ seien die Punkte $\mathcal{O}'(3,4), P'_1(2,3)$ und $P'_2(4,6)$ gegeben. Weiterhin sei $a'_1 = \overrightarrow{\mathcal{O}'P'_1}$ sowie $a'_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}'P'_2}$, also $a'_1 = -a_1 - a_2$ und $a'_2 = a_1 + 2a_2$. Dann gilt

$$a_1 = -2a'_1 - a'_2, \quad a_2 = a'_1 + a'_2.$$

Es folgt

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

3. Affine Abbildungen

Definition 3.1 *Sind A und A' affine Räume über K mit den Richtungen V und V', so heißt $\psi : A \longrightarrow A'$ affine Abbildung, wenn es eine lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V'$ so gibt, daß für alle $P, Q \in A$ gilt*

$$\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$

Bemerkung.

1. Sind A, A', A'' affine Räume über dem Körper K und $\psi : A \longrightarrow A'$ sowie $\psi' : A' \longrightarrow A''$ affine Abbildungen mit den zugehörigen linearen Abbildungen $\varphi : V \longrightarrow V'$ und $\varphi' : V' \longrightarrow V''$ zwischen den entsprechenden Richtungen, so ist auch $\psi' \circ \psi : A \longrightarrow A''$ eine affine Abbildung, wobei $\varphi' \circ \varphi : V \longrightarrow V''$ die zugehörige lineare Abbildung ist.

2. Für alle $P \in A$ und alle $v \in V$ gilt $\psi(P + v) = \psi(P) + \varphi(v)$, denn ist $Q = P + v$, also $v = \overrightarrow{PQ}$, so folgt

$$\psi(P + v) = \psi(Q) = \psi(P) + \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} = \psi(P) + \varphi(\overrightarrow{PQ}) = \psi(P) + \varphi(v).$$

3. Ist $P \in A$ beliebig, so ist wegen Bemerkung 2 die affine Abbildung ψ durch $\psi(P)$ und φ eindeutig bestimmt.

4. Ist L Unterraum von A mit der Richtung U, so ist die Einschränkung $\psi_{|_L} : L \longrightarrow A'$ von ψ auf L eine affine Abbildung und $\varphi_{|_U} : U \longrightarrow V'$ die zugehörige lineare Abbildung.

5. ψ ist genau dann injektiv (surjektiv), wenn φ injektiv (surjektiv) ist. Ist ψ bijektiv, so ist auch ψ^{-1} eine affine Abbildung und φ^{-1} die zugehörige lineare Abbildung. Eine bijektive affine Abbildung heißt (affiner) Isomorphismus, und zwei affine Räume heißen (affin) isomorph, wenn es zwischen ihnen einen affinen Isomorphismus gibt. Ein affiner Isomorphismus $\psi : A \longrightarrow A$ heißt Affinität. Die Affinitäten eines affinen Raums A bilden bezüglich der Komposition eine Gruppe (affine Gruppe), die mit $\mathrm{GA}(A)$ bezeichnet wird.

6. Hat A die Dimension n und sind $P_0, P_1, \ldots, P_n \in A$ linear unabhängig, so ist jede affine Abbildung $\psi : A \longrightarrow A'$ durch $\psi(P_0), \ldots, \psi(P_n)$ eindeutig festgelegt: Zunächst folgt, daß $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ eine Basis der Richtung V von A ist. Die zu ψ gehörende lineare Abbildung φ ist aber wegen $\varphi(\overrightarrow{P_0P_i}) = \overrightarrow{\psi(P_0)\psi(P_i)}$ durch die Bilder der Basisvektoren bestimmt. Wegen Bemerkung 3 ist damit ψ eindeutig festgelegt.

Satz 3.2 *Sind A und A' affine Räume über K mit den Richtungen V und V', so gilt:*
i) Zu beliebigen Punkten $P \in A$ und $P' \in A'$ und jeder linearen Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V'$ gibt es genau eine affine Abbildung $\psi : A \longrightarrow A'$ mit $\psi(P) = P'$ und $\overrightarrow{\psi(X)\psi(Y)} = \varphi(\overrightarrow{XY})$ für alle $X, Y \in A$.
ii) Hat A die Dimension n und sind $P_0, P_1, \ldots, P_n \in A$ linear unabhängig, so gibt es zu beliebigen $P_0', P_1', \ldots, P_n' \in A'$ genau eine affine Abbildung $\psi : A \longrightarrow A'$ mit der Eigenschaft $\psi(P_0) = P_0', \ldots, \psi(P_n) = P_n'$.

Beweis. i) Die Eindeutigkeit von ψ ergibt sich gemäß Bemerkung 3 nach Definition 3.1. Um die Existenz zu zeigen, definieren wir $\psi(X) := P' + \varphi(\overrightarrow{PX})$ für jedes $X \in A$. Dann gilt $\psi(P) = P' + \varphi(\overrightarrow{PP}) = P'$ und $\varphi(\overrightarrow{PX}) = \overrightarrow{P'\psi(X)}$ für alle $X \in A$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\psi(X)\psi(Y)} &= \overrightarrow{\psi(X)P'} + \overrightarrow{P'\psi(Y)} = -\overrightarrow{P'\psi(X)} + \overrightarrow{P'\psi(Y)} \\ &= -\varphi(\overrightarrow{PX}) + \varphi(\overrightarrow{PY}) = \varphi(\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PY}) \\ &= \varphi(\overrightarrow{XY}). \end{aligned}$$

ii) Die Eindeutigkeit von ψ ergibt sich gemäß Bemerkung 6 nach Definition 3.1. Da die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}$ linear unabhängig sind, existiert eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V'$ mit

$$\varphi(\overrightarrow{P_0P_1}) = \overrightarrow{P_0'P_1'}, \ldots, \varphi(\overrightarrow{P_0P_n}) = \overrightarrow{P_0'P_n'}\ .$$

Wegen i) gibt es nun eine affine Abbildung $\psi : A \longrightarrow A'$ mit $\psi(X) = P_0' + \varphi(\overrightarrow{P_0X})$ für alle $X \in A$, also $\psi(P_i) = P_0' + \varphi(\overrightarrow{P_0P_i}) = P_0' + \overrightarrow{P_0'P_i'} = P_i'$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

□

Bemerkung. Sind V und V' zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume, so gibt es genau dann einen Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \longrightarrow V'$, wenn V und V' dieselbe Dimension haben. Sind also A und A' zwei affine Räume über K der Dimension n bzw. n', so gibt es wegen Satz 3.2 und Bemerkung 5 nach Definition 3.1 genau dann einen affinen Isomorphismus $\psi : A \longrightarrow A'$, wenn $n = n'$. Da der K^n als affiner Raum über K der Dimension n aufgefaßt werden kann (vgl. Beispiel nach Definition 1.1), gibt es also bis auf Isomorphie genau einen affinen Raum der Dimension n über K. Man spricht daher z.B. auch von *der* affinen Ebene über K. Jedes affine Koordinatensystem eines n-dimensionalen affinen Raums A vermittelt einen Isomorphismus $\psi : A \longrightarrow K^n$, wobei jeder Punkt auf seinen Koordinatenvektor abgebildet wird.

Beispiel. Im folgenden sei A ein affiner Raum mit der Richtung V. Wir geben einige spezielle Beispiele für affine Abbildungen $\psi : A \longrightarrow A$ an.

1. *Die Translation (Verschiebung):* Eine Translation ist dadurch ausgezeichnet, daß die zugehörige lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ die Identität ist. Jede Translation ist also bereits durch das Bild eines einzigen Punktes festgelegt; ist andererseits zu einem beliebigen Punkt $P \in A$ ein Punkt $P' \in A$ gegeben, so existiert eine Translation ψ mit $\psi(P) = P'$. Es gilt dann für alle $X \in A$:

$$\psi(X) = \psi(P + \overrightarrow{PX}) = \psi(P) + \varphi(\overrightarrow{PX}) = P' + \overrightarrow{PX} = X + \overrightarrow{XP'} + \overrightarrow{PX} = X + \overrightarrow{PP'} \ .$$

2. *Die Dilatation:* Eine Dilatation ist dadurch ausgezeichnet, daß die zugehörige lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ von der Art

$$\varphi : V \longrightarrow V, v \longmapsto \alpha v$$

mit einem festen $\alpha \in K$ ist. Ist $P \in A$ und $P' = \psi(P)$, so gilt für alle $X \in A$:

$$\psi(X) = \psi(P + \overrightarrow{PX}) = \psi(P) + \varphi(\overrightarrow{PX}) = P' + \alpha \overrightarrow{PX} \ .$$

Für $\alpha = 1$ ist eine Dilatation eine Verschiebung.

3. *Parallelprojektion:* Sei L ein nichtleerer Unterraum von A mit der Richtung U und $P \in L$. Ist $V = U \oplus W$ eine Zerlegung von V als direkte Summe (d.h., jedes $v \in V$ läßt sich eindeutig als $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ schreiben), dann ist

$$\varphi : V \longrightarrow U,\ u + w \longrightarrow u$$

eine lineare Abbildung. Die affine Abbildung ψ mit φ als zugehörige lineare Abbildung und $\psi(P) = P$ heißt Parallelprojektion auf L längs W. Es gilt $\psi(A) = L$, und für jeden Punkt $Q \in L$ gilt $\overrightarrow{PQ} \in U$, also

$$\psi(Q) = \psi(P + \overrightarrow{PQ}) = \psi(P) + \varphi(\overrightarrow{PQ}) = P + \overrightarrow{PQ} = Q.$$

Satz 3.3 *Ist $\psi : A \longrightarrow A'$ eine affine Abbildung mit der zugehörigen linearen Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V'$, so gilt:*
i) Ist L ein affiner Unterraum von A mit der Richtung U, dann ist $\psi(L)$ ein affiner Unterraum von A' mit der Richtung $\varphi(U)$. Insbesondere gilt $\dim\ \psi(L) \leq \dim\ L$.
ii) Sind L, L' parallele Unterräume von A, dann sind auch $\psi(L)$ und $\psi(L')$ parallel.
iii) Sind P_0, P_1 und P kollineare Punkte aus A mit $\psi(P_0) \neq \psi(P_1)$, so gilt

$$\mathrm{TV}(P_0, P_1; P) = \mathrm{TV}(\psi(P_0), \psi(P_1); \psi(P)).$$

Beweis. i) Sei $P \in L$. Dann gilt $L = P + U$, also $\psi(L) = \psi(P) + \varphi(U)$. Da $\varphi(U)$ ein Unterraum von V' ist, ist $\psi(P) + \varphi(U)$ ein Unterraum von A' mit der Richtung $\varphi(U)$. Wegen $\dim\ \varphi(U) \leq \dim\ U$ folgt $\dim\ \psi(L) \leq \dim\ L$.
ii) Ist U die Richtung von L und U' die Richtung von L', so ist $\varphi(U)$ die Richtung von $\psi(L)$ und $\varphi(U')$ die Richtung von $\psi(L')$. Gilt also $U \subseteq U'$, so folgt $\varphi(U) \subseteq \varphi(U')$, also $\psi(L) \parallel \psi(L')$. Entsprechend folgt $\psi(L) \parallel \psi(L')$ falls $U' \subseteq U$.
iii) Sei $\lambda = \mathrm{TV}(P_0, P_1; P)$, also $P = P_0 + \lambda\ \overrightarrow{P_0P_1}$. Dann folgt $\lambda = \mathrm{TV}(\psi(P_0), \psi(P_1); \psi(P))$, da $\psi(P) = \psi(P_0) + \varphi(\lambda\ \overrightarrow{P_0P_1}) = \psi(P_0) + \lambda\varphi(\overrightarrow{P_0P_1}) = \psi(P_0) + \lambda\ \overrightarrow{\psi(P_0)\psi(P_1)}$.

□

Bemerkung.

1. Affine Abbildungen überführen damit zum Beispiel Punkte in Punkte und Geraden in Punkte oder Geraden.

2. Man sagt auch, daß die Parallelität und das Teilverhältnis affine Invarianten sind.

3. Gilt $\chi(K) \neq 2$, so sind affine Abbildungen mittelpunktstreu.

4. Ist $\psi : A \longrightarrow A$ eine affine Abbildung und L ein Unterraum von A, so heißt L Fixraum, wenn $\psi(L) = L$. Speziell spricht man auch von Fixpunkten und Fixgeraden. Sind die Punkte einer Fixgeraden g alle Fixpunkte, so nennt man g auch Fixpunktgerade. Ist zum Beispiel ψ eine Parallelprojektion auf L, so sind alle Punkte auf L Fixpunkte.

5. Insbesondere besagt Satz 3.3, daß unter einer Affinität Geraden wieder in Geraden abgebildet werden. Bijektionen von A mit dieser Eigenschaft nennt man auch Kollineationen. Aus geometrischer Sicht ist es nun interessant zu wissen, ob auch umgekehrt Kollineationen stets Affinitäten sind. In diesem Falle ließen sich Affinitäten rein geometrisch kennzeichnen. Bis auf drei offensichtliche Ausnahmen ist das auch tatsächlich der Fall: Hat A zum Beispiel die Dimension 1, so ist jede bijektive Abbildung $\psi : A \longrightarrow A$ eine Kollineation. Das gilt offenbar auch dann, wenn K nur zwei Elemente hat, wenn also $K = \mathbb{Z}_2$ gilt. Weiterhin induziert jeder Automorphismus von K eine Kollineation. Der *Hauptsatz der affinen Geometrie* besagt nun im wesentlichen, daß dieses auch alle Ausnahmen sind: *A sei ein affiner Raum, der keine Gerade ist. Gilt $K \neq \mathbb{Z}_2$ und hat K nur den trivialen Automorphismus, so ist jede Kollineation von A eine Affinität.* Beispiele für Körper mit den eben angegebenen Eigenschaften sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen hat dagegen überabzählbar viele Automorphismen.

Koordinatendarstellung affiner Abbildungen

Im folgenden sei $\psi : A \longrightarrow A'$ eine affine Abbildung und $\varphi : V \longrightarrow V'$ die zugehörige lineare Abbildung zwischen den Richtungen. $B := \{\mathcal{O}, a_1, \ldots, a_n\}$ sei ein affines Koordinatensystem von A und $B' := \{\mathcal{O}', a'_1, \ldots, a'_m\}$ ein affines Koordinatensystem von A'. Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen den Koordinatenvektoren von $X \in A$ und $\psi(X) \in A'$ bezüglich der gegebenen Koordinatensysteme. Dazu sei $(x_1, \ldots, x_n)$ der Koordinatenvektor von X und $(y'_1, \ldots, y'_m)$ der Koordinatenvektor von $\psi(X)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi(X) &= \psi(\mathcal{O} + \overrightarrow{\mathcal{O}X}) = \psi(\mathcal{O}) + \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) \\ &= \mathcal{O}' + \overrightarrow{\mathcal{O}'\psi(\mathcal{O})} + \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}X}). \end{aligned}$$

Sind nun $w'_1, \ldots, w'_m$ die affinen Koordinaten von $\psi(\mathcal{O})$ bezüglich B', also

$$\overrightarrow{\mathcal{O}'\psi(\mathcal{O})} = w'_1 a'_1 + \cdots + w'_m a'_m,$$

und $x'_1, \ldots, x'_m$ die Koordinaten von $\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}X})$ bezüglich $\{a'_1, \ldots, a'_m\}$, also

$$\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) = x'_1 a'_1 + \cdots + x'_m a'_m,$$

so folgt für die Koordinaten insgesamt

$$(y'_1, \ldots, y'_m) = (w'_1, \ldots, w'_m) + (x'_1, \ldots, x'_m).$$

Der Zusammenhang zwischen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $x' = (x'_1, \ldots, x'_m)$ ergibt sich durch die Matrixdarstellung A_φ von φ bezüglich $\{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\{a'_1, \ldots, a'_m\}$ (vgl. Kapitel 4.2). Dabei sind die Einträge von $A_\varphi = (a_{ij})$ durch $\varphi(a_i) = a_{1i}a'_1 + \cdots + a_{mi}a'_m$ bestimmt, und es gilt $A_\varphi x^t = x'^t$.

Koordinatendarstellung von $\psi : A \longrightarrow A'$ bezüglich B und B':

$$A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $(x_1, \ldots, x_n)$ der Koordinatenvektor von X, $(y'_1, \ldots, y'_m)$ der Koordinatenvektor von $\psi(X)$, $(w'_1, \ldots, w'_m)$ der Koordinatenvektor von $\psi(\mathcal{O})$ und A_φ die entsprechende Matrixdarstellung von φ, wobei φ die zu ψ gehörende lineare Abbildung zwischen den Richtungen von A und A' ist.

Genau dann ist ψ ein Isomorphismus, wenn φ ein Isomorphismus ist, d.h., wenn A_φ eine reguläre Matrix ist.

Beispiel. A sei die reelle affine Ebene und $B = \{\mathcal{O}, a_1, a_2\}$ ein affines Koordinatensystem von A mit den Einheitspunkten $A_1 = \mathcal{O} + a_1$, $A_2 = \mathcal{O} + a_2$. Dann gibt es genau eine affine Abbildung $\psi : A \longrightarrow A$ mit

$$\psi(\mathcal{O}) = P_0(-7, 4), \ \psi(A_1) = P_1(-17, 10), \ \psi(A_2) = P_2(-25, 15).$$

Gesucht ist die Koordinatendarstellung von ψ bezüglich B. Dazu berechnen wir zunächst die Matrixdarstellung A_φ von φ bezüglich $\{a_1, a_2\}$, wobei φ die zu ψ gehörende lineare Abbildung ist.

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) &= \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}A_1}) = \overrightarrow{\psi(\mathcal{O})\psi(A_1)} = \overrightarrow{P_0P_1} = -10a_1 + 6a_2, \\ \varphi(a_2) &= \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}A_2}) = \overrightarrow{\psi(\mathcal{O})\psi(A_2)} = \overrightarrow{P_0P_2} = -18a_1 + 11a_2. \end{aligned}$$

Es ergibt sich hieraus

$$\psi : \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -18 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} -10 & -18 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$ regulär ist, ist ψ eine Affinität. Wir wollen nun die Koordinatendarstellung von ψ benutzen, um ψ auf Fixpunkte und Fixgeraden zu untersuchen.

Fixpunkte. Ist $\psi : A \longrightarrow A$ eine affine Abbildung, so ist $X \in A$ Fixpunkt, wenn $\psi(X) = X$. Hat ψ bezüglich eines affinen Koordinatensystems die Darstellung $y^t = w^t + A_\varphi x^t$, so gehören genau die Koordinatenvektoren x zu Fixpunkten, für die $x^t = w^t + A_\varphi x^t$ gilt. In unserem Beispiel muß also das folgende LGS gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} -11 & -18 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Das LGS hat genau eine Lösung, nämlich $(1, -1)$, und damit ist $P_f(1, -1)$ einziger Fixpunkt von ψ.

Fixgeraden. Ist $\psi : A \longrightarrow A$ eine affine Abbildung mit der zugehörigen linearen Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V$, dann ist die Gerade g mit der Parameterdarstellung $g : X = P + \lambda v$ genau dann Fixgerade, wenn $\psi(P)$ auf g liegt und $\varphi([v]) = [v]$. Zur Berechnung der Fixgeraden müssen also zunächst die Eigenwerte von φ berechnet werden und dann die Punkte mit der Eigenschaft, daß $P = \psi(P)$ oder $\overrightarrow{P\psi(P)}$ ein Eigenvektor ist. Ist also λ ein Eigenwert, so liegt P genau dann auf einer Fixgeraden, deren Richtung durch einen Eigenvektor zum Eigenwert λ gegeben ist, wenn

$$\varphi(\overrightarrow{P\psi(P)}) = \lambda\ \overrightarrow{P\psi(P)}$$

gilt. Hat ψ bezüglich eines affinen Koordinatensystems die Darstellung $y^t = w^t + A_\varphi x^t$ und ist p der entsprechende Koordinatenvektor von P, so muß also gelten

$$\begin{aligned} A_\varphi(w^t + (A_\varphi - E_n)p^t) &= \lambda(w^t + (A_\varphi - E_n)p^t), \text{ also} \\ (A_\varphi - \lambda E_n)w^t &= -(A_\varphi - \lambda E_n)(A_\varphi - E_n)p^t. \end{aligned}$$

In unserem Beispiel hat φ die Eigenwerte -1 und 2. Ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist $v_{-1} = -2a_1 + a_2$, und $v_2 = -3a_1 + 2a_2$ ist ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert 2. Ist nun P ein beliebiger Punkt mit dem affinen Koordinatenvektor (p_1, p_2), so kann entsprechend den obigen Überlegungen die Eigenschaft, daß $\overrightarrow{P\psi(P)}$ Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist, folgendermaßen durch die Koordinaten ausgedrückt werden:

$$\begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & -18 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten für die Koordinaten von P also das LGS

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

das eine eindimensionale Lösungsschar hat. Es gibt somit genau eine Fixgerade g_{-1} mit der Richtung $[v_{-1}]$; auf ihr liegt zum Beispiel der Punkt $P(-1, 0)$.
Für Fixgeraden mit der Richtung $[v_2]$ betrachten wir entsprechend

$$\begin{pmatrix} -12 & -18 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -12 & -18 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & -18 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

und erhalten das LGS

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -36 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

das ebenfalls eine eindimensionale Lösungsschar hat. Es gibt somit genau eine Fixgerade g_2 mit der Richtung $[v_2]$; auf ihr liegt zum Beispiel der Punkt $P(-2,1)$.
Die Fixgeraden schneiden sich in genau einem Punkt $Z(1,-1)$. Als Schnittpunkt zweier verschiedener Fixgeraden ist Z ein Fixpunkt (siehe oben). Wählen wir nun Z als Ursprung eines neuen affinen Koordinatensystems und die beiden Fixgeraden g_{-1} und g_2 als Koordinatenachsen, so hat ψ die Koordinatendarstellung

$$\psi : \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

4. Affine Quadriken

Im folgenden ist K stets ein Körper mit der Charakteristik $\neq 2$.

Definition 4.1 *Ist V ein K-Vektorraum und $\beta : V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform, so heißt*

$$q_\beta : V \longrightarrow K, v \longmapsto \beta(v,v)$$

(die durch β bestimmte) quadratische Form. Die quadratische Form q_β heißt trivial, wenn $q_\beta(v) = 0$ für alle $v \in V$ gilt.

Bemerkung.

1. Man schreibt auch nur q statt q_β, wenn klar ist, zu welcher symmetrischen Bilinearform q gehört.

2. Ist β eine symmetrische Bilinearform, so gilt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w)) &= \frac{1}{2}(\beta(v+w, v+w) - \beta(v,v) - \beta(w,w)) \\ &= \frac{1}{2}(\beta(v,w) + \beta(w,v)) \\ &= \frac{1}{2}(\beta(v,w) + \beta(v,w)) \\ &= \beta(v,w). \end{aligned}$$

   Damit ist β durch q_β eindeutig bestimmt. Insbesondere ist also q_β genau dann trivial, wenn β trivial ist.

Ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V und β eine symmetrische Bilinearform auf V sowie $A_\beta \in K_{n,n}$ die entsprechende Matrixdarstellung von β, d.h. $A_\beta = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \beta(a_i, a_j)$, dann gilt für beliebige Vektoren $v, w \in V$

$$\beta(v,w) = (v_1, \ldots, v_n)A_\beta \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \text{ also } q_\beta(v) = (v_1, \ldots, v_n)A_\beta \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

wobei $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_n)$ die Koordinatenvektoren von v bzw. w sind (vgl. Kapitel 6.1). Man nennt daher A_β auch die Matrixdarstellung von q. Ist $\{a'_1, \ldots, a'_n\}$ eine weitere Basis von V und T die Transformationsmatrix des Basiswechsels $\{a'_1, \ldots, a'_n\} \longrightarrow \{a_1, \ldots, a_n\}$, dann gilt

$$\beta(v,w) = (v_1, \ldots, v_n)A_\beta \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = (v'_1, \ldots, v'_n)T^t A_\beta T \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_n \end{pmatrix},$$

wobei $(v'_1, \ldots, v'_n)$ und $(w'_1, \ldots, w'_n)$ die Koordinatenvektoren von v bzw. w bezüglich der Basis $\{a'_1, \ldots, a'_n\}$ sind, d.h., $T^t A_\beta T$ ist die Matrixdarstellung von β bezüglich der neuen Basis.

Definition 4.2 *Zwei Matrizen $A, B \in K_{n,n}$ heißen kongruent, wenn es eine reguläre Matrix $T \in K_{n,n}$ so gibt, daß $A = T^t BT$ gilt.*

Bemerkung.

1. Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der (n, n)-Matrizen über K.
2. Zwei kongruente Matrizen haben denselben Rang.
3. Zwei kongruente Matrizen beschreiben im wesentlichen dieselbe Bilinearform.
4. Jede zu einer symmetrischen Matrix A kongruente Matrix ist selbst symmetrisch, denn es gilt: $(T^t AT)^t = T^t A^t T^{tt} = T^t AT$.

Satz 4.3 *Jede symmetrische Matrix über einem Körper mit der Charakteristik $\neq 2$ ist zu einer Diagonalmatrix kongruent.*

Dieser Satz ist äquivalent zu

Satz 4.4 *Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit der Charakteristik $\neq 2$ und ist β eine symmetrische Bilinearform auf V, dann gibt es eine Basis von V, bezüglich der die Matrixdarstellung A_β von β eine Diagonalmatrix ist.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion nach $n = \dim V$, wobei die Behauptung für $n = 0$ offenbar gilt. Sei also $n > 0$. Gilt $\beta(v, w) = 0$ für alle $v, w \in V$, so ist $(\beta(a_i, a_j))$ die Nullmatrix und damit diagonal für jede Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von V. Wir nehmen nun an, daß es $v, w \in V$ mit $\beta(v, w) \neq 0$ gibt. Wegen

$$\beta(v,w) = \frac{1}{2}(\beta(v+w, v+w) - \beta(v,v) - \beta(w,w))$$

gibt es $a_1 \in \{v, w, v+w\}$ mit $\beta(a_1, a_1) \neq 0$.

$$\beta(a_1, \cdot) : V \longrightarrow K, \quad v \longmapsto \beta(a_1, v)$$

ist eine lineare Abbildung mit dem Rang ≤ 1. Wegen $\beta(a_1, a_1) \neq 0$ ist der Rang 1 und damit der Defekt $n-1$, d.h.,

$$U := \{v \in V \mid \beta(a_1, v) = 0\}$$

ist ein Unterraum von V mit $\dim U = n-1$. Die Restriktion β' von β auf $U \times U$ ist eine symmetrische Bilinearform auf U. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es nun eine Basis $\{a_2, \ldots, a_n\}$ von U mit $\beta(a_i, a_j) = \beta'(a_i, a_j) = 0$ für $i \neq j$. Wegen $a_1 \notin U$ ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V mit $\beta(a_i, a_j) = 0$ für $i \neq j$ und $i, j > 1$. Aufgrund der Definition von U gilt auch $\beta(a_1, a_j) = 0$ für $j > 1$.

□

Definition 4.5 *Es sei A ein affiner Raum mit der Richtung V über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$ und $\mathcal{O}$ ein Punkt von A. Eine Teilmenge $Q \subseteq A$ von A heißt Quadrik oder quadratische Hyperfläche, wenn es eine nichttriviale quadratische Form $q : V \longrightarrow K$, eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow K$ und ein $b \in K$ so gibt, daß gilt*

$$Q = \{X \mid q(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) + 2f(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) + b = 0\}.$$

Bemerkung.

1. Obige Definition ist unabhängig vom gewählten Punkt $\mathcal{O}$, d.h., ist $\mathcal{O}'$ ein weiterer Punkt von A, so gibt es eine nichttriviale quadratische Form $q' : V \longrightarrow K$, eine lineare Abbildung $f' : V \longrightarrow K$ sowie ein $b' \in K$ mit

$$Q = \{X \mid q'(\overrightarrow{\mathcal{O}'X}) + 2f'(\overrightarrow{\mathcal{O}'X}) + b' = 0\}.$$

Um das einzusehen, betrachten wir

$$\begin{aligned}
q(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) &= q(\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'} + \overrightarrow{\mathcal{O}'X}) \\
&= \beta(\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'} + \overrightarrow{\mathcal{O}'X}, \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'} + \overrightarrow{\mathcal{O}'X}) \\
&= \beta(\overrightarrow{\mathcal{O}'X}, \overrightarrow{\mathcal{O}'X}) + 2\beta(\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}, \overrightarrow{\mathcal{O}'X}) + \beta(\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}, \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}), \\
f(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) &= f(\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'} + \overrightarrow{\mathcal{O}'X}) = f(\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}) + f(\overrightarrow{\mathcal{O}'X}).
\end{aligned}$$

Dann folgt mit $q' = q, f' = f + \beta(\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}, \cdot)$ und $b' = \beta(\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}, \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}) + 2f(\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}) + b$ die Behauptung.

2. Lineare Abbildungen $f : V \longrightarrow K$ nennt man auch Linearformen.

3. Für $n = 2$ heißen Quadriken Kurven 2. Ordnung oder Kegelschnitte, für $n = 3$ heißen sie Flächen 2. Ordnung oder quadratische Flächen.

4. Quadriken können auch leer sein.

Koordinatendarstellung von Quadriken.

Sei A ein affiner Raum mit der Richtung V und $\{\mathcal{O}, a_1, \ldots, a_n\}$ ein affines Koordinatensystem von A sowie X ein Punkt von A mit dem zugehörigen affinen Koordinatenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Ist q eine quadratische Form auf V mit der entsprechenden Matrixdarstellung B, so gilt $q(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) = xBx^t$, und ist f eine Linearform mit der entsprechenden Matrixdarstellung $\mathfrak{b} \in K^n$, so gilt $f(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) = \mathfrak{b}x^t$. Für die Quadrik $Q = \{X \mid q(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) + 2f(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) + b = 0\}$ ergibt sich somit die Koordinatendarstellung

$$\boxed{X \in Q \Longleftrightarrow xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0.}$$

Ist andererseits $B \in K_{n,n}$ von der Nullmatrix verschieden und symmetrisch sowie $\mathfrak{b} \in K^n$ und $b \in K$, dann ist

$$Q := \{X \mid xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0\}$$

eine Quadrik. Mit den Bezeichnungen $B = (b_{ij})$ und $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ ergibt sich also

$$X \in Q \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + b = 0.$$

Wie die Koordinaten der Punkte einer Hyperebene Lösungen einer linearen Gleichung über K sind, so sind die Koordinaten der Punkte einer Quadrik Lösungen einer quadratischen Gleichung über K. Jede quadratische Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0 \quad \text{mit} \quad a_{ij}, a_i, a \in K$$

kann in die Gleichung einer Quadrik $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$ umgeschrieben werden, wobei $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ sowie $b_i = \frac{1}{2}a_i$ und $b = a$ zu setzen ist.

Definiert man die zugehörige erweiterte Matrix B_{erw} durch

$$B_{erw} := \begin{pmatrix} b & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}^t & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b_1 & \ldots & b_n \\ b_1 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

so erhält man in formaler Schreibweise

$$X \in Q \Longleftrightarrow (1, x)B_{erw} \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix} = 0.$$

Beispiel. Bezüglich eines affinen Koordinatensystems sei in der reellen affinen Ebene die Quadrik Q gegeben durch

$$Q = \{X \mid 2x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 - 2x_2 + 1 = 0\}.$$

Dabei sind die Ausdrücke in x_1x_2 und x_2x_1 zusammengefaßt. Setzt man nun

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} = (0, -1) \quad \text{und} \quad b = 1,$$

so gilt

$$Q = \{X \mid xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0\} \quad \text{und} \quad B_{erw} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Koordinatentransformation.

Im affinen Raum A seien nun zwei affine Koordinatensysteme gegeben, und die Umrechnung der affinen Koordinaten des einen (*gestrichenen*) Systems in die Koordinaten des anderen (*ungestrichenen*) ergebe sich gemäß folgender Gleichungen:

$$\boxed{x'^t = y^t + Tx^t} \quad \boxed{x^t = y'^t + T'x'^t.}$$

Im ungestrichenen System habe die Quadrik Q die Darstellung $Q = \{X \mid xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0\}$. Wir wollen nun die Koordinatendarstellung der Quadrik Q im gestrichenen System berechnen.

$$\begin{aligned} xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b &= (y' + x'T'^t)B(y'^t + T'x'^t) + 2\mathfrak{b}(y'^t + T'x'^t) + b \\ &= x'T'^tBT'x'^t + y'BT'x'^t + x'T'^tBy'^t + y'By'^t + 2\mathfrak{b}y'^t + 2\mathfrak{b}T'x'^t + b \\ &= x'T'^tBT'x'^t + 2(y'BT' + \mathfrak{b}T')x'^t + y'By'^t + 2\mathfrak{b}y'^t + b \\ &= x'B'x'^t + 2\mathfrak{b}'x'^t + b', \quad \text{wobei gilt} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &B' = T'^tBT' \\ &\mathfrak{b}' = y'BT' + \mathfrak{b}T' \\ &b' = y'By'^t + 2\mathfrak{b}y'^t + b \end{aligned}} \quad \boxed{B'_{erw} = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ y'^t & T' \end{pmatrix}^t B_{erw} \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ y'^t & T' \end{pmatrix}.}$$

Obige Gleichungen werden auch als Transformationsgleichungen einer Quadrik bezeichnet. Insbesondere haben wir also folgenden Satz bewiesen:

Satz 4.6 *Ist die Quadrik Q des affinen Raums A bezüglich eines affinen Koordinatensystems durch eine quadratische Gleichung mit der erweiterten Matrix B_{erw} gegeben, so wird Q bezüglich eines anderen affinen Koordinatensystems durch eine quadratische Gleichung beschrieben, deren erweiterte Matrix kongruent zu B_{erw} ist.*

Beispiel. Wir betrachten in der reellen affinen Ebene die Quadrik Q, die bezüglich eines affinen Koordinatensystems durch die Gleichung

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 - 2x_2 + 1 = 0$$

definiert ist (vgl. obiges Beispiel). Ein neues (*gestrichenes*) Koordinatensystem sei durch die Transformationsgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y'^t + T'x'^t = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

Die Quadrik Q wird im *gestrichenen* Koordinatensystem durch die Gleichung

$$x'B'x'^t + 2\mathfrak{b}'x'^t + b' = 0$$

beschrieben, wobei gilt

$$\begin{aligned} B' = T'^t B T' &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{b}' = y'BT' + \mathfrak{b}T' &= (-3, 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (0, -1) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0), \\ b' = y'By'^t + 2\mathfrak{b}y'^t + b &= (-3, 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2(0, -1) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 = -1. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$Q = \{X \mid {x_1'}^2 + {x_2'}^2 - 1 = 0\}.$$

Faßt man die Gleichung $x'^t = y^t + Tx^t$ als Koordinatendarstellung einer Affinität auf, so ergibt sich unmittelbar folgender

Satz 4.7 *Ist Q eine Quadrik eines affinen Raums A und ist $\psi : A \longrightarrow A$ eine Affinität, so ist $\psi(Q)$ ebenfalls eine Quadrik in A. Dabei werden Q und $\psi(Q)$ durch quadratische Gleichungen mit kongruenten erweiterten Matrizen beschrieben.*

Bemerkung.

1. Zwei Quadriken eines affinen Raums lassen sich genau dann durch eine Affinität ineinander überführen, wenn sie sich bezüglich geeigneter affiner Koordinatensysteme durch dieselbe Gleichung beschreiben lassen. In diesem Falle nennt man die Quadriken auch affingleich.

2. Ist Q eine Quadrik in A und $\psi : A \longrightarrow A$ eine affine Abbildung, die nicht injektiv ist, so ist i.a. $\psi(Q)$ keine Quadrik. Im 3-dimensionalen reellen affinen Raum ist zum Beispiel das Bild eines Ellipsoides unter einer Parallelprojektion auf eine Ebene keine Quadrik, denn als Bild ergibt sich keine Kurve 2. Grades. Es besteht vielmehr aus einer Ellipse und allen ihren inneren Punkten.

Das Ziel der nächsten Untersuchungen wird es sein, die Klassen affingleicher Quadriken einerseits geometrisch und andererseits durch "Normalformgleichungen" zu kennzeichnen.

Satz 4.8 *Die Quadrik Q des affinen Raums A werde bezüglich eines affinen Koordinatensystems durch die Gleichung $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$ mit $\mathrm{Rg}B = r$ beschrieben. Dann existiert ein affines Koordinatensystem, in dem Q durch eine Gleichung in Normalform beschrieben wird, d.h. durch*

$$\begin{aligned}
&(1)\ a_{11}x'^2_1 + \cdots + a_{rr}x'^2_r = 0, \ \textit{falls}\ \ \mathrm{Rg}B_{erw} = \mathrm{Rg}B,\\
&(2)\ a_{11}x'^2_1 + \cdots + a_{rr}x'^2_r + 1 = 0, \ \textit{falls}\ \ \mathrm{Rg}B_{erw} = \mathrm{Rg}B + 1,\\
&(3)\ a_{11}x'^2_1 + \cdots + a_{rr}x'^2_r + 2x'_{r+1} = 0, \ \textit{falls}\ \ \mathrm{Rg}B_{erw} = \mathrm{Rg}B + 2.
\end{aligned}$$

Dabei sind $a_{11}, \ldots, a_{rr}$ jeweils von 0 verschieden.

Beweis. Da kongruente Matrizen denselben Rang haben, können in den Aussagen über $\mathrm{Rg}B$ und $\mathrm{Rg}B_{erw}$ die Matrizen B und B_{erw} durch die entsprechenden Matrizen der Normalformgleichung ersetzt werden. Für diese gilt die Behauptung aber offensichtlich. Um die Existenz einer Normalformgleichung zu beweisen, wenden wir zunächst Satz 4.3 an und erhalten ein neues Koordinatensystem, in dem die Matrixdarstellung B' eine Diagonalmatrix ist. Wir können daher gleich annehmen, daß B eine Diagonalmatrix ist und daß $b_{ii} \neq 0$ für $i \leq r$ sowie $b_{ii} = 0$ für $r < i$ gilt. Ist nun $\mathfrak{b}$ eine Linearkombination der Zeilenvektoren von B, so gibt es ein $y' \in K^n$ mit $y'B = -\mathfrak{b}$. Wählen wir ein Koordinatensystem mit der Transformationsgleichung $x = y' + x'$, so ist $\mathfrak{b}' = \mathcal{O}$ im neuen Koordinatensystem, d.h., Q wird hier durch die Gleichung

$$b_{11}{x'_1}^2 + \cdots + b_{rr}{x'_r}^2 + b' = 0$$

beschrieben. Ist $b' = 0$, so haben wir den Gleichungstyp (1). Ist $b' \neq 0$, so teilen wir durch b' und erhalten den Gleichungstyp (2). Ist $\mathfrak{b}$ keine Linearkombination der Zeilenvektoren von B, so gibt es $y' \in K^n$ mit $y'B + \mathfrak{b} = (0, \ldots, 0, b'_{r+1}, \ldots, b'_n)$ und $(b'_{r+1}, \ldots, b'_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Weiterhin existiert eine reguläre $(n-r, n-r)$-Matrix $\tilde{T}$ mit $(b'_{r+1}, \ldots, b'_n)\tilde{T} = (1, 0, \ldots, 0)$. Mit

$$T' := \begin{pmatrix} E_r & \mathcal{O} \\ \mathcal{O}^t & \tilde{T} \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Transformation in ein Koordinatensystem, in dem Q durch die Gleichung

$$b_{11}{x'_1}^2 + \cdots + b_{rr}{x'_r}^2 + 2x'_{r+1} + b' = 0$$

beschrieben wird. Wir können also wieder annehmen, daß Q im ursprünglichen System durch

$$b_{11}x_1^2 + \cdots + b_{rr}x_r^2 + 2x_{r+1} + b = 0$$

definiert ist. Wählen wir $y' = -\frac{b}{2}e_{r+1}$ und $T' = E_n$, so wird Q im neuen System wie gewünscht durch

$$b_{11}{x'_1}^2 + \cdots + b_{rr}{x'_r}^2 + 2x'_{r+1} = 0$$

beschrieben, also durch den Gleichungstyp (3).

□

Für konkrete Aufgabenstellungen ist es oft von Vorteil, wenn eine Quadrik durch eine Gleichung in Normalform gegeben ist. Ist dieses nicht der Fall, muß nicht nur eine Normalform berechnet werden, sondern auch eine zugehörige Transformation. Im folgenden soll nun ein Algorithmus vorgestellt werden, mit dessen Hilfe "von Hand" relativ schnell eine Normalformgleichung und die zugehörige Transformation berechnet werden kann. Dabei werden elementare Zeilen- und Spaltenumformungen durchgeführt, die zunächst als Multiplikation mit geeigneten Matrizen von links oder rechts an die erweiterte Matrix der Quadrik gedeutet werden sollen.

Sei M eine $(n+1)$-reihige quadratische Matrix mit Einträgen aus K.

- C_{ij} sei die Matrix, die aus E_{n+1} durch Vertauschen der i-ten und j-ten Spalte entsteht. Dann entsteht $M \cdot C_{ij}$ aus M auch durch Vertauschen der i-ten und j-ten Spalte.
- Für $a \in K, a \neq 0$ sei $C_{a\cdot i}$ die Matrix, die aus E_{n+1} durch Multiplikation der i-ten Spalte mit a entsteht. Dann entsteht $M \cdot C_{a\cdot i}$ aus M auch durch Multiplikation der i-ten Spalte mit a.
- C_{ii+j} sei die Matrix, die aus E_{n+1} durch Addition der i-ten zur j-ten Spalte entsteht. Dann entsteht $M \cdot C_{ii+j}$ aus M auch durch Addition der i-ten zur j-ten Spalte.

Die entsprechenden Zeilenumformungen werden an M durch Multiplikation mit $C_{ij}^t, C_{a\cdot i}^t$ und C_{ii+j}^t von links an M durchgeführt. Ist nun B_{erw} die erweiterte Matrix einer Quadrikgleichung, so werden elementare Spalten- und die entsprechenden Zeilenumformungen gleichzeitig an B_{erw} mit dem Ziel vorgenommen, eine Matrix zu erhalten, die einer Normalformgleichung entspricht:

$$B_{erw} \longrightarrow S_k^t \cdot \cdots \cdot S_1^t \cdot B_{erw} \cdot S_1 \cdot \cdots \cdot S_k.$$

Dabei sind die Matrizen $S_{\dots}$ vom oben angegebenen Typ. Es muß nun folgende Grundregel beachtet werden:

> Die erste Spalte (Zeile) darf mit keiner anderen Spalte (Zeile) vertauscht, mit keinem Element aus K multipliziert und zu keiner anderen Spalte (Zeile) addiert werden.

Unter Berücksichtigung dieser Regel hat jede Matrix $S_{\dots}$ und damit auch das Produkt $S_1 \cdot \cdots \cdot S_k$ als ersten Zeilenvektor das Tupel $(1,0,\dots,0)$. Man überlegt sich leicht, daß die Matrix B_{erw} durch die gleichzeitige Anwendung von elementaren Spalten- und den entsprechenden Zeilenumformungen unter Berücksichtigung obiger Grundregel in eine Matrix der folgenden Art überführt werden kann:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{11} & & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{rr} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{11} & & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{rr} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & a_{11} & & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{rr} & 0 & 0 & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $a, a_{11}, \dots, a_{rr}$ von 0 verschieden. Dieses sind dann die erweiterten Matrizen, die zu den Normalformgleichungen von Quadriken gehören.

Um die Transformationsgleichung zu erhalten, werden die Spaltenumformungen in jedem Schritt auch an der Einheitsmatrix E_{n+1} durchgeführt. Man erhält also folgendes Schema:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}l}
 & B_{erw} & & \mathrm{E}_{n+1} \\
S_1^t\cdot & B_{erw} & \cdot S_1 & \mathrm{E}_{n+1}\cdot S_1 \\
 & \vdots & & \vdots \\
S_k^t\cdot\dots\cdot S_1^t\cdot & B_{erw} & \cdot S_1\cdot\dots\cdot S_k & \mathrm{E}_{n+1}\cdot S_1\cdot\dots\cdot S_k
\end{array}$$

Setzt man $S = S_1 \cdot \dots \cdot S_k$, so gilt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ y'^t & T' \end{pmatrix},$$

wobei $y' \in K^n$ und $T' \in K_{n,n}$ regulär ist. Führt man nun mit Hilfe von $x^t = y'^t + T'x'^t$ ein neues (*gestrichenes*) Koordinatensystem ein, so erhält man für die Quadrik Q eine der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&a_{11}{x'_1}^2 + \dots + a_{rr}{x'_r}^2 = 0;\ a_{11}, \dots, a_{rr} \neq 0, \\
&a_{11}{x'_1}^2 + \dots + a_{rr}{x'_r}^2 + a = 0;\ a, a_{11}, \dots, a_{rr} \neq 0, \\
&a_{11}{x'_1}^2 + \dots + a_{rr}{x'_r}^2 + 2x'_{r+1} = 0;\ a_{11}, \dots, a_{rr} \neq 0.
\end{aligned}$$

Beispiel. Bezüglich eines affinen Koordinatensystems sei im 3-dimensionalen reellen affinen Raum die Quadrik Q durch die Gleichung

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 1 = 0$$

gegeben. Diese Gleichung ist äquivalent zu $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathfrak{b} = (2, 1, 3),\ b = 1.$$

Für die erweiterte Matrix B_{erw} gilt dann

$$B_{erw} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben nun in die ersten beiden Spalten des Rechenschemas die Matrizen B_{erw} und E_{n+1}. Die zweite Zeile des Rechenschemas entsteht aus der ersten, indem an den beiden Matrizen eine entsprechende Spaltenumformung vorgenommen wird. In die dritte Spalte kommt B_{erw} nach weiterer Anwendung der zugehörigen Zeilenumformung. Die dritte Zeile des Rechenschemas entsteht entsprechend aus der zweiten usw.

Für die erste Zeile des Rechenschemas erhalten wir also:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Subtrahieren des 2-fachen der zweiten Spalte von der ersten $((S1) - 2 \cdot (S2))$:

$$\begin{array}{rccc} -3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrc} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Subtrahieren der zweiten Spalte von der dritten $((S3) - (S2))$:

$$\begin{array}{rcrc} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrc} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Subtrahieren der zweiten Spalte von der vierten $((S4) - (S2))$:

$$\begin{array}{rcrc} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrc} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Addieren der dritten Spalte zur ersten $((S1) + (S3))$:

$$\begin{array}{rcrc} -4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Addieren des 2-fachen der vierten Spalte zur ersten $((S1) + 2 \cdot (S4))$:

$$\begin{array}{rccc} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir erhalten ein neues affines Koordinatensystem, bezüglich dessen die Quadrik durch die Gleichung

$$x_1'^2 + x_2'^2 + 2x_3' = 0$$

beschrieben wird. Dabei ist das neue Koordinatensystem durch die folgenden Transformationsgleichungen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Das nächste Ziel ist es nun, die reellen Quadriken affin zu klassifizieren:

Affine Klassifikation der reellen Quadriken:

Im n-dimensionalen reellen affinen Raum ($n \geq 2$) kann jede nichtleere Quadrik durch genau eine der folgenden Gleichungen beschrieben werden (dabei ist ein geeignetes affines Koordinatensystem zu wählen):

(1) $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 = 0;\ 1 \leq k \leq m,\ 2k - m \geq 0,$

(2) $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 = 1;\ 1 \leq k \leq m,$

(3) $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 + 2x_{m+1} = 0;\ 1 \leq k \leq m,\ 2k - m \geq 0.$

Für $n = 3$ ergeben sich folgende Quadriken:

$x_1^2 = 0:$ Q ist eine Ebene.
$x_1^2 - x_2^2 = 0:$ Q besteht aus zwei sich schneidenden Ebenen.
$x_1^2 + x_2^2 = 0:$ Q ist eine Gerade.
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0:$ Q ist ein Kreiskegel.
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0:$ Q ist ein Punkt.
$x_1^2 = 1:$ Q besteht aus zwei parallelen Ebenen.
$x_1^2 - x_2^2 = 1:$ Q ist ein hyperbolischer Zylinder.
$x_1^2 + x_2^2 = 1:$ Q ist ein Kreiszylinder.
$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1:$ Q ist ein zweischaliges Hyperboloid.
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1:$ Q ist ein einschaliges Hyperboloid.
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1:$ Q ist eine Kugel (Ellipsoid).
$x_1^2 + 2x_2 = 0:$ Q ist ein parabolischer Zylinder.
$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0:$ Q ist ein hyperbolisches Paraboloid.
$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0:$ Q ist ein elliptisches Paraboloid.

Im folgenden ist A stets ein affiner Raum der Dimension $n \geq 2$ mit der Richtung V.

Definition 4.9 *Ist Q eine nichtleere Quadrik in A und $M \in A$ ein Punkt von A, so heißt M Mittelpunkt von Q, wenn für alle $v \in V$ gilt:*

$$M + v \in Q \Longleftrightarrow M - v \in Q.$$

Bemerkung.

1. Man definiert $M - v := M + (-v)$ für $M \in A$ und $v \in V$.

2. Wegen Symmetrie muß für einen Mittelpunkt M lediglich $M - v \in Q \Longrightarrow M + v \in Q$ für alle $v \in V$ oder $M + v \in Q \Longrightarrow M - v \in Q$ für alle $v \in V$ nachgewiesen werden.

3. Es gibt Quadriken ohne Mittelpunkte; zum Beispiel hat eine Parabel in der affinen reellen Ebene keinen Mittelpunkt. Ist Q eine Ellipse oder eine Hyperbel, so hat Q einen Mittelpunkt, der aber nicht auf Q liegt. Besteht Q aus zwei sich schneidenden Geraden, so hat Q einen Mittelpunkt, der sogar auf Q liegt.

Satz 4.10 *Ist Q eine Quadrik in A, die in keiner Hyperebene von A liegt und bezüglich eines affinen Koordinatensystems die Gleichung $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$ hat, so gilt für jeden Punkt P von A mit dem Koordinatenvektor p:*

$$P \text{ ist Mittelpunkt von } Q \Longleftrightarrow Bp^t + \mathfrak{b}^t = \mathcal{O}^t.$$

Beweis. Zunächst gilt für einen beliebigen Punkt X von Q mit dem Koordinatenvektor x:

$$\begin{aligned} X + 2\overrightarrow{XP} \in Q &\Longleftrightarrow (x + 2(-x+p))B(x + 2(-x+p))^t + 2\mathfrak{b}(x + 2(-x+p))^t + b = 0 \\ &\Longleftrightarrow xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b + 4xB(-x+p)^t + 4(-x+p)B(-x+p)^t + \\ &\ 4\mathfrak{b}(-x+p)^t = 0 \\ &\Longleftrightarrow 4(pB + \mathfrak{b})(-x+p)^t = 0. \end{aligned}$$

Sei nun P ein Punkt von A mit $Bp^t + \mathfrak{b}^t = \mathcal{O}^t$. Wir zeigen, daß P ein Mittelpunkt von Q ist. Dazu sei $v \in V$ mit $P - v \in Q$. Setzen wir $X = P - v$, dann folgt $X \in Q, \overrightarrow{XP} = v$ und $4(pB + \mathfrak{b})(-x+p)^t = 0$, also $P + v = X + 2\overrightarrow{XP} \in Q$.
Sei nun P ein Mittelpunkt von Q. Wir zeigen $Bp^t + \mathfrak{b}^t = \mathcal{O}^t$. Zunächst gilt für jeden Punkt $X \in Q$ wegen $X = P - \overrightarrow{XP} \in Q$ und der Mittelpunktseigenschaft von P auch $X + 2\overrightarrow{XP} = P + \overrightarrow{XP} \in Q$. Es folgt also $4(pB + \mathfrak{b})(-x+p)^t = 0$ für alle X von Q. Wäre nun $Bp^t + \mathfrak{b}^t \neq \mathcal{O}^t$, so wäre wegen

$$(pB + \mathfrak{b})x^t = (pB + \mathfrak{b})p^t \text{ für alle } X \text{ aus } Q$$

die Quadrik Q in einer Hyperebene enthalten - Widerspruch.

□

Bemerkung. Ist Q eine nichtleere Quadrik des affinen Raums A mit der Koordinatendarstellung $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$ und liegt Q in keiner Hyperebene von A, so bilden wegen Satz 4.10 die Mittelpunkte von Q einen affinen Unterraum mit der beschreibenden Gleichung $Bx^t = -\mathfrak{b}^t$. Liegt Q in einer Hyperebene von A, so sei L der kleinste Unterraum von A, der Q umfaßt. Jeder Mittelpunkt von Q aus A liegt dann in L. Gilt $Q = L$, so ist L die Menge aller Mittelpunkte. Gilt aber $Q \neq L$, so ist wegen obiger Überlegungen die Menge aller Mittelpunkte von Q in A ein affiner Unterraum von L und damit von A.

Definition 4.11 *Ist Q eine nichtleere Quadrik in A und $S \in A$ ein Punkt von A, so heißt S Spitze von Q, wenn für alle $v \in V$ gilt:*

$$S + v \in Q \Longrightarrow \forall k \in K : S + kv \in Q.$$

Bemerkung. Offenbar ist jede Spitze ein Mittelpunkt von Q, der selbst in Q liegt, und umgekehrt ist jeder Mittelpunkt von Q, der in Q liegt, eine Spitze. Hat Q eine Spitze, so sind alle Mittelpunkte von Q Spitzen, und sie bilden einen affinen Unterraum von A. Die Eigenschaft von Q, einen Mittelpunkt oder eine Spitze zu haben, ist eine rein geometrische Eigenschaft. Sie ist unabhängig von der Beschreibung durch eine quadratische Form und eine Linearform sowie von einem gewählten Koordinatensystem. Sie spiegelt sich aber in den beschreibenden Normalformgleichungen, wie sie in Satz 4.8 angegeben sind, wider. Dieses soll im folgenden näher untersucht werden.

Satz 4.12 *Es sei A ein affiner Raum mit der Richtung V und Q eine Quadrik in A. Genau dann ist Q ein affiner Unterraum von A, wenn jeder Punkt von Q eine Spitze ist.*

Beweis. Sei Q ein affiner Unterraum von A und S ein Punkt von Q. Ist $v \in V, v \neq \mathcal{O}$ und $P := S + v$ ein Punkt von Q, dann liegt die Verbindungsgerade SP in Q. Wegen $SP = \{S + kv \mid k \in K\}$ ist $S + kv \in Q$ für alle $k \in K$, also S eine Spitze. Sei nun andererseits jeder Punkt von Q eine Spitze. Wegen Aufgabe 5.1 reicht es aus zu zeigen, daß mit zwei verschiedenen Punkten P und P' aus Q auch deren Verbindungsgerade PP' in Q liegt. Mit $v = \overrightarrow{PP'}$ gilt $P + v \in Q$, also $P + kv \in Q$ für alle $k \in K$, da P Spitze von Q ist. Also liegt $PP' = \{P + kv \mid k \in K\}$ in Q.

$\square$

Sei Q eine Quadrik des affinen Raums A, die in keinem echten Unterraum enthalten ist, also insbesondere in keiner Hyperebene von A. Bezüglich eines affinen Koordinatensystems sei $Q = \{X \mid xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0\}$.

Die kegelige Quadrik: Es gilt $\mathrm{Rg}B_{erw} = \mathrm{Rg}B$, und wegen Satz 4.8 kann man das Koordinatensystem so wählen, daß gilt

$$Q = \{X \mid a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{rr}x_r^2 = 0\}.$$

Dabei ist $r = \mathrm{Rg}B$. Der Ursprung $\mathcal{O}$ ist ein Mittelpunkt, der auf Q liegt, also eine Spitze. Alle Mittelpunkte sind Spitzen und bilden einen affinen Unterraum der Dimension $n - r$. Typische Beispiele im 3-dimensionalen reellen affinen Raum sind der Kreiskegel und das sich schneidende Ebenenpaar.

Die (echte) Mittelpunktsquadrik: Es gilt $\mathrm{Rg}B_{erw} = \mathrm{Rg}B + 1$, und wegen Satz 4.8 kann man das Koordinatensystem so wählen, daß gilt

$$Q = \{X \mid a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{rr}x_r^2 + 1 = 0\}.$$

Dabei ist $r = \mathrm{Rg}B$. Der Ursprung $\mathcal{O}$ ist ein Mittelpunkt, der nicht auf Q liegt, also keine Spitze ist. Kein Mittelpunkt liegt auf Q, d.h., Q hat keine Spitzen. Die Mittelpunkte bilden einen affinen Unterraum der Dimension $n-r$. Typische Beispiele im 3-dimensionalen reellen affinen Raum sind das Ellipsoid, die Hyperboloide sowie der Kreiszylinder und der hyperbolische Zylinder.

Die parabolische Quadrik: Es gilt $\mathrm{Rg}B_{erw} = \mathrm{Rg}B + 2$, und wegen Satz 4.8 kann man das Koordinatensystem so wählen, daß gilt

$$Q = \{X \mid a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{rr}x_r^2 + 2x_{r+1} = 0\}.$$

Dabei ist $r = \mathrm{Rg}B$. Die Quadrik Q hat keinen Mittelpunkt. Typische Beispiele im 3-dimensionalen reellen affinen Raum sind der parabolische Zylinder sowie das hyperbolische und das elliptische Paraboloid.

Satz 4.13 *Es sei Q eine Quadrik und g eine Gerade des affinen Raums A. Haben g und Q einen nichtleeren Schnitt, so schneiden sich g und Q in genau einem Punkt oder in genau zwei Punkten oder g liegt ganz in Q.*

Beweis. Sei $Q = \{X \mid q(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) + 2f(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) + b = 0\}$, wobei q eine quadratische Form und f eine Linearform auf der Richtung V von A ist, und weiterhin $g = P + [v]$. Ein Punkt $P + \lambda v$ von g ($\lambda \in K$) liegt genau dann in Q, wenn

$$q(\overrightarrow{\mathcal{O}P} + \lambda v) + 2f(\overrightarrow{\mathcal{O}P} + \lambda v) + b = 0.$$

Ist β die zu q gehörende Bilinearform, so ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \beta(\overrightarrow{\mathcal{O}P} + \lambda v, \overrightarrow{\mathcal{O}P} + \lambda v) + 2f(\overrightarrow{\mathcal{O}P} + \lambda v) + b = 0, \text{ also} \\ \lambda^2\beta(v,v) + 2\lambda(\beta(\overrightarrow{\mathcal{O}P}, v) + f(v)) + \beta(\overrightarrow{\mathcal{O}P}, \overrightarrow{\mathcal{O}P}) + 2f(\overrightarrow{\mathcal{O}P}) + b = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist lösbar, da sich nach Voraussetzung g und Q schneiden. Gilt $\beta(v,v) \neq 0$, so gibt es genau zwei verschiedene Lösungen oder genau eine doppelte; gilt $\beta(v,v) = 0$, so gibt es genau eine Lösung oder alle λ aus K sind Lösungen.

□

Bemerkung. Ist Q eine Quadrik in A und g eine Gerade, die Q in zwei verschiedenen Punkten schneidet, so liegt g in jedem Unterraum von A, der Q enthält.

Definition 4.14 *Sei A ein affiner Raum mit der Richtung V und Q eine Quadrik in A. Ein Vektor $v \in V, v \neq \mathcal{O}$ hat Ausnahmerichtung (bezüglich Q), wenn keine Gerade g in A mit der Richtung $[v]$ die Quadrik Q in genau zwei verschiedenen Punkten schneidet. Gibt es eine Gerade g mit der Richtung $[v]$, die Q in genau zwei verschiedenen Punkten schneidet, so hat v Nichtausnahmerichtung.*

Bemerkung.

1. Liegt Q in einem Unterraum L und liegt v nicht in der Richtung von L, so hat v Ausnahmerichtung.

2. Ist g eine Gerade in A mit der Richtung $[v]$ und hat v Ausnahmerichtung (Nichtausnahmerichtung), so sagt man auch, daß g Ausnahmerichtung (Nichtausnahmerichtung) hat.

Beispiel. Sei A die reelle affine Ebene. Ist Q eine Ellipse, so hat jeder Vektor $v \neq \mathcal{O}$ Nichtausnahmerichtung. Besteht Q aber aus zwei sich schneidenden Geraden g und h, so hat $v \neq \mathcal{O}$ genau dann Nichtausnahmerichtung, wenn v nicht in der Richtung von g oder h liegt.

Satz 4.15 *Sei A ein affiner Raum mit der Richtung V und Q eine Quadrik in A, die in keiner Hyperebene liegt. Bezüglich eines affinen Koordinatensystems werde Q durch die Gleichung $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$ beschrieben. Ein vom Nullvektor verschiedener Vektor aus V hat genau dann Nichtausnahmerichtung, wenn $vBv^t \neq 0$ für den zugehörigen Koordinatenvektor $v \in K^n$ gilt.*

Beweis. Sei Q nicht leer und P ein beliebiger Punkt von Q mit dem affinen Koordinatenvektor $p \in K^n$. Wir untersuchen die Geraden g_P mit der Koordinatendarstellung $g_P : x = p + \lambda v$ und müssen beweisen, daß es genau dann einen Punkt P gibt, für den g_P und Q zwei verschiedene Schnittpunkte haben, wenn $vBv^t \neq 0$ gilt. Wie im Beweis von Satz 4.13 gezeigt wurde, ist die Anzahl der Schnittpunkte von g_P und Q gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$\text{(S)} \qquad \lambda^2 vBv^t + 2\lambda(pB + \mathfrak{b})v^t + pBp^t + 2\mathfrak{b}p^t + b = 0.$$

Wegen $P \in Q$ gilt $pBp^t + 2\mathfrak{b}p^t + b = 0$. Also müssen wir zeigen, daß

$$\lambda^2 vBv^t + 2\lambda(pB + \mathfrak{b})v^t = 0$$

genau dann zwei verschiedene Lösungen haben kann, wenn $vBv^t \neq 0$ gilt. Ist $vBv^t = 0$, so hat die Gleichung für jedes $P \in Q$ entweder genau eine Lösung oder genau so viele, wie K Elemente hat, auf jeden Fall nicht genau zwei verschiedene. Sei nun $vBv^t \neq 0$, also $vB \neq \mathcal{O}$. Dann ist $vBx^t = -v\mathfrak{b}^t$ die beschreibende Gleichung einer Hyperebene von A. Da Q in keiner Hyperebene von A liegt, gibt es einen Punkt $P \in Q$ mit $vBp^t \neq -v\mathfrak{b}^t$, also $pBv^t + \mathfrak{b}v^t \neq 0$. Das bedeutet aber gerade, daß die obige Gleichung für λ genau zwei verschiedene Lösungen hat, d.h., die Gerade g_P hat die vorgegebene Richtung und genau zwei verschiedene Schnittpunkte mit Q.

□

Bemerkung.

1. Ist Q wie in Satz 4.15, aber koordinatenfrei durch $Q = \{X \mid q(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) + 2f(\overrightarrow{\mathcal{O}X}) + b = 0\}$ gegeben, so hat der Vektor $v \in V, v \neq \mathcal{O}$ genau dann Nichtausnahmerichtung, wenn $q(v) \neq 0$ gilt.

2. Ist Q wie in Satz 4.15 und $P \in Q$ mit dem Koordinatenvektor $p \in K^n$, so liegt die Gerade g mit der Darstellung $g : x = p + \lambda v$ genau dann ganz in Q, wenn $vBv^t = 0$ und $(pB + \mathfrak{b})v^t = 0$. Geraden, die ganz in Q liegen, heißen Erzeugende von Q. Im 3-dimensionalen reellen affinen Raum haben zum Beispiel die Zylinder Erzeugende. Durch jeden Punkt eines einschaligen Hyperboloids gehen genau zwei Erzeugende. Dasselbe gilt für das hyperbolische Paraboloid.

3. Ist S eine Spitze von Q und P ein von S verschiedener Punkt in Q, so ist die Verbindungsgerade SP eine Erzeugende.

4. Hat g Nichtausnahmerichtung und schneidet g die Quadrik Q in nur einem Punkt, so drückt sich das in der Schnittgleichung (S) dadurch aus, daß es nicht zwei verschiedene, sondern eine doppelte Lösung gibt. Man sagt dann auch, daß P ein doppelter Schnittpunkt ist. Doppelte Schnittpunkte werden i.a. wie zwei verschiedene Punkte behandelt; insbesondere definiert man dann auch ihren Mittelpunkt, der dann P selbst ist.

Definition 4.16 *Sei A ein affiner Raum und Q eine Quadrik in A. Ist P ein Punkt von Q und g eine Gerade durch P, so heißt g Tangente an Q durch P, wenn entweder $g \cap Q = \{P\}$ und g Nichtausnahmerichtung hat oder g in Q liegt und g Ausnahmerichtung hat.*

Bemerkung. Hat die Tangente g an Q durch P Nichtausnahmerichtung, so ist P doppelter Schnittpunkt von g mit Q. Man sagt dann auch, daß g die Quadrik Q in P berührt.

Wir untersuchen nun die Koordinatendarstellungen der Tangenten an der Quadrik Q durch P, wobei Q in keiner Hyperebene von A liegt. Bezüglich eines affinen Koordinatensystems sei Q durch die Gleichung $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$ gegeben, und g sei eine Gerade durch P mit $g : x = p + \lambda v$, wobei p der Koordinatenvektor von P ist. Für den Fall $g \cap Q = \{P\}$ und g hat Nichtausnahmerichtung ergibt sich die Bedingung

$$vBv^t \neq 0 \text{ und } (pB + \mathfrak{b})v^t = 0.$$

Im Falle $g \subseteq Q$ und g hat Ausnahmerichtung ist g Tangente, wenn

$$vBv^t = 0 \text{ und } (pB + \mathfrak{b})v^t = 0.$$

Insgesamt ergibt sich also:

> Die Gerade $g : x = p + \lambda v$ ist genau dann Tangente an Q durch $P \in Q$, wenn $(pB+\mathfrak{b})v^t = 0$, wobei p der entsprechende Koordinatenvektor von P ist.

Die Vereinigung aller Tangenten an Q durch P ist damit insbesondere ein affiner Unterraum von A, der mit $T_Q(P)$ bezeichnet wird und Tangentialraum von Q in P heißt. Da insbesondere P in $T_Q(P)$ liegt, ergibt sich:

> Beschreibende Gleichung des Tangentialraums $T_Q(P)$ von Q in P:
>
> $$(pB + \mathfrak{b})x^t = -\mathfrak{b}p^t - b.$$

Gilt $pB + \mathfrak{b} \neq \mathcal{O}$, so hat der Tangentialraum die Dimension $n - 1$. Gilt aber $pB + \mathfrak{b} = \mathcal{O}$, so folgt $T_Q(P) = A$. Wegen Satz 4.10 ist dieses genau dann der Fall, wenn P eine Spitze ist. Somit erhalten wir:

> Ist $P \in Q$ keine Spitze, so ist der Tangentialraum $T_Q(P)$ eine Hyperebene in A. Ist $P \in Q$ eine Spitze, so gilt $T_Q(P) = A$.

Beispiel. Wir betrachten in der reellen affinen Ebene die Quadrik Q, die bezüglich eines affinen Koordinatensystems durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ definiert ist. Q ist eine echte Mittelpunktsquadrik, die keine Spitzen hat. Es gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} = (0, 0), \quad b = -1.$$

Ist also P ein beliebiger Punkt auf Q mit dem Koordinatenvektor p, so hat die Tangente an Q durch P die beschreibende Gleichung

$$(p_1, p_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1, \text{ also } \; p_1x_1 + p_2x_2 = 1.$$

Satz 4.17 *Es sei A ein affiner Raum mit der Richtung V und Q eine Quadrik in A, die in keiner Hyperebene von A liegt. Hat der Vektor $v \in V, v \neq \mathcal{O}$ Nichtausnahmerichtung, so gibt es genau eine Hyperebene H_v von A mit folgender Eigenschaft: Ist g eine Gerade mit der Richtung $[v]$ und schneidet g die Quadrik Q in den beiden Punkten P und P', so liegt der Mittelpunkt von P und P' auf H_v. Ist Q bezüglich eines affinen Koordinatensystems durch die Gleichung $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$ gegeben und hat v den entsprechenden Koordinatenvektor $\tilde{v}$, so hat H_v die beschreibende Gleichung*

$$H_v : \tilde{v}Bx^t = -\mathfrak{b}\tilde{v}^t.$$

Beweis. Wir definieren $\mu(Q)$ als die Menge aller Punkte X von A, die als Mittelpunkt zweier Schnittpunkte von Q mit einer Geraden g mit der Richtung $[v]$ auftreten, und müssen zeigen, daß es genau eine Hyperebene von A gibt, die $\mu(Q)$ umfaßt. Da v Nichtausnahmerichtung hat, ist $\mu(Q)$ nicht leer. Zunächst gilt $Q \subseteq \mu(Q) + [v]$, denn ist $P \in Q$ und $g = P + [v]$, so schneidet g die Quadrik Q in P und einem weiteren Punkt P' (der als doppelter Schnittpunkt auch gleich P sein kann), und für den Mittelpunkt X von P, P' gilt

$$P = X - \frac{1}{2}\overrightarrow{PP'} \in X + [v] \subseteq \mu(Q) + [v].$$

Da v Nichtausnahmerichtung hat, gilt $\tilde{v}B \neq \mathcal{O}$, und $\tilde{v}Bx^t = -\mathfrak{b}\tilde{v}^t$ ist die beschreibende Gleichung einer Hyperebene H_v.
Behauptung: $\mu(Q) \subseteq H_v$: Sei $X \in \mu(Q)$ der Mittelpunkt von P und P', wobei P und P' die Schnittpunkte von Q mit einer Geraden g mit der Richtung $[v]$ sind. Es gilt $X = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PP'}$. Sind x, p und p' die Koordinatenvektoren der Punkte X, P und P', so gilt

$$x = p + \frac{1}{2}(-p + p') = \frac{1}{2}(p + p').$$

Zu zeigen ist $(xB + \mathfrak{b})\tilde{v}^t = 0$. Ist $X = P$, so ist P doppelter Schnittpunkt von g mit Q, also g Tangente an Q durch P, und es gilt $(pB + \mathfrak{b})\tilde{v}^t = 0$. Ist $X \neq P$, so folgt $P \neq P'$ und $v = k\,\overrightarrow{PP'}$ für ein $k \in K$, d.h. $\tilde{v} = k(p' - p)$. Wegen $P, P' \in Q$ gilt

$$\begin{gathered} p'Bp'^t - pBp^t + 2\mathfrak{b}p'^t - 2\mathfrak{b}p^t = 0, \text{ also} \\ \tfrac{1}{2}(p + p')B(p' - p)^t + \mathfrak{b}(p' - p)^t = 0, \text{ also} \\ k(\tfrac{1}{2}(p + p')B(p' - p)^t + \mathfrak{b}(p' - p)^t) = 0, \text{ also} \\ xB\tilde{v}^t + \mathfrak{b}\tilde{v}^t = 0. \end{gathered}$$

Zu zeigen bleibt, daß H_v die einzige Hyperebene von A ist, die $\mu(Q)$ umfaßt. Sei H eine weitere Hyperebene mit $\mu(Q) \subseteq H$, also $\mu(Q) \subseteq H_v \cap H$. Sind H und H_v verschieden, dann hat $H_v \cap H$ die Dimension $n-2$, wobei n die Dimension von A ist. Damit ist $(H_v \cap H) + [v]$ ein echter Unterraum von A, und es folgt der Widerspruch $Q \subseteq \mu(Q) + [v] \subseteq (H_v \cap H) + [v] \subset A$.
$\square$

Definition 4.18 *Es sei A ein affiner Raum mit der Richtung V und Q eine Quadrik in A, die in keiner Hyperebene von A liegt. Hat der Vektor $v \in V, v \neq \mathcal{O}$ Nichtausnahmerichtung, so heißt die in Satz 4.17 angegebene und eindeutig bestimmte Hyperebene H_v Diametralhyperebene von Q konjugiert zur Nichtausnahmerichtung v.*

Satz 4.19 *Es sei A ein n-dimensionaler affiner Raum über K mit $n \geq 2$ und der Richtung V sowie Q eine Quadrik in A, die in keiner Hyperebene von A liegt. Bezüglich eines affinen Koordinatensystems habe Q die beiden Darstellungen*

$$Q = \{X \mid xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0\} = \{X \mid xB'x^t + 2\mathfrak{b}'x^t + b' = 0\}.$$

Dann gibt es ein $c \in K, c \neq 0$ mit $B = cB', \mathfrak{b} = c\mathfrak{b}'$ und $b = cb'$.

Beweis. Ist v ein Vektor aus V, so bezeichnen wir im folgenden den zugehörigen Koordinatenvektor von v stets mit $\tilde{v}$. Sei $\mathcal{O}$ der Ursprung des Koordinatensystems und zunächst $\mathcal{O} \in Q$, aber $\mathcal{O}$ keine Spitze von Q, d.h., $T_Q(\mathcal{O}) \neq A$. Wir zeigen zunächst für alle $v, w \in V$:

$$\tilde{v}B\tilde{w}^t = 0 \Longleftrightarrow \tilde{v}B'\tilde{w}^t = 0.$$

Wegen Symmetrie reicht es aus, lediglich $'' \Longrightarrow''$ nachzuweisen. Wir können weiterhin annehmen, daß v und w nicht der Nullvektor sind. Sei nun $\tilde{v}B\tilde{w}^t = 0$. Hat v Nichtausnahmerichtung, so liegt wegen Satz 4.17 der Vektor w in der Richtung der Diametralhyperebene H_v von Q konjugiert zur Nichtausnahmerichtung v. Ebenfalls wegen Satz 4.17 folgt nun für die zweite Darstellung von Q die Gleichung $\tilde{v}B'\tilde{w}^t = 0$. Hat nun w Nichtausnahmerichtung, so folgt die Behauptung entsprechend. Haben aber v und w Ausnahmerichtung, so folgt mit $\tilde{v}B\tilde{w}^t = 0$ auch $(\tilde{v}+\tilde{w})B(\tilde{v}+\tilde{w})^t = 0$. Also gilt $v+w = \mathcal{O}$ oder $v+w$ hat Ausnahmerichtung. In beiden Fällen ist aber dann auch $(\tilde{v}+\tilde{w})B'(\tilde{v}+\tilde{w})^t = 0$, d.h. $\tilde{v}B'\tilde{w}^t = 0$.
Wegen der obigen Aussage und Aufgabe 5.18 gibt es nun ein $c \in K$ mit $B = cB'$. Da B nicht die Nullmatrix ist, ist $c \neq 0$. Zu zeigen bleibt $\mathfrak{b} = c\mathfrak{b}'$ und $b = cb'$. Wegen $\mathcal{O} \in Q$ gilt aber $b = b' = 0$, also $b = cb'$. Wir beweisen nun $\mathfrak{b} = c\mathfrak{b}'$. Da $\mathcal{O} \in Q$ keine Spitze ist, ist der Tangentialraum $T_Q(\mathcal{O})$ eine Hyperebene mit den beschreibenden Gleichungen

$$\mathfrak{b}x^t = 0 \text{ und } \mathfrak{b}'x^t = 0.$$

Somit gibt es ein $k \in K, k \neq 0$ mit $\mathfrak{b} = k\mathfrak{b}'$. Für alle $X \in Q$ ist also $xcB'x^t + 2k\mathfrak{b}'x^t + b = 0$ wegen $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$ und $xcB'x^t + 2c\mathfrak{b}'x^t + cb' = 0$ wegen $xB'x^t + 2\mathfrak{b}'x^t + b' = 0$, also $2(k-c)\mathfrak{b}'x^t = 0$. Da Q in keiner Hyperebene von A liegt, ist $c = k$.
Bis jetzt haben wir gezeigt, daß Satz 4.19 gilt, falls $\mathcal{O} \in Q$ und $\mathcal{O}$ keine Spitze ist. Sei nun $\mathcal{O}$ beliebig. Gilt $pB + \mathfrak{b} = \mathcal{O}$ für jeden Punkt $P \in Q$, wobei p der Koordinatenvektor von P ist, so liegt Q in einer Hyperebene. Also gilt $pB + \mathfrak{b} \neq \mathcal{O}$ für mindestens ein $P \in Q$, d.h., P ist keine Spitze. Wir wählen nun ein neues affines Koordinatensystem, das sich vom alten nur darin unterscheidet, daß nicht $\mathcal{O}$ sondern P der Ursprung ist. Während Q im alten System durch Gleichungen beschrieben wird, in denen $B, \mathfrak{b}$ und b bzw. $B', \mathfrak{b}'$ und b' vorkommen, wird Q im neuen System durch Gleichungen beschrieben, in denen $B, \mathfrak{b} + pB$ und $pBp^t + 2\mathfrak{b}p^t + b$ bzw. $B', \mathfrak{b}' + pB'$ und $pB'p^t + 2\mathfrak{b}'p^t + b'$ vorkommen. Da P ein Punkt von Q, aber keine Spitze ist, können wir die obigen Ergebnisse anwenden, d.h., es gibt ein $c \in K, c \neq 0$ mit $B = cB', \mathfrak{b} + pB = c(\mathfrak{b}' + pB')$ und $pBp^t + 2\mathfrak{b}p^t + b = c(pB'p^t + 2\mathfrak{b}'p^t + b')$. Es folgt $\mathfrak{b} = c\mathfrak{b}'$ und $b = cb'$, also die Behauptung.

□

Satz 4.20 (Trägheitssatz von Sylvester) *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und β eine symmetrische Bilinearform auf V. Hat β bezüglich zweier Basen von V die Darstellungen*

$$A_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad A'_\beta = \begin{pmatrix} a'_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a'_{nn} \end{pmatrix},$$

wobei A_β und A'_β Diagonalmatrizen sind, so ist bei beiden Matrizen die Anzahl der positiven (negativen) Diagonalelemente gleich.

Beweis. Sei A_β die Matrixdarstellung von β bezüglich der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V, und o.B.d.A. sei $a_{ii} > 0$ für $0 < i \leq r$ sowie $a_{ii} < 0$ für $r < i \leq s$. Dann gilt $a_{ii} = 0$ für $s < i \leq n$, und s ist der Rang von A_β. Wir definieren weiterhin $V_+ = [v_1, \ldots, v_r], V_- = [v_{r+1}, \ldots, v_s]$ und $V_0 = [v_{s+1}, \ldots, v_n]$. Ist A'_β die Matrixdarstellung von β bezüglich der Basis $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ von V, so definieren wir r' und s' sowie V'_+, V'_- und V'_0 entsprechend. Für alle $v \in V, v \neq \mathcal{O}$ gilt $\beta(v,v) > 0$, falls $v \in V_+$, sowie $\beta(v,v) < 0$, falls $v \in V_-$, und $\beta(v,v) = 0$, falls $v \in V_0$. Entsprechendes ergibt sich für V'_+, V'_- und V'_0. Somit folgt

$$V'_+ \cap (V_- + V_0) = \{\mathcal{O}\} \quad \text{und} \quad V'_- \cap (V_+ + V_0) = \{\mathcal{O}\},$$

also $\dim V'_+ \leq n - \dim V_- - \dim V_0 = r$ und $\dim V'_- \leq n - \dim V_+ - \dim V_0 = s - r$. Wir erhalten

$$s = \dim(V_+ + V_-) = \mathrm{Rg} A_\beta = \mathrm{Rg} A'_\beta = \dim(V'_+ + V'_-) \leq s,$$

also $r' = \dim V'_+ = r$ und $s' - r' = \dim V'_- = s - r$.

$\square$

Bemerkung.

1. In Satz 4.20 kann $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen angeordneten Körper ersetzt werden.

2. Sind r, s wie im obigen Beweis, so heißt r Trägheitsindex und $2r - s$ Signatur von β.

Satz 4.21 (Affine Klassifikation reeller Quadriken) *Im n-dimensionalen reellen affinen Raum ($n \geq 2$) kann jede nichtleere Quadrik durch genau eine der folgenden Gleichungen beschrieben werden (dabei ist ein geeignetes affines Koordinatensystem zu wählen):*

$$\begin{array}{ll} (1) & x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 = 0;\ 1 \leq k \leq m,\ 2k - m \geq 0, \\ (2) & x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 = 1;\ 1 \leq k \leq m, \\ (3) & x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 + 2x_{m+1} = 0;\ 1 \leq k \leq m,\ 2k - m \geq 0. \end{array}$$

Bemerkung.

1. Es werden auch Quadriken betrachtet, die in einer Hyperebene liegen.

2. Jede der obigen Gleichungen definiert auch tatsächlich eine nichtleere Quadrik.

Beweis von Satz 4.21. Sei Q eine nichtleere Quadrik in A. Da jede positive reelle Zahl in $\mathbb{R}$ ein Quadrat ist, liefert Satz 4.8, daß sich Q durch eine der obigen Gleichungen beschreiben läßt; insbesondere gilt dann $Q \neq A$. Zu zeigen bleibt also die Eindeutigkeit. Wird Q durch eine Gleichung vom Typ (2) oder Typ (3) beschrieben, so liegt Q in keiner Hyperebene (vgl. Aufgabe 5.30). Wird Q durch eine Gleichung vom Typ (1) beschrieben und gilt $m = k$, so ist Q offenbar ein $(n-k)$-dimensionaler Unterraum von A. Wir zeigen nun, daß im Falle $m > k$ die Quadrik Q in keiner Hyperebene liegt. Dazu reicht es aus, $n+1$ linear unabhängige Punkte anzugeben, die in Q liegen. Offenbar sind die n-Tupel

$$\begin{aligned}
&p_1 = e_1 + e_{k+1}, \ldots, p_k = e_k + e_{k+1}, p_{k+1} = -e_1 + e_{k+1},\\
&p_{k+2} = e_1 + e_{k+2}, \ldots, p_m = e_1 + e_m,\\
&p_{m+1} = e_{m+1}, \ldots, p_n = e_n
\end{aligned}$$

linear unabhängig. Ist $P_0 = \mathcal{O}$ sowie P_i der Punkt mit dem affinen Koordinatenvektor p_i $(i = 1, \ldots, n)$, so sind $P_0, P_1, \ldots, P_n$ linear unabhängig und liegen in Q, d.h., Q liegt in keiner Hyperebene.

Q werde nun bezüglich zweier affiner Koordinatensysteme durch die Gleichungen

$$xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0 \text{ und } x'B'x'^t + 2\mathfrak{b}'x'^t + b' = 0$$

beschrieben, wobei die Gleichungen von der Art sind, wie im Satz angegeben. Ist Q in einer Hyperebene enthalten, so ist Q ein affiner Unterraum. Hat dabei Q die Dimension $l < n$, so wird Q in beiden Fällen durch die Gleichung vom Typ (1) beschrieben, bei der $m = k$ und $n - k = l$ gilt. Sei also im folgenden Q in keiner Hyperebene enthalten. Dann sind beide Gleichungen vom Typ (1), falls Q eine Spitze hat, vom Typ (2), falls Q einen Mittelpunkt hat, der nicht in Q liegt, und vom Typ (3), falls Q keinen Mittelpunkt hat. Wir diskutieren nur den letzten Fall, die beiden anderen werden entsprechend behandelt. Bezüglich der beiden affinen Koordinatensysteme wird Q durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_m^2 + 2x_{m+1} = 0,\\
&x'^2_1 + \cdots + x'^2_{k'} - x'^2_{k'+1} - \cdots - x'^2_{m'} + 2x'_{m'+1} = 0
\end{aligned}$$

beschrieben. Ist die Transformation zwischen den Koordinatensystemen durch die Gleichung $x'^t = y^t + Tx^t$ gegeben, so wird Q im ungestrichenen System durch zwei Gleichungen beschrieben, wobei in der einen $B, \mathfrak{b}$ und b vorkommen und in der anderen $T^tB'T, yB'T + \mathfrak{b}'T$ und $yB'y^t + 2\mathfrak{b}'y^t + b'$. Wegen Satz 4.19 gibt es nun ein $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ mit $B = cT^tB'T = T^t(cB')T$. Damit haben B und cB', also auch B und B' denselben Rang, d.h. $m = m'$. Ist c positiv, so hat cB' insgesamt k' positive Diagonalelemente. Da B insgesamt k positive Diagonalelemente hat, folgt $k' = k$ wegen des Trägheitssatzes von Sylvester. Ist aber c negativ, so ergibt sich entsprechend $k' = m - k$. Wegen $2k - m \geq 0$ gilt $k \geq m - k = k'$ und entsprechend $k' \geq m' - k' = k$, also $k = k'$.

□

Bemerkung. Die Klassifikation der Quadriken aus Satz 4.21 gilt nicht nur für $K = \mathbb{R}$. Benutzt haben wir nur, daß $\mathbb{R}$ angeordnet ist und jedes positive Element von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ein Quadrat ist. Körper mit dieser Eigenschaft nennt man euklidisch.

5. Aufgaben

A 5.1 Gegeben ist ein affiner Raum A über einem Körper K mit mindestens 3 Elementen. Zeigen Sie, daß eine Teilmenge L von A genau dann ein affiner Unterraum von A ist, wenn L mit je zwei verschiedenen Punkten auch deren Verbindungsgerade enthält. Zeigen Sie an einem Beispiel, daß man auf die Voraussetzung $|K| > 2$ nicht verzichten kann.

A 5.2 Skizzieren Sie die affine Ebene über $\mathbb{Z}_3$ und kennzeichnen Sie alle Geraden.

A 5.3 Wieviele Geraden enthält ein n-dimensionaler affiner Raum über einem endlichen Körper K mit q Elementen?

A 5.4 In einem affinen Raum A über dem Körper K sind die vier Punkte P, Q, R, S gegeben. Das Viereck $PQRS$ heißt Parallelogramm, wenn $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$. Zeigen Sie für den Fall $\chi(K) \neq 2$:
a) $PQRS$ ist ein Parallelogramm, wenn die Diagonalen gleiche Mittelpunkte haben.
b) Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks bilden ein Parallelogramm.

A 5.5 Gegeben sind die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ eines affinen Raums, so daß $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_n}$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, daß dann sogar für jedes $i = 1, \ldots, n$ die Vektoren $\overrightarrow{P_iP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_n}$ linear unabhängig sind.

A 5.6 Im 4-dimensionalen affinen Raum A sind bezüglich eines affinen Koordinatensystems die Punkte $P_1(1, -1, 0, 1), P_2(1, 1, -1, 0), P_3(0, 0, 1, -1)$ und $P_4(0, -1, -1, 1)$ gegeben. L sei der von ihnen aufgespannte Unterraum. Zeigen Sie, daß L die Dimension 3 hat und weisen Sie nach, daß $P(3, 2, -2, 1)$ in L liegt. Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten von P bezüglich P_1, P_2, P_3, P_4.

A 5.7 Beweisen Sie den *Strahlensatz*: Gegeben sind in einem affinen Raum ein Punkt Z und zwei verschiedene Geraden g und h durch Z sowie vier weitere verschiedene und von Z verschiedene Punkte $P_1, P_2 \in g$, $Q_1, Q_2 \in h$. Die Gerade durch P_1 und Q_1 ist genau dann parallel zur Geraden durch P_2 und Q_2, wenn $\mathrm{TV}(Z, P_2; P_1) = \mathrm{TV}(Z, Q_2; Q_1)$.

A 5.8 Beweisen Sie den Satz von *Pappos-Pascal*: Gegeben sind in einem affinen Raum ein Punkt Z und zwei verschiedene Geraden g und h durch Z sowie sechs weitere verschiedene und von Z verschiedene Punkte $P_1, P_2, P_3 \in g$, $Q_1, Q_2, Q_3 \in h$. Ist die Gerade durch P_1 und Q_2 parallel zur Geraden durch P_2 und Q_1 und die Gerade durch P_2 und Q_3 parallel zur Geraden durch P_3 und Q_2, dann ist die Gerade durch P_1 und Q_3 parallel zur Geraden durch P_3 und Q_1. (Fertigen Sie eine Skizze an!)

A 5.9 Beweisen Sie den "kleinen" Satz von *Pappos-Pascal*, der sich vom Satz von *Pappos-Pascal* dadurch unterscheidet, daß die Geraden g und h parallel (und verschieden) sind. (Fertigen Sie eine Skizze an!)

A 5.10 Im 4-dimensionalen reellen affinen Raum A sind bzgl. eines affinen Koordinatensystems die Punkte $P_1(1,0,0,0)$, $P_2(4,2,-1,0)$, $P_3(2,0,0,-1)$, $Q_1(0,0,1,0)$, $Q_2(1,1,1,0)$, $Q_3(1,0,1,1)$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Punkte P_1, P_2, P_3 bzw. Q_1, Q_2, Q_3 jeweils eine Ebene aufspannen und daß sich diese Ebenen in genau einem Punkt schneiden. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes.

A 5.11 Im 2-dimensionalen reellen affinen Raum A sind bezüglich eines affinen Koordinatensystems die Punkte $P_1(0,-2), P_2(-1,0), \mathcal{O}'(-2,-1)$ und $X(-1,3)$ gegeben. Welche Koordinaten hat X bezüglich des Koordinatensystems $\{\mathcal{O}', \overrightarrow{\mathcal{O}'P_1}, \overrightarrow{\mathcal{O}'P_2}\}$? Fertigen Sie eine Skizze an.

A 5.12 Im 3-dimensionalen affinen Raum A über $\mathbb{Z}_5$ sind bezüglich eines affinen Koordinatensystems die Punkte $Z(1,4,1), P_1(2,1,4), P_2(3,3,2), P_3(4,0,0), Q_1(0,0,0)$ gegeben. Wählen Sie die Punkte Q_2, Q_3 so, daß die Voraussetzungen des Satzes von *Pappos-Pascal* erfüllt sind, und überprüfen Sie die Behauptung des Satzes an diesem Beispiel.

A 5.13 In einem 4-dimensionalen affinen Raum A sind die Unterräume E und H mit $\dim E = 2$ und $\dim H = 3$ gegeben. Welche gegenseitige Lage können E und H einnehmen? Sind E und H notwendig parallel, wenn $E \cap H = \emptyset$? Welche Dimensionen sind für den Schnitt $E \cap H$ und die Verbindung $E + H$ möglich, welche nicht?

A 5.14 In der reellen affinen Ebene sind bezüglich eines affinen Koordinatensystems die Punkte $P_1(0,0)$, $P_2(1,-1), P_3(2,-1), Q_1(-2,-2), Q_2(9,7)$ und $Q_3(16,13)$ gegeben. Zeigen Sie, daß die affine Abbildung ψ mit $\psi(P_1) = Q_1, \psi(P_2) = Q_2, \psi(P_3) = Q_3$ bijektiv ist, und geben Sie die Koordinatendarstellung von ψ und ψ^{-1} an.

A 5.15 Bezüglich eines affinen Koordinatensystems habe die affine Abbildung $\psi : A \longrightarrow A$ die Koordinatendarstellung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß ψ zwei Scharen von parallelen Fixgeraden hat und daß sich die von ihnen aufgespannten Ebenen in einer Fixpunktgeraden schneiden.

A 5.16 Zeigen Sie, daß die Menge aller Fixpunkte einer affinen Abbildung $\psi : A \longrightarrow A$ ein affiner Unterraum von A ist.

A 5.17 Zeigen Sie, daß eine Affinität $\psi : A \longrightarrow A$ genau dann eine Dilatation ist, wenn für jede Gerade g das Bild $\psi(g)$ eine zu g parallele Gerade ist.

A 5.18 Gegeben ist ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum V, wobei K eine Charakteristik $\neq 2$ hat. Zeigen Sie, daß für zwei symmetrische Bilinearformen $\beta, \beta' : V \times V \longrightarrow K$ folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Für alle $v, w \in V$ gilt: $\beta(v,w) = 0 \Longleftrightarrow \beta'(v,w) = 0$.
ii) Es gibt ein $c \in K, c \neq 0$, mit $\beta = c \cdot \beta'$.

A 5.19 Ist V ein K-Vektorraum mit $\chi(K) \neq 2$ und $\beta : V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform, so heißt $\mathrm{Rad}\beta = \{v \in V \mid \forall w \in V : \beta(v, w) = 0\}$ Radikal von β. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Rad}\beta$ ein Unterraum von V ist, und berechnen Sie das Radikal für $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\beta(v, w) = vBw^t$ und

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

A 5.20 Gegeben ist die Abbildung $q : \mathbb{Z}_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_5, (x_1, x_2) \longmapsto x_1^3 x_2^3$.

i) Zeigen Sie, daß $q(c \cdot v) = c^2 \cdot q(v)$ für alle $c \in \mathbb{Z}_5$ und $v \in \mathbb{Z}_5^2$ gilt.
ii) Zeigen Sie, daß es keine symmetrische Bilinearform $\beta : \mathbb{Z}_5^2 \times \mathbb{Z}_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ mit $q_\beta = q$ gibt.

A 5.21 Zeigen Sie, daß die beiden rationalen Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -5 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ kongruent sind, aber nicht über $\mathbb{Q}$.

A 5.22 Es sei Q eine Quadrik des affinen Raums A und L ein Unterraum von A. Zeigen Sie, daß $Q \cap L$ ein affiner Unterraum von A ist oder eine Quadrik in L. Geben Sie sinnvolle Beispiele an.

A 5.23 Im 3-dimensionalen affinen Raum über $\mathbb{R}$ ist die Quadrik Q bezüglich eines affinen Koordinatensystems durch $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$ gegeben. Beschreiben Sie Q durch eine Gleichung in Normalform und geben Sie die zugehörige Koordinatentransformation an.

A 5.24 Sei A ein mindestens 2-dimensionaler affiner Raum über einem Körper mit der Charakteristik $\neq 2$. Zeigen Sie, daß für jede Quadrik Q von A, die in keiner Hyperebene liegt, folgendes gilt: Ist M ein Mittelpunkt von Q, so ist $M+$ $\mathrm{Rad}\beta$ die Menge aller Mittelpunkte von Q. Dabei ist β eine zu Q gehörende Bilinearform.

A 5.25 Sei A ein mindestens 2-dimensionaler affiner Raum über einem Körper K mit $\chi(K) \neq 2$. Die Quadrik Q in A liege in keiner Hyperebene und habe bzgl. eines affinen Koordinatensystems mit dem Ursprung $\mathcal{O}$ die Gleichung $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$. Zeigen Sie:
i) $\mathcal{O}$ ist genau dann ein Mittelpunkt von Q, wenn $\mathfrak{b} = (0, \ldots, 0)$.
ii) $\mathcal{O}$ ist genau dann eine Spitze von Q, wenn $\mathfrak{b} = (0, \ldots, 0)$ und $b = 0$.

A 5.26 Sei A ein mindestens 2-dimensionaler affiner Raum über einem Körper mit der Charakteristik $\neq 2$. Zeigen Sie, daß für jede Quadrik Q von A, die in keiner Hyperebene liegt, folgendes gilt:

i) Ist S eine Spitze von Q, so ist $S + \mathrm{Rad}\beta$ die Menge aller Spitzen von Q.

Dabei ist β eine zu Q gehörende Bilinearform.

ii) Ein Mittelpunkt M von Q ist genau dann eine Spitze von Q, wenn $M \in Q$.

A 5.27 In der reellen affinen Ebene ist bezüglich des affinen Koordinatensystems $\{O, a_1, a_2\}$ die Quadrik Q durch die Gleichung $5x_1^2 + 13x_2^2 + 16x_1x_2 + 2x_2 + 3 = 0$. gegeben.
i) Zeigen Sie, daß Q in keiner Hyperebene liegt und genau einen Mittelpunkt M besitzt. Ist M eine Spitze?
ii) Berechnen Sie den Schnitt von Q mit der Geraden $g = P + [v]$ wobei $P = P(11, -6)$ und $v = 2a_1 - a_2$ gelten.
iii) Berechnen Sie die Diametralhyperebene von Q konjugiert zur Nichtausnahmerichtung v.
iv) Wählen Sie ein neues affines Koordinatensystem mit M als Ursprung und den Koordinatenachsen parallel zu g und der Diametralhyperebene konjugiert zu v (vgl. iii)). Durch welche Gleichung wird hier Q beschrieben?

A 5.28 Zeigen Sie, daß in einem einschaligen Hyperboloid des reellen 3-dimensionalen Raums durch jeden Punkt genau zwei Erzeugende gehen. Fertigen Sie eine Skizze an.

A 5.29 Zeigen Sie, daß in einem hyperbolischen Paraboloid des reellen 3-dimensionalen affinen Raums durch jeden Punkt genau zwei Erzeugende gehen. Fertigen Sie eine Skizze an.

A 5.30 Zeigen Sie, daß die reellen Mittelpunktsquadriken und parabolischen Quadriken in keiner Hyperebene liegen. (Hinweis: Betrachten Sie die entsprechenden Normalformgleichungen der Quadriken.)

A 5.31 Kennzeichnen Sie die verschiedenen, d.h. nichtaffingleichen nichtleeren Quadriken des reellen 3-dimensionalen affinen Raums mit Hilfe ihrer affinen Eigenschaften.

A 5.32 Berechnen Sie die Anzahl der "verschiedenen" nichtleeren Quadriken des n-dimensionalen reellen affinen Raums.

A 5.33 Sei A ein mindestens 2-dimensionaler affiner Raum über einem Körper mit der Charakteristik $\neq 2$ und Q eine nichtleere Quadrik in A, die in keiner Hyperebene liegt. Ist M ein Mittelpunkt von Q, so heißt

$$A_Q = \{M + v \mid v = \mathcal{O} \text{ oder } v \text{ hat Ausnahmerichtung}\}$$

Asymptotenkegel von Q. Zeigen Sie, daß A_Q unabhängig vom gewählten Mittelpunkt M und selbst eine Quadrik ist. Berechnen Sie den Asymptotenkegel des ein- bzw. zweischaligen Hyperboloids, das im 3-dimensionalen reellen affinen Raum bezüglich einer Gleichung in Normalform gegeben ist. Fertigen Sie eine Skizze an.

A 5.34 Im 3-dimensionalen reellen affinen Raum sei bezüglich eines affinen Koordinatensystems die Quadrik Q durch die Gleichung $x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 10x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 23 = 0$ gegeben.
1) Berechnen Sie die affine Normalformgleichung von Q und geben Sie die zugehörige Koordinatentransformation an. Skizzieren Sie Q im neuen Koordinatensystem.
2) Zeigen Sie, daß durch jeden Punkt von Q genau eine Erzeugende geht.
3) Berechnen Sie die Koordinatendarstellung des Asymptotenkegels bezüglich des alten und des neuen Koordinatensystems.
4) Berechnen Sie die Koordinatendarstellung des Tangentialraums von Q in $P(-5, 2, -1)$ bezüglich des alten und des neuen Koordinatensystems.

KAPITEL 8

Euklidische Geometrie

1. Euklidische Räume und Isometrien

Definition 1.1 *Ein n-dimensionaler affiner Raum A über $\mathbb{R}$ mit der Richtung V heißt n-dimensionaler euklidischer Raum, wenn V ein euklidischer Vektorraum ist.*

Bemerkung.

1. Da auf jedem n-dimensionalen reellen Vektorraum ein Skalarprodukt definiert werden kann, ist demnach jeder reelle affine Raum ein euklidischer Raum. Somit liefert obige Definition keinen wirklich neuen Begriff. Spricht man allerdings von einem euklidischen Raum, so meint man damit, daß in der Richtung V ein bestimmtes Skalarprodukt fest gewählt ist, das i.a. mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet wird. Ein reeller affiner Raum kann somit bezüglich verschiedener Skalarprodukte verschiedene euklidische Räume darstellen.

2. Jeder affine Unterraum L eines euklidischen Raums A ist selbst ein euklidischer Raum. Dabei wird in der Richtung U von L das Skalarprodukt betrachtet, das sich als Einschränkung des Skalarproduktes von V auf U ergibt.

3. Ist E ein euklidischer Raum, so definiert man

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},\ (P, Q) \longmapsto {}_{+}\sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle} = \| \overrightarrow{PQ} \|.$$

Für alle $P, Q, R \in E$ gilt offenbar:

$$d(P, Q) \geq 0 \text{ und } d(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q.$$
$$d(P, Q) = d(Q, P).$$
$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q).$$

d ist damit eine Metrik auf E, d.h., E ist bezüglich d ein metrischer Raum. Man nennt $d(P, Q)$ den Abstand von P und Q. Die Metrik d ist translationsinvariant, d.h., ist $\psi : E \longrightarrow E$ eine Translation, so gilt $d(P, Q) = d(\psi(P), \psi(Q))$ für alle $P, Q \in E$.

Definition 1.2 *Ist E ein euklidischer Raum mit der Richtung V und $\{\mathcal{O}, a_1, \dots, a_n\}$ ein affines Koordinatensystem von E, so heißt $\{\mathcal{O}, a_1, \dots, a_n\}$ kartesisches Koordinatensystem, wenn $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Orthonormalbasis von V ist.*

Ist in einem euklidischen Raum E ein affines Koordinatensystem $\{\mathcal{O}, a_1, \dots, a_n\}$ gegeben und haben die Punkte X und Y diesbezüglich die affinen Koordinatenvektoren x und y, so ist $y - x$ der Koordinatenvektor von $\overrightarrow{XY}$ bezüglich $\{a_1, \dots, a_n\}$, und es folgt

$$d^2(X,Y) = \| \overrightarrow{XY} \|^2 = \langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle = (y - x) \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \dots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix} (y - x)^t.$$

Ist $\{\mathcal{O}, a_1, \dots, a_n\}$ sogar ein kartesisches Koordinatensystem, so folgt

$$d(X,Y) = _+\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2},$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Winkel, Lote und Volumen: Im folgenden sei E ein euklidischer Raum der Dimension n und der Richtung V.

1. Sind P, Q, R Punkte aus E mit $P \neq Q, R$, so definiert man

   $$\sphericalangle(P; Q, R) := \arccos \frac{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle}{\| \overrightarrow{PQ} \| \cdot \| \overrightarrow{PR} \|} \in [0, \pi].$$

   Man nennt $\sphericalangle(P; Q, R)$ Winkel zwischen den Geraden PQ und PR. Er ist ebenfalls translationsinvariant.

2. Sind L_1 und L_2 zwei affine Unterräume von E mit den Richtungen U_1 und U_2, so heißen L_1 und L_2 orthogonal, wenn jeder Vektor aus U_1 senkrecht auf jedem Vektor von U_2 steht. Ist L ein affiner Unterraum von E der Dimension m und P ein beliebiger Punkt aus E, so gibt es genau einen affinen Unterraum der Dimension $n - m$, der P enthält und orthogonal zu L ist; er heißt Lot von P auf L. Ist U die Richtung von L, so läßt sich das Lot von P auf L schreiben als $P + U^\perp$, wobei $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U in V ist, d.h. $U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$.

   $n = 2$: Das Lot eines Punktes P auf eine Gerade g ist eine Gerade h, die durch P geht und senkrecht zu g ist. Ist zum Beispiel $P_1P_2P_3$ ein nichtentartetes Dreieck in einer euklidischen Ebene, d.h., sind P_1, P_2 und P_3 linear unabhängig, so heißt das Lot h_i von P_i auf die Gerade P_jP_k (i, j, k paarweise verschieden) Höhe des Dreiecks. So besagt zum Beispiel der *Höhensatz*, daß sich die drei Höhen eines nichtentarteten Dreiecks in einem Punkt schneiden.

3. Ist H eine Hyperebene in E und P ein Punkt von E, dann ist das Lot von P auf H eine Gerade g. Den Schnittpunkt P' von g mit H nennt man Lotfußpunkt von P auf H, und $d(P, H) := d(P, P')$ heißt Abstand von P zu H. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems habe H die beschreibende Gleichung

   $$H : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0, \quad (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Setzt man $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und berücksichtigt weiterhin, daß $ax^t = \langle a, x\rangle$ gilt, so läßt sich H auch in der Form

$$H : \langle a, x\rangle + a_0 = 0, \quad a \neq \mathcal{O}$$

schreiben. Man kann weiterhin $a_0 \geq 0$ annehmen. Wird obige Gleichung nun durch $\|a\|$ dividiert und $n := \frac{1}{\|a\|}a$ gesetzt, so erhalten wir die

Hessesche Normalform der Hyperebene $H : \langle n, x\rangle + d = 0.$

Dabei ist $d \geq 0$, und n heißt Normalenvektor (in Koordinatendarstellung) der Hyperebene H. Er hat die Länge 1 und ist orthogonal zur Richtung von H.
Ist in einem euklidischen Raum eine Hyperebene in Hessescher Normalform gegeben, so läßt sich der Abstand eines beliebigen Punktes P zu H leicht berechnen. Dazu sei p der Koordinatenvektor von P und p' der Koordinatenvektor des Lotfußpunktes P' von P auf H. Das Lot g von P auf H hat die Parameterdarstellung $g : x = p + \lambda n$. Wir berechnen nun λ so, daß $p' = p + \lambda n$ gilt, also

$$\langle n, p + \lambda n\rangle + d = 0.$$

Hieraus ergibt sich $\langle n, p\rangle + \lambda + d = 0$, also $\lambda = -\langle n, p\rangle - d$, d.h.

$$d(P, H) = d(P, P') = \|p' - p\| = \|\lambda n\| = |\lambda| = |\langle n, p\rangle + d|.$$

Hat also die Hyperebene H bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Hessesche Normalform $H : \langle n, x\rangle + d = 0$ und ist p der Koordinatenvektor des Punktes P, so ist $|\langle n, p\rangle + d|$ der Abstand von P zu H. Insbesondere ist d der Abstand von $\mathcal{O}$ zu H.

4. Zwei Geraden eines affinen Raumes heißen windschief, wenn sie sich nicht schneiden und auch nicht parallel sind. Wir zeigen nun:

   Sind g, h zwei windschiefe Geraden, so gibt es genau einen Punkt P auf g und genau einen Punkt Q auf h, so daß die Verbindungsgerade PQ orthogonal zu g und h ist.

   Beweis. Sei $g = X + [v]$ und $h = Y + [u]$, sowie $P = X + \lambda v$ ein Punkt von g und $Q = Y + \mu u$ ein Punkt von h. Dann gilt

$$Q = X + \overrightarrow{XY} + \mu u = P + \overrightarrow{PX} + \overrightarrow{XY} + \mu u = P - \lambda v + \overrightarrow{XY} + \mu u, \text{ also}$$

$$\overrightarrow{PQ} = -\lambda v + \mu u + \overrightarrow{XY}.$$

   Somit gilt $\langle \overrightarrow{PQ}, v\rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, u\rangle = 0$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} -\lambda\langle v, v\rangle + \mu\langle u, v\rangle &= -\langle \overrightarrow{XY}, v\rangle, \\ -\lambda\langle v, u\rangle + \mu\langle u, u\rangle &= -\langle \overrightarrow{XY}, u\rangle. \end{aligned}$$

   Da g und h nicht parallel sind, folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\langle v, v\rangle\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle^2 \neq 0,$$

d.h., λ und μ sind eindeutig bestimmt.

Man definiert nun den Abstand $d(g,h)$ der windschiefen Geraden g und h durch

$$d(g,h) := d(P,Q) \text{ wobei } P \in g, Q \in h \text{ und } PQ \text{ orthogonal zu } g \text{ und } h \text{ ist.}$$

Beispiel. In einem 4-dimensionalen euklidischen Raum sind bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Geraden g und h durch die Darstellungen

$$g : x = (1,0,-1,0) + \lambda(-1,-1,0,1), \; h : x = (-2,1,0,1) + \mu(0,1,1,1)$$

gegeben. Mit den Bezeichnungen von oben ist $(-3,1,1,1)$ der Koordinatenvektor von $\overrightarrow{XY}$, und es gilt $\langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle = 3, \langle u,v\rangle = 0$ sowie $\langle \overrightarrow{XY}, v\rangle = \langle \overrightarrow{XY}, u\rangle = 3$. Das obige Gleichungssystem lautet dann

$$-3\lambda = -3, \; 3\mu = -3, \text{ also } \lambda = 1, \; \mu = -1.$$

Der Abstand von g und h ist also definiert als der Abstand von $P(0,-1,-1,1)$ und $Q(-2,0,-1,0)$, d.h.

$$d(g,h) = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

5. Sind $v_1, \ldots, v_s \in V$ linear unabhängig, so heißt

$$P(v_1, \ldots, v_s) := \{k_1 v_1 + \cdots + k_s v_s \mid 0 \le k_1, \ldots, k_s \le 1\}$$

s-Parallelotop mit den Kantenvektoren $\{v_1, \ldots, v_s\}$. Da die Matrix $(\langle v_i, v_j\rangle)$ die Matrixdarstellung des auf $[v_1, \ldots, v_s]$ eingeschränkten Skalarproduktes ist, folgt aus der positiven Definitheit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\begin{vmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \ldots & \langle v_1, v_s\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_s, v_1\rangle & \ldots & \langle v_s, v_s\rangle \end{vmatrix} > 0.$$

Definiert man

$$\Delta_s(v_1, \ldots, v_s) := \sqrt{\begin{vmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \ldots & \langle v_1, v_s\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_s, v_1\rangle & \ldots & \langle v_s, v_s\rangle \end{vmatrix}} > 0,$$

so heißt $\Delta_s(v_1, \ldots, v_s)$ s-dimensionales Volumen von $P(v_1, \ldots, v_s)$. Sind $P_0, P_1, \ldots, P_s$ linear unabhängige Punkte aus E, so ist

$$\Delta_s(P_0, P_1, \ldots, P_s) := \Delta_s(\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_s})$$

das s-dimensionale Volumen des von den $P_0, P_1, \ldots, P_s$ aufgespannten Parallelotops. Es ist translationsinvariant und unabhängig von der Reihenfolge der Punkte, d.h., für alle $i = 0, \ldots, s$ gilt

$$\Delta_s(P_0, P_1, \ldots, P_s) = \Delta_s(\overrightarrow{P_iP_0}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \overrightarrow{P_iP_s}).$$

Ist $\{e_1, \dots, e_s\}$ eine Orthonormalbasis von $[v_1, \dots, v_s]$ und

$$v_i = a_{1i}e_1 + \cdots + a_{si}e_s,\ a_{ji} \in \mathbb{R},$$

so gilt

$$\langle v_i, v_j \rangle = a_{1i}a_{1j} + \cdots + a_{si}a_{sj}$$

für alle $i, j = 1, \dots, s$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_s \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_s, v_1 \rangle & \dots & \langle v_s, v_s \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1s} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\Delta_s(v_1, \dots, v_s) = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{s1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1s} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix} \right|.$$

Definition 1.3 *Ist E ein euklidischer Raum, so heißt die Abbildung $\psi : E \longrightarrow E$ Isometrie, wenn $d(P, Q) = d(\psi(P), \psi(Q))$ für alle $P, Q \in E$ gilt.*

Beispiel. Hat E die Richtung V und ist $\psi : E \longrightarrow E$ eine affine Abbildung, so daß die zugehörige lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V$ orthogonal ist, dann ist ψ eine Isometrie, denn wegen Eigenschaft 1 nach Definition 2.1 aus Kapitel 6 gilt

$$d(\psi(P), \psi(Q)) = \| \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} \| = \|\varphi(\overrightarrow{PQ})\| = \| \overrightarrow{PQ} \| = d(P, Q).$$

Affinitäten, die Isometrien sind, heißen auch Kongruenzen.

Satz 1.4 *Ist E ein euklidischer Raum mit der Richtung V und $\psi : E \longrightarrow E$ eine Isometrie, dann ist ψ eine Affinität, deren zugehörige lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V$ orthogonal ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{O}$ in E fest gewählt. Wir definieren

$$\varphi : V \longrightarrow V,\ \overrightarrow{\mathcal{O}P} \longmapsto \overrightarrow{\psi(\mathcal{O})\psi(P)}$$

und zeigen zunächst für alle $v, w \in V$:

$$\|\varphi(v) - \varphi(w)\| = \|v - w\|.$$

Dazu sei $v = \overrightarrow{\mathcal{O}P}$ und $w = \overrightarrow{\mathcal{O}Q}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - \varphi(w)\| &= \|\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}P}) - \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}Q})\| = \| \overrightarrow{\psi(\mathcal{O})\psi(P)} - \overrightarrow{\psi(\mathcal{O})\psi(Q)} \| \\ &= \| \overrightarrow{\psi(Q)\psi(P)} \| = d(\psi(Q), \psi(P)) = d(P, Q) \\ &= \| \overrightarrow{QP} \| = \| \overrightarrow{Q\mathcal{O}} + \overrightarrow{\mathcal{O}P} \| \\ &= \|v - w\|. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ folgt insbesondere $\|\varphi(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$ und damit

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle &= \frac{1}{2}\{\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{\|\varphi(v)\|^2 + \|\varphi(w)\|^2 - \|\varphi(v) - \varphi(w)\|^2\} \\ &= \langle\varphi(v), \varphi(w)\rangle\end{aligned}$$

für alle $v, w \in V$. Wir zeigen nun, daß φ linear ist. Für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}&\langle\varphi(v+w) - \varphi(v) - \varphi(w), \varphi(v+w) - \varphi(v) - \varphi(w)\rangle = \\ &\qquad \langle\varphi(v+w), \varphi(v+w)\rangle - \langle\varphi(v+w), \varphi(v)\rangle - \cdots + \langle\varphi(w), \varphi(w)\rangle = \\ &\qquad \langle v+w, v+w\rangle - \langle v+w, v\rangle - \cdots + \langle w, w\rangle = \\ &\qquad \langle v+w-v-w, v+w-v-w\rangle = 0, \text{ also} \\ &\qquad \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\langle\varphi(\lambda v) - \lambda\varphi(v), \varphi(\lambda v) - \lambda\varphi(v)\rangle = \\ &\qquad \langle\varphi(\lambda v), \varphi(\lambda v)\rangle - \lambda\langle\varphi(\lambda v), \varphi(v)\rangle - \lambda\langle\varphi(v), \varphi(\lambda v)\rangle + \lambda^2\langle\varphi(v), \varphi(v)\rangle = \\ &\qquad \langle\lambda v, \lambda v\rangle - \lambda\langle\lambda v, v\rangle - \lambda\langle v, \lambda v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle = 0, \text{ also} \\ &\qquad \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v).\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir bis jetzt gezeigt, daß $\varphi : V \longrightarrow V$ eine orthogonale lineare Abbildung ist. Damit ist φ auch injektiv. Schließlich gilt für alle $P, Q \in E$

$$\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} = \overrightarrow{\psi(P)\psi(\mathcal{O})} + \overrightarrow{\psi(\mathcal{O})\psi(Q)} = -\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}P}) + \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}Q}) = \varphi(-\overrightarrow{\mathcal{O}P} + \overrightarrow{\mathcal{O}Q}) = \varphi(\overrightarrow{PQ}),$$

d.h., ψ ist eine affine Abbildung und $\varphi : V \longrightarrow V$ die zugehörige lineare Abbildung.

$\square$

Bemerkung.

1. Wegen Satz 1.4 ist jede Isometrie eines euklidischen Raums eine Kongruenz.

2. Ist $\{\mathcal{O}, a_1, \ldots, a_n\}$ ein kartesisches Koordinatensystem des euklidischen Raums E und $\psi : E \longrightarrow E$ eine Affinität mit der zugehörigen linearen Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V$ sowie

$$y^t = a^t + Ax^t$$

die entsprechende Koordinatendarstellung von ψ, dann ist ψ wegen Korollar 2.4 aus Kapitel 6 genau dann eine Isometrie (Kongruenz), wenn A eine orthogonale Matrix ist.

3. Eine Kongruenz eines euklidischen Raums setzt sich zusammen aus einer Translation und einem orthogonalen Endomorphismus (z.B. Drehung oder Spiegelung) der Richtung von E.

2. Quadriken

Ist E ein euklidischer Raum und Q eine nichtleere Quadrik in E, so kann Q wegen Satz 4.21 bezüglich eines geeigneten affinen Koordinatensystems durch eine Gleichung in affiner Normalform beschrieben werden. Im allgemeinen ist das Koordinatensystem jedoch nicht kartesisch. Es soll nun in diesem Abschnitt untersucht werden, welches die Normalformgleichungen der nichtleeren Quadriken sind, wenn das zugrunde liegende Koordinatensystem ein kartesisches Koordinatensystem ist, und wie ein solches Koordinatensystem berechnet werden kann.

Satz 2.1 (Metrische Hauptachsentransformation reeller Quadriken) *Jede nichtleere Quadrik Q eines n-dimensionalen euklidischen Raums kann bezüglich eines geeigneten kartesischen Koordinatensystems durch eine der folgenden Gleichungen beschrieben werden (dabei sind $a_1, \ldots, a_m$ positive reelle Zahlen):*

$$(1) \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_m^2}{a_m^2} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_m^2}{a_m^2} = 1,$$

$$(3) \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_m^2}{a_m^2} + 2x_{m+1} = 0.$$

Beweis. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems werde die Quadrik Q durch die Gleichung $xBx^t + 2\mathfrak{b}x^t + b = 0$ beschrieben. Wir kopieren nun im wesentlichen den Beweis von Satz 4.8 und berücksichtigen, daß die Transformationsmatrix T' orthogonal ist. Wegen Satz 1.12 aus Kapitel 6 ist dann das neue Koordinatensystem kartesisch.
Da B eine reelle symmetrische Matrix ist, gibt es wegen Satz 2.11 aus Kapitel 6 eine orthogonale Matrix T' so, daß $T'^t BT' = T'^{-1}BT'$ eine Diagonalmatrix ist. Wir können also gleich annehmen, daß B eine Diagonalmatrix ist und daß $b_{ii} > 0$ für $i \leq k$ und $b_{ii} = 0$ für $i > m$ sowie $b_{ii} < 0$ sonst gilt (um die letzte Bedingung zu erfüllen, müssen nur die Spalten von T' geeignet vertauscht werden). Ist nun $\mathfrak{b}$ eine Linearkombination der Zeilenvektoren von B, so gibt es ein $y' \in \mathbb{R}^n$ mit $y'B = -\mathfrak{b}$. Wählen wir ein Koordinatensystem mit der Transformationsgleichung $x = y' + x'$, so ist $\mathfrak{b}' = \mathcal{O}$ im neuen Koordinatensystem, d.h., Q wird hier durch die Gleichung

$$b_{11}{x'_1}^2 + \cdots + b_{mm}{x'_m}^2 + b' = 0$$

beschrieben. Ist $b' = 0$, so haben wir den Gleichungstyp (1). Ist $b' \neq 0$, so teilen wir durch $-b'$ und erhalten den Gleichungstyp (2), falls $b' < 0$; anderenfalls vertauschen wir die Spalten von T' so, daß in der Gleichung für Q bezüglich des neuen Systems die Vorzeichen der Koeffizienten wie gewünscht vorkommen.
Sei nun $\mathfrak{b}$ keine Linearkombination der Zeilenvektoren von B. Dann gibt es ein $y' \in \mathbb{R}^n$ mit $y'B + \mathfrak{b} = (0, \ldots, 0, b'_{m+1}, \ldots, b'_n)$ und $(b'_{m+1}, \ldots, b'_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Ist $\mu = \|(b'_{m+1}, \ldots, b'_n)\|$,

also $\mu = \sqrt{{b'}_{m+1}^2 + \cdots + {b'}_n^2}$, so gibt es eine orthogonale $(n-m, n-m)$-Matrix $\tilde{T}$ mit $(b'_{m+1}, \ldots, b'_n)\tilde{T} = (\mu, 0, \ldots, 0)$. Definieren wir

$$T' := \begin{pmatrix} E_m & \mathcal{O} \\ \mathcal{O}^t & \tilde{T} \end{pmatrix},$$

so erhalten wir die Transformation in ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q durch die Gleichung

$$b_{11}{x'_1}^2 + \cdots + b_{mm}{x'_m}^2 + 2\mu x'_{m+1} + b' = 0$$

beschrieben wird. Wir können also wieder annehmen, daß Q im ursprünglichen System durch

$$b_{11}x_1^2 + \cdots + b_{mm}x_m^2 + 2\mu x_{m+1} + b = 0$$

definiert ist. Wählen wir $y' = -\frac{b}{2\mu}e_{m+1}$ und $T' = E_n$, so wird Q im neuen kartesischen Koordinatensystem wie gewünscht durch

$$b_{11}{x'_1}^2 + \cdots + b_{mm}{x'_m}^2 + 2\mu x'_{m+1} = 0$$

beschrieben, also nach Division durch μ durch den Gleichungstyp (3).

□

Bemerkung.

1. Die im obigen Satz angegebenen Gleichungen werden auch euklidische Normalformen genannt.

2. Ist Q eine (echte) Mittelpunktsquadrik, so wird Q durch eine Gleichung vom Typ (2) beschrieben, und Q wird durch eine Gleichung vom Typ (3) beschrieben, wenn Q parabolisch ist, d.h., wenn Q keinen Mittelpunkt hat.

3. In den Fällen (1) und (3) kann wie in Satz 4.21 auch $k \geq m - k$ vorausgesetzt werden. Die Eindeutigkeit der Darstellung (bis auf die Reihenfolge der Summanden und einen gemeinsamen Faktor beim Typ (1)) folgt dann aus Satz 4.21, da die Koeffizienten der quadratischen Glieder die Eigenwerte jeder symmetrischen Matrix B sind, die bei einer Koordinatendarstellung von Q durch eine euklidische Normalform bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems auftritt.

4. Hat Q einen Mittelpunkt, so gelangt man zur euklidischen Normalform, indem man einen Mittelpunkt von Q zum Ursprung nimmt und die Matrix B einer kartesischen Koordinatendarstellung von Q durch eine orthogonale Matrix T' diagonalisiert.

5. Ist Q ein Ellipsoid, so heißen die Koordinatenachsen eines kartesischen Koordinatensystems, bezüglich dessen Q in euklidischer Normalform beschrieben wird, Hauptachsen von Q. Ihre Richtungsvektoren (in Koordinatendarstellung) sind Eigenvektoren der Matrix B. Sie sind orthogonal zueinander und bezüglich Q konjugierte Richtungen.

6. Deutet man die Transformation von einem kartesischen Koordinatensystem in ein anderes kartesisches Koordinatensystem als Kongruenz, so besagt Satz 2.1: *Jede nichtleere Quadrik eines euklidischen Raums E kann durch eine Kongruenz auf eine Quadrik abgebildet werden, die bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems durch eine euklidische Normalform gegeben ist.*

Beispiel. In einem 3-dimensionalen euklidischen Raum ist bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Quadrik Q durch folgende Gleichung gegeben

$$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 + 10x_1 - 20x_2 + 20x_3 + 21 = 0.$$

Somit ist

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathfrak{b} = (5, -10, 10), \ b = 21.$$

Für die erweiterte Matrix B_{erw} gilt dann

$$B_{erw} = \begin{pmatrix} 21 & 5 & -10 & 10 \\ 5 & 9 & 12 & 0 \\ -10 & 12 & 16 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{Rg}B = 1$ und $\mathrm{Rg}B_{erw} = 3$ ist Q eine parabolische Quadrik mit der affinen Normalformgleichung $x_1^2 + 2x_2 = 0$. Damit ist Q ein parabolischer Zylinder, und die euklidische Normalform lautet:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0.$$

Gesucht sind also a_1 und die entsprechende Koordinatentransformation, die das neue kartesische Koordinatensystem bestimmt.

Zuerst berechnen wir eine orthogonale $(3,3)$-Matrix T' so, daß T'^tBT' eine Diagonalmatrix ist. Dazu muß eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ berechnet werden, die aus Eigenvektoren von B besteht. Wegen $\chi_B(x) = -x^2(x-25)$ hat B den einfachen Eigenwert 25 und den doppelten Eigenwert 0. Zunächst ist $\frac{1}{5}(3,4,0)$ ein normierter Eigenvektor von B zum Eigenwert 25, und $(0,0,1)$, $\frac{1}{5}(4,-3,0)$ sind zwei normierte Eigenvektoren von B zum Eigenwert 0, die orthogonal sind. Wir definieren

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$BT' = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathfrak{b}T' = (-5, 10, 10),$$

und $\mathfrak{b}T'$ ist keine Linearkombination der Zeilenvektoren von BT'. Wir wählen nun $y' \in \mathbb{R}^3$ so, daß

$$y'BT' + \mathfrak{b}T' = (0, *, *)$$

gilt, zum Beispiel $y' = (-1, 1, 0)$. Betrachten wir die Koordinatentransformation, die durch $x^t = y'^t + T'x'^t$ gegeben ist, so wird Q durch die Gleichung

$$25x'^2_1 + 20x'_2 + 20x'_3 - 8 = 0$$

beschrieben, d.h. $\mathfrak{b}' = (0, 10, 10)$ und $b' = -8$. Wie im Beweis zu Satz 2.1 angegeben, wählen wir jetzt eine weitere Koordinatentransformation mit der Transformationsmatrix

$$T'' := \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O}^t & \tilde{T} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{T}$ orthogonal ist und

$$(10, 10)\tilde{T} = (\mu, 0)$$

gilt. Dabei ist $\mu = \|(10, 10)\| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$. Gleichwertig hiermit ist

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\tilde{T} = (1, 0).$$

Dazu ergänzen wir $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ durch $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ und setzen

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad T'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also eine Koordinatentransformation gemäß der Gleichung $x'^t = T''x''^t$, und Q ist dann durch

$$25x_1''^2 + 2 \cdot 10\sqrt{2}x_2'' - 8 = 0$$

gegeben, d.h. $\mathfrak{b}'' = (0, 10\sqrt{2}, 0)$ und $b'' = b' = -8$. Gemäß des Beweises von Satz 2.1 wählen wir nun

$$y''' = -(0, \frac{b''}{2\mu}, 0) = (0, \frac{\sqrt{2}}{5}, 0)$$

und erhalten schließlich die letzte Transformation mit der Gleichung

$$x''^t = y'''^t + x'''^t,$$

so daß Q letztendlich durch die Gleichung

$$25x_1'''^2 + 2 \cdot 10\sqrt{2}x_2''' = 0, \text{ also } \frac{x_1'''^2}{\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{5}}^2} + 2x_2''' = 0$$

beschrieben wird. Die gesamte Koordinatentransformation ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} \right),$$

also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -21 \\ 22 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix}.$$

3. Aufgaben

A 3.1 In der euklidischen Ebene ist ein nichtausgeartetes Dreieck gegeben. Zeigen Sie, daß sich die Höhen in einem Punkt schneiden.

A 3.2 In der euklidischen Ebene ist ein nichtausgeartetes Dreieck gegeben. Zeigen Sie, daß sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden.

A 3.3 In der euklidischen Ebene ist ein nichtausgeartetes Parallelogramm gegeben. Zeigen Sie, daß die Diagonalen genau dann orthogonal sind, wenn das Parallelogramm ein Rhombus ist, d.h., wenn alle Seiten gleich lang sind.

A 3.4 Im 3-dimensionalen euklidischen Raum sind bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Punkte $P_1(1,0,4), P_2(-1,2,0)$ und $P_3(6,1,2)$ gegeben. Berechnen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, die von P_1, P_2, P_3 aufgespannt wird. Welche der Punkte $Q_1(-3,-2,-1)$, $Q_2(1,1,3)$, $Q_3(2,2,4)$ liegen auf derselben Seite der Ebene E?

A 3.5 Im 3-dimensionalen euklidischen Raum sind bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Punkte $P_1(2,1,2), P_2(3,2,0)$ und $P_3(5,0,4)$ gegeben. Berechnen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, die von P_1, P_2, P_3 aufgespannt wird sowie das Lot von $P(2,2,1)$ auf E und den Lotfußpunkt. Welchen Abstand hat P von E?

A 3.6 Zeigen Sie: Sind g und h zwei windschiefe Geraden in einem euklidischen Raum, so gilt $d(g,h) = \min\{d(P,Q) \mid P \in g \text{ und } Q \in h\}$.

A 3.7 Im 3-dimensionalen euklidischen Raum sei die Quadrik Q bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems durch die Gleichung $-x_1^2 - 7x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 8x_2x_3 - 1 = 0$ beschrieben. Geben Sie eine Isometrie an, die Q auf eine Quadrik Q' in euklidischer Normalform abbildet. Zeigen Sie, daß es sogar eine Spiegelung an einer Ebene E gibt, die Q auf Q' abbildet, und berechnen Sie E.

A 3.8 Im 3-dimensionalen euklidischen Raum sei die Quadrik Q bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems durch die Gleichung $7x^2+4y^2-2z^2+20xy-4xz-16yz = 0$ beschrieben. Geben Sie eine Isometrie an, die Q auf eine Quadrik Q' in euklidischer Normalform abbildet. Zeigen Sie, daß es sogar eine Drehung gibt, die Q auf Q' abbildet, und berechnen Sie die zugehörige Drehachse. Geben Sie mindestens 2 von der Identität verschiedene Isometrien an, die Q auf sich selbst abbilden.

A 3.9 Gegeben ist eine Affinität $\psi : E \to E$ eines n-dimensionalen euklidischen Raums E. Zeigen Sie:

1) Es gibt ein $\rho \in \mathbb{R}^+$, so daß $d(\psi(P), \psi(Q)) \leq \rho \cdot d(P,Q)$ für alle $P, Q \in E$ gilt.
2) Es gibt ein $\rho \in \mathbb{R}^+$, so daß $d(\psi(P), \psi(Q)) \geq \rho \cdot d(P,Q)$ für alle $P, Q \in E$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie eine Koordinatendarstellung von ψ bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems.

KAPITEL 9

Projektive Geometrie

1. Projektive Räume und Dualität

Definition 1.1 *Ist V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum, so heißt die Menge $P(V)$ der eindimensionalen Unterräume von V der zu V gehörende projektive Raum. Die Elemente von $P(V)$ heißen Punkte von $P(V)$, und* $\dim P(V) := \dim_K V - 1 = n$ *heißt (projektive) Dimension von $P(V)$.*

Bemerkung. Ist $V = \{\mathcal{O}\}$ der Nullraum, so ist $P(V) = \emptyset$ leer und $\dim P(V) = -1$.

Definition 1.2 *Eine Teilmenge M des projektiven Raums $P(V)$ heißt (projektiver) Unterraum von $P(V)$, wenn es einen Unterraum U von V mit $P(U) = M$ gibt.*

Bemerkung.

1. Jeder Unterraum eines projektiven Raums ist selbst ein projektiver Raum.

2. Ist $P(V)$ ein n-dimensionaler projektiver Raum und $P(U)$ ein Unterraum von $P(V)$, so heißt $P(U)$ (projektive) Gerade in $P(V)$, wenn $\dim P(U) = 1$, also $\dim_K U = 2$, und (projektive) Ebene in $P(V)$, wenn $\dim P(U) = 2$, also $\dim_K U = 3$. Gilt $\dim P(U) = n-1$, also $\dim_K U = n$, so heißt $P(U)$ (projektive) Hyperebene in $P(V)$.

3. Ist $\{U_i | i \in I\}$ eine Menge von Unterräumen des Vektorraums V, so gilt $P(\cap_{i\in I} U_i) = \cap_{i\in I} P(U_i)$. Für Unterräume $U_1, \ldots, U_m$ von V heißt das also
$$P(U_1) \cap \cdots \cap P(U_m) = P(U_1 \cap \cdots \cap U_m).$$
Insbesondere ist der Durchschnitt von projektiven Unterräumen ein projektiver Unterraum.

4. Hat $P(V)$ die Dimension $n \geq 2$, so haben zwei Hyperebenen H_1 und H_2 einen nichtleeren Schnitt, denn gilt $H_1 = P(U_1)$ und $H_2 = P(U_2)$, so folgt $\dim U_1 \cap U_2 \geq n-1 \geq 1$, also $H_1 \cap H_2 = P(U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$. Insbesondere gilt: *In einer projektiven Ebene haben zwei Geraden g und h einen gemeinsamen Schnittpunkt.* Sind g und h verschieden, so ist dieser eindeutig bestimmt.

Definition 1.3 *Sind $P(U_i), i \in I$, Unterräume des projektiven Raums $P(V)$, so heißt der Durchschnitt aller projektiven Unterräume von $P(V)$, die jedes $P(U_i), i \in I$, umfassen, (projektive) Verbindung der $P(U_i)$, geschrieben $\sum_{i\in I} P(U_i)$.*

Bemerkung.

1. Wegen Bemerkung 3 nach Definition 1.2 ist $\sum_{i\in I} P(U_i)$ ein Unterraum von $P(V)$ und zwar der kleinste, der alle $P(U_i), i \in I$ enthält. Man sagt, daß $\sum_{i\in I} P(U_i)$ von den $P(U_i), i \in I$, aufgespannt wird.

2. Ist speziell $I = \{1, \dots, n\}$, so schreibt man $\sum_{i\in I} P(U_i) = P(U_1)+\cdots+P(U_n)$ oder auch $\sum_{i\in I} P(U_i) = P(U_1) \vee \cdots \vee P(U_n)$, und es gilt $P(U_1) \vee \cdots \vee P(U_n) = P(U_1 + \cdots + U_n)$.

3. Für Vektoren $v, w \in V$ mit $v, w \neq \mathcal{O}$ sind $[v]$ und $[w]$ Punkte des projektiven Raums $P(V)$; sie sind genau dann verschieden, wenn v und w linear unabhängig sind. Statt $\{[v]\} \vee \{[w]\}$ oder $P([v]) \vee P([w])$ schreibt man $[v] \vee [w]$ und nennt $[v] \vee [w]$ Verbindungsgerade von $[v]$ und $[w]$, falls $[v] \neq [w]$. Es gilt $[v] \vee [w] = P([v] + [w]) = P([v, w])$.

Der Zusammenhang zwischen projektiven und affinen Räumen.

Sei V ein $(n + 1)$-dimensionaler K-Vektorraum mit $n \geq 1$ und H ein n-dimensionaler Unterraum von V, also $P(H)$ eine Hyperebene von $P(V)$. Wir wollen $A := P(V) \setminus P(H)$ als affinen Raum mit der Richtung H deuten. Dazu wählen wir ein $v \in V \setminus H$, das im folgenden fest bleibt. Es gilt also $V = [v] \oplus H$. Wir zeigen nun, daß es zu jedem $[w] \in A$ genau ein $h \in H$ mit $[w] = [v+h]$ gibt. Zunächst existieren $k \in K$ und $h' \in H$ mit $w = kv+h'$. Wegen $[w] \in A$, also $w \notin H$, folgt $k \neq 0$, d.h.

$$[w] = [kv + h'] = [v + k^{-1}h'].$$

Setzen wir $h = k^{-1}h' \in H$, so ist $[w] = [v+h]$. Gilt nun $[w] = [v+h_1] = [v+h_2]$ mit $h_1, h_2 \in H$, dann gibt es ein $k \in K$ mit $kv + kh_1 = v + h_2$, also $(k - 1)v = h_2 - kh_1 \in [v] \cap H = \{\mathcal{O}\}$, d.h. $k = 1$ und $h_1 = h_2$. Für jedes $[w] \in A$ sei nun $h_{[w]} \in H$ mit $[w] = [v + h_{[w]}]$. Bezüglich der Abbildung

$$A \times A \longrightarrow H, \quad ([w], [w']) \longmapsto h_{[w']} - h_{[w]} = \overrightarrow{[w][w']}$$

ist A ein affiner Raum mit der Richtung H:

1. Sei $[w] \in A$ und $h \in H$. Dann gilt $[w] = [v + h_{[w]}]$. O.B.d.A. kann man $w = v + h_{[w]}$ annehmen, also $[w + h] = [v + h_{[w]} + h]$, d.h. $h_{[w+h]} = h_{[w]} + h$. Es folgt

$$\overrightarrow{[w][w + h]} = h_{[w]} + h - h_{[w]} = h.$$

Gilt andererseits $\overrightarrow{[w][w']} = h$, so folgt $h_{[w']} - h_{[w]} = h$, also $h_{[w']} = h_{[w]} + h$ und

$$[w'] = [v + h_{[w']}] = [v + h_{[w]} + h] = [w + h].$$

2. $\overrightarrow{[w][w']} + \overrightarrow{[w'][w'']} = h_{[w']} - h_{[w]} + h_{[w'']} - h_{[w']} = h_{[w'']} - h_{[w]} = \overrightarrow{[w][w'']}$.

Aus Sicht von A heißt $P(H)$ Fernhyperebene, und die Punkte von $P(H)$ heißen Fernpunkte. Man nennt A die affine Einschränkung von $P(V)$ bezüglich der Fernhyperebene $P(H)$, die allerdings noch von der Wahl von v abhängt.
Ist $P(U)$ ein projektiver Unterraum von $P(V)$, der in der Fernhyperebene $P(H)$ nicht enthalten ist, also U ein Unterraum von V mit $U \not\subseteq H$, so ist

$$P(U) \cap A = \{[w] \mid [w] \subseteq U \text{ und } [w] \not\subseteq H\}$$

ein nichtleerer affiner Unterraum von A mit der Richtung $U \cap H$. Wegen $U \not\subseteq H$ stimmen die projektive Dimension von $P(U)$ und die affine Dimension von $P(U) \cap A$ überein. Ist nun andererseits L ein nichtleerer affiner Unterraum von A mit $[v+h] \in L$ und der Richtung W, so ist $W \subseteq H$ ein Unterraum von H und $[v+h] + W =: U$ ein Unterraum von V, der nicht in H liegt, also $P(U) \not\subseteq P(H)$. Es gilt $U \cap H = W$, d.h., $P(U) \cap A$ ist ein affiner Unterraum von A mit der Richtung W. Wegen $[v+h] \in P(U) \cap A$ folgt $P(U) \cap A = L$. Damit ist $P(U)$ ein projektiver Unterraum von $P(V)$, der L enthält und dessen projektive Dimension mit der affinen Dimension von L übereinstimmt. Durch diese Eigenschaft ist $P(U)$ eindeutig festgelegt, denn ist $P(U')$ auch ein projektiver Unterraum von $P(V)$ mit derselben Eigenschaft, so ist $P(U) \cap P(U') \cap A = L$, d.h., $P(U) \cap P(U')$ und $P(U)$ haben dieselbe projektive Dimension. Wegen $P(U) \cap P(U') \subseteq P(U)$ folgt $P(U) \cap P(U') = P(U)$, also $P(U) = P(U')$. Man bezeichnet $P(U)$ als projektive Fortsetzung oder projektiven Abschluß von L in $P(V)$ und schreibt $\hat{L} = P(U)$.
Ist L ein nichtleerer affiner Unterraum von A mit der Richtung W, so gilt

$$\hat{L} = L \cup P(W), \quad \hat{L} \cap A = L \;\text{ und }\; \hat{L} \cap P(H) = P(W).$$

Die Elemente von $P(W)$ heißen Fernpunkte von L und bilden einen projektiven Unterraum der Fernhyperebene der projektiven Dimension $\dim L - 1$. Man sagt auch: $\hat{L}$ entsteht aus L durch Hinzufügen der zugehörigen Fernpunkte.
Die Parallelität affiner Unterräume von A kann man nun mit Hilfe der Fernpunkte formulieren. Sind zum Beispiel L_1 und L_2 affine Unterräume von A gleicher Dimension und den Richtungen W_1 bzw. W_2, dann gilt

$$L_1 \parallel L_2 \Longleftrightarrow W_1 = W_2 \Longleftrightarrow P(W_1) = P(W_2).$$

Damit sind zwei affine Unterräume von A gleicher Dimension genau dann parallel, wenn sie dieselben Fernpunkte haben. Zum Beispiel entsteht der projektive Abschluß einer affinen Geraden durch Hinzufügen eines einzigen Fernpunktes, und zwei affine Geraden g und h sind genau dann parallel, wenn sich $\hat{g}$ und $\hat{h}$ in einem Fernpunkt schneiden. Ist nun speziell $P(V)$ eine projektive Ebene und sind g, h verschieden, so schneiden sich $\hat{g}$ und $\hat{h}$ in genau einem Punkt. Ist der Schnittpunkt ein Fernpunkt, so sind g und h parallel. Anderenfalls schneiden sich $\hat{g}$ und $\hat{h}$ und damit auch g und h in einem affinen Punkt.

Wir haben gesehen, daß man in einem projektiven Raum der projektiven Dimension n durch "Entfernen" einer projektiven Hyperebene einen affinen Raum der affinen Dimension n erhält. Im folgenden soll skizziert werden, wie jeder nichtleere affine Raum auf diese Weise in einem geeigneten projektiven Raum enthalten ist. Sei also A ein nichtleerer affiner Raum der Dimension n über einem Körper K mit der Richtung H. Dann ist

$$V := K \oplus H = \{(k,h) \mid k \in K, h \in H\}$$

bezüglich $(k,h)+(k',h') := (k+k', h+h')$ und $k'(k,h) := (k'k, k'h)$ für alle $k,k' \in K$ und $h,h' \in H$ ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum. Offenbar ist $\{(0,h) \mid h \in H\}$ ein n-dimensionaler Unterraum von V und

$$\varphi : H \longrightarrow \{(0,h) \mid h \in H\},\ h \longmapsto (0,h)$$

ein K-Vektorraumisomorphismus. Schreiben wir h statt $(0,h)$ für alle $h \in H$, so ist H ein n-dimensionaler Unterraum von V. Wir betrachten nun den projektiven Raum $P(V)$ und wählen $v = (1, \mathcal{O}) \in V$ fest. Für alle $h \in H$ gilt also $v+h = (1,h)$. Dann ist $A' = P(V) \backslash P(H)$ wie oben angegeben ein n-dimensionaler affiner Raum mit der Richtung H:

$$A' = \{[(1,h)] \mid h \in H\},\ \overrightarrow{[(1,h)][(1,h')]} = h' - h.$$

Zu zeigen bleibt, daß A und A' auf kanonische Weise isomorph sind. Dazu wählen wir ein $\mathcal{O} \in A$ fest. Es gilt $A = \{\mathcal{O} + h \mid h \in H\}$, und

$$A \longrightarrow A',\ \mathcal{O} + h \longmapsto [(1,h)]$$

ist eine bijektive affine Abbildung. Identifiziert man nun die sich entsprechenden Elemente aus A und A', so entsteht A aus $P(V)$ durch "Entfernen" der Hyperebene $P(H)$, und $P(V)$ ist der projektive Abschluß von A (in $P(V)$). Ist L ein affiner Unterraum von A mit der Richtung W, so sind die Punkte von $P(W)$ genau die Fernpunkte von L in $P(V)$.

Sätze der affinen Geometrie bekommen oft eine neue Bedeutung, wenn man sie vom projektiven Standpunkt aus betrachtet. In diesem Zusammenhang spielt das Dualitätsprinzip eine wichtige Rolle, das im folgenden erläutert werden soll.

Der Dualraum eines Vektorraums.

Ist V ein K-Vektorraum, so ist die Menge

$$V^* := \{f : V \longrightarrow K \mid f \text{ ist linear}\}$$

aller Linearformen bezüglich

$$\begin{aligned} f+g:\ V &\longrightarrow K,\ v \longmapsto f(v)+g(v) \\ k \cdot f:\ V &\longrightarrow K,\ v \longmapsto k \cdot f(v) \end{aligned}$$

ein K-Vektorraum (vgl. Kapitel 4.2), den man als Dualraum von V bezeichnet. Hat V die Dimension $n < \infty$, so gilt $\dim V^* = n$. Für einen Unterraum U von V definiert man

$$U^\perp := \{f \in V^* \mid f(U) = 0\}.$$

$U^\perp$ ist ein Unterraum von V^* mit

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U.$$

Ist andererseits U^* ein Unterraum von V^*, so ist

$$U^{*\perp} := \{u \in V \mid f(u) = 0 \text{ für alle } f \in U^*\}$$

ein Unterraum von V mit

$$\dim U^{*\perp} = \dim V^* - \dim U^*.$$

Für Unterräume U_1, U_2 von V gilt:

- $U_1 \subseteq U_2 \Longleftrightarrow U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$,
- $U_1^{\perp\perp} = U_1$,
- $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$,
- $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

Die Zuordnung $U \longmapsto U^\perp$ induziert eine antitone (die Ordnung umkehrende) Bijektion zwischen den Unterräumen von V und denen von V^* und damit eine antitone Bijektion zwischen den projektiven Unterräumen von $P(V)$ und denen von $P(V^*)$. Dabei werden Durchschnitt und Summe (Verbindung) vertauscht. Dieses ist die Grundlage für das sogenannte

Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie.
Ein Satz der projektiven Geometrie für n-dimensionale projektive Räume über endlich viele projektive Unterräume und deren Inklusion, Durchschnitte sowie Verbindungen bleibt richtig, wenn in ihm projektive Unterräume der Dimension k durch solche der Dimension $n-k-1$ ersetzt werden, die Inklusion umgedreht und Durchschnitte und Verbindungen miteinander vertauscht werden.

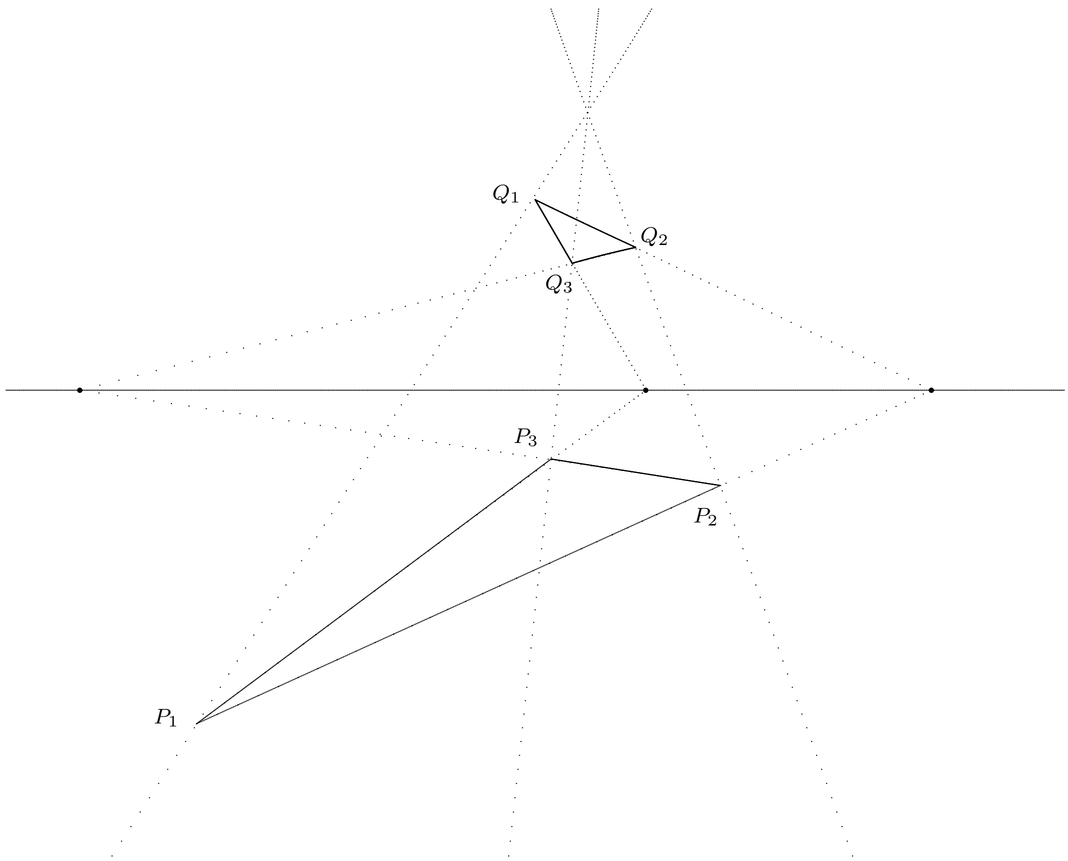
Bemerkung.

1. Das Dualitätsprinzip ist kein mathematischer Satz der projektiven Geometrie, sondern ein Satz über Sätze der projektiven Geometrie. Es gehört daher in den Bereich der mathematischen Logik und Modeltheorie, wo es exakt formuliert und bewiesen werden kann.

2. Der Satz, der durch das Dualitätsprinzip gewonnen wird, heißt Dualsatz des Ausgangssatzes; das Anwenden des Dualitätsprinzips heißt Dualisieren. Dualisiert man einen Satz der projektiven Ebene, werden Punkte mit Geraden vertauscht, der Schnittpunkt zweier Geraden geht über in die Verbindungsgerade der entsprechenden Punkte und die Verbindungsgerade zweier Punkte in den Schnittpunkt der entsprechenden Geraden.

Satz von Desargues (projektive Fassung).
In einer projektiven Ebene seien P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 jeweils paarweise verschiedene Punkte so, daß $P_1 \vee Q_1, P_2 \vee Q_2$ und $P_3 \vee Q_3$ paarweise verschiedene Geraden sind. Schneiden sich die Geraden $P_1 \vee Q_1, P_2 \vee Q_2$ und $P_3 \vee Q_3$ in einem Punkt, so liegen die Punkte $(P_1 \vee P_2) \cap (Q_1 \vee Q_2)$,$(P_1 \vee P_3) \cap (Q_1 \vee Q_3)$ und $(P_2 \vee P_3) \cap (Q_2 \vee Q_3)$ auf einer Geraden.

Dualsatz des Satzes von Desargues.
In einer projektiven Ebene seien g_1, g_2, g_3 und h_1, h_2, h_3 jeweils paarweise verschiedene Geraden so, daß $g_1 \cap h_1, g_2 \cap h_2$ und $g_3 \cap h_3$ paarweise verschiedene Punkte sind. Liegen die Punkte $g_1 \cap h_1, g_2 \cap h_2$ und $g_3 \cap h_3$ auf einer Geraden, so haben die Geraden $(g_1 \cap g_2) \vee (h_1 \cap h_2)$, $(g_1 \cap g_3) \vee (h_1 \cap h_3)$ und $(g_2 \cap g_3) \vee (h_2 \cap h_3)$ einen gemeinsamen Punkt.



Satz von Desargues

Beweis des Satzes von Desargues. Sei $P_i = [p_i], Q_i = [q_i]$ für $i = 1, 2, 3$ und $Z = [z]$ der Schnittpunkt der Geraden $[p_1] \vee [q_1]$,$[p_2] \vee [q_2]$ und $[p_3] \vee [q_3]$. Wegen $[z] \subseteq [p_i, q_i]$ gibt es $k_i, l_i \in K$ mit $z = k_i p_i - l_i q_i$ für $i = 1, 2, 3$. Es folgt $k_1 p_1 - l_1 q_1 = k_2 p_2 - l_2 q_2$, also

$$r_1 := k_1 p_1 - k_2 p_2 = l_1 q_1 - l_2 q_2.$$

Wegen $z \neq \mathcal{O}$ und der linearen Unabhängigkeit von p_1 und p_2 bzw. q_1 und q_2 folgt $r_1 \neq \mathcal{O}$. Sei analog

$$\begin{aligned} r_2 &:= k_2 p_2 - k_3 p_3 = l_2 q_2 - l_3 q_3 \neq \mathcal{O}, \\ r_3 &:= k_3 p_3 - k_1 p_1 = l_3 q_3 - l_1 q_1 \neq \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} [r_1] &\subseteq ([p_1] + [p_2]) \cap ([q_1] + [q_2]), \\ [r_2] &\subseteq ([p_2] + [p_3]) \cap ([q_2] + [q_3]), \\ [r_3] &\subseteq ([p_3] + [p_1]) \cap ([q_3] + [q_1]), \end{aligned}$$

also

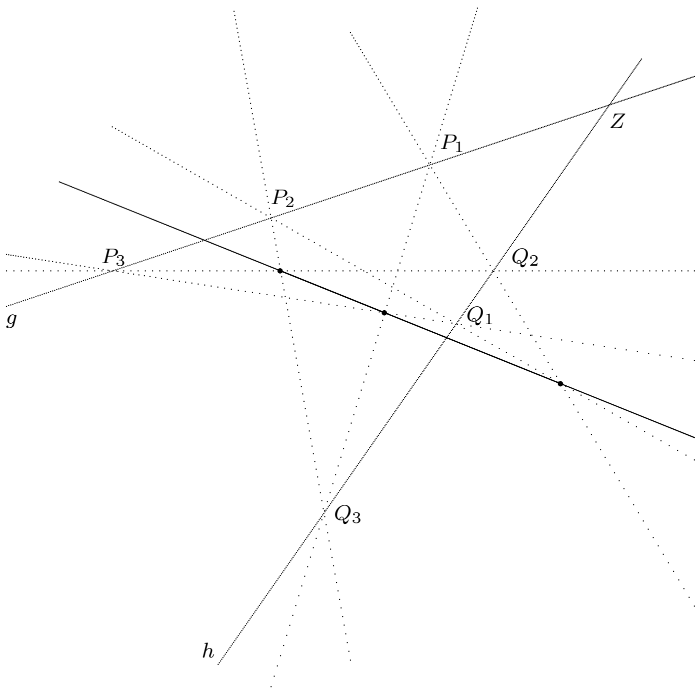
$$\begin{aligned}
[r_1] &= ([p_1] \vee [p_2]) \cap ([q_1] \vee [q_2]), \\
[r_2] &= ([p_2] \vee [p_3]) \cap ([q_2] \vee [q_3]), \\
[r_3] &= ([p_3] \vee [p_1]) \cap ([q_3] \vee [q_1]).
\end{aligned}$$

Wegen $r_1 + r_2 + r_3 = \mathcal{O}$ sind $[r_1], [r_2]$ und $[r_3]$ kollinear.

$\square$

Bemerkung. Je nachdem, welche Schnittpunkte Fernpunkte sind, ergeben sich für die affine Interpretation des Satzes von Desargues verschiedene Variationen. In der affinen Version dürfen zum Beispiel die Geraden $P_1 \vee Q_1$, $P_2 \vee Q_2$ und $P_3 \vee Q_3$ parallel sein (ihre projektiven Erweiterungen schneiden sich dann in einem gemeinsamen Fernpunkt Z) oder es gilt zum Beispiel $P_1 \vee P_2 \| Q_1 \vee Q_2$, $P_1 \vee P_3 \| Q_1 \vee Q_3$ und $P_2 \vee P_3 \| Q_2 \vee Q_3$.

Satz von Pappos-Pascal (projektive Fassung).
g und h seien zwei verschiedene Geraden einer projektiven Ebene mit dem Schnittpunkt Z. Sind P_1, P_2, P_3 bzw. Q_1, Q_2, Q_3 paarweise verschiedene und von Z verschiedene Punkte von g bzw. h, dann liegen die Punkte $P_1 \vee Q_2 \cap P_2 \vee Q_1$, $P_1 \vee Q_3 \cap P_3 \vee Q_1$ und $P_2 \vee Q_3 \cap P_3 \vee Q_2$ auf einer Geraden.

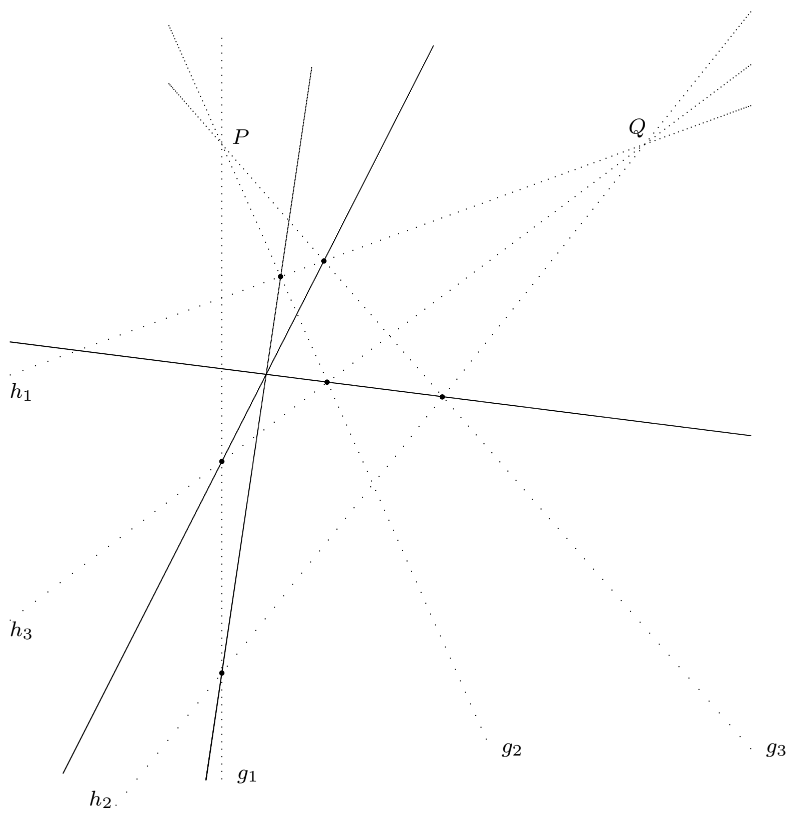


Satz von Pappos-Pascal

Bemerkung. Wie der projektive Satz von Desargues hat auch der projektive Satz von Pappos-Pascal verschiedene affine Interpretationen. Wählt man zum Beispiel die Gerade l durch $P_1 \vee Q_2 \cap P_2 \vee Q_1$, $P_1 \vee Q_3 \cap P_3 \vee Q_1$ als Ferngerade und liegt keiner der Punkte P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 auf l, so sind die affinen Einschränkungen von $P_1 \vee Q_2$ und $P_2 \vee Q_1$ sowie $P_1 \vee Q_3$ und $P_3 \vee Q_1$ parallel. Wegen des projektiven Satzes von Pappos-Pascal schneiden sich $P_2 \vee Q_3$ und $P_3 \vee Q_2$ in einem Fernpunkt, d.h., ihre affinen Einschränkungen sind parallel. Liegt Z auf l, erhält man den sogenannten *kleinen* Satz von Pappos-Pascal (vgl. Aufgabe 5.9 aus Kapitel 7), anderenfalls die affine Version gemäß Aufgabe 5.8 aus Kapitel 7. Aus projektiver Sicht unterscheiden sich diese beiden Versionen nicht. Dual zum Satz von Pappos-Pascal ist der

Satz von Brianchon (projektive Fassung).

P und Q seien zwei verschiedene Punkte einer projektiven Ebene mit der Verbindungsgeraden l. Sind g_1, g_2, g_3 bzw. h_1, h_2, h_3 paarweise verschiedene und von l verschiedene Geraden durch P bzw. Q, dann schneiden sich die Geraden $g_1 \cap h_2 \vee g_2 \cap h_1$, $g_1 \cap h_3 \vee g_3 \cap h_1$ und $g_2 \cap h_3 \vee g_3 \cap h_2$ in einem Punkt.



Satz von Briancho

2. Homogene Koordinaten und projektive Quadriken

Im folgenden ist V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum und $P_0, \dots, P_n, E \in P(V)$ Punkte in allgemeiner Lage, d.h., jeweils $n+1$ von ihnen liegen in keiner Hyperebene von $P(V)$. Sind $e, v_0, \dots, v_n \in V$ mit

$$E = [e], P_0 = [v_0], \dots, P_n = [v_n],$$

dann sind insbesondere $v_0, \dots, v_n$ linear unabhängig, und es gibt $x_0, \dots, x_n \in K$ mit

$$e = x_0 v_0 + \cdots + x_n v_n.$$

Ist $x_i = 0$ für ein i, z.B. $x_0 = 0$, so folgt $\mathcal{O} = -e + x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, d.h., $e, v_1, \dots, v_n$ sind linear abhängig, und $E, P_1, \dots, P_n$ liegen in einer Hyperebene - Widerspruch. O.B.d.A. kann man also annehmen, daß

$$e = v_0 + \cdots + v_n$$

gilt. Man nennt dann $\{P_0, \dots, P_n; E\}$ ein projektives Bezugssystem von $P(V)$ mit der Standardnormierung $\{v_0, \dots, v_n; e\}$. Weiterhin heißen $P_0, \dots, P_n$ Basispunkte, und E heißt Einheitspunkt. Ist nun $P \in P(V)$ beliebig, so gilt $P = [v]$ für ein $v \in V$, und es gibt $x_0, \dots, x_n \in K$, nicht alle 0, mit

$$v = x_0 v_0 + \cdots + x_n v_n.$$

Man nennt $x_0, \dots, x_n$ homogene Koordinaten von P bezüglich $\{P_0, \dots, P_n; E\}$. Sie sind offenbar nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\neq 0$ eindeutig bestimmt, d.h., wählt man für $\{P_0, \dots, P_n; E\}$ eine andere Standardnormierung oder schreibt $P = [v']$ für ein $v' \in V$, so erhält man für P dieselben homogenen Koordinaten (bis auf einen gemeinsamen Faktor $\neq 0$).

Affine Deutung der homogenen Koordinaten.

Sei $P(H)$ als Fernhyperebene in $P(V)$ ausgezeichnet und seien $P_1, \dots, P_n \in P(H)$ so, daß

$$P_1 \vee \cdots \vee P_n = P(H).$$

Wählen wir weiterhin $P_0 \in P(V) \setminus P(H)$, dann kann man $P_0, \dots, P_n$ zu einem projektiven Bezugssystem ergänzen, indem man zum Beispiel $e = v_0 + \cdots + v_n$ und $E = [e]$ setzt, wobei $v_0, \dots, v_n \in V$ mit $P_i = [v_i]$ für $i = 0, \dots, n$ gilt.
Ist nun $P = [v]$ ein beliebiger Punkt aus $P(V)$ und sind $x_0, \dots, x_n$ die homogenen Koordinaten von P bezüglich $\{P_0, \dots, P_n; E\}$, so gilt

$$P \in P(H) \iff v \in H \iff x_0 = 0.$$

Für die affine Einschränkung A von $P(V)$ bezüglich der Fernhyperebene $P(H)$ gilt dann

$$P \in A \Longleftrightarrow x_0 \neq 0.$$

Alle affinen Punkte P und nur diese haben einen homogenen Koordinatenvektor der Art $(1, p_1, \ldots, p_n)$. Man nennt $p_1, \ldots, p_n$ die inhomogenen Koordinaten des affinen Punktes P. Bei fest gewähltem Bezugssystem sind sie durch P eindeutig bestimmt.
In Abschnitt 9.1 haben wir genau beschrieben, wie A als affiner Raum mit der Richtung H gedeutet werden kann. Sei also wie dort $v_0 \in V \setminus H$ fest gewählt, $P_0 = [v_0]$. Da $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von H ist, ist $\{P_0, v_1, \ldots, v_n\}$ ein affines Koordinatensystem von A. Ist nun $P = [v] \in A$ ein affiner Punkt mit den inhomogenen Koordinaten $p_1, \ldots, p_n$, so gilt

$$\begin{aligned} P = [v] &= [v_0 + p_1 v_1 + \cdots + p_n v_n] \\ &= [v_0] + p_1 v_1 + \cdots + p_n v_n \\ &= P_0 + p_1 v_1 + \cdots + p_n v_n. \end{aligned}$$

Damit sind $p_1, \ldots, p_n$ die affinen Koordinaten von P bezüglich des affinen Koordinatensystems $\{P_0, v_1, \ldots, v_n\}$ von A.

Wir wählen konkret den Vektorraum $V = K^{n+1}$ mit $H = \{(0, k_1, \ldots, k_n) \mid k_1, \ldots, k_n \in K\}$ sowie $E = [e], P_0 = [v_0], \ldots, P_n = [v_n]$ mit

$$v_0 = (1, 0, \ldots, 0), v_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, v_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

und

$$e = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = (1, \ldots, 1).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} P(V) &= \{\, [(k_0, \ldots, k_n)] \mid k_0, \ldots, k_n \in K \text{ nicht alle } 0\}, \\ P(H) &= \{\, [(0, k_1, \ldots, k_n)] \mid k_1, \ldots, k_n \in K \text{ nicht alle } 0\}, \\ A &= \{\, [(1, k_1, \ldots, k_n)] \mid k_1, \ldots, k_n \in K\} \\ &\cong \{\, (k_1, \ldots, k_n) \mid k_1, \ldots, k_n \in K\} \\ &= K^n, \end{aligned}$$

wobei die Isomorphie $\cong$ als Isomorphie zwischen affinen Räumen gemeint ist (vgl. Beispiel nach Definition 1.1 aus Kapitel 7). Insbesondere ergibt sich

$$\overrightarrow{[(1, k_1, \ldots, k_n)][(1, k_1', \ldots, k_n')]} = (0, k_1' - k_1, \ldots, k_n' - k_n) \in H \cong K^n,$$

wobei hier die Isomorphie $\cong$ als Isomorphie zwischen K-Vektorräumen gemeint ist. Bezüglich des projektiven Bezugssystems $\{P_0, \ldots, P_n; E\}$ hat der Punkt $[(k_0, \ldots, k_n)] \in P(V)$ die homogenen Koordinaten $k_0, \ldots, k_n$ und der affine Punkt $[(1, k_1, \ldots, k_n)] \in A$ die inhomogenen (affinen) Koordinaten $k_1, \ldots, k_n$. Auf diese Weise kann man den projektiven Raum $P(V)$ auch als projektive Erweiterung des affinen Raums K^n auffassen.

Die Dualität läßt sich nun in homogenen Koordinaten einfach veranschaulichen. Dazu sei wieder $V = K^{n+1}$ und U ein r-dimensionaler Unterraum von V. Wir definieren

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid uv^t = 0 \text{ für alle } u \in U\},$$

wobei $(x_0, \ldots, x_n)(y_0, \ldots, y_n)^t = x_0 y_0 + \cdots + x_n y_n$ für alle $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n \in K$ gilt. Offenbar ist $U^{\perp}$ ein $(n+1-r)$- dimensionaler Unterraum von V, und die Zuordnung $U \longmapsto U^{\perp}$ induziert eine antitone Bijektion zwischen den Unterräumen von $P(V)$. Insbesondere gilt $\dim_K U^{\perp} = n + 1 - \dim_K U$, d.h. $\dim P(U^{\perp}) = n - 1 - \dim P(U)$. Ist zum Beispiel $P = [(p_0, \ldots, p_n)]$ ein projektiver Punkt, so ist dual dazu die projektive Hyperebene, die durch die Gleichung

$$p_0 x_0 + \cdots + p_n x_n = 0$$

definiert ist. Dual zur Verbindung zweier Punkte $P = [(p_0, \ldots, p_n)]$ und $Q = [(q_0, \ldots, q_n)]$ ist der projektive Unterraum von $P(V)$, der durch

$$\begin{aligned} p_0 x_0 + \cdots + p_n x_n &= 0 \\ q_0 x_0 + \cdots + q_n x_n &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben wird, d.h. $(P \vee Q)^{\perp} = P^{\perp} \cap Q^{\perp}$. Entsprechendes gilt für beliebige projektive Unterräume von $P(V)$.

Projektive Quadriken.

Im folgenden sei $\chi(K) \neq 2$. Eine Teilmenge $Q \subseteq P(V)$ heißt Quadrik in $P(V)$, wenn es eine nichttriviale symmetrische Bilinearform $\beta : V \times V \longrightarrow K$ so gibt, daß

$$Q = \{\ [v] \in P(V) \mid \beta(v, v) = 0\}$$

gilt. Ist $\beta(v, v) = 0$ für ein $v \in V$, so folgt $\beta(kv, kv) = 0$ für alle $k \in K$, d.h., der Begriff *Quadrik* ist wohldefiniert. Im folgenden wollen wir stets voraussetzen, daß $\dim P(V) = n \geq 2$ gilt und Q in keiner Hyperebene von $P(V)$ liegt. Q heißt regulär, wenn das Radikal von β trivial ist, d.h. $\mathrm{Rad}\beta = \{\mathcal{O}\}$. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der symmetrischen Bilinearform β, die Q beschreibt.
In homogenen Koordinaten bezüglich eines projektiven Bezugssystems wird Q durch eine Gleichung der Form

$$(x_0, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} b_{00} & \ldots & b_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n0} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

beschrieben. Dabei ist (b_{ij}) eine symmetrische $(n+1, n+1)$-Matrix über K. Genau dann ist Q regulär, wenn (b_{ij}) eine reguläre Matrix ist. Wegen Satz 4.4 aus Kapitel 7 gibt es ein projektives Bezugssystem, bezüglich dessen Q durch

$$b_{00} x_0^2 + \cdots + b_{rr} x_r^2 = 0$$

beschrieben wird. Dabei sind $b_{00},\dots,b_{rr}$ von 0 verschieden. Für $K=\mathbb{R}$ kann man sogar $b_{00},\dots,b_{rr}\in\{1,-1\}$ annehmen und $b_{00}=\dots=b_{rr}=1$, falls $K=\mathbb{C}$. Wählt man das projektive Bezugssystem $\{P_0,\dots,P_n;E\}$ so, daß $P_1\vee\dots\vee P_n$ die Fernhyperebene ist, so gehört ein affiner Punkt X mit den inhomogenen Koordinaten $x_1,\dots,x_n$ genau dann zu Q, wenn

$$(1,x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0n}\\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n0} & b_{n1} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0,$$

also

$$xBx^t+2\mathfrak{b}x^t+b=0,$$

wobei $x=(x_1,\dots,x_n)$ und

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix},\quad \mathfrak{b}=(b_{01},\dots,b_{0n}),\quad b=b_{00}.$$

Man nennt $Q\cap A$ den affinen Teil von Q und Q den projektiven Abschluß von $Q\cap A$. Auf diese Weise kommt der erweiterten Matrix B_{erw} eine neue Bedeutung zu.

Beispiel. Sei $P(V)$ eine reelle projektive Ebene.

1. Bezüglich eines projektiven Bezugssystems werde die Quadrik Q durch die Matrix

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

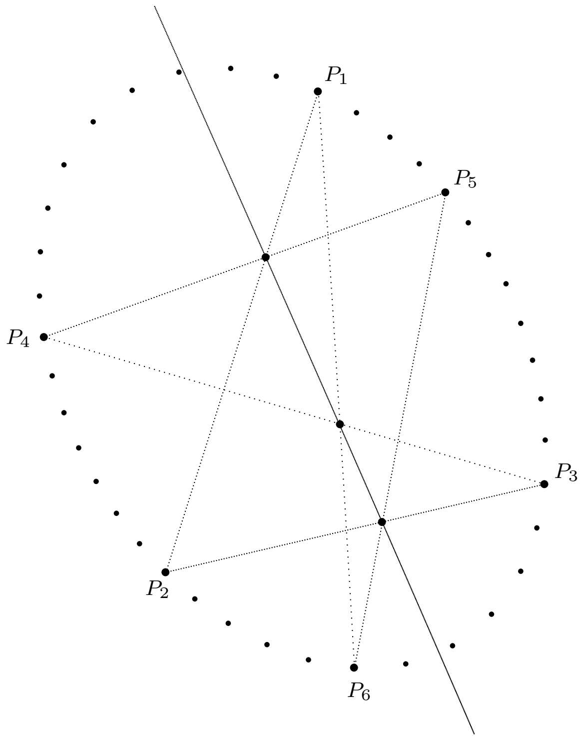
beschrieben. Der affine Teil von Q wird wesentlich durch das Schnittverhalten der Ferngeraden h mit Q bestimmt. Schneidet h die Quadrik Q nicht (z.B. $h:x_0=0$), so ist der affine Teil eine Ellipse ($x_1^2+x_2^2=1$). Schneidet h die Quadrik Q in zwei verschiedenen Punkten (z.B. $h:x_2=0$), ist der affine Teil eine Hyperbel ($x_0^2-x_1^2=1$). Schneidet h die Quadrik Q nur in einem Punkt, d.h., berührt h die Quadrik Q (z.B. $h:x_0-x_1=0$), dann ist der affine Teil eine Parabel.

2. Gilt

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

und ist $h:x_0=0$ die Ferngerade, dann besteht der affine Teil von Q aus zwei sich schneidenden Geraden ($x_1^2-x_2^2=0$). Ist $h:x_2=0$ die Ferngerade, so besteht der affine Teil von Q aus zwei parallelen Geraden ($x_1^2-1=0$).

Satz von Pascal.
Q sei eine reguläre Quadrik einer projektiven Ebene und $P_1, \ldots, P_6$ seien Punkte von Q so, daß je 3 von ihnen nicht auf einer Geraden liegen. Dann schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ auf einer Geraden, d.h., $(P_1 \vee P_2) \cap (P_4 \vee P_5)$, $(P_2 \vee P_3) \cap (P_5 \vee P_6)$ und $(P_3 \vee P_4) \cap (P_6 \vee P_1)$ sind kollinear.



Satz von Pascal

Bemerkung.

1. Es gilt auch die Umkehrung des Satzes von Pascal: Sind $P_1, \ldots, P_6$ Punkte einer projektiven Ebene in allgemeiner Lage, d.h., je 3 von ihnen liegen nicht auf einer Geraden, und sind $(P_1 \vee P_2) \cap (P_4 \vee P_5)$, $(P_2 \vee P_3) \cap (P_5 \vee P_6)$, $(P_3 \vee P_4) \cap (P_6 \vee P_1)$ kollinear, so liegen $P_1, \ldots, P_6$ auf einer regulären Quadrik.

2. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den Satz von Pascal affin zu interpretieren je nachdem, welche Schnittpunkte auf der Ferngeraden liegen.

3. Der Satz von Pappos-Pascal ist eine Variante des Satzes von Pascal, bei dem der reguläre Kegelschnitt durch einen singulären Kegelschnitt (Geradenpaar) ersetzt ist.

Bevor wir den Satz von Pascal dualisieren, definieren und untersuchen wir projektive Tangenten an projektiven Quadriken. Sei Q bezüglich eines projektiven Bezugssystems durch die Gleichung

$$xB_{erw}x^t = 0$$

gegeben, wobei B_{erw} eine reguläre $(n+1, n+1)$-Matrix ist, sowie $P = [p]$ ein Punkt von Q und $g = [p, v]$ eine Gerade durch P. Wir wollen zunächst herausfinden, welche weiteren Punkte von g auf Q liegen. Dazu seien $\tilde{p}$ und $\tilde{v}$ die Koordinatenvektoren von p und v. Ein von P verschiedener Punkt von g hat die Form $[\lambda p + v], \lambda \in K$. Wir untersuchen die Gleichung

$$(\lambda\tilde{p} + \tilde{v})B_{erw}(\lambda\tilde{p} + \tilde{v})^t = 0,$$

also

$$2\lambda\tilde{p}B_{erw}\tilde{v}^t + \tilde{v}B_{erw}\tilde{v}^t = 0,$$

da $\tilde{p}B_{erw}\tilde{p}^t = 0$. Ist $\tilde{p}B_{erw}\tilde{v}^t \neq 0$, so hat g mit Q zwei verschiedene Schnittpunkte. Gilt aber $\tilde{p}B_{erw}\tilde{v}^t = 0$, so liegt g ganz in Q oder hat mit Q keinen weiteren Schnittpunkt. Wir wollen nun g Tangente an Q durch P nennen, wenn $g \cap Q = \{P\}$ oder $g \subseteq Q$. In homogenen Koordinaten bedeutet das

$$\tilde{p}B_{erw}\tilde{v}^t = 0.$$

Die Vereinigung aller Tangenten an Q durch P ist somit eine projektive Hyperebene in $P(V)$, die P enthält. Sie heißt Tangentialhyperebene an Q durch P. Ist P ein affiner Punkt von Q, so sind wir an den affinen Punkten der Tangente interessiert. Dazu seien $p_1, \ldots, p_n$ die inhomogenen Koordinaten von P und $v_1, \ldots, v_n$ die inhomogenen Koordinaten von $[v]$. Mit $\breve{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ und $\breve{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ folgt dann

$$\tilde{p}B_{erw}\tilde{v}^t = 0 \iff (\breve{p}B + \mathfrak{b})\breve{v}^t = -b - \mathfrak{b}\breve{p}^t.$$

Damit ist die affine Einschränkung einer projektiven Tangente an Q durch einen affinen Punkt von Q die affine Tangente an der affinen Einschränkung von Q durch P.

Beispiel.

1. Im Projektiven schneidet eine Gerade g eine Quadrik Q also in keinem Punkt, in genau einem Punkt, in genau zwei Punkten oder liegt ganz in Q. Die im Affinen geführte Diskussion der sogenannten doppelten Schnittpunkte entfällt also in der projektiven Geometrie. Ist zum Beispiel g eine affine Gerade der reellen affinen Ebene, die eine (affine) Parabel Q in genau einem Punkt P schneidet (also Ausnahmerichtung hat), so ist g keine affine Tangente an Q durch P; somit ist die projektive Erweiterung $\hat{g}$ von g auch keine Tangente am projektiven Abschluß $\hat{Q}$ von Q, d.h., $\hat{g}$ schneidet $\hat{Q}$ in einem weiteren Punkt, nämlich dem Fernpunkt von g. Der projektive Abschluß der Parabel Q entsteht durch Hinzufügen eines einzigen Fernpunktes; durch ihn verläuft die Ferngerade als projektive Tangente.

2. Der Asymptotenkegel einer reellen affinen Hyperbel besteht aus zwei sich schneidenden Geraden, deren Fernpunkte auf dem projektiven Abschluß der Hyperbel liegen. Man sagt auch, daß sich die Hyperbel und ihr Asymptotenkegel im Unendlichen schneiden. Damit sind die projektiven Abschlüsse der Geraden des Asymptotenkegels projektive Tangenten am projektiven Abschluß der Hyperbel jeweils durch einen Fernpunkt.

Das Duale des Punktes P in $P(V)$ ist nun die Hyperebene in $P(V)$, die durch die Gleichung

$$\tilde{p}x^t = 0$$

definiert ist. Ist P' der Punkt von $P(V)$, dessen homogener Koordinatenvektor $\tilde{p}B_{erw}$ ist, so liegt P' auf der Quadrik Q' mit der Gleichung

$$xB_{erw}^{-1}x^t = 0.$$

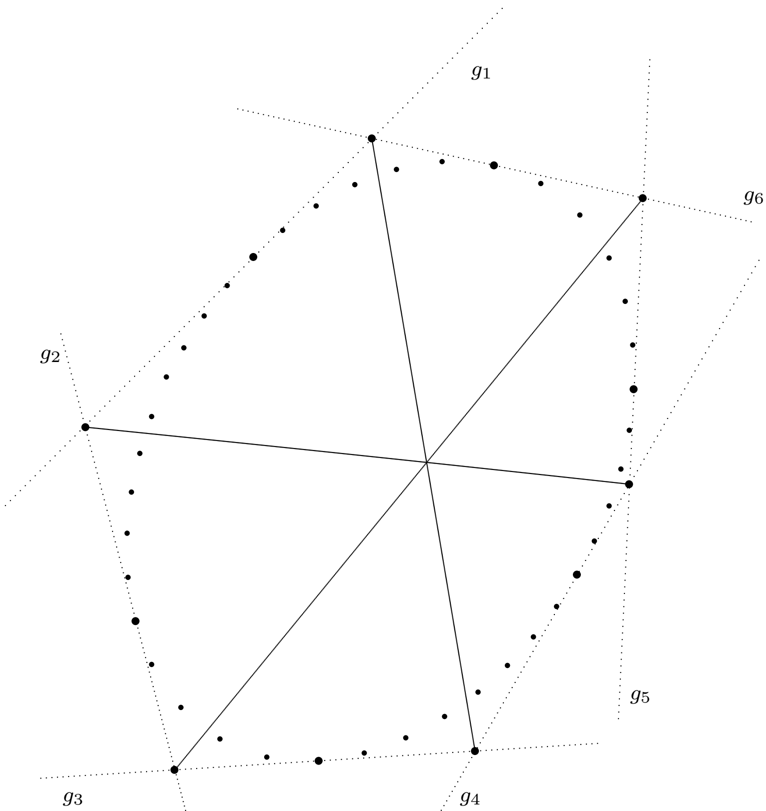
Ein Punkt $X \in P(V)$ liegt nun genau dann in der Tangentialhyperebene an Q' durch P', wenn

$$\tilde{p}B_{erw}B_{erw}^{-1}x^t = 0, \quad \text{also} \quad \tilde{p}x^t = 0,$$

wobei x homogener Koordinatenvektor von X ist. Damit erkennt man das Duale von P als die Tangentialhyperebene an Q' durch P'.

> Das Duale einer regulären projektiven Quadrik, die bezüglich eines projektiven Bezugssystems durch die Gleichung $xB_{erw}x^t = 0$ gegeben ist, kann gedeutet werden als die Menge aller Tangentialhyperebenen an der Quadrik, die durch die Gleichung $xB_{erw}^{-1}x^t = 0$ definiert ist.

Obige Überlegungen führen nun zu folgender Dualisierung des Satzes von Pascal.



Satz von Brianchon

Satz von Brianchon.

Q sei eine reguläre Quadrik einer projektiven Ebene und $g_1, \ldots, g_6$ seien Tangenten an Q so, daß sich je 3 von ihnen nicht in einem Punkt schneiden. Dann gehen die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Punkte durch einen Punkt, d.h., $(g_1 \cap g_2) \vee (g_4 \cap g_5)$, $(g_2 \cap g_3) \vee (g_5 \cap g_6)$ und $(g_3 \cap g_4) \vee (g_6 \cap g_1)$ schneiden sich in einem Punkt.

3. Aufgaben

A 3.1 $P(V)$ sei ein projektiver Raum, in dem die Fernhyperebene $P(H)$ ausgezeichnet ist, und $P(U)$ ein Unterraum von $P(V)$ mit $U \not\subseteq H$. Zeigen Sie, daß $P(U) \cap A$ ein affiner Unterraum von A mit der Richtung $U \cap H$ ist, wobei A die affine Einschränkung von $P(V)$ bezüglich $P(H)$ ist.

A 3.2 Geben Sie alle affinen Interpretationen des projektiven Satzes von Desargues an.

A 3.3 Geben Sie alle affinen Interpretationen des projektiven Satzes von Pappos-Pascal an.

A 3.4 Geben Sie alle affinen Interpretationen des projektiven Satzes von Pascal an.

A 3.5 Zeigen Sie: Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit den Unterräumen U und W, so gilt $U^{\perp^\perp} = U$ sowie $U \subseteq W \iff W^\perp \subseteq U^\perp$.

A 3.6 Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $\chi(K) \neq 2$, und β, β' seien zwei nichttriviale symmetrische Bilinearformen auf V mit

$$Q = \{\ [v] \in P(V) \mid \beta(v,v) = 0\} = \{\ [v] \in P(V) \mid \beta'(v,v) = 0\}.$$

Zeigen Sie: Liegt Q in keiner Hyperebene von $P(V)$, so haben β und β' dasselbe Radikal.

A 3.7 Es sei $P(H)$ eine Hyperebene des projektiven Raums $P(V)$ und $Q \subseteq P(H)$ eine Quadrik in $P(H)$ sowie $P \in P(V) \setminus P(H)$ fest gewählt. Zeigen Sie, daß die Vereinigung aller Verbindungsgeraden $P \vee P'$ mit $P' \in Q$ eine Quadrik in $P(V)$ ist.

A 3.8 $P(V)$ sei ein 3-dimensionaler projektiver Raum über einem Körper mit der Charakteristik $\neq 2$ sowie g_1, g_2, g_3 drei Geraden in $P(V)$, die sich paarweise nicht schneiden. Zeigen Sie, daß die Vereinigung aller Geraden von $P(V)$, die g_1, g_2 und g_3 schneiden, eine reguläre Quadrik in $P(V)$ ist.

Index