Karl Weierstraß – zum 200. Geburtstag
„Alles im Leben kommt doch leider zu spät“

Reinhard Bölling
Universität Potsdam, Institut für Mathematik

Prolog

Nunmehr im 74. Lebensjahr stehend, scheint es sehr wahrscheinlich, dass dies mein einziger und letzter Beitrag über Karl Weierstraß für die Mediathek meiner ehemaligen Potsdamer Arbeitsstätte sein dürfte. Deshalb erlaube ich mir, einige persönliche Bemerkungen voranzustellen.

Am 9. November 1989 ging die Nachricht von der Öffnung der Berliner Mauer um die Welt. Am Tag darauf schrieb mir mein Freund in Stockholm: „Herzlich willkommen!“ Ich besorgte das damals noch

erforderliche Visum in der Botschaft Schwedens und fuhr im Januar 1990 nach Stockholm. Endlich konnte ich das Mittag-Leffler-Institut in Djursholm, im nördlichen Randgebiet Stockholms gelegen, besuchen. Dort befinden sich umfangreiche Teile des Nachlasses von Weierstraß und Kowalewskaja, die von Mittag-Leffler zusammengetragen worden waren. Ich hatte meine Arbeit am Briefwechsel zwischen Weierstraß und Kowalewskaja, die meine erste mathematikhistorische Publikation werden sollte, vom Inhalt her abgeschlossen. Das Manuskript lag in nahezu satzfertiger Form vor und sollte dem Verlag übergeben werden. Geradezu selbstverständlich wäre es für diese Arbeit gewesen, die Archivalien im Mittag-Leffler-Institut zu

studieren. Aber auch als Mitarbeiter des Karl-Weierstraß-Institutes für Mathematik in Ostberlin gehörte ich nicht zu denen, die man ins westliche Ausland reisen ließ. –

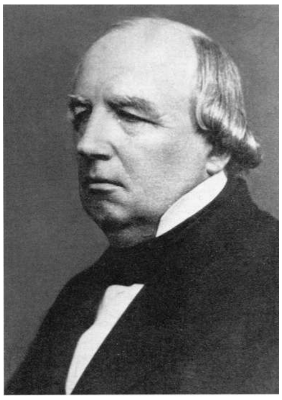
Nun konnte ich mir also endlich einen ersten Überblick über die Archivalien im Mittag-Leffler-Institut verschaffen. Ich studierte in jenen Tagen ohne Unterbrechung von morgens bis abends Schriftstücke, Dokumente usw. aus dem dortigen Archiv, denn mir stand nur eine Woche zur Verfügung. Am zweiten Tag in Djursholm entdeckte ich unter Papieren ganz anderen Inhalts einige lose Blätter, die Kowalewskaja beschrieben hatte. Ihre Handschrift kannte ich ja. Sie stellten sich als das Fragment eines

Briefentwurfes an Weierstraß heraus. Geschrieben am Beginn ihrer Lehrtätigkeit in Stockholm. Was für ein Fund! Weierstraß hatte alle ihre Briefe an ihn nach ihrem so frühzeitigen Tod verbrannt. Nun war es zum zum ersten (und einzigen) Mal möglich, einen Eindruck von ihren Briefen an ihn zu gewinnen. Der Text konnte gerade noch rechtzeitig vor der Drucklegung in die Edition aufgenommen werden.[1]

Von 1990 bis 2000 bin ich dann zehnmal auf Einladung des Mittag-Leffler-Instituts für jeweils ein bis drei Monate in Djursholm gewesen. Meine Arbeit mit den Archivalien wurde in der großzügigsten Weise unterstützt. Das war eine wundervolle Erfahrung. An diese Aufenthalte werde ich stets mit größter Dankbarkeit zurückdenken.

Der wohl schönste Ausblick aus einem der Räume des Mittag-Leffler-Institutes.

1. Lebensdaten



Karl Weierstraß

1815 Okt. 31	Geburt in Ostenfelde (Kreis Warendorf im Regierungsbezirk Münster) Vater: Wilhelm W. (1790 –1869) – Beamter im preußischen Steuerdienst Mutter: Theodora W. geb. von der Forst (1791–1827)
1829 – 1834	Gymnasium *Theodorianum* in Paderborn
1834 – 1838	(auf Wunsch des Vaters) Studium der Kameralistik (Vorbereitung auf den höheren Staatsdienst) in Bonn (ohne Examen abgebrochen)
1838 – 1840	Studium an der Akademie in Münster (Vorbereitung auf das Lehramt); Vorlesungen über elliptische Funktionen bei Gudermann
1841	mündliche Prüfungen (beinahe durchgefallen)
1841 – 1842	Probejahr in Münster; Weierstraß verfügt bereits über Grundlagen seiner Funktionentheorie (u. a. analytische Fortsetzung durch Potenzreihen)
1842 – 1848	Lehrer in Deutsch-Krone (Westpreußen)
um 1845	Weierstraß ist kurze Zeit verlobt
1848 – 1855	Lehrer in Braunsberg (Ostpreußen)
1854	Weierstraß' bahnbrechende Arbeit zur Lösung des Jacobischen Umkehrproblems für hyperelliptische Integrale erscheint im Crelleschen Journal, die den Autor schlagartig bekannt macht; Ehrenpromotion durch die Universität Königsberg
1855	Freistellung für ein Jahr (Ausarbeitung seiner Theorie der Abelschen Funktionen)
1856	Professor am Berliner Gewerbeinstitut; außerordentliche Professur an der Universität Berlin; ordentliches Mitglied der Berliner Akademie [2]
1861	Kummer and Weierstraß gründen das Mathematische Seminar an der Universität Berlin
1861 Dez.	Zusammenbruch während der Vorlesung; nach einjähriger Pause hält Weierstraß alle seine Vorlesungen nur noch sitzend
Winter 1862/63	erste Vorlesung über seine Neubegründung der Theorie der elliptischen Funktionen
Winter 1863/64	erste Vorlesung über analytische Funktionen; darin frühester Beleg für seine Theorie der reellen Zahlen (mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{C}$);
1864	ordentliche Professur an der Universität Berlin
1870	Weierstraß' Kritik des sog. Dirichletschen Prinzips, der Basis der Riemannschen Funktionentheorie; erste Begegnung mit Sofja Kowalewskaja
1872	Akademie-Vortrag über sein Beispiel einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen aber nirgends differenzierbaren Funktion
Sommer 1887	letzte Vorlesung (über hyperelliptische Funktionen)
1894	der erste Band von Weierstraß' Werken erscheint (1927 der letzte Band 7)
1895	Porträt in der Berliner Nationalgalerie
1897 Feb. 19	Tod in Berlin

2. Pädagogische Grundsätze

Anlässlich der Übernahme des Rektorats der Berliner Universität äußert Weierstraß in einer Ansprache vom 15. Oktober 1873 seine Ansichten zum akademischen Unterricht, die mir sehr bemerkenswert scheinen:

„Der Erfolg des akademischen Unterrichts beruht [...] *zum großen Theile darauf, daß der Lehrer den Lernenden fortwährend zu eigener Forschung anleitet. Dies geschieht aber nicht etwa durch pädagogische Anweisung, sondern zunächst und hauptsächlich dadurch, daß der Lehrer beim Vortrag einer Disciplin in seiner Darstellung selbst durch Anordnung des Stoffes und Hervorhebung der leitenden Gedanken angemessen den Lernenden erkennen läßt, auf welchem Wege der gereifte und das bereits Erforschte beherrschende Denker folgerichtig fortschreitend zu neuen Ergebnissen oder besserer Begründung schon vorhandener gelangt. Dann versäumt er es nicht, ihm die zur Zeit nicht überschrittenen Grenzen der Wissenschaft zu bezeichnen und diejenigen Punkte anzudeuten, von denen aus ein weiteres Vordringen zunächst möglich scheint. Auch einen tiefern Einblick in den Gang seiner eigenen Forschungen versagt er ihm nicht, verschweigt selbst nicht begangene Irrthümer und getäuschte Erwartungen.“*[3]

Das sind wahrlich hohe Ansprüche an den Lehrenden.

Nun ist man natürlich einigermaßen neugierig, ob sich diese pädagogischen Grundsätze in seinen Vorlesungen wiederfinden. In den vorhandenen Mitschriften und Ausarbeitungen von Weierstraß’ Vorlesungen wird deutlich, in welchem Maße diese Grundsätze Berücksichtigung fanden, worauf wir im Folgenden gelegentlich hinweisen werden.

3. Vorlesungen

Über 30 Jahre – von 1856 bis 1887 – erstreckt sich Weierstraß’ Vorlesungstätigkeit an der Berliner Universität. Seine Hauptvorlesungen, die er mit ziemlicher Regelmäßigkeit alle zwei Jahre hält, sind: Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen – Elliptische Funktionen – Anwendungen der elliptischen Funktionen in Geometrie und Mechanik – Abelsche Funktionen – Variationsrechnung. ⟨Neben diesen fünf Hauptvorlesungen hat Weierstraß aber auch Vorlesungen zu anderen Themen gehalten, wie z. B. mehrere Male über synthetische Geometrie. Vieles von dem, was dort geboten wurde, war nirgends gedruckt, jüngste eigene Forschungsergebnisse gehörten dazu. Manche empfingen so Anregungen für ihre eigene wissenschaftliche Arbeit, trugen dann ihrerseits zur Verbreitung der Weierstraßschen Mathematik bei. Auf diese Weise sind Methoden und Forschungsergebnisse Allgemeingut der Mathematiker geworden, auch ohne dass sie in publizierter Form vorlagen. Diese Vorlesungen wurden zu einem Anziehungspunkt für Studenten und bereits ausgebildete Mathematiker des In- und Auslandes. Es wird von bis zu 250 Hörern in seinen Vorlesungen berichtet. Selbst zur anspruchsvollen Vorlesung über Abelsche Funktionen hat es 200 eingeschriebene Hörer gegeben. Nur Kummer, der allerdings nie Ergebnisse seiner neuesten Forschung einfließen ließ, hatte vergleichsweise derart hohe Hörerzahlen.⟩

Weierstraß war in 27 Promotionsverfahren Erstgutachter.[4] Zu seinen Schülern gehören namhafte spätere Universitätsprofessoren, darunter Georg Cantor, Georg Frobenius, Adolf Hurwitz, Gösta Mittag-Leffler, Carl Runge, H. A. Schwarz und – wer wüsste es nicht – Sofja Kowalewskaja.

4. Zur Vorlesung im Wintersemester 1863/64

Auf eine seiner Vorlesungen möchte ich näher eingehen, da sie in der Literatur ganz unbekannt geblieben zu sein scheint.

Im WS 1863/64 hält Weierstraß eine Vorlesung über analytische Funktionen. Von dieser Vorlesung existiert eine Mitschrift von H. A. Schwarz – dem späteren Nachfolger von Weierstraß auf dessen Berliner Lehrstuhl – der wir manches Neue entnehmen können.

Darin finden sich u. a. Angaben zu diesen vier Punkten:

– Konstruktion der reellen und komplexen Zahlen
– Satz von Bolzano – Weierstraß
– Es gibt stetige nirgends differenzierbare Funktionen
– Spezialfall des Produktsatzes

Eine Vorlesung mit demselben Titel hatte Weierstraß bereits zwei Jahre zuvor im Winter 1861 begonnen, musste sie aber nach einem körperlichen Zusammenbruch während einer Vorlesung im Dezember 1861 abbrechen.[5] E. Neuenschwander hat durch die von ihm aufgefundenen Briefe von E. Abbe an H. Schütz belegen können, dass diese Vorlesung tatsächlich bis zu ihrem Abbruch stattgefunden hat (und nicht nur „angekündigt" war, wie im Gesamtverzeichnis der Vorlesungen von Weierstraß in der Werkausgabe (Band 3, 356) angegeben).[6]
Erst nach einem Jahr nimmt Weierstraß seine Vorlesungstätigkeit wieder auf, bleibt aber nun während des Vortrags sitzen. Einer der fortgeschrittenen Studenten übernimmt das Anschreiben an der Tafel. Ein durchaus nicht ganz unproblematisches Amt.
Weierstraß' gesundheitliches Befinden war nicht selten labil, zeitweise so schlecht, dass er seine Forschungen und Vorlesungen unterbrechen musste. Gelegentlich litt er an Schwindelanfällen, die sich täglich wiederholen konnten und sich erst nach Stunden durch einen Brechanfall lösten. Mittag-Leffler notiert sogar:

„*Sein ganzes Leben gestaltete sich* [...] *in äußerer Beziehung zu einer wirklichen Tragödie*."

Es ist also davon auszugehen, dass zumindest Teile des Inhalts der Vorlesung von 1863/64 bereits in dieser abgebrochenen früheren Vorlesung von Weierstraß ausgearbeitet waren.

5. Konstruktion der reellen Zahlen

Das Fundament aller Analysis bilden die reellen Zahlen. Belege für die Behandlung des Zahlbegriffs durch Weierstraß in einer Vorlesung lassen sich bereits für den Beginn des WS 1861/62 finden. Allerdings sind keine Einzelheiten bekannt (s. u.). Diese können wir erstmals einer weiteren Mitschrift von H. A. Schwarz vom WS 1863/64 entnehmen, die merkwürdigerweise ebenfalls ganz unbekannt geblieben zu sein scheint. Es dürfte sich um die frühesten Mitteilungen zum Weierstraßschen Zahlbegriff handeln. Das Dokument befindet sich im Nachlass Schwarz nicht bei der Mitschrift über die analytischen Funktionen, sondern in einem separaten Heft „Theorie complexer Zahlen [.] Winter 1863 – 64", das mit den Worten beginnt:

„*In dieser Vorlesung Vorbereitendes zur Hauptvorlesung*."[7]

Dies dürfte aber m. E. nicht so zu verstehen sein, als hätte es zwei Kurse gegeben. Weierstraß scheint hier die Ausführungen zum Zahlbegriff nicht als Bestandteil der „Hauptvorlesung" über analytische Funktionen angesehen zu haben, sondern als eine davon unabhängige selbständige Thematik. Ab dem WS 1865/66 trug die Vorlesung den Titel „Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen", zu der die Behandlung des Zahlbegriffes gehörte.
In der Ausarbeitung von Schwarz der am Berliner Gewerbeinstitut gehaltenen Vorlesung von Weierstraß im SS 1861 findet sich der Passus: „*Es gibt nun aber auch Größen, die sich durch die Einheit und Teile der Einheit nicht ausdrücken lassen; bei ihnen wendet man die Form der unendlichen Reihe an*." [8]. Da Weierstraß seine Theorie der reellen Zahlen aus der „Einheit" und „Teilen der Einheit" aufbaut (s. u.), ist anzunehmen, dass er zumindest konzeptionell eine Vorstellung von seiner Konstruktion besaß. Allerdings ist der Schwarzschen Ausarbeitung zufolge für Weierstraß dort die Summe einer unendlichen Reihe der Grenzwert ihrer Partialsummen, während er nach der Etablierung seines Zahlbegriffs unendliche Reihen mit einem völlig anderen Konzept behandelt (s. u.). In (Dugac 1973) wird darin und in dem Umstand, dass weitere Andeutungen zum Zahlbegriff dort nicht zu entnehmen sind, ein Indiz dafür gesehen, dass Weierstraß seine Theorie der irrationalen Zahlen noch nicht ausgearbeitet hat und auch in seiner bereits im WS 1861/62 begonnenen gleichnamigen Vorlesung „Allgemeine Theorie der analytischen Functionen" noch nicht entwickelt haben kann: "*Donc, si Weierstrass avait pu faire le cours annoncé pour le semestre de l'hiver 1861 – 1862, on n'aurait pas pu y trouver sa théorie des nombres irrationels telle que nous l'exposerons. Rien de ce qui existe à ce sujet dans le cours d'été de 1861 ne le laisse prévoir. Nous pensons qu'il a mis à profit les deux années, pendant lesquelles il n'a pas fait de cours sur les fonctions analytiques, pour élaborer sa théorie des nombres irrationnels, qui figurait au début de ce cours, et dont il a donné le premier exposé public pendant le semestre d'hiver 1863 – 1864.*"[9]
Dieser Schlussfolgerung kann ich mich nicht uneingeschränkt anschließen. H. Schütz ist Hörer jener Vorlesung im WS 1861/62. Durch ihn erfährt E. Abbe ziemlich regelmäßig Einzelheiten über die Vorträge. In seinem Brief an Schütz vom 22. November 1861 bemerkt Abbe:
„*Besonders Weierstraß flößt mir allen Respect ein, und dabei gereicht es mir zu nicht geringer Genugthuung, viele Ansichten, wie ich sie Dir gegenüber in Göttingen schon ausgesprochen habe, (u. A. die*

über den Unterschied, resp. wesentlichen Gegensatz zwischen den Vorstellungen von Größen und Zahlen) bei ihm genau so wieder zu finden.“[10]
Einen Monat später schreibt Abbe am 21. Dezember an Schütz:
„*Daß eine solche Verallgemeinerung der Zahlvorstellung, durch welche W[eierstraß] die Realität der compl[exen] Zahlen begründen will, durch die Natur der Zahlvorstellung ausgeschlossen ist, und daher W[eierstraß] die fragliche Schwierigkeit nicht hebt sondern nur scheinbar versteckt.*“[11]

Danach ist jedenfalls klar, dass Weierstraß in der Tat über den Zahlbegriff vorgetragen hat. In welcher Art und Weise und in welchem Umfang, lässt sich den brieflichen Mitteilungen nicht entnehmen. Hier wären die Gegenbriefe von Schütz außerordentlich aufschlussreich. Leider konnten sie nicht aufgefunden werden.

Dass von all dem nichts in der Vorlesung vom SS 1861 – soweit sie in der Ausarbeitung von H. A. Schwarz vorliegt[12] – zu finden ist, begründet also nicht die von P. Dugac gezogene Schlussfolgerung. Eine Erklärung könnte sein, dass der doch nicht unbeträchtliche Aufwand, der bei der Darstellung des Weierstraßschen Zahlbegriffs erforderlich ist, den Rahmen einer Vorlesung – wie die über Differentialrechnung im SS 1861 (noch dazu am Berliner Gewerbeinstitut) – gesprengt haben würde und erst in einer gesonderten Vorlesung realisierbar wäre (vgl. den Kommentar nach Anmerkung 7). So nimmt in der Ausarbeitung von Hettner (SS 1874) der Zahlbegriff immerhin etwa 20%, in der Ausarbeitung von Hurwitz (SS 1878) sogar etwa 25% des Umfangs der gesamten Vorlesung ein.

Durch das oben erwähnte Dokument ist die Datierung der ersten noch existierenden Mitteilungen von Weierstraß zum Zahlbegriff auf das WS 1863/64 jedenfalls gesichert. In (Dugac 1973) findet sich für diese Datierung kein Beleg, alle dortigen Angaben zum Zahlbegriff beziehen sich auf Texte späteren Datums.

Die Idee der Weierstraßschen Konstruktion besteht in der Formalisierung des Gedankens, dass jede reelle Zahl (endliche oder unendliche) Summe ausgewählter rationaler Zahlen ist. Dazu ist zweierlei zu leisten: Es muss definiert werden, wann solche formal aufzufassenden Summen endlich sein sollen und es ist eine Äquivalenzrelation einzuführen, die die Gleichheit zweier endlicher Summen bestimmt.
Ein näheres Eingehen auf den Weierstraßschen Zahlbegriff scheint mir sinnvoll, da die Mitschriften bzw. Ausarbeitungen seiner Vorlesungen hierzu nicht immer eindeutig, gelegentlich unvollständig oder fehlerhaft sind.
Die nachfolgenden Angaben weichen teilweise von den Originalbezeichnungen und Originalformulierungen wie auch von den Begründungen ab, folgen aber dem Vorgehen von Weierstraß. $\langle$Gegenüber den leicht handhabbaren Dedekindschen Schnitten und den verallgemeinerungsfähigen Cantorschen (bzw. Merayschen) Fundamentalfolgen (Cauchyfolgen) ist der Weierstraßsche Ansatz heutzutage bei der Einführung der reellen Zahlen in den Hintergrund getreten.$\rangle$
Ausgangspunkt für den Zahlbegriff sind die natürlichen Zahlen. Hier belässt es Weierstraß bei allgemeinen Bemerkungen zum Vorgang des Zählens, ohne eine axiomatische Charakterisierung zu geben. Die natürlichen Zahlen werden mit ihren Eigenschaften im Folgenden als gegeben vorausgesetzt. Die sich anschließenden Konstruktionen sind dann aber exakt.

Aggregate aus endlich vielen Elementen

Die positiven rationalen Zahlen werden aus Symbolen $\frac{1}{n}$ für alle natürliche Zahlen n konstruiert. Weierstraß nennt sie „genaue Theile der Einheit“ und für $n=1$ „Einheit“ (der Kürze halber hier sowohl mit „1“ als auch mit „$\frac{1}{1}$“ bezeichnet). Mit diesen führt er „Zahlgrößen“ ein, die zunächst nur aus endlich vielen Teilen der Einheit a_i, $1 \le i \le m$, gebildet werden, zu der die Angabe gehört, wie oft jedes a_i auftritt. Im WS 1863/64 verwendet Weierstraß allerdings nur „Zahl“. Da sich die zu definierenden rationalen Zahlen wie auch die irrationalen als Äquivalenzklassen solcher Zahlgrößen ergeben werden, soll hier für sie der Terminus „Aggregat“ verwendet werden, der auch gelegentlich bei Weierstraß vorkommt. Wir wollen mit Weierstraß die a_i der Kürze halber auch „Elemente“ nennen und für Aggregate die Bezeichnung $[a_1,...,a_m]$ verwenden (Weierstraß belässt es bei einem Buchstaben oder einer nur verbalen Formulierung).

Zur Orientierung sei angemerkt, dass sich später herausstellen wird, dass Aggregate mit der Summe ihrer Elemente übereinstimmen.
Für Aggregate werden folgende Transformationen definiert:

$$m \text{ Elemente } \frac{1}{m \cdot n} \text{ können durch das Element } \frac{1}{n} \text{ ersetzt werden und umgekehrt} \qquad (1)$$

(für beliebige natürliche Zahlen m, n). Dabei soll keine Rolle spielen, an welcher Stelle die Elemente stehen.
Zwei Aggregate A und B nennen wir äquivalent, $A \sim B$, wenn jedes durch eine endliche Anzahl von diesen Transformationen in das jeweils andere transformierbar ist. Damit ist in der Tat eine Äquivalenzrelation definiert. Weierstraß spricht nicht von Äquivalenzen oder Äquivalenzklassen sondern durchweg von „gleichen Zahlgrößen". Das führt dann auf Formulierungen, wie z. B. „aus $A = B$ und $B = C$ folgt $A = C$" für Aggregate A, B, C.
Aggregate, die sich nur durch die Reihenfolge der Elemente unterscheiden, sind demnach äquivalent.

Weierstraß möchte Aggregate vergleichen und führt eine Ordnungsrelation ein:
Es gelte $A \le B$, falls ein $B' \sim B$ existiert, das alle Elemente von A (und jedes mindestens genauso oft) enthält. Enthält B' wenigstens ein weiteres Element, so wird $A < B$ gesetzt.
Hier müsste man sich vergewissern, dass für beliebige Aggregate A, B *genau eine* der Relationen $A \sim B$, $A < B$, $B < A$ eintritt. In den mir bekannten Mitschriften und Ausarbeitungen wird das stillschweigend angenommen bzw. als selbstverständlich angesehen. Man sieht natürlich, dass die Summe der Elemente bei den Transformationen sich nicht ändert. Aber die Addition ist noch gar nicht definiert! Zum Nachweis können wir so vorgehen:
Jedes Aggregat A ist gewissen Aggregaten $\left[\frac{1}{a},\dots,\frac{1}{a}\right]$ äquivalent, die jeweils nur aus denselben Elementen $\frac{1}{a}$ bestehen (als a kann z. B. jedes gemeinsame Vielfache der endlich vielen Nenner in A gewählt werden).
Für $A = \left[\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_m}\right]$ bilden wir die natürliche Zahl $s(A,a) = \frac{a}{a_1} + \dots + \frac{a}{a_m}$, worin a ein beliebiges gemeinsames Vielfaches der Nenner von A ist.

Behauptung. Es gilt
(i) $A \sim B$ genau dann, wenn $s(A,a) = s(B,a)$,
(ii) $A < B$ genau dann, wenn $s(A,a) < s(B,a)$
für irgendein gemeinsames Vielfaches a aller in A und B auftretenden Nenner.

Zunächst ist zu bemerken, dass die Aussage von der Wahl von a unabhängig ist. Das folgt aus der Tatsache, dass jedes a Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller in A und B auftretenden Nenner ist.
Beweis von (i): Offenbar gilt
$A \sim \left[\frac{1}{a},\dots,\frac{1}{a}\right]$ (mit $s(A,a)$ Elementen $\frac{1}{a}$) und $B \sim \left[\frac{1}{a},\dots,\frac{1}{a}\right]$ (mit $s(B,a)$ Elementen $\frac{1}{a}$)
Aus $s(A,a) = s(B,a)$ folgt damit trivialerweise $A \sim B$.
Nach der obigen Bemerkung kommt es darauf an, dass auch die Umkehrung zutrifft.
Es sei $A \sim B$. Um nachzuweisen, dass $s(A,a) = s(B,a)$ gilt, hat man sich nun nur davon zu überzeugen, dass bei jeder Transformation (1) eines Aggregates T in ein Aggregat T' gilt: $s(T,a) = s(T',a)$ für ein beliebiges gemeinsames Vielfaches a der Nenner in T und T'. Das lässt sich aber sofort verifizieren.
Wir hätten daher auch die natürlichen Zahlen $s(A,a)$ zur Definition der Äquivalenz von Aggregaten verwenden können, ohne Transformationen einzuführen.
Beweis von (ii):

Es sei $A < B$. Ist $B' \sim B$ ein Aggregat, das alle Elemente von A (und ebenso oft) und wenigstens ein weiteres enthält, so folgt $s(A,a) < s(B',a)$ für ein gemeinsames Vielfaches a der Nenner von A und B' sowie zusätzlich von B. Nach (i) ist $s(B',a) = s(B,a)$.

Es sei $s(A,a) < s(B,a)$. Da $\left[\frac{1}{a},...,\frac{1}{a}\right]$ (mit $s(A,a)$ Elementen) in A transformiert werden kann, kann $\left[\frac{1}{a},...,\frac{1}{a}\right]$ (mit $s(B,a)$ Elementen) in ein Aggregat B' transformiert werden, das aus allen Elementen von A und $s(B,a) - s(A,a)$ Elementen $\frac{1}{a}$ besteht. Wegen $B' \sim B$ folgt $A < B$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Die positiven rationalen Zahlen können nun als Äquivalenzklassen von Aggregaten definiert werden. Weierstraß führt diesen Begriff erst nach Einbeziehung von Aggregaten mit unendlich vielen Teilen der Einheit ein.

Aus der Behauptung ergibt sich sofort, dass die Relation $<$ mit der Äquivalenz verträglich ist, d. h. aus $A < B$ und $A \sim A'$, $B \sim B'$ folgt $A' < B'$. Aus $A < B < C$ folgt $A < C$.

Damit ist für die positiven rationalen Zahlen eine Ordnungsrelation eingeführt.

Die Addition zweier Aggregate $A = [a_1,...,a_m]$, $B = [b_1,...,b_n]$ wird durch $A + B = [a_1,...,a_m, b_1,...,b_n]$ definiert.

Für diese Addition gelten offensichtlich das Kommutativ- und das Assoziativgesetz.

Damit ist $[a_1,...,a_n] = [a_1] + ... + [a_n]$, d. h. Aggregate sind die Summen von Aggregaten, die jeweils nur aus *einem* Teil der Einheit gebildet sind. Daraus ist das Weierstraßsche Konzept ersichtlich: die positiven rationalen Zahlen über die endlichen Summen von Stammbrüchen zu definieren.

Die Multiplikation von Aggregaten wird durch

$[a_1,...,a_n] \cdot [b_1,...,b_m] = [a_1b_1,...,a_ib_j,....,a_nb_m]$ unter Verwendung von $\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{k \cdot l}$ definiert.

Für diese Multiplikation gelten das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz.

Zur späteren Anwendung bemerken wir:

$$\text{Aus } A < B \text{ folgt } AC < BC. \qquad (2)$$

Das ergibt sich aus der Behauptung mit $s(A,a) < s(B,a)$, $s(AC,a^2) = s(A,a)s(C,a)$ für ein gemeinsames Vielfaches a der Nenner von A, B, C.

Addition und Multiplikation lassen sich für die Äquivalenzklassen definieren. Denn für $A \sim A'$, $B \sim B'$ folgt aus der Behauptung $A + B \sim A' + B'$ und $A \cdot B \sim A' \cdot B'$

Aggregate aus unendlich vielen Elementen

Zur Definition der positiven irrationalen Zahlen, aber auch, um z. B. $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ zu erhalten (s. u.), müssen nun Aggregate betrachtet werden, die aus unendlich vielen Teilen der Einheit bestehen. Weierstraß verwendet erst später den Terminus „irrationale Zahl", „*weil wir zunächst gar nicht wissen können, ob es außer den rationalen noch andere Zahlgrößen gebe*" [13]

Ziel ist die neuerliche Definition einer Äquivalenz zweier Aggregate, die jetzt aber aus endlich vielen oder auch unendlich vielen Teilen der Einheit gebildet sind und im Falle endlich vieler mit der bereits gegebenen identisch ist. Die obigen Transformationen sind dafür nicht mehr geeignet, da für unendlich viele Nenner nicht mehr in der bisherigen Weise mit einem gemeinsamen Vielfachen gearbeitet werden kann. So lässt sich z. B. das Aggregat $\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2^k}, ...\right]$ nicht durch endlich viele Transformationen in das Aggregat [1, 1] überführen. Nach der Mitschrift von Schwarz bemerkt Weierstraß hierzu: „der Gleichheitsbegriff ist umfassender". Statt der Transformationen werden nun die positiven rationalen Zahlen verwendet, die

Weierstraß deshalb zunächst eingeführt hat. Das Vorgehen basiert – wie beim Dedekindschen Schnitt – auf der alten schon in der Antike entwickelten Idee von Eudoxos, die in heutiger Terminologie als die Charakterisierung der reellen Zahlen durch rationale Zahlen beschrieben werden kann.
Es sei A ein Aggregat aus endlich oder unendlich vielen Teilen der Einheit.
1. Für ein Aggregat B aus *endlich* vielen Teilen der Einheit wird $B < A$ gesetzt, falls $B < A'$ für ein gewisses Aggregat A' gilt, das aus nur *endlich* vielen Teilen der Einheit von A besteht (hierfür wurde $<$ bereits definiert; besteht A aus endlich vielen Teilen der Einheit, so ist diese Definition mit der oben angegebenen identisch).
2. Falls für alle Aggregate $[1,1,\ldots,1]$ gilt $[1,1,\ldots,1] < A$, so spricht Weierstraß von einer „unendlich großen Zahlgröße". Diese schließt er von der weiteren Betrachtung aus, da man mit ihnen zu „keinem ersprießlichen Resultat"[14] gelange (hinsichtlich eines Begriffs der Gleichheit). Die übrigen Aggregate wollen wir *beschränkt* nennen (Weierstraß nennt sie „endliche Zahlgrößen"; wir weichen davon ab, um eine Verwechslung mit Aggregaten aus nur endlich vielen Elementen zu vermeiden).
3. Für beliebige beschränkte Aggregate A, A' wird $A \le A'$ gesetzt, falls für alle Aggregate B aus endlich vielen Teilen der Einheit gilt: aus $B < A$ folgt stets $B < A'$.
Damit ist eine Ordnungsrelation unter den beschränkten Aggregaten definiert.
Bestehen beide Aggregate nur aus endlich vielen Teilen der Einheit, so gilt: aus $A \le A'$ folgt $s(A,a) \le s(A',a)$ für ein gemeinsames Vielfaches a der Nenner von A und A'.
4. Für beliebige beschränkte Aggregate wird $A \sim A'$ gesetzt, falls $A \le A'$ und $A' \le A$ gilt.
Bestehen beide Aggregate nur aus endlich vielen Teilen der Einheit, so ist diese Definition mit der oben gegebenen identisch: denn aus 3. folgt $s(A,a) = s(A',a)$ und damit sind A und A' nach der Behauptung äquivalent in der ursprünglich angegebenen Bedeutung.
5. Die positiven reellen Zahlen können nun als Äquivalenzklassen beschränkter Aggregate definiert werden.
In der Originalformulierung von Weierstraß: „*Zwei Zahlengrößen a und a' heißen gleich, wenn sowohl die Einheit, wie jeder Theil derselben, in a ebenso oft enthalten ist, wie in a'.*"[15]

$$\text{Beispiel:}\quad [1,\,1] \sim \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots\right] \tag{3}$$

Behauptung 1: $[1,\,1] \le \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots\right]$.

Beweis: Es sei B ein beliebiges Aggregat aus endlich vielen Teilen der Einheit mit $B < [1,\,1]$. Es gelte $B \sim \left[\frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{b}\right]$ (mit s Elementen $\frac{1}{b}$). Aus $[1,\,1] \sim \left[\frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{b}\right]$ mit $2b$ Elementen $\frac{1}{b}$ folgt $s < 2b$. Es lässt sich ein k mit $b < 2^k(2b - s)$ wählen. Für $A' = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \ldots, \frac{1}{2^k}\right]$ gilt $A' \sim \left[\frac{1}{2^k}, \ldots, \frac{1}{2^k}\right]$ mit $2^{k+1} - 1$ Elementen $\frac{1}{2^k}$.
Wegen $B \sim \left[\frac{1}{2^k b}, \ldots, \frac{1}{2^k b}\right]$ mit $2^k s$ Elementen $\frac{1}{2^k b}$ folgt aus
$A' \sim \left[\frac{1}{2^k b}, \ldots, \frac{1}{2^k b}\right]$ mit $(2^{k+1} - 1)b$ Elementen $\frac{1}{2^k b}$ und $2^k s < (2^{k+1} - 1)b$ schließlich $B < A'$.

Behauptung 2: $\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots\right] \le [1,\,1]$.

Beweis: Es sei B ein beliebiges Aggregat aus endlich vielen Teilen der Einheit mit
$B < \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots\right]$. O. B. d. A. sei $B < \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}\right]$. Es gelte $B \sim \left[\frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{b}\right]$ (mit s Elementen $\frac{1}{b}$).
Wegen $\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}\right] \sim \left[\frac{1}{2^k b}, \ldots, \frac{1}{2^k b}\right]$ mit $(2^{k+1} - 1)b$ Elementen $\frac{1}{2^k b}$ und

$B \sim \left[\frac{1}{2^k b},...,\frac{1}{2^k b}\right]$ mit $2^k s$ Elementen $\frac{1}{2^k b}$ folgt $2^k s < (2^{k+1}-1)b$ und daraus $2^k s < 2^{k+1} b$. Da $[1, 1]$ $\sim \left[\frac{1}{2^k b},...,\frac{1}{2^k b}\right]$ mit $2^{k+1} b$ Elementen $\frac{1}{2^k b}$ folgt $B < [1, 1]$.
Aus den beiden Behauptungen folgt (3).

Addition und Multiplikation von beschränkten Aggregaten mit unendlich vielen Elementen werden analog wie oben eingeführt. Die so definierten Aggregate sind offenbar wieder beschränkt. Kommutativität, Assoziativgesetz und Distributivgesetz ergeben sich ganz entsprechend.
Um die Ordnungsrelation und die Rechenoperationen auch für die positiven reellen Zahlen zur Verfügung zu haben, muss man verifizieren, dass sie von der Wahl der Vertreter aus den Äquivalenklassen unabhängig sind. Das basiert auf dem Umstand, dass die Relation „$\le$“ (und damit auch „$\sim$“) allein mit Verwendung von Aggregaten aus *endlich* vielen Elementen definiert ist und die Repräsentantenunabhängigkeit daher aus den entsprechenden Äquivalenzaussagen für Aggregate mit nur endlich vielen Elementen folgt. Um für die Multiplikation zu zeigen, dass aus $A' \sim A$, $B' \sim B$ auch $A' \cdot B' \sim A \cdot B$ folgt, ist es vorteilhaft zu verwenden, dass aus $A \le B$ folgt $A \cdot C \le B \cdot C$ (was mit Hilfe von (2) zu erhalten ist).

Unendliche Reihen
Besonders bemerkenswert und elegant gestaltet sich die Behandlung unendlicher Reihen positiver reeller Zahlen. Weierstraß kommt gänzlich ohne Konvergenzbetrachtungen (etwa, wie üblich, als Grenzwert der Partialsummen) oder durch Verwendung des Supremums (dessen Existenz an dieser Stelle noch nicht bewiesen ist) aus.

Zunächst bemerkt Weierstraß: um bei unendlich vielen Summanden $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ sinnvoll von einer Summe sprechen zu können, müsse die Reihe notwendig beschränkt sein, d. h. es existiert ein Vielfaches *g* der Einheit, so dass die Summe einer beliebigen endlichen Anzahl von Summanden stets kleiner als *g* ist. Dann beweist er, dass diese Bedingung auch hinreichend ist. Denn jedes Element $\frac{1}{n}$ kann nur in einer endlichen Anzahl von Summanden A_i (und dort jeweils nur endlich oft) vorkommen (zufolge der Beschränktheit), sagen wir, insgesamt genau a_n-mal. Das Aggregat $\left[\frac{a_1}{1},\frac{a_2}{2},...,\frac{a_n}{n},...\right]$, wobei zur Abkürzung $\frac{a_n}{n}$ für a_n Elemente $\frac{1}{n}$ stehen soll, falls $a_n \ge 1$, ansonsten soll $\frac{1}{n}$ nicht vorkommen. Dieses Aggregat ist aber beschränkt (die zugehörige Äquivalenzklasse definiert also eine reelle Zahl)! Es gilt nämlich $\left[\frac{a_1}{1},\frac{a_2}{2},...,\frac{a_n}{n},...\right] \le g$. Denn für jedes Aggregat $B < \left[\frac{a_1}{1},\frac{a_2}{2},...,\frac{a_n}{n},...\right]$, das nur aus endlich vielen Elementen besteht, folgt $B < \left[\frac{a_1}{1},\frac{a_2}{2},...,\frac{a_n}{n}\right]$ für ein genügend großes *n*. Die darin vorkommenden Elemente $\frac{1}{k}$ stammen aus endlich vielen Summanden A_i , was $B<g$ zur Folge hat.

Nun kann die unendliche Summe definiert werden: $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \left[\frac{a_1}{1},\frac{a_2}{2},...,\frac{a_n}{n},...\right]$. An dieser Stelle schon den Begriff Konvergenz zu verwenden, wäre nicht motiviert. Das wird erst später angebracht sein (s. u.).
Es folgt weiterhin – wie im Fall von Aggregaten mit nur endlich vielen Elementen – für beschränkte Aggregate $[a_1,...,a_n,...] = \sum_{i=1}^{\infty}[a_i]$.

Um schließlich zu den positiven reellen Zahlen zu gelangen, ist nun nur noch zu verifizieren, dass der Übergang zu äquivalenten Summanden zu einer äquivalenten Summe führt. In der Ausarbeitung von

Hurwitz liest man: „Wir wollen jetzt nachweisen, daß in einer Summe mit unendlich vielen Gliedern Gleiches für Gleiches gesetzt werden kann, ohne den Werth der Summe zu verändern.“[16].

Für beschränkte Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} B_i$ folgt sofort $\sum_{i=1}^{\infty} A_i + \sum_{i=1}^{\infty} B_i = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i + B_i)$.

Mehr noch, der Weierstraßsche Doppelreihensatz für unendliche Reihen positiver Zahlen ergibt sich aus dieser Vorgehensweise geradezu von selbst. Diesen Satz zählt Weierstraß zu den Sätzen, die „die Grundlage für die ganze Reihentheorie“ bilden.[17]

Als unmittelbare Folgerungen, die Weierstraß als selbstverständlich ansieht und nicht extra erwähnt (aber verwendet), ergeben sich das Majorantenkriterium (allein daraus, dass durch die Majorante die Reihe beschränkt ist) sowie daraus das Quotienten- und Wurzelkriterium.

Damit ist auch die Multiplikation zweier beschränkter unendlicher Reihen als (dann ebenfalls beschränkte) Doppelreihe gegeben: $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} B_j = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_i B_j$. Danach werden Produkte aus unendlich vielen Faktoren behandelt.

Nachdem alle reellen und schließlich die komplexen Zahlen eingeführt sind, wird der Zusammenhang mit dem üblichen Begriff der Summe einer unendlichen Reihe als Grenzwert ihrer Partialsummen hergestellt (ohne die Verwendung der Termini „Grenzwert“ und „Partialsumme“: zu jedem $\varepsilon > 0$ lassen sich endlich viele Summanden aussondern, so dass die Summe der übrigen Summanden dem Betrage nach kleiner als ε ist (daraus ergibt sich die Aussage für die Partialsummen)). Im Beweis wird die Verallgemeinerung der Tatsache, dass der Betrag einer endlichen Anzahl von Summanden ≤ der Summe ihrer Beträge ist, für unendlich viele Summanden verwendet, was sorgfältig begründet wird, denn, so Weierstraß: *„Es giebt aber nichts Gefährlicheres in der Analysis, als Sätze, die für eine endliche Anzahl von Größen gelten, ohne Beweis auf eine unendliche Anzahl zu übertragen*.“[18]

Nun ist es auch angebracht, von konvergenten Reihen zu sprechen.

Bei seinen Anwendungen geht es Weierstraß um Konvergenzaussagen für Potenzreihen. Dabei scheint er allerdings keinen Gebrauch von dieser Grenzwertauffassung zu machen und verwendet dafür sein leicht zu handhabendes Konzept der beschränkten Reihen in Verbindung mit dem grundlegenden Abelschen Konvergenzlemma für Potenzreihen (ohne Verweis auf Abel), so etwa bei der Behandlung der Exponential- und Logarithmusfunktion.

Erst an späterer Stelle der Vorlesung beweist Weierstraß die Existenz des Supremums (bei ihm „obere Grenze“) dadurch, dass er diese Größe als Reihe darstellt, die beschränkt ist (durch Angabe einer konvergenten Majorante) und somit eine reelle Zahl definiert. Ganz analog wird die Existenz des Infimums gezeigt (bei ihm „untere Grenze“). Auf diese Weise steht auch die Vollständigkeit der reellen Zahlen zur Verfügung.

Als Folgerung aus der Existenz des Supremums beweist Weierstraß im SS 1874 die Existenz des Konvergenzradius für Potenzreihen und im SS 1878 den Satz von Bolzano-Weierstraß (ohne ihn so zu bezeichnen), mit dem er als Anwendung u. a. den Nullstellensatz für stetige Funktionen beweist.

Hinzunahme negativer Zahlen

Die uneingeschränkte Ausführbarkeit der Subtraktion $A-B$ von Aggregaten erfordert die Einführung neuer Größen, so dass stets ein C mit $C+B=A$ existiert. Unter der Annahme, dass ein solcher erweiterter Zahlbereich vorliegt, wird begründet, dass die Größe $A-A$ von A unabhängig ist. Sie wird mit 0 bezeichnet. Zur Konstruktion eines solchen Bereiches wiederholt Weierstraß für eine weitere Einheit e' und ihre „genauen Teile“ $\frac{e'}{n}$ wie für die Einheit $e=1$ die Bildung von Aggregaten. Es werden Linearkombinationen $A+A'$ für beschränkte Aggregate A, die bezüglich der Einheit e und beschränkte Aggregate A', die bezüglich der Einheit e' gebildet sind, betrachtet. Weierstraß nennt sie „complexe Zahlen“ oder auch „complexe Größen“. Ihre Addition erfolgt komponentenweise definiert. Wird $\frac{e}{n}+\frac{e'}{n}=0$ festgelegt, so ist die Subtraktion für diese „complexen Zahlen“ stets ausführbar. Die Aggregate A führen auf die positiven reellen Zahlen, die Aggregate A' auf die negativen. Aus heutiger Sicht entspricht das schließlich der Bildung von Paaren (α,α') für positive reelle Zahlen α,α' mit der Äquivalenzrelation:

$(\alpha,\alpha') \sim (\beta,\beta')$ genau dann, wenn $\alpha+\beta'=\alpha'+\beta$. Alle reellen Zahlen können nun als die zugehörigen Äquivalenzklassen definiert werden.

Abschließend sei bemerkt, dass Weierstraß für unendliche Reihen $\sum_{i=1}^{\infty}(A_i + A_i')$ die Konvergenz so festlegt, dass sowohl $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ als auch $\sum_{i=1}^{\infty} A_i'$ konvergieren soll, die Reihen also im obigen Sinn beschränkt sind. Es soll demnach die Summe der positiven Summanden und die Summe der negativen Summanden für sich konvergieren. Weierstraß betont, dass diese Reihen in beliebiger Weise in Teilsummen gruppiert werden können und die Summe der Teilsummen davon unabhängig ist und verwendet deshalb für sie den Terminus „unbedingt convergent“. Er beweist, dass das genau die absolut konvergenten Reihen sind. In seiner ersten Behandlung des Zahlbegriffs in der Vorlesung im WS 1863 – 1864 motiviert Weierstraß sein Vorgehen damit, dass, wenn man es „*nicht unter diesem Gesichtspunkt*“ sieht, „*so kommt man zu dem Paradoxon*“, dass bei einer bedingt konvergenten Reihe sich „*jede Zahl darstellen lasse*“ und wiederholt: „*Nun ist es leicht zu zeigen, daß man jeder beliebigen Zahl beliebig nahe kommt; – der Begriff der Summe hört also auf*“. Das ist der Riemannsche Umordnungssatz aus dessen Habilitationsschrift von 1854, die aber erst posthum 1867 publiziert wurde. Weierstraß hat also diesen Satz vor dessen Publikation gekannt.

Weierstraß sieht sich veranlasst, ausdrücklich darauf hinzuweisen (besonders deutlich selbst noch in seiner im SS 1886 gehaltenen Vorlesung über „Ausgewählte Kapitel aus der Functionenlehre“), dass es ein logischer Fehler sein würde, die irrationalen Zahlen als Grenzwert von rationalen Zahlen *definieren* zu wollen. Eine solche Grenzwertaussage wird erst dann sinnvoll, wenn man die reellen Zahlen bereits definiert hat:

„*Wenn wir von der Existenz rationaler Zahlgrößen ausgehen, so hat es keinen Sinn, die irrationalen als Grenzen derselben zu definieren, weil wir zunächst gar nicht wissen können, ob es außer den rationalen noch andere Zahlgrößen gebe.*“ [Vgl. Zitat zu Anm. 13.]

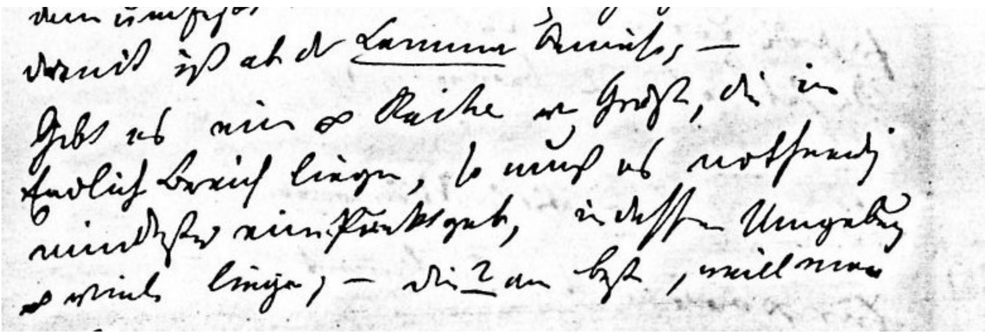
$\langle$Weierstraß hat seine Konstruktion nie publiziert. Sie tritt nur in seiner Vorlesung über die Theorie der analytischen Funktionen auf, kann also allein den diesbezüglichen Mitschriften und Ausarbeitungen entnommen werden.$\rangle$

6. Zum Satz von Bolzano-Weierstraß

Sind die reellen Zahlen konstruiert, so bildet der Satz von Bolzano-Weierstraß den ebenso elementaren wie fundamentalen Ausgangspunkt für die ersten grundlegenden Sätze der Analysis.
In der Mitschrift von Schwarz liest man:

„*[...] ich brauche einen Hülfssatz, den man bei feineren mathematischen Untersuchungen nicht entbehren kann;*“

(offenbar so von Weierstraß in der Vorlesung formuliert).
Für beschränkte unendliche Punktmengen der komplexen Zahlenebene wird das folgende „Lemma“ bewiesen:



„*Gibt es eine ∞ Reihe von Größen, die im Endlichen Bereich liegen, so muß es nothwendig mindestens einen Punkt geben, in dessen Umgebung ∞ viele liegen;*“[19]

⟨Das ist der Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{C}$, wenn auch von Schwarz nicht korrekt formuliert (aber gewiss richtig im Sinne von Weierstraß verstanden; man beachte dabei, dass es sich um eine Mitschrift handelt). Es muss natürlich heißen, dass in *jeder* Umgebung jenes Punktes unendlich viele Punkte der vorgegebenen Punktmenge liegen (oder man liest „Umgebung*en*" – die Formulierung „Häufungspunkt" tritt noch nicht auf).⟩
Es ist der früheste mir bekannte Nachweis für diesen Satz in einer Weierstraß-Vorlesung. In der Literatur sind die Datierungen zuweilen vage oder unzutreffend. Es ist nicht klar, ob Weierstraß zu diesem Zeitpunkt Kenntnis von Bolzanos Arbeit (Bolzano 1817) hatte. Spätestens 1869 muss sie ihm bekannt gewesen sein.[20]

Wozu benötigt Weierstraß diesen „Hülfssatz"? Er wendet ihn sogleich zum Beweis des Identitätssatzes für Potenzreihen an (wenn diese an unendlich vielen Stellen einer beschränkten Menge in $\mathbb{C}$ übereinstimmen, so existiert dann wenigstens ein Häufungspunkt und die Reihenentwicklung um diesen Punkt liefert den betreffenden Satz).

⟨Übrigens gehörte Georg Cantor ebenfalls zu den Hörern dieser Vorlesung. Er war im Herbst 1863 nach Berlin gekommen, wo er bis zum Sommer 1866 blieb. Cantor war also, ebenso wie Schwarz, buchstäblich „von der ersten Stunde an" mit jener Weierstraßschen Deduktion vertraut.⟩

So einsichtig sich dieser Satz uns heute darbietet, trifft er damals – wie auch die Begriffe Infimum und Supremum (die bei Weierstraß „untere" bzw. „obere Grenze" heißen) – dennoch auf Widerstand. Als prominentester Kritiker meldet sich Weierstraß' Berliner Kollege Kronecker zu Wort.
Kronecker schreibt am 3. Juni 1870 an Schwarz:

„Andrerseits beruht die Cantorsche Deduktion auf dem auch von Ihnen angewendeten Weierstraßschen "Beweisverfahren" mit der "oberen oder unteren Grenze", welches ich ebensowenig gelten lasse wie die weit offenbareren Bernard Bolzanoschen Trugschlüsse. [...] *Ich bin sogar überzeugt, daß man Functionen wird aufstellen können, die so unvernünftig sind, daß sie – trotz des Zutreffens von Weierstraß' Voraussetzungen – keine obere Grenze <u>haben</u>. Alle solche allgemeinen Sätze haben ihre Schlupfwinkel, wo sie nicht mehr gelten* [...] *Mir ist es – wie gesagt – ganz klar geworden, daß die Weierstraßsche Behauptung der Existenz einer "oberen Grenze" in jener Allgemeinheit unbeweisbar (vielleicht auch nicht wahr)* [...] *ist."*

Wenige Tage darauf bringt Kronecker Schwarz gegenüber erneut seine ablehnende Haltung zum Satz von der Existenz des Supremums und seiner Verwendung durch Cantor zum Ausdruck:

„Die mannigfachsten Versuche, die Weierstraß [...] *gemacht hat, meine Zweifel zu besiegen, sind sämmtlich fehlgeschlagen. Daß jenes Maximum <u>unbeweisbar</u> ist, glaubt (wie ich meine) Weierstraß jetzt selbst, nur hält er trotzdem dasselbe für existent."*[21]

Kroneckers – ich möchte es als seine „Arithmetisierungsvision" bezeichnen – sah es als Idealziel an, allein solche mathematischen Begriffe zuzulassen, deren Definition nur Konstruktionen aus *endlich* vielen Schritten beinhaltet. Beispielsweise war die Definition der Irreduzibilität von Polynomen erst dann legitimiert, wenn ihr ein Verfahren beigefügt ist, durch das für jedes gegebene Polynom nach endlich vielen Schritten entschieden werden kann, ob es irreduzibel ist oder nicht. Für irrationale Zahlen oder den Satz von Bolzano-Weierstraß war da kein Platz.

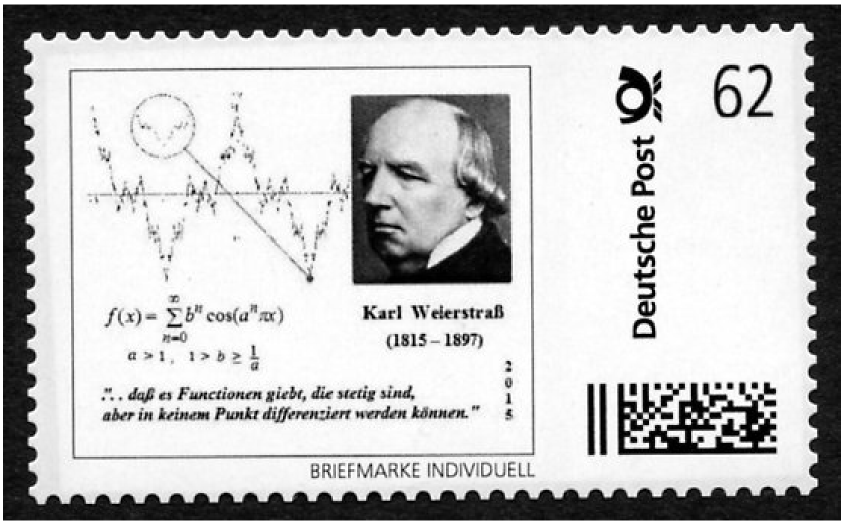
Man hat sich zu vergegenwärtigen, dass zum damaligen Zeitpunkt die von Weierstraß vertretenen Prinzipien beim Aufbau der Analysis nicht im Druck vorlagen. Insbesondere lag noch keine *publizierte* Theorie der reellen Zahlen vor. Ohne diese sind aber Zweifel an der Richtigkeit solch allgemeiner Sätze durchaus verständlich. ⟨Eben diesem Mangel abzuhelfen veröffentlichte Eduard Heine 1872 eine Reihe von Sätzen, wie sie in den Vorlesungen von Weierstraß auftraten. Es ist die erste Publikation über die Grundlagen der Analysis nach Weierstraß überhaupt.

Zu den Sätzen über stetige Funktionen gehört dabei auch der Extremwertsatz, der häufig als „Satz von Weierstraß" bezeichnet wird (vielleicht gerade aufgrund dieser Publikation), allerdings erstmals schon bei Bolzano auftritt. Bolzano verwendet in seinem Beweis die Existenz eines Häufungspunktes, wie er sich aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß ergibt; sein Nachweis ist – bis auf die nicht thematisierte Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen – einwandfrei.⟩ Es wäre also gerechtfertigt und nur konsequent, auch diesen Satz als „Satz von Bolzano-Weierstraß" zu bezeichnen.

7. Existenz stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen

Wie bekannt, hält Weierstraß im Juli 1872 in der Berliner Akademie einen Vortrag über eine Funktion, die für alle reellen Zahlen definiert und stetig ist, aber an keiner Stelle differenziert werden kann – was der unmittelbaren Anschauung zunächst zu widersprechen scheint; es war allgemein angenommen worden, dass stetige Funktionen bis auf isoliert liegende Ausnahmen differenzierbar sind; sogar „Beweise" wurden dafür angegeben.

⟨Bei nächster Gelegenheit – im Sommer 1874, als er wieder über die Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen liest – geht Weierstraß ausführlich auf seine Funktion ein.⟩ Wir erinnern uns an den Pädagogen, der verlangt, dem Lernenden einen Einblick in seine Forschungen nicht zu versagen.

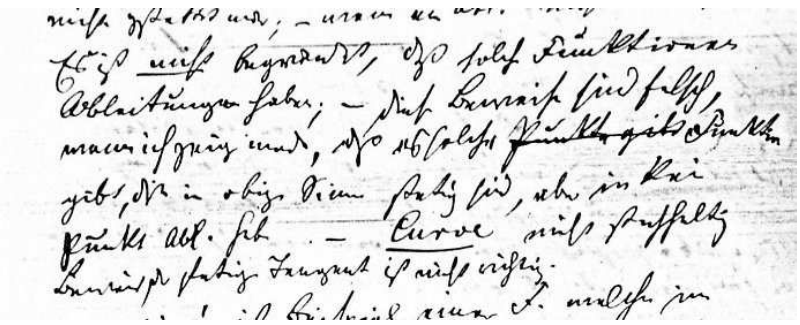


Seine Funktion ist berühmt geworden. Sie hat es sogar bis auf diese Briefmarke geschafft, die ich anlässlich des Weierstraß-Jubiläums entworfen habe. Ihre Definition ist im Markenbild eingefügt (die Bedingungen für *a* und *b* sind allgemeiner als die üblicherweise angegebenen, waren aber Weierstraß bereits bekannt (das wusste G. H. Hardy nicht als er in einer 1916 publizierten Arbeit über die Weierstraß-Funktion diese Bedingungen wiederfand und nachwies, dass die Eigenschaften der Stetigkeit und Nichtdifferenzierbarkeit bestehen bleiben)). Im oberen Teil des Markenbildes ist eine ungefähre Skizze des Funktionsgraphen angedeutet (in der eine gewisse Anzahl der ersten Summanden berücksichtigt ist). Die Stetigkeit der Funktion lässt sich sofort mit zwei häufig verwendeten Sätzen von Weierstraß nachweisen. Die Reihe ist offenbar absolut konvergent mit einer unendlichen geometrischen Reihe als Majorante, die von *x* unabhängig ist. Dann konvergiert die Reihe nach Weierstraß gleichmäßig.[22] Da jeder Summand eine stetige Funktion ist, überträgt sich daher nach Weierstraß die Stetigkeit auf die durch die unendliche Reihe definierte Funktion.

Die Reaktion auf das Weierstraßsche Beispiel reichte von Erstaunen bis hin zu Unglauben. Noch zwanzig Jahre später klagt 1893 selbst ein Charles Hermite:

„*Aber diese so eleganten Entwicklungen* [gemeint: in der Analysis] *sind mit einem Fluch belegt;* [...] *Die Analysis nimmt mit der einen Hand zurück, was die andere gibt. Ich wende mich mit Entsetzen und Schrecken von dieser beklagenswerten Wunde der stetigen nirgends differenzierbaren Funktionen ab* [...].*"*[23]

Es scheint bisher kein Dokument bekannt zu sein, aus dem hervorgeht, dass Weierstraß viel früher – nämlich bereits wiederum in seiner ersten Vorlesung über analytische Funktionen – die Existenz solcher Funktionen behauptet hat. Beim Studium der Mitschrift von Schwarz stieß ich zu meiner Überraschung auf folgende Stelle:



„Es ist nicht begründet, daß solche Funktionen Ableitungen haben; – diese Beweise sind falsch, wenn ich zeigen werde, daß es solche Funktionen gibt, die in obigem Sinne stetig sind, aber in keinem Punkt [eine] Ableitung haben."[24]

Offenbar eine wörtlich wiedergegebene Bemerkung von Weierstraß. Und der früheste mir bekannte Beleg für diese Aussage, wobei es auf „in keinem Punkt“ ankommt. Schwarz gibt in einer 1873 publizierten Arbeit an, dass Weierstraß bereits im Sommer 1861 in seiner Vorlesung über Differential- und Integralrechnung am Berliner Gewerbeinstitut darauf hinweist, dass alle Versuche, die Existenz einer Ableitung für stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen zu beweisen, als verfehlt anzusehen sind. In der von Schwarz angefertigten Ausarbeitung „Differentialrechnung“ dieser Vorlesung, soweit sie in maschinenschriftlicher Form vorliegt, habe ich indessen keinen derartigen Hinweis finden können. Aus seiner Bemerkung kann aber ohnehin nicht notwendig geschlossen werden, dass die Existenz von Funktionen von der im Zitat angegebenen Art gemeint ist. So heißt es in der Hettnerschen Ausarbeitung der Vorlesung „Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen“ vom SS 1874: „[...] *Functionen, welche die Eigenschaft haben, daß sie an unendlich vielen Stellen Diff[erential]quotienten besitzen, an unendlich vielen Stellen dagegen nicht, hat Weierstraß schon sehr lange gekannt.*“[25] Hierbei ist – präziser formuliert – gemeint, dass für *jedes* Intervall die Stellen mit den angegebenen Eigenschaften jeweils dicht liegen.

Niemand wusste damals, dass Bernard Bolzano in seiner um 1830 verfassten Schrift *Functionenlehre*, die erst posthum 1930 publiziert wurde, für ein beliebiges abgeschlossenes Intervall eine stetige Funktion konstruiert hat, von der er nachwies, dass sie für überall dicht liegende Stellen nicht differenzierbar ist (tatsächlich ist sie nirgends differenzierbar).

8. Spezialfall des Produktsatzes

Schon mit Beginn seiner Vorlesungen über analytische Funktionen im WS 1863/64 geht Weierstraß darauf ein, auf $\mathbb{C}$ ganze Funktionen mit unendlich vielen vorgegebenen Nullstellen vorgegebener Vielfachheit (und keinen weiteren) zu bestimmen. Das war bisher nicht bekannt.
Weierstraß stellt in dieser Vorlesung an den Anfang seiner Ausführungen zum Produktsatz folgende sich in natürlicher Weise ergebende Fragestellung: rationale Funktionen sind durch ihre Null- und Polstellen bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Inwiefern sind die Funktionen, die den rationalen am nächsten stehen (bei ihm „(eindeutige) *Functionen, die den Charakter rationaler Functionen haben*“) – in heutiger Terminologie die meromorphen Funktionen – durch ihre Null- und Polstellen bestimmt? Bei der Beantwortung dieser Frage spielt der Produktsatz eine wesentliche Rolle. Weierstraß wendet ihn zwar auch an, um z. B. die Darstellung des Sinus als unendliches Produkt zu erhalten. Das ist aber lediglich eine Anwendung, nicht das leitende Motiv. Damit bestätigt sich in dieser ersten Vorlesung über analytische Funktionen die Bemerkung von P. Ullrich zur Motivation für den Produktsatz in seiner Edition der entsprechenden späteren Vorlesung vom SS 1878.[26]

Wir werden uns im Folgenden an der Mitschrift von Schwarz der Vorlesung vom WS 1863/64 orientieren.[27] Es liegt in der Natur der Sache, dass in einer Mitschrift – Schwarz war zu Beginn des WS 1863/64 20 Jahre alt – gelegentlich Lücken im Text bzw. in den Begründungen auftreten, die von mir stillschweigend ergänzt wurden (Bezeichnungen wurden im Wesentlichen beibehalten, gelegentlich vereinheitlicht bzw. ergänzt).

Als notwendige Bedingung für die Null- und Polstellen ergibt sich zunächst sofort, dass sich diese im Endlichen nicht häufen dürfen. In der kurzen Begründung verwendet Weierstraß, dass andernfalls ein Häufungspunkt für die Nullstellen (bzw. Polstellen) existieren müsste, wie er sich aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß (die Aussage wird nicht erwähnt) ergäbe und gelangt so zu einem Widerspruch.

Es sei $F(x)$ eine meromorphe Funktion mit den Nullstellen (a) und Polstellen (b), die jeweils ihrem absoluten Betrage nach geordnet seien (bei gleichem absolutem Betrag ist die Reihenfolge gleichgültig). Jede Null- bzw. Polstelle soll dabei entsprechend ihrer Ordnungszahl auftreten.

Der Quotient $\dfrac{F'(x)}{F(x)}$ wird genau an den gegebenen Null- und Polstellen unendlich. Für ein beliebiges $r > 0$ findet man leicht, dass

$$G(x \mid r) := \frac{F'(x)}{F(x)} - \left(\sum_{|a|<r} \frac{1}{x-a} - \sum_{|b|<r} \frac{1}{x-b} \right) \tag{4}$$

keine Polstellen in dem offenen Kreis um 0 mit dem Radius *r* hat und daher dort in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann.
Ist $F_1(x)$ eine weitere meromorphe Funktion mit denselben Null- und Polstellen (mit gleichen Ordnungszahlen), so ergäbe sich analog zu (4) eine Funktion $G_1(x \mid r)$ mit

$$\frac{F'(x)}{F(x)} - \frac{F_1'(x)}{F_1(x)} = G(x \mid r) - G_1(x \mid r) \ .$$

Da diese Gleichung für jedes *r* gilt, hängt

$$\frac{d \log\left(\dfrac{F(x)}{F_1(x)}\right)}{dx} = \frac{F'(x)}{F(x)} - \frac{F_1'(x)}{F_1(x)}$$

gar nicht von *r* ab und ist daher in eine beständig konvergente Potenzreihe $G(x)$ entwickelbar. $H(x)$ sei die aus $G(x)$ durch gliedweise Integration entstehende Reihe, die ebenfalls für alle *x* konvergiert (in der Vorlesung wurde bewiesen, dass eine Potenzreihe und ihre abgeleitete Potenzreihe denselben Konvergenzkreis haben). Bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten gilt

$$\log\left(\frac{F(x)}{F_1(x)}\right) = H(x) \ \text{, also} \ \ F(x) = F_1(x) e^{H(x)} .$$

Damit ist die oben gestellte Frage vollständig beantwortet.
Weierstraß wendet sich nun der Aufgabe zu, eine meromorphe Funktion mit vorgegebenen Null- und Polstellen zu konstruieren. In der Mitschrift von Schwarz heißt es:
„Es läßt sich zwar nicht abschließen, aber man hat folgenden sehr allgemeinen Satz, der in dieser Allgemeinheit noch nicht bekannt ist.“[28]
Weierstraß formuliert sein Theorem: Wenn $\sum_a \frac{1}{|a|^\lambda}$ und $\sum_b \frac{1}{|b|^\lambda}$ für eine gewisse natürliche Zahl λ konvergieren (jede Nullstelle *a* und jede Polstelle *b* tritt entsprechend ihrer Ordnungszahl auf), so existiert eine meromorphe Funktion, die genau die Nullstellen *a* und die Polstellen *b* (mit den vorgeschriebenen Ordnungszahlen) hat.
Weierstraß diskutiert zunächst den Spezialfall, dass $\lambda = 2$ gewählt werden kann und erwähnt $\sin(\pi x)$ als Beispiel. Im Ergebnis wird erhalten, dass in diesem Fall jedes $F(x)$ eine Darstellung durch unendliche Produkte besitzt:

$$\frac{\prod_a \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{\frac{x}{a}}}{\prod_b \left(1 - \frac{x}{b}\right) e^{\frac{x}{b}}} e^{H(x)}$$

($H(x)$ wie oben). Da die einzelnen Beweisschritte genau denen für beliebiges λ entsprechen, wenden wir uns gleich dem allgemeinen Fall zu.
Weierstraß hat damit noch einmal motiviert, dass die Konstruktion der gesuchten meromorphen Funktionen sich auf die Konstruktion holomorpher Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen reduziert. Erst an dieser Stelle ist er beim Thema Produktsatz angekommen: Gesucht wird eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die an unendlich vielen vorgegebenen Stellen *a* Nullstellen hat (jede Stelle tritt entsprechend ihrer Vielfachheit auf) und keine weiteren.
Auffällig ist, dass in der Mitschrift von Schwarz nirgends von gleichmäßiger Konvergenz (die Weierstraß ursprünglich als „Convergenz in gleichem Grade“ bezeichnet) die Rede ist, nur durchweg von „unbedingter Convergenz“. Das ist in dem Fall von Potenzreihen ausreichend, da aus der Konvergenz einer Potenzreihe in x_0 folgt, dass sie in ihrem Konvergenzkreis um x_0 absolut (und damit unbedingt) und auf jedem abgeschlossenen Kreis innerhalb des Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert (wie unmittelbar aus dem Weierstraßschen Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz folgt, das in der Mitschrift von Schwarz allerdings nirgends explizit erwähnt wird). Wir werden im Folgenden die Vorgehensweise von Weierstraß beibehalten, jedoch bei einzelnen Begründungen mit den vertrauten Eigenschaften der gleichmäßigen Konvergenz arbeiten.

Zunächst möge 0 nicht unter den Nullstellen vorkommen. Ein unendliches Produkt $F(x):=\prod_a\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{H_a(x)}$ mit geeigneten ganzen Funktionen $H_a(x)$ würde das Gewünschte leisten, falls es konvergiert und eine holomorphe Funktion definiert. Der Terminus „Primfunction" für $\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{H_a(x)}$ tritt in der Vorlesung bereits auf. Falls der Logarithmus des Produktes durch gliedweise Logarithmierung erhalten werden kann, würde folgen

$$\log F(x)=\sum_a\left(\log\left(1-\frac{x}{a}\right)+H_a(x)\right) \text{ (für alle von den } a \text{ verschiedenen } x\text{).}$$

Falls für die Reihe gliedweise Differentiation zulässig ist, würde sich

$$\frac{d\log F(x)}{dx}=\sum_a\left(\frac{1}{x-a}+H_a'(x)\right) \tag{5}$$

ergeben. Hiervon ausgehend möchte Weierstraß zu einer Konstruktion der gesuchten Funktion gelangen. Das gelingt ihm unter der bereits angegebenen Voraussetzung, dass $\sum_a\frac{1}{|a|^\lambda}$ für eine gewisse natürliche Zahl λ konvergiert. Dann können Polynome $H_a'(x)$ so gewählt werden, dass die in (5) angegebene unendliche Reihe in jedem endlichen Gebiet *G* nach Fortlassung der endlich vielen Summanden, für die *a* dem Gebiet angehört, konvergiert:

$$H_a'(x) := \frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\ldots+\frac{x^{\lambda-1}}{a^\lambda}\ . \tag{6}$$

Dann ist

$$\frac{1}{x-a}+H_a'(x)=\frac{x^\lambda}{a^\lambda(x-a)}\ .$$

Aus der Voraussetzung folgt daraus, dass die unendliche Reihe in (5) in *G* gleichmäßig konvergiert (Weierstraßsches Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz). Das ermöglicht die gliedweise Integration

$$\varphi(x):=\int_0^x\sum_a\left(\frac{1}{x'-a}+H_a'(x')\right)dx'=\sum_a\left(\log\left(1-\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}+\ldots\frac{x^\lambda}{\lambda a^\lambda}\right) \tag{7}$$

für irgendeinen Integrationsweg, der die Stellen *a* nicht enthält. Bei einem anderen Integrationsweg können sich die Logarithmen um Vielfache von $2\pi i$ ändern, aber wegen der Konvergenz der Reihe nur für endlich viele Summanden. Das ist ohne Einfluss auf

$$e^{\varphi(x)}=\prod_a\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{\frac{x}{a}+\ldots+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a}\right)^\lambda}\ . \tag{8}$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in (7) folgt nach dem Weierstraßschen Summensatz, da die Potenzreihe für e^x beständig konvergent ist, dass $e^{\varphi(x)}$ für jedes $x\in G$ holomorph ist. Da *G* beliebig gewählt werden kann, besitzt das unendliche Produkt in (8) die gewünschten Eigenschaften.
Weierstraß bemerkt, dass man in (6) nur bis zur Potenz $\lambda-2$ „*zu gehen braucht*". Das ist möglich, weil sich in (5) die unendliche Reihe mit den Summanden $\frac{x^{\lambda-1}}{a^{\lambda-1}(x-a)}=\frac{x^{\lambda-1}}{a^\lambda\left(\frac{x}{a}-1\right)}$ ergäbe, die immer noch in *G* gleichmäßig konvergiert, da $\left|\frac{x}{a}-1\right|$ mit wachsendem $|a|$ nach 1 strebt, also $\left|\frac{x}{a}-1\right|^{-1}$ jedenfalls beschränkt bleibt.

Damit ergibt sich: Falls $\sum_a \frac{1}{|a|^\lambda}$ (alle $a \neq 0$) für eine gewisse natürliche Zahl λ konvergiert, so ist $f(x) = x^m \prod_a \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{\frac{x}{a} + \ldots + \frac{1}{\lambda - 1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda - 1}}$ eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die genau an den Stellen a mit den gegebenen Ordnungszahlen verschwindet ($m \geq 1$, falls auch 0 Nullstelle der Ordnung m sein soll).
Nach dem oben Mitgeteilten ist jede andere holomorphe Funktion mit denselben Nullstellen in der Form $f(x)e^{H(x)}$ darstellbar ($H(x)$ wie oben).
Weierstraß macht darauf aufmerksam, dass bei den Primfunktionen die beiden Faktoren nicht ohne Weiteres getrennt werden dürfen. Sollte in dem unendlichen Produkt

$\prod_a \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{H_a(x)}$ die unendliche Reihe $\sum_a H_a(x)$ unbedingt konvergent sein, so müsste $\prod_a \left(1 - \frac{x}{a}\right)$ konvergieren, was die Konvergenz von $\sum_a \frac{1}{a}$ nach sich zöge.
Ist $\sum_a H_a(x)$ nur bedingt konvergent, so muss die Multiplikation der Faktoren in dem unendlichen Produkt genau in derselben Reihenfolge wie bei der Summation erfolgen.
Es wird als Beispiel $\sin(\pi x)$ behandelt. Für die Nullstellen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ kann $\lambda = 2$ gewählt werden und es folgt

$$\sin(\pi x) = e^{H(x)} x \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}\right] \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}\right].$$

Hier ist die Summe der e-Potenzen nur noch bedingt konvergent. Man erhält

$$\sin(\pi x) = e^{H(x)} x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Weierstraß bemerkt: „*$H(x)$ ist noch zu bestimmen; dieß ist eine Schwierigkeit, [die] im Allgemeinen nicht ohne Kunstgriffe [zu bewältigen ist].*“[29]
Es lässt sich $e^{H(x)} = \pi$ zeigen (durch logarithmische Ableitung beider Seiten der Gleichung).
Als weitere Anwendung beweist Weierstraß die Existenz der Sigma-Funktion, die von ihm in die Theorie der elliptischen Funktionen eingeführt wurde.
Sie tritt erstmals in seiner Vorlesung über elliptische Funktionen im WS 1862/63 (der ersten nach seinem körperlichen Zusammenbruch 1861) auf, in der er seine Neubegründung der Theorie dieser Funktionen erstmals vortrug. Hierbei kommt seiner $\wp$-Funktion die zentrale Rolle zu (damals noch nicht mit diesem Buchstaben). Die Sigma-Funktion ist eine auf $\mathbb{C}$ ganze Funktion, die genau in den Punkten w eines zweidimensionalen Periodengitters Λ Nullstellen erster Ordnung hat. Weierstraß kann seinen Produktsatz anwenden, denn $\sum_w{}' \frac{1}{w^3}$ ist absolut konvergent, so dass $\lambda = 3$ gewählt werden kann ($\lambda = 2$ ist übrigens nicht möglich). Es folgt:

$$\sigma(z;\Lambda) = z \prod_w{}' \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{z/w + \frac{1}{2}(z/w)^2}$$ (der Strich bedeutet: $w \neq 0$).

Die Sigma-Funktion steht in engem Zusammenhang mit der $\wp$-Funktion: die Ableitung ihrer logarithmischen Ableitung ist $-\wp$.

Und hier können wir erneut an den Pädagogen erinnern, dass der Lehrer nicht versäume, die zur Zeit nicht überschrittenen Grenzen zu bezeichnen. In der nächsten Vorlesung nämlich über analytische Funktionen im WS 1865/66 finden sich in der Mitschrift von Schwarz (unvollständig) formulierte Notizen, die von mir so interpretiert werden, dass nach Weierstraß die Theorie „vollkommen“ wäre, wenn auch die Umkehrung zuträfe, d. h. die Existenz der auf $\mathbb{C}$ ganzen Funktion die Konvergenz der angegebenen Reihe

(für ein λ) nach sich zöge. Aber, so Weierstraß, *„[das ist] nicht der Fall, [und] so kann man noch kein allgemeines Bildungsgesetz angeben.“*[30]
Erst 10 Jahre später gelingt Weierstraß der Beweis des Produktsatzes für beliebige Nullstellen, die sich im Endlichen nicht häufen.
Er berichtet seiner Schülerin am 16. Dezember 1874 von seinem Erfolg. Es ist zu der gegebenen Folge (a_n) (von der zunächst angenommen wird, dass 0 nicht vorkommt) eine Folge (ν_n) ganzer Zahlen $\nu_n \geq 0$ so zu wählen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{a_n} \right|^{\nu_n+1}$ für alle *x* konvergiert (was auf „mannigfaltige Weise“ möglich ist, wie Weierstraß an anderer Stelle bemerkt). Dann konvergiert das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}\right)_{\nu_n}$ mit $E(x)_n = (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}}$ unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren und stellt eine auf $\mathbb{C}$ ganze Funktion dar, die genau an den Stellen a_n mit den entsprechenden Ordnungen verschwindet.[31]
Weierstraß fügt in seiner Publikation hinzu: *„erst nach manchen vergeblichen Versuchen“* [32] sei es gelungen, diese Lücke zu schließen. Seine „alte“ Formel ergibt sich, wenn $\nu_n = \lambda - 1$ (für alle *n*) gewählt werden kann. Ansonsten ist es bei seinem Konstruktionsprinzip geblieben. Es kam also „nur“ darauf an, von dem festen (von *n* unabhängigen) Exponenten λ zu den variablen Exponenten ν_n überzugehen. Dazwischen liegen „manche vergeblichen Versuche“ in 10 Jahren.
Seinen Produktsatz hat er sofort in seiner Vorlesung im WS 1874/75 vorgetragen.

Die entscheidende Anregung für den Produktsatz scheint Weierstraß aus der Darstellung des Kehrwertes der Gamma-Funktion als unendliches Produkt gewonnen zu haben (*„diese Function weist auf den Weg hin, der zum Ziele führt“* [33]). Ein solches Produkt verwendete bereits Euler (1729) bei seiner Interpolation der Fakultäten.
Danach bringt er in seinem Brief an Kowalewskaja – wie schon in seiner Vorlesung vom WS 1863/64 – erneut das eigentliche Motiv zum Ausdruck:

„Daran knüpft sich weiter der folgenreiche (in meiner Theorie der Abel’schen F[unctionen] noch als bis jetzt unerwiesen hingestellte) Satz: Jede eindeutige analytische Function von x , die für jeden endlichen Werth dieser Größe den Charakter einer rationalen Function besitzt (d.h. in heutiger Terminologie eine meromorphe Funktion ist)*, läßt sich stets darstellen als Quotient zweier gewöhnlicher, beständig convergirender Potenzreihen.“*

Zu den Hörern der Vorlesung vom Herbst 1874 gehört Mittag-Leffler. Angeregt durch den Produktsatz, untersucht er die analoge Aufgabe, wenn statt der Nullstellen die Hauptteile vorgegeben sind und gelangt so zu seinem bekannten Partialbruchsatz.

9. Angewandte Mathematik bei Weierstraß

Ich komme nun zu einem wenig bekannten Kapitel der Weierstraßschen Forschung, auf das ich deshalb etwas näher eingehen möchte.

Anlässlich seines Eintritts in die Berliner Akademie hält Weierstraß am 9. Juli 1857 in einer öffentlichen Sitzung eine Rede, in der er sich zum Thema Anwendungen äußert:

„Glücklich aber würde ich mich schätzen, wenn ich späterhin aus meinen Studien auch für die Anwendungen der Mathematik, namentlich auf Physik, einigen Gewinn ziehen könnte. Ich habe schon angedeutet, dass es mir keineswegs gleichgültig ist, ob eine Theorie sich für solche Anwendungen eigne oder nicht. Dabei fürchte ich nicht, dass man mir vorwerfe, es werde die Bedeutung, welche die Mathematik als reine Wissenschaft mit vollstem Rechte beansprucht, herabgesetzt, wenn ich sie ganz besonders auch darum hochstelle, weil durch sie allein ein wahrhaft befriedigendes Verständniss der Naturerscheinungen vermittelt wird. [...] *Ich meine aber, es muss das Verhältniss zwischen Mathematik und Naturforschung etwas tiefer aufgefasst werden, als es geschehen würde, wenn etwa der Physiker in der Mathematik nur eine wenn auch unentbehrliche Hülfsdisciplin achten, oder der Mathematiker die Fragen, die jener ihm stellt, nur als eine reiche Beispiel-Sammlung für seine Methoden ansehen wollte.“* [35]

Soweit Weierstraß am Beginn seiner akademischen Karriere in Berlin. Geht man von seinen Publikationen aus, so existiert keine einzige, die angewandter Mathematik zuzurechnen wäre, von einer kurzen Notiz abgesehen, die auch erst in einem nach seinem Tod erschienenen Band der Werkausgabe enthalten ist und eine geometrische Konstruktion zur Bestimmung des Weges eines Lichtstrahles, wo die brechende Fläche eine Kugelfläche ist, angibt.

Tatsächlich zeigt sich aber, dass Weierstraß ein beständiges Interesse an Problemen hatte, die der mathematischen Physik zuzuordnen sind und dass er sich in seinen Forschungen immer wieder um diesbezügliche Ergebnisse vor allem zu *einer* Problematik bemüht hat. Es betrifft das berühmte *n*-Körperproblem der Himmelsmechanik. Wir erfahren davon nur aus seiner Korrespondenz.

Am 15. August 1878 schreibt er seiner Schülerin:

„Weniger glücklich bin ich gewesen mit den angefangenen Untersuchungen über die Lösung der dynamischen Probleme durch Reihenentwicklungen, welche der Besonderheit der zu integrirenden Differentialgleichungen entsprechen. Ich komme bis zu einem gewissen Punkt; ich forme z. B. die Differentialgleichungen für das Problem der n Körper so um, daß sie eine beliebig weit fortzusetzende Integration in Reihenform formell gestatten, aber meine Versuche, die Convergenz der Entwicklung zu erweisen, scheitern an einem Hinderniß, daß ich nicht zu bewältigen im Stande bin."

Weierstraß ist hier auf die als Problem der „kleinen Nenner" bekannte wesentliche Schwierigkeit gestoßen. Bei den Berechnungen von Störungen in der Himmelsmechanik ist durch ganzzahlige Linearkombinationen von Frequenzen der ungestörten Bewegung zu dividieren. Mit wachsender Nähe zur Resonanz (d. h. zum Fall kommensurabler Frequenzen) werden die Quotienten immer größer (und nicht durch kleine Werte im Zähler kompensiert) und bewirken die Divergenz der störungstheoretischen Reihen, die im „allgemeinen Fall" dann vorliegt.

Eine Phase besonders intensiver Beschäftigung mit Problemen der Himmelsmechanik lässt sich ab Herbst 1880 belegen. Weierstraß schreibt seiner Schülerin am 1. Februar 1881:

„Ich habe, seit Du fort bist, mich noch angestrengt mit den linearen Differential-Gleichungen, deren Coefficienten reell-periodische Functionen einer Veränderlichen sind, beschäftigt, und glaube jetzt zur Behandlung derselben den richtigen Weg gefunden zu haben. [...] *Daß alle bis jetzt versuchten Wege zur Integration derselben nicht zum Ziele führen können, davon bin ich jetzt mehr wie je überzeugt."*

Nur einen Monat später greift er das Thema erneut in einem Brief vom 6. März an Sofja auf:

„Ich bin [...] *recht fleißig gewesen, aber doch nicht mit dem entsprechenden Erfolg. Deine Anwesenheit hat mich veranlaßt, meine alten Untersuchungen über die Integration der dynamischen Differential-Gleichungen wieder aufzunehmen; ich habe auch, wie ich Dir bereits schrieb, einige Fortschritte gemacht, aber immer noch sehe ich Schwierigkeiten vor mir, die mir zuweilen unüberwindlich vorkommen. Ich habe diesen Winter im Seminar mich ausführlich über die bisherigen Methoden zur Bestimmung der Planeten-Bewegungen, unter den in unserm Planetensystem stattfindenden Umständen ausgesprochen, und bin mehr und mehr zu der Überzeugung gekommen, daß zur wahren Lösung der Probleme, um die es sich dabei handelt, ganz andere Wege als die bisher betretenen eingeschlagen werden müssen – aber ich sehe diese neuen Wege immer noch nur in nebelhafter Form vor mir."*

Prophetische Worte, wie wir durch Poincarés Arbeiten wissen, die in dieser Zeit – mit Beginn der 1880er Jahre – einsetzen.

Als Hauptergebnis seines Seminarvortrages, das Weierstraß nie publiziert hat, nennt er in einem Brief an Sofja vom 14. Juni 1882 – ohne Angabe weiterer Einzelheiten:

„Wenn beliebig viele materielle Punkte nach dem Newton'schen Gesetze [...] *auf einander wirken, und es sind die Anfangsbedingungen der Bewegung so beschaffen, dass niemals zwei Punkte zusammentreffen und auch keine zwei in's Unendliche sich von einander entfernen, so sind die Coordinaten der sich bewegenden Punkte analytische Functionen der Zeit, eindeutig definirt nicht nur für alle reellen Werthe dieser Größe, sondern auch für alle complexen, deren zweite Coordinate ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer bestimmten Grenze bleibt."*

Auch Poincaré publiziert zu diesem Zeitpunkt ein entsprechendes Ergebnis.

Später – im August 1885 – geht Weierstraß in einem Brief an Mittag-Leffler recht ausführlich auf seinen Seminarvortrag ein.

Dort findet sich die Bemerkung, dass die für alle Werte der Zeit konvergierenden Reihen „praktisch unbrauchbar" sind und lediglich beweisen, dass solche Entwicklungen existieren, die wenigstens in jedem

Intervall gleichmäßig konvergieren. Er verliert also die Anwendbarkeit seines Ergebnisses nicht aus den Augen.

Auch Poincaré äußert sich in einer Publikation in entsprechender Weise.

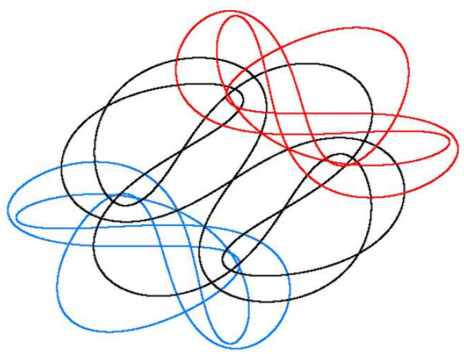
Anlässlich des 60. Geburtstages von König Oscar II von Schweden und Norwegen am 21. Januar 1889 wurde auf Initiative Mittag-Lefflers ein mathematischer Wettbewerb veranstaltet. Mit der Durchführung des Vorhabens betraute der König eine Kommission, bestehend aus Weierstraß, Hermite und Mittag-Leffler. Die Preisfragen wurden 1885 veröffentlicht. Die erste Frage, die Weierstraß gestellt hatte, betraf das *n*-Körperproblem, was noch einmal unterstreicht, von welcher Bedeutung für Weierstraß dieses Problem war.

In einem Brief Kowalewskajas an Mittag-Leffler vom 21. November 1881 lesen wir von *„ausgezeichneten noch nicht veröffentlichten Untersuchungen unseres Lehrers bezüglich der Stabilitätsbedingungen des Weltsystems, und die Analogie mit anderen Aufgaben der Dynamik* [...].*“* [36]

Die im Brief erwähnten Untersuchungen von Weierstraß zum Thema Stabilität sind nie publiziert worden und ich habe auch sonst nichts bei meinen Recherchen darüber ermitteln können. – Die vieldiskutierte Frage nach der Stabilität des Sonnensystems ist in mathematisch strenger Weise ungelöst geblieben. Es gibt keine einfache Antwort mit ja oder nein. Seit Poincaré wissen wir von Bewegungsformen – selbst schon im Dreikörperproblem – die heute als „deterministisches Chaos“ bezeichnet werden und bedeuten, dass bei gegebenen Anfangsbedingungen nicht zwangsläufig eine Vorhersage für einen beliebig langen Zeitraum möglich ist.

Im Januar 1889, zum 60. Geburtstag des schwedischen Königs, erfolgte die offizielle Bekanntgabe des Preisträgers des mathematischen Wettbewerbs: Henri Poincaré für seinen Beitrag zum Dreikörperproblem. Die eigentlich gestellte Aufgabe hatte Poincaré zwar nicht gelöst, doch Weierstraß ist tief beeindruckt. Poincaré war in der Frage, die ihn selbst immer wieder so sehr beschäftigt hat, mit seinen fast aus dem Nichts entwickelten neuen Ansätzen zur globalen Theorie der Differentialgleichungen, viel weiter gekommen. – Am 15. November 1888 schreibt Weierstraß an Mittag-Leffler:

„[...] *dass selbst in dem Falle, wo mehr als zwei nach dem Newton’schen* [...] *Gesetze sich anziehende Körper sich so bewegen, dass der Abstand je zweier derselben beständig zwischen zwei endlichen Grenzen bleibt, Bewegungsformen existieren, von denen wir bisher kaum eine Ahnung hatten und für welche wir auch die entsprechende – für das ganze Zeitintervall von* $t=-\infty$ *bis* $t=+\infty$ *gültig bleibende analytische Darstellungsform – noch nicht kennen, in Betreff welcher nur feststeht, dass sie nicht die Gestalt trigonometrischer Reihen haben kann.“* Und einen Monat später, am 8. Januar 1889: *„Der Nachweis, dass die Bewegung eines Systems materieller Punkte bei gegebener Kräftefunction unter bestimmten Bedingungen eine periodische sein kann, und noch mehr die Entdeckung der asymptotischen Bewegungen, sind Leistungen von höchster Bedeutung und können ohne Übertreibung als epochemachend bezeichnet werden.“*



Zur Illustration des Gesagten zeigt die nebenstehende Abbildung mögliche periodische Orbits dreier Körper gleicher Masse, deren Existenz 2013 nachgewiesen wurde und die noch eine vergleichsweise „harmlose“ Bewegungsform unter den anderen entdeckten darstellen.[37]

Kurz darauf, am 2. Februar 1889, enthält ein Brief an Mittag-Leffler Mitteilungen über eigene Resultate, zu denen Weierstraß bei der Stellung der Preisfrage seinerzeit gelangt war:

„[...] *Angenommen, in einem Systeme von n materiellen Punkten, die nach dem Newton’schen Gesetze einander anziehen, finde zur Zeit* t_0 *ein Zusammentreffen irgend zweier Punkte (nicht mehrerer) statt,“* dann folgt eine Argumentation, an deren Ende Weierstraß zur Schlussfolgerung gelangt, dass *„die Wahrscheinlichkeit eines Zusammentreffens zweier Punkte unendlich klein ist.“* Wir sprechen heute davon, dass die Menge der zugehörigen Anfangswerte im Phasenraum des Systems von *n* gravitierenden Körpern vom Lebesgue-Maß Null ist. Für das Dreikörperproblem gibt Weierstraß eine Bedingung für die Kollision aller drei Körper an. Diese wird von dem finnischen Mathematiker und Astronomen Sundman bei seiner berühmt gewordenen analytischen Lösung des

Dreikörperproblems wiederentdeckt (ausführlich publiziert 1912), der erst durch Mittag-Leffler von dem Weierstraßschen Resultat erfährt.

An einem Punkt kommt Weierstraß nicht weiter. Er schreibt in seinem Brief, bezogen auf das Dreikörperproblem:

„Es ist aber wohl zu bemerken, dass durch diesen Satz nicht die Möglichkeit ausgeschlossen ist, dass nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit zwei Punkte – ohne zusammenzutreffen – einander unendlich nahe kommen. Wie die Sache sich aber wirklich verhält, habe ich nicht ermitteln können.“

Kein Wunder. Durch die geradezu wahre Flut von späteren Arbeiten zum *n*-Körperproblem wurde bekannt, welche verwickelten Bewegungsformen tatsächlich existieren können. Auch die von Weierstraß beschriebene Möglichkeit kann für $n \geq 4$ eintreten, für $n = 3$ jedoch noch nicht. Sie wird als *superhyperbolic motion* bezeichnet, deren Existenz erst 100 Jahre später in einer 1989 publizierten Arbeit bewiesen wurde, wobei die ersten Untersuchungen über finale Bewegungen mit dem Jahr 1922 einsetzen, in denen die Frage für das Dreikörperproblem beantwortet wird.

10. Sofja Kowalewskaja

Sie kam im Herbst 1870 mit 20 Jahren nach Berlin, wo sie vier Jahre blieb, von Weierstraß Privatunterricht erhielt und seine vertraute Schülerin und Freundin wurde, die, wie er es einmal ausdrückte, ein gütiges Geschick ihn noch in späten Jahren finden ließ. Eine in der Wissenschaftsgeschichte ihresgleichen suchende Beziehung. Weierstraß nannte sie einmal „den besten Schüler, den er je gehabt hat“.

Софья Васильевна Ковалевская
(1850 – 1891)

Im Juni 1884 erfolgt in Stockholm ihre Berufung auf eine Professur für höhere Analysis. Ein Erfolg der unermüdlichen Bemühungen Mittag-Lefflers. Sie, die in Berlin als Frau nicht einmal die Universitätsvorlesungen besuchen durfte, für die Weierstraß eine Bürgschaft übernehmen musste, damit sie die Universitätsbibliothek nutzen durfte, wurde die erste Professorin der Mathematik, die auch wirklich Vorlesungen gehalten hat.

Glückliche Umstände ermöglichten mir die nachträgliche Datierung des nebenstehenden Fotos: Kowalewskaja ist demnach 34 Jahre alt. Da für sie so viele Namen kursieren, besonders häufig „Sonja“ oder „Sophie“, ist ihr russischer Name unter das Foto gesetzt. Am 19. Oktober 2016 habe ich ausführlicher über sie gesprochen (s. ebenfalls in dieser Mediathek), so dass ich es mit diesen wenigen Bemerkungen über sie bewenden lassen möchte.[34]

11. Kontroverse mit Kronecker

Trotz der hohen Anerkennung, die Weierstraß und seinem Werk aus ganz Europa zuteil wurde, waren etwa die letzten 15 Jahre seines Lebens von der Sorge um den Fortbestand seines Werkes überschattet. In der einst freundschaftlichen Beziehung zwischen Weierstraß und seinem Kollegen Kronecker hatte mehr und mehr Entfremdung Platz gegriffen. Öffentlich sind beide nie gegeneinander aufgetreten. Jedoch in den Briefen an seine vertraute Schülerin und Freundin berührt Weierstraß dieses Thema. In einem am 24. März 1885 geschriebenen Brief an Kowalewskaja lesen wir:

„Mein Freund Kronecker, mit dem ich früher in den wichtigsten Fragen in Übereinstimmung war, und auch Fuchs arbeiten mir entgegen [...] *So kommt es nicht selten vor, daß ich in einer Vorlesung einen Satz aufstelle und zu beweisen vermeine, der in einer anderen Vorlesung als unhaltbar und trügerisch bezeichnet wird. Während ich sage, daß eine sog[enannte] irrationale Zahl eine so reale Existenz habe wie irgend etwas anderes in der Gedankenwelt, ist es bei Kronecker jetzt ein Axiom, daß es nur Gleichungen zwischen ganzen Zahlen gebe.“*

Kronecker schrieb im Dezember 1884 an Schwarz:

„Wenn mir noch Jahre und Kräfte genug bleiben, werde ich selber noch der mathematischen Welt zeigen, daß nicht bloß die Geometrie, sondern auch die Arithmetik der Analysis die Wege weisen kann – und sicher die strengeren. Kann ich's nicht mehr thun, so werden's die thun, die nach mir kommen und sie

werden auch die Unrichtigkeit aller jener Schlüsse erkennen, mit denen jetzt die sogenannte Analysis arbeitet.“[38]
Das sind in der Tat starke Worte! Sie verletzen Weierstraß, der durch Schwarz davon erfährt. Es geht aber nicht allein um unterschiedliche Ansichten in der einen oder anderen Frage zu den Grundlagen der Analysis. Die traten auch schon früher auf (s. o.). Für Weierstraß ist das Verhältnis zu Kronecker grundsätzlich und nachhaltig gestört, so dass an ein einträgliches Zusammenwirken nicht mehr zu denken ist. Das wird bei seinem Entschluss, Berlin zu verlassen und in die Schweiz überzusiedeln, wie er seiner Schülerin noch im September 1885 schreibt – wenige Wochen vor der von seinen Schülern, Kollegen und Freunden vorbereiteten Feier seines 70. Geburtstages – eine Rolle gespielt haben. Zur Geburtstagsfeier wollte er nach Berlin kommen. Er reist dann aber erst im Dezember 1885 in die Schweiz. Als „Hauptzweck“ gibt er später an, dass er die Einbürgerung seines Pflegesohnes (Sohnes?) Franz in eine Vorortgemeinde von Zürich erreichen wollte (zu weiteren Einzelheiten siehe (Bölling 2016a, Abschnitt 2.23). Zur geplanten Übersiedlung ist es nicht gekommen, Weierstraß kehrt aber erst Ende Mai 1886 nach Berlin zurück.

12. 80. Geburtstag

〈An seinem 80. Geburtstag nahm Weierstraß auf ärztlichen Rat hin nur für zwei Stunden im Sessel sitzend in seiner Wohnung die Glückwünsche von Schülern, Freunden und Kollegen entgegen, gezeichnet zwar durch körperliche Leiden, doch schlagfertig und passend in seinen Erwiderungen auf die gehaltenen Ansprachen. Mittag-Leffler, der zu den Gratulanten gehörte, erinnert sich, dass Weierstraß voller Rührung des 40 Jahre zurückliegenden Besuches einer Abordnung der Königsberger Universität in Braunsberg zur Verleihung des Ehrendoktortitels an den Gymnasiallehrer im Jahr 1854 gedachte und daran die schmerzliche Bemerkung knüpfte: „*Alles im Leben kommt doch leider zu spät*.“〉[39] Wir erinnern an den späten Beginn seiner akademischen Laufbahn mit 41 Jahren oder an die Begegnung mit Sofja Kowalewskaja.

Ölgemälde zum 80. Geburtstag
von Karl Weierstraß
(R. v. Voigtländer (1895); Alte Nationalgalerie (Berlin))

〈Anlässlich dieses Geburtstages wurde im Auftrage des preußischen Staates von Rudolf von Voigtländer ein Ölgemälde des Jubilars angefertigt, das in der Porträtsammlung der Berliner Nationalgalerie ausgestellt wurde. Die Idee zu diesem Werk – die eigentlich von deutscher Seite hätte ausgehen sollen – scheint auf eine Initiative Mittag-Lefflers zurückzugehen.〉
Bei der Neueröffnung der Porträtsammlung nach dem 1. Weltkrieg 1929 befand sich das Weierstraß-Gemälde nicht mehr unter den Exponaten. Das Schicksal des Bildes war unbekannt. Ich habe dann ermitteln können, dass es sich im Depot der Alten Nationalgelerie Berlin befindet. Es hat also den 2. Weltkrieg unbeschadet überstanden. – Die Wiedergabe in Farbe ist von mir erstmals in der eBook-Version von (Bölling 2016a) zum 200. Geburtstag von Weierstraß publiziert worden.

Kopie des Originalgemäldes
für G. Mittag-Leffler (1895)
(Institut Mittag-Leffler (Djursholm (Schweden)))

〈Mittag-Leffler hatte noch 1895 bei Voigtländer eine Kopie des Weierstraß-Porträts in Auftrag gegeben. Diese Kopie befindet sich heute im Institut Mittag-Leffler (Djursholm).〉 Das Porträt scheint ebenfalls erstmals im vorstehend angegebenen Jubiläumsband publiziert worden zu sein.

〈Am 19. Februar 1897 stirbt Weierstraß in Berlin an den Folgen einer Lungenentzündung. Nachdem 1891 Kronecker und 1893 Kummer gestorben waren, ging mit dem Tod von Weierstraß eine Ära der Mathematik in Berlin zu Ende.〉

Das Schlusswort lasse ich Sofja Kowalewskaja sprechen.

Weierstraß' Schwester Clara – durch die Sorge ihres Bruders um den Fortbestand seines Werkes – wie oben bereits erwähnt – nun ebenfalls verunsichert – wandte sich an Sofja mit der Bitte um ein aufrichtiges Urteil und erhielt diese Antwort (1887; übersetzt vom franz. Original):

„Für mich ist keine Sache der Welt sicherer als diese: die von Weierstraß gefundenen mathematischen Wahrheiten werden anerkannt sein, solange es überhaupt Mathematiker auf der Erde geben wird. Sein Name wird erst vergessen sein, wenn man auch die Namen von Gauß und Abel vergessen haben wird.“ [40]

Archive

ABBAW	Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften
IML	Institut Mittag-Leffler, Djursholm (Schweden)

Anmerkungen

[1] (Weierstraß und Kowalewskaja 1993); ausführlicher wird auf den Briefentwurf eingegangen in (Bölling 1993).
[2] Am 19. November 1856 bestätigte König Wilhelm IV. die Wahl der Berliner Akademie (vom 30. Oktober 1856 (die von mir angegebene Datierung 11. November in (Bölling 2016a, 113) beruhte auf einem Versehen)) von Weierstraß zum ordentlichen Mitglied (Knobloch 2016, 125-126).
[3] (Weierstraß 1894 – 1927), Band 3, 335-336.
[4] (Biermann 1966, 207).
[5] (Lampe 1899, 31).
[6] (Neuenschwander 1981, 239).
[7] ABBAW, Nachlass Schwarz, Nr. 440.
[8] (Bölling 1994, 67).
[9] (Dugac 1973, 57).
[10] (Abbe 1986 , Brief 41).
[11] Ebenda, Brief 44; Weierstraß verwendet den Terminus „complexe Zahl“ auch in einem allgemeineren Sinn (s. u. Abschnitt 5, Hinzunahme negativer Zahlen), hier sind aber offenbar die komplexen Zahlen im heutigen Sinn gemeint.
[12] (Weierstraß 1861).
[13] (Weierstraß 1886, 58).
[14] (Weierstraß 1874, 23).
[15] Ebenda, 24.
[16] (Weierstraß 1878, 12).
[17] (Weierstraß 1874, 34).
[18] Ebenda, 127.
[19] Dieser Passus wurde bereits in (Bölling 1994, 68) angegeben und diskutiert.
[20] Weitere Einzelheiten finden sich in (Bölling 2010).
[21] Beide vorstehenden Zitate sind entnommen aus (Bölling 1997a, 55 – 56).
[22] Weierstraß verwendet noch lange die auf Ch. Gudermann, seinen Lehrer in Münster, zurückgehende Formulierung „Convergenz in gleichem Grade“. Erst Anfang der 1870er Jahre scheint sich die Formulierung „gleichmäßige Konvergenz“ durchzusetzen. Der Weierstraß-Schüler H. A. Schwarz verwendet noch 1873 in einer Publikation die alte Bezeichnung. In der Hettnerschen Ausarbeitung (Weierstraß 1874) der Weierstraß-Vorlesung vom SS 1874 findet man nur noch den Terminus „gleichmäßige Konvergenz“.
[23] (Bölling 1994, 69); Übersetzung (mit einer Änderung).
[24] ABBAW, Nachlass Schwarz, Nr. 35.
[25] (Weierstraß 1874, 265).
[26] (Weierstraß 1878, xxi).
[27] ABBAW, Nachlass Schwarz, Nr. 30.
[28] Ebenda.
[29] Ebenda.
[30] ABBAW, Nachlass Schwarz, Nr. 35.
[31] Der in (Bölling 2016a, 76) angegebene Exponent von *e* in dem unendlichen Produkt ist entsprechend abzuändern.
[32] (Weierstraß 1894 – 1927, Band 2, 85).
[33] Ebenda, 91.
[34] (Bölling 2016b).
[35] (Weierstraß 1894 – 1927, Band 1, 223 – 226).
[36] (Kowalewskaja und Mittag-Leffler 1984).
[37] (Šuvakov und Dmitrašinovič 2013).
[38] (Bölling 1997b (Zitat und Faksimile: S. 9)).
[39] (Mittag-Leffler 1923, 51).

[40] (Bölling 1997b (Zitat und Faksimile: S. 9)).

Literaturverzeichnis

Alle Zitate aus Briefen von Weierstraß an Kowalewskaja sind aus (Weierstraß und Kowalewskaja 1993) entnommen.
Alle Zitate aus Briefen von Weierstraß an Mittag-Leffler sowie von Mittag-Leffler sind den Originalen entnommen, die sich im Institut Mittag-Leffler (Djursholm (Schweden)) befinden (mit freundlicher Genehmigung des IML).

Die mit Klammern 〈 〉 gekennzeichneten Textstellen sind meinem Beitrag (Bölling 2016a) entnommen (mit freundlicher Genehmigung des Springer Spektrum Verlages).

Abbe, E. (1986): *Ernst Abbe – Briefe an seine Jugend- und Studienfreunde Carl Martin und Harald Schütz:* 1858 – 1865. Herausgegeben und bearbeitet von V. Wahl u. J. Wittig. Berlin: Akademie-Verlag.

Biermann, K.-R. (1966): *Karl Weierstraß. Ausgewählte Aspekte seiner Biographie.* In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 223, 191 – 220.

Bölling, R. (1993): *Zum ersten Mal: Blick in einen Brief Kowalewskajas an Weierstraß*. In: Historia mathematica 20, 126 – 150.

Bölling, R. (1994): *Karl Weierstraß – Stationen eines Lebens*. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 96, 56 – 75.

Bölling, R. (1997a): *Georg Cantor – Ausgewählte Aspekte seiner Biographie*. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 99, 49 – 82.

Bölling, R. (1997b): *Karl Weierstraß – zum 100. Todestag. „Was ich aber verlange ...“* In: Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 5, 5 – 10.

Bölling, R. (2010): *Karl Weierstrass and some basic notions of the calculus*. In: The second W. Killing and K. Weierstrass Colloquium. Braniewo (Poland), 24-26 March 2010 (https://mat.ug.edu.pl/kwwk/2010).

Bölling, R. (2016a): *Zur Biographie von Karl Weierstraß und zu einigen Aspekten seiner Mathematik.* In: König, W., Sprekels, J. (Hrsg.): *Karl Weierstraß* (1815 – 1897). Wiesbaden: Springer Spektrum, 53 – 121.

Bölling, R. (2016b): *Sofja Kowalewskaja – zum 125. Todestag. „Sage, was du weißt, tu, was du musst, komme, was kommen mag“*: http://www.math.uni-potsdam.de/service-center/mediathek/

Bolzano, B. (1817): *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. G. Haase, Prag (= Ostwald’s Klassiker, Nr. 153 (Hrsg. Ph. Jourdain). Leipzig: Engelmann 1905).

Dugac, P. (1973): *Eléments d’analyse de Karl Weierstrass*. In: Archive for History of Exact Sciences 10, 41 – 176.

Knobloch, E. (2016): *Weierstraß und die Preußische Akademie der Wissenschaften.* In: König, W., Sprekels, J. (Hrsg.): *Karl Weierstraß* (1815 – 1897). Wiesbaden: Springer Spektrum, 123 – 141.

Kowalewskaja, S., Mittag-Leffler, G. (1984). Кочина, П. Я. и Ожигова, Е. П.: *Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера*. (Ответственный редактор А. П. Юшкевич. Составители и авторы комментариев П. Я. Кочина и Е. П. Ожигова.) (Научное наследство; 7.) Москва: Наука.

Lampe, E. (1899): *Karl Weierstraß.* In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 6, 27 – 44.

Mittag-Leffler, G. (1923): *Die ersten 40 Jahre des Lebens von Weierstrass*. In: Acta mathematica 39, 1 – 57.

Neuenschwander, E. (1981): *Über die Wechselwirkungen zwischen der französischen Schule, Riemann und Weierstraß. Eine Übersicht mit zwei Quellenstudien*. In: Archive for History of Exact Sciences 24, 221 – 255.

Šuvakov, M., Dmitrašinovič, V. (2013): *Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits*. In: Physical Review Letters 110, 114301.

Weierstraß, K. (1861): *Differentialrechnung*. *Nach einer Vorlesung des Herrn Professor Weierstrass im Sommersemester 1861*. [Maschinegeschriebenes Manuskript (undatiert) von H. A. Schwarz.] Mathematisches Institut der Humboldt-Universität Berlin.

Weierstraß, K. (1874): *Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen*. *Sommer 1874*. Vorlesungsnachschrift (ausgearbeitet von G. Hettner). Mathematisches Institut der Humboldt-Universität Berlin;[1] es gibt eine fotomechanische Vervielfältigung von der Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen (1988).

Weierstraß, K. (1878): *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*. Vorlesung Berlin 1878 in einer Mitschrift von Adolf Hurwitz. Bearbeitet von Peter Ullrich. (Dokumente zur Geschichte der Mathematik; 4). Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg (1988).

Weierstraß, K. (1886): *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre*. Vorlesung, gehalten in Berlin 1886. Herausgegeben, kommentiert und mit einem Anhang versehen von R. Siegmund-Schultze. (Teubner-Archiv zur Mathematik; 9.) Leipzig: Teubner (1988).

Weierstraß, K. (1894 – 1927): *Mathematische Werke*. Hrsg. unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. Band 1 – 6, Berlin: Mayer & Müller, Band 7, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

Weierstraß, K., Kowalewskaja, S. (1993): *Briefwechsel zwischen Karl Weierstraß und Sofja Kowalewskaja*. Herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von Reinhard Bölling. Akademie Verlag, Berlin.

Bildnachweise

S. 11, 13 (unten): Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Nachlass Schwarz, Nr. 29; S. 20 aus: (Šuvakov und Dmitrašinovič 2013); S. 22 (oberes Porträt): Alte Nationalgalerie Berlin; S. 2, 13 (oben): Archiv Reinhard Bölling; alle übrigen Abbildungen: Institut Mittag-Leffler (Djursholm / Schweden).
Der Verf. dankt den angegebenen Institutionen für die freundliche Veröffentlichungsgenehmigung.

[1] Darauf nimmt der Verf. Bezug.